7.2 Багатокрокові чисельні методи розв’язання задачі Коші

7.2.1 Поняття багатокрокового методу

Розглянуті раніше чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь відносяться до **однокрокових методів**, оскільки при розрахунку поточного значення y_{i+1} на i-му кроці використовується тільки інформація на останньому відрізку $\left[x_i; x_{i+1}\right]$.

Все, що робилось на попередніх кроках методу, явно не використовується. Навпаки, є **багатокрокові методи** розв'язання задачі Коші (1), які використовують те, що було отримано на попередніх кроках методу явно. Такими є, наприклад, методи: Адамса – Башфорта, Адамса – Мултона, Гіра – Брайтона.

В цих методах для обчислення значення нової точки використовується інформація про декілька значень, що отримані раніше. Для цього використовуються дві формули: прогнозу і корекції. Алгоритм обчислення для всіх методів прогнозу і корекції однаковий. Вказані методи відрізняються лише формулами і не мають властивості «самостартування», оскільки вимагають знання попередніх значень. Перш ніж використовувати метод прогнозу і корекції, обчислюють початкові дані за допомогою будь-якого однокрокового методу. Часто для цього використовують метод Рунге – Кутта.

7.2.2 Метод Адамса (Адамса – Башфорта)

Нехай для рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ знайдені будь-яким методом (Ейлера, послідовних наближень, Рунге – Кутта та ін.) три послідовних значення невідомої функції («початковий відрізок»)

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),$$
$$y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

За допомогою цих значень обчислюємо величини

$$q_0 = h\,y'_0 = h\,f(x_0, y_0),$$
$$q_1 = h\,y'_1 = h\,f(x_1, y_1),$$
$$q_2 = h\,y'_2 = h\,f(x_2, y_2),$$
$$q_3 = h\,y'_3 = h\,f(x_3, y_3).$$

Записуємо числа x_k, y_k, y'_k, q_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ в таблицю 1 та обчислюємо скінченні різниці величини q (числа над ламаною лінією в таблиці 1).

Тут

$$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k, \quad \Delta^{i+1} q_k = \Delta^i q_{k+1} - \Delta^i q_k.$$

Враховуючи це, отримуємо:

$$\Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}; \quad \Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2}; \quad \Delta^3 q_{k-3} = \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3}.$$

Таблиця 1

Схема методу Адамса

k	x_k	y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$y'_k = f(x_k,\ y_k)$	$q_k = hy'_k$	$\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0,\ y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1,\ y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
2	x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2,\ y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
3	x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3,\ y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
4	x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4,\ y_4)$	q_4	Δq_4		
5	x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5,\ y_5)$	q_5			
6	x_6	y_6						

Метод Адамса полягає у продовженні обчислень (заповненні таблиці 1) за допомогою формули

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} \quad (k = 3, 4, \ldots), \tag{2}$$

яка називається ***екстраполяційною формулою Адамса***. Формула (2) застосовується для «прогнозування» значення

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k.$$

Підраховане за цією формулою «прогнозоване» значення будемо позначати за $y_{k+1}^{прогн.}$.

Отримане за формулою (2) значення Δy_k необхідно ще уточнити. Для цього необхідно записати до таблиці значення x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1}, доповнити таблицю скінченних різниць, а далі виконати перерахунок за формулою «корекції»

$$\Delta y_k = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2}, \qquad (3)$$

яка називається ***інтерполяційною формулою Адамса***. Уточнене за формулою (3) значення будемо позначати за $y_{k+1}^{кор.}$.

Формули (2) та (3) мають достатньо велику точність. Вони дають похибку порядку h^4, але самі формули оцінки похибки достатньо складні.

При практичних обчисленнях зазвичай застосовують наступні міркування. Похибка більш точної формули корекції (3) складає приблизно $1/14$ частину різниці між значеннями Δy_k, підрахованими за формулами (2) та (3). Тому, якщо вказана різниця ненабагато перевищує допустиму похибку розрахунку, то крок h вважають обраним вірно та розрахунок продовжують з обраним кроком. Якщо ж на деякому етапі розрахунку вказана різниця стає більшою (і при цьому нема помилок в самих розрахунках), то крок h потрібно зменшити. Рекомендується зменшувати крок в два рази.

Порядок заповнення таблиці 1.

1) Записуємо до таблиці 1 числа x_k, y_k, y'_k, q_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ та обчислюємо скінченні різниці Δq_k $(k = 0, 1, 2)$, $\Delta^2 q_k$ $(k = 0, 1)$, $\Delta^3 q_0$.
2) Використовуючи числа $q_3,\ \Delta q_2,\ \Delta^2 q_1,\ \Delta^3 q_0$, які знаходяться в таблиці скінченних різниць по діагоналі, визначаємо за формулою (2) при $k = 3$
$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0.$$
3) Обчислюємо $x_4 = x_3 + h,\ y_4 = y_3 + \Delta y_3$.
4) Записуємо значення $x_4,\ y_4$ до таблиці 1, знаходимо $y'_4 = f\left(x_4, y_4\right)$, $q_4 = h\,y'_4$ та підраховуємо наступні скінченні різниці $\Delta q_3,\ \Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$.
5) Використовуючи отримані значення скінченних різниць, уточнюємо величину Δy_3 за формулою (3) при $k = 3$
$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_3 - \frac{1}{12}\Delta^2 q_2 - \frac{1}{24}\Delta^3 q_1.$$
6) Якщо кореговане значення Δy_3 відрізняється від прогнозованого значення Δy_3 на декілька одиниць найменшого зберігаємого розряду, то вносимо відповідні правки в значення Δy_3 та y_4,

перевіряємо, що ці правки не відобразяться суттєво на значенні q_4, та продовжуємо розрахунок з обраним кроком. В протилежному разі обираємо менший крок.

Обчислення для $k = 4,\ 5,\ \ldots$ здійснюють аналогічно.

Для обчислень на комп'ютері формули Адамса (2) та (3) зручніше застосовувати в іншій формі, виражаючи y_{k+1} не через скінченні різниці Δq, а безпосередньо через величини q. Так отримують ***екстраполяційну формулу Адамса*** у вигляді

$$y_{k+1}^{прогн.} = y_k + \frac{h}{24}\left(55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}\right), \tag{4}$$

де $y'_k = f(x_k, y_k),\ y'_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1}),\ y'_{k-2} = f(x_{k-2}, y_{k-2}),\ y'_{k-3} = f(x_{k-3}, y_{k-3})$,

та ***інтерполяційну формулу Адамса*** у вигляді

$$y_{k+1}^{кор.} = y_k + \frac{h}{24}\left(9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}\right). \tag{5}$$

Спочатку використовують формулу (4), а потім корегують за допомогою (5). Якщо результат уточненого значення не перевищує задану похибку обчислень, то крок h є допустимим

$$\left|y_{k+1}^{кор.} - y_{k+1}^{прогн.}\right| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Приклад 1. Методом Адамса знайти на відрізку [0; 0,5] розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{\mathrm{sh}\left(0{,}5y + x\right)}{1{,}5} + 0{,}5y \tag{7}$$

з початковою умовою у (0) = 0; крок взяти h = 0,05.

Розв'язання. Нехай за допомогою методу Рунге – Кутта обчислено три послідовні значення шуканої функції при $x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}10$, $x_3 = 0{,}15$ (див. розд. 10.1). Скористаємося цими результатами і продовжимо обчислення за методом Адамса. Результати обчислень розташовано в двох таблицях: таблиця 2 – основна таблиця різниць, таблиця 3 – допоміжна таблиця обчислення правої частини рівняння (7).

Порядок заповнення таблиць.

1) Записуємо до таблиці 2 значення $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}10$, $x_3 = 0{,}15$ і відповідні їм значення y_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, знаходимо $f\left(x_k, y_k\right)$, q_k і складаємо таблицю різниць.

2) За формулою (2) при $k = 3$ знаходимо

$$\Delta y_3 = 0{,}005347 + \frac{1}{2}0{,}001865 + \frac{5}{12}0{,}000085 + \frac{3}{8}0{,}000007 = 0{,}006318.$$

3) Обчислюємо $y_4 = 0{,}007838 + 0{,}006318 = 0{,}014156$.

4) Записуємо значення x_4, y_4 в таблицю 3, знаходимо

$$y'_4 = f(x_4,\ y_4) = \frac{2}{3}\operatorname{sh}(0{,}5 \cdot 0{,}014156 + 0{,}2) + 0{,}5 \cdot 0{,}014156 = 0{,}14612;$$

тоді

$$q_4 = hy'_4 = 0{,}007306.$$

Записуємо отриманий результат в таблицю 2 і обчислюємо різниці Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$.

5) За формулою (3) обчислюємо кориговане значення

$$\Delta y_3 = 0{,}005347 + \frac{1}{2}0{,}001959 - \frac{1}{12}0{,}000094 - \frac{1}{24}0{,}000009 = 0{,}006318.$$

Так як кориговане значення Δy_3 співпадає з прогнозованим значенням Δy_3, то продовжуємо розрахунок з обраним кроком вже без подальшої корекції.

6) За формулою (2) при $k = 4$ знаходимо

$$\Delta y_4 = 0{,}007306 + \frac{1}{2}0{,}001959 + \frac{5}{12}0{,}000094 + \frac{3}{8}0{,}000009 = 0{,}008329,$$

і т.д.

Таблиця 2

Розв'язання рівняння (7) методом Адамса

k	x_k	y_k	Δy_k	$q_k = hf(x_k, y_k)$	Δq_k	$\Delta^2 q_k$	$\Delta^3 q_k$
0	0	0		0	0,001702	0,000078	0,000007
1	0,05	0,000846		0,001702	0,001780	0,000085	0,000009
2	0,10	0,003432		0,003482	0,001865	0,000094	0,000011
3	0,15	0,007838	0,006318	0,005347	0,001959	0,000105	0,000011
4	0,20	0,014156	0,008329	0,007306	0,002064	0,000116	0,000013
5	0,25	0,022485	0,010451	0,009370	0,002180	0,000129	0,000013
6	0,30	0,032936	0,012692	0,011550	0,002309	0,000142	0,000017
7	0,35	0,045628	0,015070	0,013859	0,002451	0,000159	
8	0,40	0,060698	0,017603	0,016310	0,002610		
9	0,45	0,078301	0,020295	0,018920			
10	0,50	0,098596					

Таблиця 3

Обчислення правої частини рівняння (7)

k	x_k	y_k	$0,5y_k$	$0,5y_k + x_k$	$\text{sh}\,(0,5y_k + x_k)$	$f\,(x_k,\ y_k)$
4	0,20	0,014156	0,007078	0,207078	0,20856	0,14612
5	0,25	0,022485	0,011242	0,261242	0,26422	0,18739
6	0,30	0,032936	0,016468	0,316468	0,32178	0,23099
7	0,35	0,045628	0,022814	0,378814	0,38151	0,27715
8	0,40	0,060698	0,030349	0,430349	0,44376	0,32619
9	0,45	0,078301	0,039150	0,489150	0,50889	0,37841

Приклад 2. Методом Адамса знайти на відрізку [0; 0,5] з точністю до 10^{-5} розв'язок диференціального рівняння

$$y' = 0,25y^2 + x^2 \tag{8}$$

з початковою умовою $y(0) = -1$.

Розв'язання. Нехай за допомогою методу Рунге – Кутта обчислено три послідовні значення шуканої функції при $x_1 = 0,05$, $x_2 = 0,10$, $x_3 = 0,15$ (див. приклад 2 попередньої лекції).

Подальші обчислення будемо вести на обчислювальній машині за формулою (4) з уточненням за формулою (5). Результати обчислень поміщені в двох таблицях: таблиця 4 – обчислення за формулою (4) з уточненням за формулою (5), таблиця 5 – обчислення правої частини. Через α_k і β_k в таблиці 4 позначені суми

$$\alpha_k = 55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3}, \quad \beta_k = 9y'_{k+1} + 19y'_k - 5y'_{k-1} + y'_{k-2}.$$

Таблиця 4

Розв'язання рівняння (8) методом Адамса

k	x_k	y_k	y'_k	$\frac{\alpha_k}{24}$	$\frac{\beta_k}{24}$	$h\frac{\alpha_k}{24}$	$h\frac{\beta_k}{24}$
0	0,0	—1	0,25				
1	0,1	—0,97528	0,24779				
2	0,2	—0,94978	0,26552				
3	0,3	—0,92154	0,30232	0,32834	0,32840	0,03283	0,03284
4	0,4	—0,88871 —0,88870	0,35745	0,39237	0,39246	0,03924	0,03925
5	0,5	—0,84946 —0,84946	0,43040				

Таблиця 5

Обчислення правої частини рівняння (8)

k	x	x^2	y	$0{,}25y^2$	$f(x,\ y)=0{,}25y^2+x^2$
0	0	0	—1	0,25	0,25
1	0,1	0,01	—0,97528	0,23779	0,24779
2	0,2	0,04	—0,94978	0,22552	0,26552
3	0,3	0,09	—0,92154	0,21232	0,30232
4	0,4	0,16	—0,88871 —0,88870	0,19745	0,35745
5	0,5	0,25	—0,84946 —0,84946	0,18040	0,43040

Порядок заповнення таблиць.

1) Записуємо в таблицю 5 значення $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ і відповідні значення y_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$. Обчислюємо по ним $y'_k = f\left(x_k, y_k\right)$.

2) Обчислюємо величину

$$\frac{\alpha_3}{24} = \frac{1}{24}\left(55y'_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0\right) = 0{,}32834,$$

записуємо її в таблицю 4 і за формулою (4) при $k = 4$ знаходимо

$$y_4^{\text{пред}} = y_3 + h\frac{\alpha_3}{24} = -0{,}92154 + 0{,}1 \cdot 0{,}32834 = -0{,}88871.$$

3) Записуємо значення x_4, y_4 в таблицю 5 і обчислюємо по ним

$$y'_4 = f(x_4,\ y_4) = 0{,}35745.$$

4) Обчислюємо величину

$$\frac{\beta_3}{24} = \frac{1}{24}(9y'_4 + 19y'_3 - 5y'_2 + y'_1) = 0{,}32840,$$

записуємо її в таблицю 4 при $k = 3$ і уточнюємо значення y_4 за формулою (5):

$$y_4^{\text{кор}} = y_3 + h\frac{\beta_3}{24} = -0{,}92154 + 0{,}1 \cdot 0{,}32840 = -0{,}88870.$$

5) Так як отримані значення $y_4^{прогн.}$ і $y_4^{кор.}$ відрізняються тільки на 10^{-5}, то вносимо виправлення в значення y_4 в таблиці 4 і в таблиці 5:

$$y_4 = -0{,}88870.$$

6) Записуємо отримане значення $y_4 = y_4^{кор.}$ в таблицю 5, впевнюємося в тому, що внесене виправлення не змінює значення $y'_4 = f\left(x_4, y_4\right)$

Обчислення для y_5 проводимо аналогічним чином.

7.2.3 Вибір методу розв’язання задачі Коші

Порівнюючи ефективність однокрокових і багатокрокових методів, виділяють такі особливості.

1. Багатокрокові методи вимагають більшого обсягу пам’яті ЕОМ, оскільки оперують більшою кількістю початкових даних.
2. При використанні багатокрокових методів існує можливість оцінювання похибки на кроці, тому значення кроку обирається оптимальним, а в однокрокових – з деяким запасом, що знижує швидкодію.
3. При однаковій точності багатокрокові методи вимагають меншого обсягу обчислень. Наприклад, в методі Рунге – Кутта четвертого порядку точності доводиться обчислювати чотири значення функції на кожному кроці, а для забезпечення

збіжності методу Адамса того ж порядку точності – достатньо двох.

4. Однокрокові методи на відміну від багатокрокових дозволяють одразу почати розв'язання задачі («самостартування») і легко змінювати крок в процесі обчислень.

Якщо задача Коші дуже складна, то зазвичай перевага надається методу Адамса, який має до того ж більш високу швидкодію. Початок розв'язання задачі при цьому проводиться за допомогою однокрокових методів.

Інколи на практиці вимагається мінімізувати час підготовки задачі до розв'язання. Тоді доцільно використовувати методи Рунге – Кутта.