Національний технічний університет України
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра інформаційних систем та технологій

Спеціальні розділи математики-2. Чисельні методи

Лабораторна робота № 8

Розв’язання задачі Коші

Зміст

1 Теоретичні відомості....................2
2 Завдання....................8
3 Варіанти завдань....................8
4 Вимоги до звіту....................9

1 Теоретичні відомості

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Умова $y(x_0) = y_0$ є початковою умовою.

Метод Рунге-Кутта

Нехай y_i – наближене значення розв'язку, який шукаємо, у точці x_i. Тоді обчислення наближеного значення y_{i+1} в наступній точці $x_{i+1} = x_i + h$ (h – шаг сітки по x) виконується за формулами

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}), \tag{2}$$

де

$$K_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$K_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}),$$

$$K_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}),$$

$$K_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$

Цей метод має 4 порядок, тобто помилка на кожному кроці складає $O(h^5)$, а сумарна похибка на скінченому інтервалі інтегрування – $O(h^4)$.

Пояснимо як вести розрахунок по цій схемі. При $n=0$ відомо $y_0 = u_0$. Можна обчислити послідовно $K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ і знайти y_1, після чого обчислення повторюються для $n = 1, 2, \ldots$

Для контроля правильності вибору кроку h обчислюють дріб:

$$\tau = \left| \frac{K_2^{(i)} - K_3^{(i)}}{K_1^{(i)} - K_2^{(i)}} \right|,$$

причому τ не повинно перевищувати декількох сотих, інакше крок потрібно зменшити.

Формула нев'язки для цього методу у конкретних точках:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)}(y(x_i)) + 2K_2^{(i)}(y(x_i)) + 2K_3^{(i)}(y(x_i)) + K_4^{(i)}(y(x_i))\right) - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}, \tag{3}$$

де $K_j^{(i)}(y_i(x_i))$ отримуються з (2) підстановкою у вирази для $K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, K_3^{(0)}, K_4^{(0)}$ замість знайдених y_i точні значення функції $y(x_i)$. Якщо точні значення $y(x_i)$ функції невідомі, то похибку обчислень можна знаходити за наближеною формулою Рунге, яка наводиться нижче у цьому розділі.

Метод Рунге-Кутта є явним (для визначення y_{i+1} потрібно проводити обчислення по явним формулам) і однокроковим (для визначення y_{i+1} потрібно зробити один крок по сітці з x_i до x_{i+1}.

Метод Адамса

Метод Рунге-Кутта має різні зручні властивості, які стосуються обчислень, але має також один суттєвий недолік. При побудові цього методу застосовується інформація на відрізку прямої довжиною в один крок, тому подібна інформація має бути отримана знову, що передбачає велику трудоємкість відповідних обчислювальних правил.

Якщо відмовитись від умови однокроковості, можна обчислювальні методи будувати таким чином, щоби частина отриманої інформації використовувалась повторно на декількох наступних кроках обчислювального процесу. Такі методи називаються багатокроковими. До них відноситься зокрема метод Адамса (Адамса-Башфорта).

Нехай для рівняння $y' = f(x,y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$ методом Рунге-Кутта знайдені три послідовних значення невідомої функції

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),$$
$$y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h).$$

Далі обчислюємо величини

$$q_0 = y_0' = f(x_0, y_0),$$
$$q_1 = y_1' = f(x_1, y_1),$$
$$q_2 = y_2' = f(x_2, y_2),$$
$$q_3 = y_3' = f(x_3, y_3).$$

За числами x_k, y_k, y'_k, q_k (k = 0,1,2,3) обчислюємо скінчені різниці величини q. Метод Адамса полягає у продовженні обчислень за допомогою екстраполяційної формули:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3},\ k = 3, 4,... \tag{4}$$

Тут $\Delta q_k = q_{k+1} - q_k$, $\Delta^{i+1} q_k = \Delta^i q_{k+1} - \Delta^i q_k$. Враховуючи це, отримуємо:

$$\begin{aligned} \Delta q_{k-1} &= q_k - q_{k-1} = h(f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})); \\ \Delta^2 q_{k-2} &= \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - h(f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})); \\ \Delta^3 q_{k-3} &= \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3} = h\big(f(x_k, y_k) - 3f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 3f(x_{k-2}, y_{k-2}) - f(x_{k-3}, y_{k-3})\big). \end{aligned} \tag{5}$$

Спрогнозоване значення потрібно ще уточнити. Для цього використовують значення x_{k+1}, y_{k+1}, y'_{k+1}, q_{k+1} і застосовують формулу корекції

$$y_{k+1} = y_k + q_{k+1} + \frac{1}{2}\Delta q_k - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{k-2}, \tag{6}$$

яка називається інтерполяційною формулою методу Адамса.

Спочатку використовують формулу (4), а потім корегують за допомогою (6). І якщо результат уточненого значення не перевищує припустиму похибку обчислень, то крок h є допустимим.

$$\left| y_{k+1}^{кор} - y_{k+1}^{екстр} \right| \le \varepsilon$$

Для обчислень на комп'ютері формули (4) та (6) у такому вигляді є незручними. З урахуванням (5) їх можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{екстр} &= y_k + \frac{h}{24}\big(55f(x_k, y_k) - 59f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9f(x_{k-3}, y_{k-3})\big), \\ y_{k+1}^{інтер} &= y_k + \frac{h}{24}\big(9f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 19f(x_k, y_k) - 5f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})\big) \end{aligned} \tag{7}$$

Наведені формули мають достатньо велику точність. Вони мають похибку порядку $O(h^4)$, але самі формули оцінки похибки достатньо складні, тому використовують більш просте та загальне правило Рунге:

Правило Рунге

Якщо наближений метод має порядок похибки m, то похибку можна приблизно оцінити за формулою:

$$\varepsilon(x_i) \approx h^m O(x_i) \approx \frac{y_i^h - y_i^{h/2}}{2^m - 1}. \tag{8}$$

У формулі (8) y_i^h та $y_i^{h/2}$ наближені розв’язки у точці x_i, які знайдені з кроком h та $h/2$ відповідно.

2 Розв’язання звичайних диференціальних рівнянь в MathCad

Є два типи задач, які можливо вирішувати за допомогою Mathcad:

- задача Коші – для яких визначені початкові умови на шукані функції, тобто задані значення цих функцій в початковій точці інтервалу інтеграції рівняння;
- крайові задачі – для яких задані певні співвідношення відразу на обох межах інтервалу.

ЗДР першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку може за визначенням містити, окрім самої шуканої функції y(t), лише її першу похідну y'(t). У переважній більшості випадків диференціальне рівняння можна записати в стандартній формі (формі Коші):

$$y(t)=f(y(t),t), \tag{6}$$

і лише з такою формою вміє працювати обчислювальний процесор Mathcad. Правильна з математичної точки зору постановка відповідної задачі Коші для ЗДР першого порядку повинна, окрім самого рівняння, містити одну початкову умову – значення функції $y(t_0)$ в деякій точці t_0. Потрібно явно визначити функцію y(t) на інтервалі від t_0 до t_x.

Для чисельного розв’язання ЗДР у користувача Mathcad є вибір – або використовувати обчислювальний блок Given/odesoive, або вбудовані функції Rkfixed, Rkadapt, Bulstoer, як в колишніх версіях Mathcad. Перший шлях кращий переважно з міркувань наочності представлення задачі і результатів, а другий дає користувачеві більше важелів впливу на параметри чисельного методу.

Всі методи засновані на апроксимації диференціальних рівнянь різницевими аналогами. Залежно від конкретної форми апроксимації, виходять алгоритми різної точності і швидкодії. У Mathcad використаний найбільш популярний алгоритм Рунге-Кутта четвертого порядку. Він забезпечує малу похибку для широкого класу систем ЗДР за винятком жорстких систем.

Обчислювальний блок Given/Odesolve

Обчислювальний блок для розв’язання одного ЗДР, що реалізовує чисельний метод Рунге-Кутта, складається з трьох частин:

- Given — ключове слово;
- ЗДР;
- і початкову умову, записану за допомогою логічних операторів, причому початкова умова має бути у формі y(t1) = b; odesolve(t, t1) – вбудована функція для розв’язання ОДУ відносно змінної t на інтервалі (t0,t1).

Припустимо, і навіть часто бажано, задання функції odesolve(t, t1, step) з трьома параметрами, де step – внутрішній параметр чисельного методу, що визначає кількість кроків, в яких метод Рунге-Кутта розраховуватиме розв’язання диференціального рівняння. Чим більше step, тим з кращою точністю буде отриманий результат, але тим більше часу буде витрачено на його пошук. Підбором цього параметру можна у декілька разів прискорити розрахунки без істотного погіршення їх точності.

Приклад розв’язання задачі Коші для ЗДР першого порядку $y' = y - y^2$ за допомогою обчислювального блоку наведений в лістингу 1.

Лістинг 1. Розв'язання задачі Коші для ЗДР першого порядку

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - y(t)^2$$

$$y(0) = 0.1$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(t,10)$$

Mathcad вимагає, щоб кінцева точка інтеграції ЗДР лежала правіше початкової: t0<t1 (у лістингу 1: t0=0, t1=10), інакше буде видано повідомлення про помилку. Результатом роботи блоку Given/odesolve є функція y(t), визначена на проміжку (t0,t1). Слід скористатися звичайними засобами Mathcad, щоб побудувати її графік або отримати значення функції в якій-небудь точці вказаного інтервалу, наприклад: y(3) =0.691.

Користувач має можливість вибирати між двома модифікаціями чисельного методу Рунге-Кутта. Для зміни методу необхідно натисненням правої кнопки миші на області функції odesolve викликати контекстне меню і вибрати в ньому один з двох пунктів: Fixed (Фіксований крок) або Adaptive (Адаптивний). За умовчанням застосовується перший з них, тобто метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком.

Графік розв'язання даного рівняння показаний на рис. 1. Зверніть увагу, що він відповідає отриманню розв'язку в матричному вигляді (лістинг 1), тому по осях відкладені відповідні стовпці, виділені з матриці оператором <>.

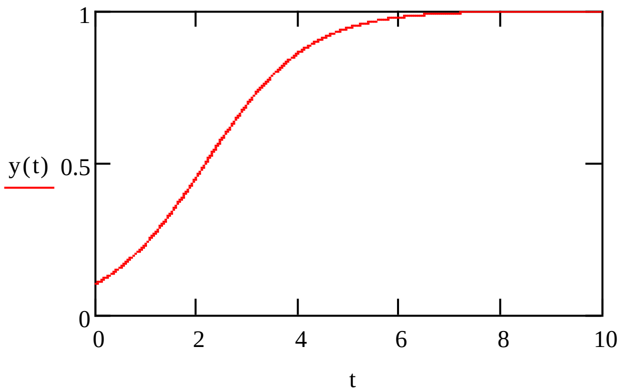


Рис. 1. Розв'язання рівняння y' =y-y² (лістинг 1)

Приклад, поданий в лістингу 1 та на рис.1, узятий з області математичної екології і описує динаміку популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією (людожери). Спочатку відбувається зростання чисельності популяції, близьке до експоненціального, а потім вихід на стаціонарний стан.

Системи ЗДР першого порядку

Для MathCad система диференціальних рівнянь має бути представлена в стандартній формі.

Задання системи еквівалентно наступному векторному представленню, де Y і B " – відповідні невідомі векторні функції змінної t розмірності N×1, а p – векторна функція тієї ж розмірності і (N+i) кількості змінних (N компонент вектора і, можливо, t). Саме векторне представлення використовується для введення системи ЗДР в середовищі Mathcad.

Задача сформульована для систем ЗДР першого порядку. Якщо в систему входять рівняння вищих порядків, її можна звести до системи більшого числа рівнянь першого порядку.

Вбудовані функції для розв'язання систем ЗДР

У Mathcad є три вбудовані функції, які дозволяють вирішувати задачу Коші для систем рівнянь різними чисельними методами.

- rkfixed(y0, t0, t1, M, D) — метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком,
- Rkadapt(y0, t0, t1, M, D) — метод Рунге-Кутта зі змінним кроком;
- Buistoer(y0, t0, t1, M, D) — метод Булирша-Штера;
    - y0 — вектор початкових значень в точці to розмірності $N \times 1$;
    - t0 — початкова точка розрахунку,
    - t1 — кінцева точка розрахунку,
    - M — число кроків, на яких чисельний метод знаходить розв'язок;
    - D — векторна функція розмірності N*1 двох аргументів — скалярного t та векторного y . При цьому y — шукана векторна функція аргумента t тієї ж розмірності $N \times 1$.

Кожна з наведених функцій видає розв'язок у вигляді матриці розмірності $(M+1) \times (N+1)$. У її лівому стовпці знаходяться значення аргументу t, що ділять інтервал на рівномірні кроки, а в інших N стовпцях – значення шуканих функцій y0(t), y1(t) .., yn-1(t), розраховані для цих значень аргументу. Оскільки всього точок (окрім початкової) M, то рядків у матриці розв'язку буде всього M+1.

Лістинг 2. Розв'язання системи двох ЗДР за допомогою функції *rkfixed*

$$D(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 - 0.1 \cdot y_1 \end{pmatrix} \qquad y0 := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M := 100$$

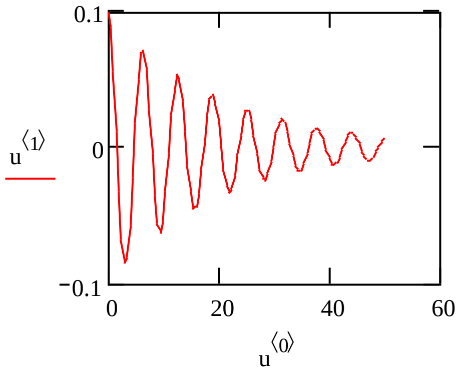
$$u := \mathrm{rkfixed}(y0, 0, 50, M, D)$$

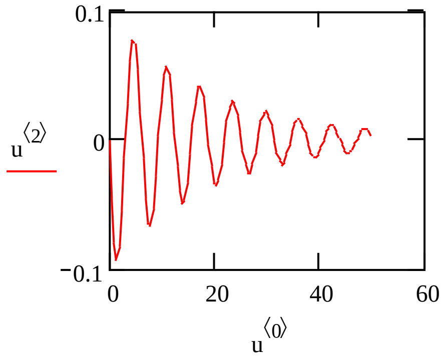
По-перше, функція D, що входить до числа параметрів вбудованих функцій для розв'язання ЗДР, має бути функцією обов'язково двох аргументів. По-друге, другий її аргумент має бути вектором тієї ж розмірності, що і сама функція D. По-третє, така сама розмірність має бути і у вектора початкових значень y0 (він визначений у першому рядку лістингу правіше).

У другому рядку лістингу визначено число кроків, на яких розраховується розв'язок, а його останній рядок надає матричній змінній результат дії функції *rkfixed*. Розв'язання системи ЗДР буде здійснено на проміжку (0, 50).

u =

	0	1	2
85	42.5	$-4.397\cdot10^{-4}$	0.012
86	43	$5.181\cdot10^{-3}$	0.01
87	43.5	$9.291\cdot10^{-3}$	$6.014\cdot10^{-3}$
88	44	0.011	$6.666\cdot10^{-4}$
89	44.5	$9.974\cdot10^{-3}$	$-4.579\cdot10^{-3}$
90	45	$6.634\cdot10^{-3}$	$-8.475\cdot10^{-3}$
91	45.5	$1.874\cdot10^{-3}$	-0.01
92	46	$-3.1\cdot10^{-3}$	$-9.338\cdot10^{-3}$
93	46.5	$-7.092\cdot10^{-3}$	$-6.329\cdot10^{-3}$
94	47	$-9.197\cdot10^{-3}$	$-1.957\cdot10^{-3}$
95	47.5	$-9.004\cdot10^{-3}$	$2.668\cdot10^{-3}$
96	48	$-6.674\cdot10^{-3}$	$6.431\cdot10^{-3}$
97	48.5	$-2.865\cdot10^{-3}$	$8.476\cdot10^{-3}$
98	49	$1.442\cdot10^{-3}$	$8.399\cdot10^{-3}$
99	49.5	$5.194\cdot10^{-3}$	$6.322\cdot10^{-3}$
100	50	$7.523\cdot10^{-3}$	$2.838\cdot10^{-3}$





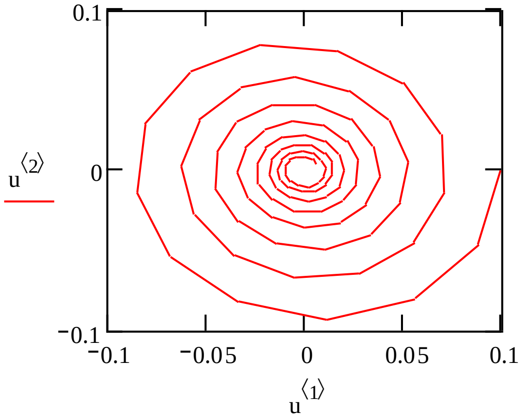


Рис.2. Розв'язання системи з двох ЗДР (лістинг 2) за допомогою функції rkfixed

Фазовий портрет типу, побудованого на рис. 2 (останній графік), має одну стаціонарну точку (аттрактор), на яку "накручується" розв'язок. В теорії динамічних систем аттрактор такого типу називається фокусом.

Приклад розв'язання ЗДР у MathCad за допомогою функції rkfixed

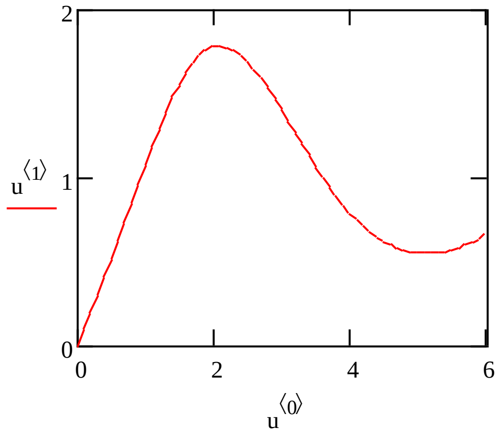
$$D(x,y) := \left[1 + 1.4\cdot\left(y_0\right)\cdot\sin(x) - \left(y_0\right)^2\right]$$

$$y0 := (0)$$

$$M := 60$$

$$u := \mathrm{rkfixed}(y0, 0, 6, M, D)$$

$$f(i) := u(i, 0)$$



u =

	0	1
0	0	0
1	0.1	0.1
2	0.2	0.201
3	0.3	0.303
4	0.4	0.408
5	0.5	0.515
6	0.6	0.624
7	0.7	0.735
8	0.8	0.848
9	0.9	0.961
10	1	1.074
11	1.1	1.183
12	1.2	1.288
13	1.3	1.387
14	1.4	1.477
15	1.5	1.558

Рис.3. Розв'язання одного ЗДР і побудова графіка за допомогою функції rkfixed

Проглянути всі компоненти матриці і, які не вміщуються на екрані, можна за допомогою вертикальної смуги прокрутки. Щоб побудувати графік розв'язку, треба відкласти відповідні компоненти матриці розв'язку по координатних осях: значення аргументу $u^{\langle 0\rangle}$ – вздовж осі x, а $u^{\langle 1\rangle}$ і $u^{\langle 2\rangle}$ – вздовж осі y. Для виділення з матриці стовпчика слід скористатися $M^{<>}$ на панелі матриць або функцією *submatrix*. Як відомо, розв'язання звичайних диференціальних рівнянь часто зручніше представляти не у такому вигляді, а у фазовому просторі, по кожній з осей якого відкладаються значення кожної із знайдених функцій. При цьому аргумент входить в них лише параметрично. Для його побудови потрібно було лише поміняти мітки осей на $u^{\langle 1\rangle}$ і $u^{\langle 2\rangle}$, відповідно.

2. Завдання

Методами Рунге-Кутта та Адамса розв'язати задачу Коші. На початку інтервалу у необхідній кількості точок значення для методу Адамса визначити методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Для фіксованого h потрібно навести:

- значення наближеного розв'язку $y(x)$ у тих самих точках, одержані обома методами;
- значення функції помилки $\varepsilon(x)$ для обох методів;
- графіки:
  - обох наближених – на одному малюнку;
  - обох помилок – на другому малюнку.

Розв'язати задане рівняння за допомогою Matchad, порівняти із власними результатами.

Розв'язати за допомогою Matchad систему рівнянь, побудувати графік y_0 та фазовий портрет системи $u^{<2>}(u^{<1>})$, зробити висновки щодо стійкості системи.

3 Варіанти завдань

№ вар.	Рівняння
1 - 5	$y' = 1 + ay\sin x - y^2,\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = \text{№}вар.$
6 - 10	$y' = e^{-ax}(y^2 + b),\ a = 1{,}0 + 0{,}4n,\ n = \text{№}вар - 5,\ b = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = \text{№}вар - 5$

11 - 15	$y' = \cos(ax + y) + (x - y),\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = №вар - 10$
16 – 20	$y' = 1 - \sin(ax + y) + \dfrac{by}{2 + x},\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ b = 1{,}0 + 0{,}8k,\ k = №вар - 15$
21 - 31	$y' = \dfrac{\cos y}{a + x} + y^2,\ a = 1{,}0 + 0{,}4k,\ k = №вар - 20.$

Взяти крок h = 0,1. Якщо вимоги на величину τ (див. метод Рунге-Кутта) для даного кроку не виконано, подрібнити крок. Початкові умови $y(0)=0$. Відрізок, що розглядається: [0; 1].

Розв’язати за допомогою Mathcad систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -y_0 + \dfrac{(k-10)}{10} \cdot y_1 \end{cases}$$

де $y_0(0) = 0.1$, $y_1(0) = 0$, k – № варіанту, тобто № у списку групи.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідне рівняння;
- значення наближеного розв'язку $y(x)$ у тих самих точках, одержані обома методами;
- спільний графік значень обох наближених методів;
- значення функції помилки ε для обох методів у всіх точках x_i;
- спільний графік помилок ε для обох методів;
- графік y_0 та фазовий портрет системи;
- лістинг програми.