**Приклад 2**. Методами Рунге-Кутта та Адамса знайти розв'язок рівняння $y' = 0.25 \cdot y^2 + x^2$ з початковою умовою $y(0) = -1$ на відрізку [0, 0.5], обравши крок

$$f(x,y) := 0.25 \cdot y^2 + x^2 \qquad a := 0 \qquad b := 0.5 \qquad h := 0.1 \qquad n := 5$$

Розіб'ємо відрізок [a, b] на $n$ рівних частин з кроком $h$ та задамо точки $x_i$

```
x := | for i ∈ 0..n
     |   x_i ← a + i·h
     | return x
```

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

З початкової умови $y(0) = -1$ маємо:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 := -1$$

## 1) Метод Рунге-Кутта

Реалізуємо **метод Рунге-Кутта** за

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad \Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right) \qquad \begin{cases} k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \end{cases}$$

**Зауваження.** Крок $h$ можна змінювати при переході від однієї точки до іншої. Для контролю правильності вибору кроку $h$ рекомендується обчислювати дріб

$$\theta = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|, \qquad (8)$$

причому $\theta$ не повинно перевищувати декількох сотих, інакше крок потрібно зменшити.

$i := 0$

$$x_i = 0 \qquad y_i = -1$$

$$k1_i := h \cdot f(x_i, y_i) = 0.025$$

$$k2_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2}\right) = 0.024629$$

$$k3_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2}\right) = 0.024638$$

$$k4_i := h \cdot f(x_i + h, y_i + k3_i) = 0.024783 \qquad \Theta_i := \left| \frac{k2_i - k3_i}{k1_i - k2_i} \right| = 0.0247$$

$$\Delta\_y_i := \frac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i) = 0.02472$$

$$y_{i+1} := y_i + \Delta\_y_i = -0.97528$$

$i := 1$

$x_i = 0.1 \qquad y_i = -0.97528$

$$k1_i := h \cdot f\left(x_i, y_i\right) = 0.024779$$

$$k2_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2}\right) = 0.025429$$

$$k3_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2}\right) = 0.025413$$

$$k4_i := h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k3_i\right) = 0.026556 \qquad \Theta_i := \left|\frac{k2_i - k3_i}{k1_i - k2_i}\right| = 0.024068$$

$$\Delta\_y_i := \frac{1}{6} \cdot \left(k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i\right) = 0.025503$$

$$y_{i+1} := y_i + \Delta\_y_i = -0.94978$$

$i := 2$

$x_i = 0.2 \qquad y_i = -0.94978$

$$k1_i := h \cdot f\left(x_i, y_i\right) = 0.026552$$

$$k2_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2}\right) = 0.028176$$

$$k3_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2}\right) = 0.028138$$

$$k4_i := h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k3_i\right) = 0.030235 \qquad \Theta_i := \left|\frac{k2_i - k3_i}{k1_i - k2_i}\right| = 0.023402$$

$$\Delta\_y_i := \frac{1}{6} \cdot \left(k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i\right) = 0.028236$$

$$y_{i+1} := y_i + \Delta\_y_i = -0.92154$$

$i := 3$

$x_i = 0.3 \qquad y_i = -0.92154$

$$k1_i := h \cdot f\left(x_i, y_i\right) = 0.030231$$

$$k2_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2}\right) = 0.03279$$

$$k3_i := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2}\right) = 0.032732$$

$$k4_i := h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k3_i\right) = 0.03575 \qquad \Theta_i := \left|\frac{k2_i - k3_i}{k1_i - k2_i}\right| = 0.022645$$

$$\Delta\_y_i := \frac{1}{6}\cdot\left(k1_i + 2\cdot k2_i + 2\cdot k3_i + k4_i\right) = 0.032838$$

$$y_{i+1} := y_i + \Delta\_y_i = -0.8887$$

$i := 4$

$x_i = 0.4 \qquad y_i = -0.8887$

$$k1_i := h\cdot f\left(x_i, y_i\right) = 0.035745$$

$$k2_i := h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1_i}{2}\right) = 0.039209$$

$$k3_i := h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2_i}{2}\right) = 0.039133$$

$$k4_i := h\cdot f\left(x_i + h, y_i + k3_i\right) = 0.043044 \qquad \Theta_i := \left|\frac{k2_i - k3_i}{k1_i - k2_i}\right| = 0.021749$$

$$\Delta\_y_i := \frac{1}{6}\cdot\left(k1_i + 2\cdot k2_i + 2\cdot k3_i + k4_i\right) = 0.039246$$

$$y_{i+1} := y_i + \Delta\_y_i = -0.84946$$

Таким чином, методом Рунге-Кутта отримали наступну таблицю значень функції y(x):

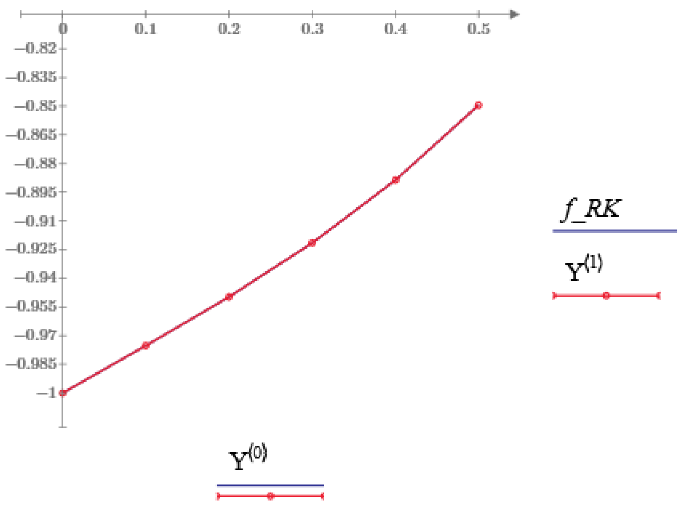
$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad f\_RK := y = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.97528046 \\ -0.94977712 \\ -0.92154131 \\ -0.88870375 \\ -0.84945822 \end{bmatrix}$$

**Перевірка.** Розв'яжемо ДР засобами Mathcad

$$\mathrm{Y} := \mathrm{rkfixed}\left(y_0, a, b, n, f\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.1 & -0.97528046 \\ 0.2 & -0.94977712 \\ 0.3 & -0.92154131 \\ 0.4 & -0.88870375 \\ 0.5 & -0.84945822 \end{bmatrix}$$

Функція rkfixed(init, x1, x2, intvls, D) — використовує метод Рунге-Кутта четвертого порядку з фіксованим кроком

Побудуємо графіки отриманих розв'язків:



## 2) Метод Адамса

Методом Рунге-Кутта вище обчислено три послідовні значення шуканої функції y(x) при $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$:

$$y_1 = -0.9752805 \qquad y_2 = -0.9497771 \qquad y_3 = -0.9215413$$

Реалізуємо **метод Адамса** за формулами

***Екстраполяційна формула Адамса:***

$$y_{k+1}^{прогн.} = y_k + \frac{h}{24}(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}), \qquad (4)$$

де $y'_k = f(x_k, y_k)$, $y'_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1})$, $y'_{k-2} = f(x_{k-2}, y_{k-2})$, $y'_{k-3} = f(x_{k-3}, y_{k-3})$,

***Інтерполяційна формула Адамса*:**

$$y_{k+1}^{кор.} = y_k + \frac{h}{24}(9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}). \qquad (5)$$

$$\left|y_{k+1}^{кор.} - y_{k+1}^{прогн.}\right| \le \varepsilon.$$

$k := 3$ $\qquad$ $\varepsilon := 0.00001$ - точність

$$y4\_progn := y_3 + \frac{h}{24} \cdot \left(55 \cdot f\left(x_3, y_3\right) - 59 \cdot f\left(x_2, y_2\right) + 37 \cdot f\left(x_1, y_1\right) - 9 \cdot f\left(x_0, y_0\right)\right)$$

$$y_4 := y4\_progn = -0.888709$$

$$y4\_kor := y_3 + \frac{h}{24} \cdot \left(9 \cdot f\left(x_4, y_4\right) + 19 \cdot f\left(x_3, y_3\right) - 5 \cdot f\left(x_2, y_2\right) + f\left(x_1, y_1\right)\right) = -0.888703$$

$$|y4\_kor - y4\_progn| \le \varepsilon = 1$$

$k := 4$

$$y5\_progn := y_4 + \frac{h}{24} \cdot \left(55 \cdot f\left(x_4, y_4\right) - 59 \cdot f\left(x_3, y_3\right) + 37 \cdot f\left(x_2, y_2\right) - 9 \cdot f\left(x_1, y_1\right)\right)$$

$$y_5 := y5\_progn = -0.849469$$

$$y5\_kor := y_4 + \frac{h}{24} \cdot \left(9 \cdot f\left(x_5, y_5\right) + 19 \cdot f\left(x_4, y_4\right) - 5 \cdot f\left(x_3, y_3\right) + f\left(x_2, y_2\right)\right) = -0.849463$$

$$|y4\_kor - y4\_progn| \le \varepsilon = 1$$

Таким чином, методом Адамса отримали наступну таблицю значень функції y(x):

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad f\_A := y = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.9752805 \\ -0.9497771 \\ -0.9215413 \\ -0.8887091 \\ -0.849469 \end{bmatrix}$$

**Перевірка:**

$$Y := \text{Adams}\left(y_0, a, b, n, f\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.1 & -0.9752808 \\ 0.2 & -0.9497783 \\ 0.3 & -0.9215429 \\ 0.4 & -0.8887046 \\ 0.5 & -0.849458 \end{bmatrix}$$

Функція Adams(init, x1, x2, intvls, D, [tol])   використовує метод Адамса

Побудуємо графіки отриманих розв'язків: