

7 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

7.1 Методи розв'язання диференціальних рівнянь. Постановка задачі Коші. Однокрокові чисельні методи розв'язання задачі Коші

Як відомо, рівняння першого порядку, інтегровані у квадратурах (а в елементарних функціях тим більш), складають лише незначну частину всіх звичайних диференціальних рівнянь. Для більшості ж диференціальних рівнянь відшукати розв'язок, який задовольняє задані умови (наприклад, початкові або крайові), за допомогою скінченної кількості математичних операцій неможливо.

Тому природно виникла потреба у створенні методів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. Методи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь з наперед заданою точністю називають **наближеними методами** інтегрування рівнянь. Ці методи, залежно від форми представлення розв'язку, умовно можна розділити на три групи:

- 1) *аналітичні методи* (методи побудови наближених формул);
- 2) *графічні методи*;
- 3) *чисельні методи* (розв'язок одержують у табличному вигляді).

Аналітичні методи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь дають можливість представити наближені розв'язки рівнянь із заданою точністю у вигляді аналітичних виразів, тобто формул, придатних для обчислення значень цих розв'язків в області зміни аргументу.

Окремий клас серед аналітичних методів утворюють **асимптотичні методи**, де точність отриманого розв'язку зростає із зменшенням проміжку інтегрування чи проміжку зміни деяких параметрів, або ж, навпаки, наближений розв'язок тим точніший, чим більших значень набуває аргумент або деякі інші параметри. Прикладом асимптотичного методу інтегрування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, є відомий з курсу диференціальних рівнянь метод послідовних наближень.

Графічні методи дають наближене представлення шуканого розв'язку на деякому проміжку у вигляді графіка, який можна побудувати за певними правилами, пов'язаними з геометричним тлумаченням умов задачі. Зазначимо, що для певних класів диференціальних рівнянь в основу графічних методів наближеного розв'язку можна покласти фізичне або, якщо точніше, електротехнічне тлумачення заданих умов. Реалізуючи на

технічному рівні задані електричні процеси, на екрані осцилографа спостерігають поведінку розв'язків рівнянь, що описують ці процеси.

І нарешті, найбільш важливими у наш, характерний бурхливим розвитком і проникненням в усі сфери людської діяльності обчислювальної техніки, час, є **чисельні методи** розв'язання диференціальних рівнянь. Такі методи передбачають отримання числової таблиці наближених значень шуканого розв'язку для певних дискретних значень аргумента, тобто заміну неперервної області зміни аргумента функції дискретною множиною точок (сіткою) та апроксимацію (наближення) диференціального оператора різницеvim оператором, визначеним на цій сітці.

1 Постановка задачі Коші

Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь використовується як математична модель при розв'язанні багатьох задач природознавства. Наприклад, задачі динаміки системи взаємодіючих тіл (у моделі руху матеріальних точок), задачі хімічної кінетики, електричних ланцюгів. Ряд важливих рівнянь у частинних похідних у випадках, що допускають розділення змінних, приводить до задач для звичайних диференціальних рівнянь. Це, як правило, крайові задачі (задачі про власні коливання пружних балок і пластин, визначення спектра власних значень енергії частинки у сферично-симетричних полях і багато інших).

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку формулюється так: знайти розв'язок рівняння (1) у вигляді функції $y = y(x)$, що задовольняє початкову умову (2)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Геометрично це означає, що треба знайти ту інтегральну криву $y = y(x)$ рівняння (1), яка проходить через задану точку (x_0, y_0) .

Теорема 1 (теорема Пікара). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкнутому прямокутнику $\Delta = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ і задовольняє в ньому умову Ліпшиця за змінною y , тобто існує таке число $M > 0$, яке не залежить від x і y , що

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

для будь-яких точок $(x_1, y_1) \in \Delta$ і $(x_2, y_2) \in \Delta$, то існує єдина диференційована функція, яка є розв'язком диференціального рівняння (1), що задовольняє умову (2).

Всюди далі будемо вважати, що на проміжку, де шукається розв'язок, виконуються всі умови, що забезпечують існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

2 Метод послідовних наближень

Метод послідовних наближень (метод ітерацій, метод Пікара) є представником групи аналітичних методів. Він виник у зв'язку з доведенням теореми існування і єдиності розв'язку рівняння (1) (теореми Пікара).

Нехай потрібно знайти розв'язок задачі Коші (1)–(2). Проінтегруємо обидві частини рівності (1) від x_0 до x :

$$\int_{x_0}^x y' dx = \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Останню рівність можна записати

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (3)$$

Таким чином, задача Коші (1)–(2) замінюється інтегральним рівнянням (3). Його розв'язок буде задовольняти диференціальне рівняння (1) і початкову умову (2). Заміняючи в правій частині останньої рівності функцію y значенням y_0 , отримаємо перше наближення

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Інтеграл в правій частині останньої рівності містить тільки змінну x . Після знаходження цього інтеграла буде отримано аналітичний вираз наближення $y_1(x)$ як функції від змінної x . Замінімо тепер в правій частині рівняння (3) функцію y знайденим значенням y_1 і отримаємо друге наближення

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \quad \text{і т.д.}$$

В загальному випадку ітераційна формула має вигляд

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Застосування останньої формули породжує послідовність функцій

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots \quad (4)$$

Достатні умови збіжності цієї послідовності сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 2. Нехай в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ неперервна і має обмежену частинну похідну $f'_y(x, y)$. Тоді в деякому інтервалі, що містить точку x_0 , послідовність (4) збігається до розв'язку задачі Коші (1)-(2).

3 Метод Ейлера

В основі цього чисельного методу лежить ідея графічної побудови розв'язку диференціального рівняння, однак цей метод дає одночасно і спосіб знаходження шуканої функції в чисельній (табличній) формі. Метод Ейлера застосовують в основному для проведення орієнтовних розрахунків. Але ідеї, закладені в його основу, є ключовими при розробці багатьох інших методів.

Нехай задачу Коші (1)–(2) треба розв'язати на проміжку $[a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{1, n}$, де $h = \frac{b-a}{n}$ – крок інтегрування. Проінтегруємо рівняння (1) на відрізку $[x_0, x_1]$, маємо

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx = \int_{x_0}^{x_1} y' dx = y_1 - y_0,$$

звідки

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx.$$

Останню рівність можна записати у вигляді

$$y_1 = y_0 + h y'_0.$$

Дійсно, якщо крок h вибрати достатньо малим, то можна вважати, що $f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$, і тоді матимемо

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx \approx f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = hy'_0, \text{ де } y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Аналогічно, інтегруючи рівняння $y' = f(x, y)$ на відрізку $[x_1, x_2]$, отримаємо

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \text{ де } y'_1 = f(x_1, y_1).$$

І в загальному вигляді

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k, \text{ де } y'_k = f(x_k, y_k).$$

Позначимо $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, тоді

$$\Delta y_k = h y'_k, \quad y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \quad (5)$$

Реалізація методу Ейлера зводиться до циклічного застосування останньої пари формул.

Геометричний зміст методу Ейлера полягає в тому, що на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива замінюється відрізком дотичної, що виходить з точки $M_k(x_k, y_k)$ з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$.

Наближенням інтегральної кривої є ламана Ейлера з вершинами в точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. Перша ланка цієї ламаної дотикається до інтегральної кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$.

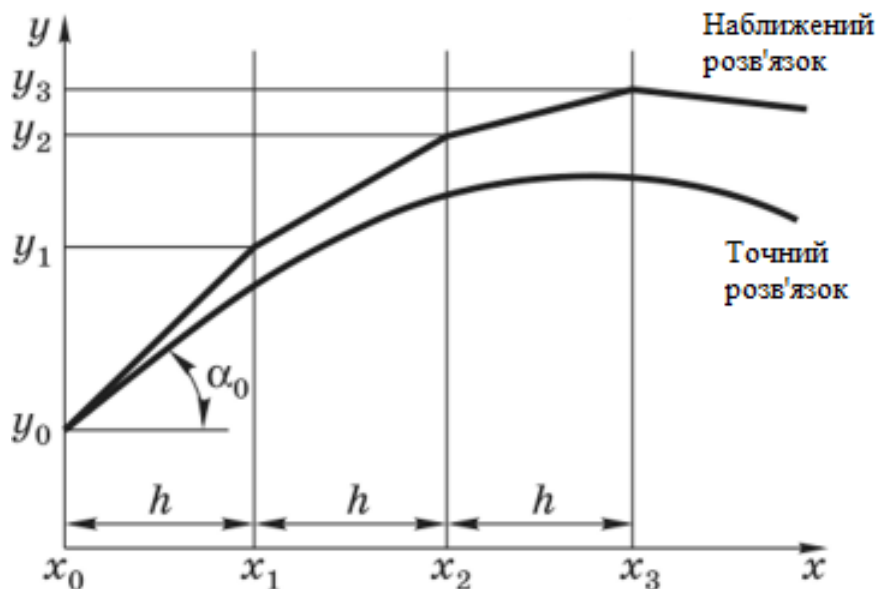


Рис. 1. Графічна інтерпретація методу Ейлера

Зазначимо, що точність методу досить мала і з переходом від точки до точки її похибка систематично зростає. Геометрично це означає, що ламана Ейлера віддаляється від істинної інтегральної кривої.

На практиці часто використовують **удосконалений метод Ейлера**. Суть його полягає в тому, що спочатку знаходять допоміжне значення $y_{k+\frac{1}{2}}$ шуканої функції в проміжній точці $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}$ за формулою $y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{h}{2} y'_k$. Потім обчислюють значення $y'_{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right)$ і насамкінець отримують $y_{k+1} = y_k + h y'_{k+\frac{1}{2}}$.

Приклад 1. Застосовуючи метод Ейлера, скласти на відрізьку $[0, 1]$ таблицю значень розв'язку рівняння

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

з початковою умовою $y(0) = 1$, обравши крок $h = 0,2$.

Розв'язання. Результати обчислень наведено в таблиці 1.

Таблиця 1. Розв'язання диференціального рівняння методом Ейлера

i	x_i	y_i	Обчислення $f(x_i, y_i)$		Δy_i	Точний розв'язок $y = \sqrt{2x+1}$
			$\frac{2x_i}{y_i}$	$y_i - \frac{2x_i}{y_i}$		
0	0	1,0000	0	1,0000	0,2000	1,0000
1	0,2	1,2000	0,3333	0,8667	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,5928	0,7805	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,7846	0,7458	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,9532	0,7254	0,1451	-1,6124
5	1,0	1,8237				1,7320

Заповнюється таблиця наступним чином. В першому рядку при $i = 0$ записуються початкові значення $x_0 = 0$, $y_0 = 1,0000$, і за ними обчислюється $f(x_0, y_0) = 1$ та $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0,2$. Тоді за формулою (5) при $i = 0$ отримуємо

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,2 = 1,2.$$

Значення $x_1 = 0,2$, $y_1 = 1,2000$ записуються у другому рядку при $i = 1$. Використовуючи їх, можна обчислити $f(x_1, y_1) = 0,8667$ та $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0,2 \cdot 0,8667 = 0,1733$. Таким чином, отримуємо

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1,2 + 0,1733 = 1,3733.$$

При $i = 2, 3, 4, 5$ обчислення проводять аналогічно.

В останньому стовпці таблиці для порівняння розміщено значення точного розв'язку $y = \sqrt{2x+1}$. З таблиці видно, що абсолютна похибка y_5 складає $\varepsilon = 0,0917$, тобто відносна похибка складає 5%.

4 Метод Рунге-Кутта

З появою і розвитком ЕОМ у чисельному інтегруванні звичайних диференціальних рівнянь бурхливого розвитку набули методи типу Рунге-Кутта. В обчислювальній практиці їх широко застосовують завдяки тому, що вони:

- однокрокові, тобто для обчислення розв'язку задачі Коші в точці x_{k+1} треба знати її розв'язок лише в точці x_k ;
- дають змогу здійснювати чисельне інтегрування зі змінним кроком;
- особливо зручні для програмування на ЕОМ, оскільки обчислення за ними мають циклічний характер.

Нехай, як і раніше, треба знайти розв'язок задачі Коші (1)–(2) на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{1, n}$, де $h = \frac{b-a}{n}$ – крок інтегрування.

В методі Рунге-Кутта, так як і в методі Ейлера, послідовні значення шуканої функції $y(x)$ визначаються за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Для визначення Δy_i розкладемо функцію $y(x)$ в ряд Тейлора і обмежимося членами ряду до h^4 включно. Тоді приріст функції має вигляд

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x).$$

Похідні $y''(x)$, $y'''(x)$, $y^{(4)}(x)$ знайдемо послідовним диференціюванням рівняння $y'(x) = f(x, y)$. Можна показати, що з точністю до членів четвертого порядку значення Δy обчислюється за формулою

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де коефіцієнти k_1, k_2, k_3, k_4 знаходять за формулами

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x, y), & k_2 &= h f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= h f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), & k_4 &= h f(x + h, y + k_3). \end{aligned}$$

Таким чином, застосування методу Рунге-Кутта зводиться до послідовного обчислення чотирьох значень чисел

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{cases} \quad (6)$$

тоді на їх основі – приросту

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (7)$$

а відтак – наступного наближення $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Всі обчислення зручно виконувати за певною схемою і результати заносити в таблицю (див. табл. 2). На першому кроці ($i=0$) в таблицю записують початкові умови x_0, y_0 , а потім – результати обчислень за формулами (6) і (7). Відтак знаходять $\Delta y_0 = \frac{1}{6}S$, де S – сума елементів останнього стовпчика. Потім знаходять наступне наближення за формулою $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. Заповнення таблиці на кроці m здійснюється аналогічно в припущенні, що початковою точкою є (x_m, y_m) . У таблиці 2 треба всюди у формулах прийняти $i = m$.

Таблиця 2. Розв'язання диференціального рівняння методом Рунге-Кутта

Крок	x	y	$y' = f(x, y)$	$k = h \cdot f(x, y)$	Δy
i	x_i	$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$	$f(x_i, y_i)$	$k_1^{(i)}$	$k_1^{(i)}$
	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2})$	$k_2^{(i)}$	$2k_2^{(i)}$
	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2})$	$k_3^{(i)}$	$2k_3^{(i)}$
	$x_i + h$	$y_i + k_3^{(i)}$	$f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$	$k_4^{(i)}$	$k_4^{(i)}$

Зауваження. Крок h можна змінювати при переході від однієї точки до іншої. Для контролю правильності вибору кроку h рекомендується обчислювати дріб

$$\theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|, \quad (8)$$

причому θ не повинно перевищувати декількох сотих, інакше крок потрібно зменшити.

Метод Рунге-Кутта має порядок точності h^4 . Оцінити похибку даного методу досить важко. Наближену оцінку похибки можна отримати за допомогою подвійного прорахунку (методом Рунге) за формулою

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{|y_n^* - y_n|}{15},$$

де $y(x_n)$ — значення точного розв'язку рівняння (1) в точці x_n ,

а y_n^*, y_n — наближені значення, отримані з кроком $h/2$ та h .

Реалізуючи метод Рунге-Кутта на ЕОМ з автоматичним вибором кроку зазвичай в кожній точці x_i виконують подвійний прорахунок — з початку з кроком h , потім з кроком $h/2$. Якщо отримані при цьому значення y_i відрізняються в межах допустимої похибки, то крок h для наступної точки x_{i+1} подвоюють, в протилежному випадку беруть половинний крок.

Приклад 2. Методом Рунге-Кутта знайти розв'язок рівняння

$$y' = 0,25y^2 + x^2 \quad (9)$$

з початковою умовою $y(0) = -1$ на відрізку $[0; 0,5]$, прийнявши крок $h = 0,1$.

Розв'язання. Результати обчислень наведено в таблиці 3.

Таблиця 3. Розв'язання рівняння (9) методом Рунге-Кутта

i	x	y	$0,25y$	$K=hf(x, y)$	Δy	$\theta = \left \frac{K_2 - K_1}{K_1 - K_2} \right $
0	0	-1	-0,25	0,025	0,025	0,024
	0,05	-0,98750	-0,24688	0,024629	0,049258	
	0,05	-0,98769	-0,24692	0,024638	0,049276	
	0,1	-0,97536	-0,24384	0,024783	0,024783	
					0,02472	
1	0,1	-0,97528	-0,24382	0,024779	0,024779	0,025
	0,15	-0,96289	-0,24072	0,025429	0,050858	
	0,15	-0,96257	-0,24064	0,025413	0,050826	
	0,2	-0,94987	-0,23747	0,026557	0,026557	
					0,02550	
2	0,2	-0,94978	-0,23745	0,026553	0,026553	0,023
	0,25	-0,93650	-0,23413	0,028176	0,056352	
	0,25	-0,93569	-0,23392	0,028138	0,056276	
	0,3	-0,92164	-0,23041	0,030236	0,030236	
					0,02824	
3	0,3	-0,92154	-0,23039	0,030231	0,030231	0,023
	0,35	-0,90642	-0,22661	0,032790	0,065580	
	0,35	-0,90514	-0,22629	0,032732	0,065464	
	0,4	-0,88881	-0,22220	0,035743	0,035749	
					0,03284	
4	0,4	-0,88870	-0,22218	0,035745	0,035745	0,022
	0,45	-0,87083	-0,21771	0,039209	0,078418	
	0,45	-0,86910	-0,21728	0,039134	0,078268	
	0,5	-0,84957	-0,21239	0,04307	0,043044	
					0,03925	
5	0,5	-0,84945				

Заповнюється таблиця наступним чином. При $i = 0$:

1) Записуємо у першому рядку $x_0 = 0, y_0 = -1$.

2) Обчислюємо $f(x_0, y_0) = 0,25$, тоді

$$k_1^{(0)} = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot 0,25 = 0,025.$$

3) Записуємо у другому рядку $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} = -0,98750$.

4) Обчислюємо $f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,24629$, тоді

$$k_2^{(0)} = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot 0,24629 = 0,024629.$$

5) Записуємо в третьому рядку $x_0 + \frac{h}{2} = 0,05, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} = -0,98769$.

6) Обчислюємо

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,25 \cdot (-0,98769)^2 + (0,05)^2 = 0,24638,$$

тоді $k_3^{(0)} = h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot 0,24638 = 0,024638$.

7) Записуємо в четвертому рядку $x_0 + h = 0,1, y_0 + \frac{k_3^{(0)}}{2} = -0,97536$.

8) Обчислюємо $f(x_0 + h, y_0 + \frac{k_3^{(0)}}{2}) = 0,25 \cdot (-0,97536)^2 + (0,1)^2 = 0,24783$,

$$\text{тоді } k_4^{(0)} = h \cdot f\left(x_0 + h, y_0 + \frac{k_3^{(0)}}{2}\right) = 0,1 \cdot 0,24783 = 0,024783.$$

9) В стовпці Δy записуємо числа $k_1^{(0)}, 2k_2^{(0)}, 2k_3^{(0)}, k_4^{(0)}$.

10) Обчислюємо $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6} \cdot 0,148317 = 0,02472$.

11) Отримуємо $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -1 + 0,02472 = -0,97528$

Значення $x_1 = 0,1, y_1 = -0,97528$ заносимо в рядок, позначений індексом $i = 1$, і знову проводимо обчислення за формулами (6), (7).

В останньому стовпці таблиці наведено значення величини θ , отримані за формулою (8).

Зауваження. Похибка при використанні методу Рунге-Кутта нижча, ніж при використанні методу Ейлера і його модифікацій, але за це

доводиться платити додатковими обчисленнями. А саме: функція $f(x, y)$ з правої частини диференціального рівняння (1) обчислюється на кожному кроці методу Рунге-Кутта 4-го порядку чотири рази, що у випадках, коли обчислення значення функції $f(x, y)$ є дуже трудомістким, може істотно уповільнити пошук розв'язку.