boikomyk_knapsack_report_2

October 28, 2021

---

1 NI-KOP

Author: Mykyta Boiko

CTU login: boikomyk

1.1 Report #2

1.2 1. Popis alogritmu

Dále budou následovat krátké popisy každého použitého algoritmu v experementech:

- Brand & Bounds
- Dynamic programming (decomposition by weight)
- Dynamic programming (decomposition by price)
- Greedy
- Redux
- FPTAS

Kazdy algoritmus je již do detailů popsaný a okomentovaný přímo v kódu. Tady budou uvedené pouze krátké popisy.

1.2.1 1.1 Branch & Bounds

Tento algoritm už je dobře popsaný v předchozím reportu (a komentáře přímo v kódu).

1.2.2 1.2 Dynamic programming

Hlavní myšlenka **Dynamic Programming** v případě problémů batohu je použití tabulky kam se ukládají řešení všech podproblému (všechny možné hodnoty cen/vah, v závislosti na zvoleném typu dekompozici, které mohou vzninkout při přidání věci do batohu). Pokud v průběhu řešení znovu narážíme na již řešeny podproblém, tak stačí vzít řešení v tabulce, aniž byste podproblém museli znovu řešit.

Je třeba poznamenat, že nalezené řešení je vždy optimální, neboť algoritmus vytvoří tabulku pro celý strom všech možných výsledků. Stejně je nutné říct, že algoritmus je pseudopolynomiální, jelikož doba běhu je **O(NW)** nebo **O(N*sum_of_all_items_prices) **pro neomezený problém batohu s** N **položkami a batohem velikosti** W **(**W** však není polynomiální vůči délce vstupu).

Což už klidně umožňuje Nám odpovědět na jeden z kladených dotazů, že složitost algoritmu závisí na parametru, který nemá nic společného s velikostí.

1.2.1 Decomposition by weight

V případě dokompozice podle váhy tabulka má nalsedujci parametry: - počet řádku je stejný jako celkový počet věci daný pro danou instanci problémů

- počet sloupců je rovný kapacitě/nosnosti batohu (maximlani povolena váha)

Jinak řečeno, to znamená, že každý řádek reprezentuje řešení problémů pro počet předmětů, který se rovná indexu řádku. Stejně tak sloupce reprezentují všechny možné výsledky vah (pro všechny kombinace všech správných řešení). Což vede na to, že buňka[i,j] reprezentuje cenu takové kombinace. Finální výsledek je uloženy v posledním řádku (maximální hodnota v posledním řádku).

Tabulka se staví následovně: (Zkrácený kód..)

```
for item_index in range(items_indexes_rows_cnt + 1):
    for capacity_index in range(capacity_columns_cnt + 1):
        ...
        #  if weight of current item is lower or equal to the remaining knapsack's capacity th
        if current_item.weight <= capacity_index:
            # return the maximum of two cases:
            # - current item included or
            # - not included
            memory_table[item_index][capacity_index] = max(
                current_item.price + memory_table[item_index - 1][capacity_index - current_ite
                memory_table[item_index - 1][capacity_index]
            )
        # otherwise current proceeding item cannot be included
        else:
            memory_table[item_index][capacity_index] = memory_table[item_index - 1][capacity_i
```

1.2.2 Decomposition by price

V podstatě přístup k řešení je skoro ten samy, avšak je nutné poznamenat další důležité rozdíly. Tabulka má nalsedujci parametry:

- počet řádku je stejný jako celkový počet věci daný pro danou instanci problémů
- počet sloupců je rovný sumě cen všech věci daně instance problému.

Finální výsledek je zase uloženy v posledním řádku (maximální hodnota, avšak je nutné aby byla splněna podmínka: $hodnota\_buňky <= knapsack\_capacity$)

Tabulka se staví zase následovně: (Zkrácený kód..):

```
for knapsack_current_price in range(2, items_total_sum + 1):
    for item_index in range(1, items_total_count + 1):
        ...

        index = knapsack_current_price - current_item.price
        if index < 0:
            # if index is negative, the weight remains the same
            memory_table[knapsack_current_price][item_index] = previous_weight
        else:
```

```python
            # otherwise
            # resolve weight to add (zero or weight of current proceeding item)
            weight_to_add = current_item.weight if memory_table[index][item_index - 1] != infin
            # W(c, i) = min(W(c, i - 1), W(c, i - 1 ) + w_c) for any c > 0
            memory_table[knapsack_current_price][item_index] = min(previous_weight, memory_tabl
```

1.2.3 1.3 Greedy

Hlavni myslenka **Greedy** pristupu k reseni je super jednoducha: seřadit všechny veci sestupně podle jejich poměru:

$$pomr = \frac{cena}{vaha}$$

a přidávat veci postupně, dokud není batoh plný.

Je nejrychlejší metodou pro řešení batohu, její složitost závisí na složitosti použitého řazení (zpravidla je **O(nlogn)**).

Ale není zandá 100% garance, že nalezené řešení bude optimální, neboť třeba pouze jedna věc s maximální cenou a zároveň vahou může být řešením, ale kvůli nízkému poměru nejspíš bude ignorována algoritmem. (Tento případ řeší modifikace **Redux**, která bude popsána trošku dál)

U tohoto algoritmu je nutné zavést další pojem: **Relativní chyba**, která se vypočítá následovně:

$$chyba = \frac{|cena_{een} - cena_{reference}|}{max(cena_{een}, cena_{reference})}$$

1.2.4 1.4 Redux

Redux je vylepšením(/modifikace) předchozí heuristiky (vlastně řeší ten případ s jednou věci s maximální cenou a vahou).

Nejdřív pro danou instanci nalezneme řešení popsanou **Greedy** heuristikou. Pak vytvoříme další batoh s jednou nejrdazsi věci a porovnáme obě řešení. Lepší z těchto řešení (s větší cenou nebo stejnou cenou ale menší vahou) je pak řešením finálním.

1.2.5 1.5 FPTAS

Hlavní myšlenka algoritmu, v kominaci s **Dynamic programming s dekompozici podle ceny**, je snížení celkového prostoru pro prohledávání za předpokladu toho, že dovolujeme algoritmu dělat chyby.

Zavádíme maximální relativní chybu pro algoritmus a zmenšujeme sumu cen všech věci daného problémů, tím vlastně zmenšujeme velikost tabulky (kde, je nutné připomenout, počet sloupců je rovný sumě cen všech věci). Což vede na to, že suboptimální řešení bude nalezeno výrazně rychleji.

Takhle se modifikují věci, před tím jak řešit instanci pomoci Dynamic programmingu: (Zkrácený kód..):

```python
# resolve knapsack item with greatest price
max_price = max(item.price for item in knapsack_modified.items_list)
# calculate the denominator: K = (eps * C_M) / items_cnt
K = (error * max_price) / len(knapsack_modified.items_list)
```

```
# than build a modified items version: decrease prices
for modified_item in knapsack_modified.items_list:
    modified_item.price = int(modified_item.price / K)

# than modify knapsack object
knapsack_modified.min_req_price = int(knapsack_modified.min_req_price / K)
# solve modified knapsack instance with dynamic programming with decomposition by price
configurations_cnt, solution = Resolver.dynamic_programming_decomposition_by_price(
    knapsack=knapsack_modified
)
```

1.3 2. Předzpracování a načítání dát

Ted se pustíme do části načítání a předzpracování našich dát. Pro experimenty a příslušné měření vybereme následující sady dát: *NK4, NK10, NK15, NK20, NK25*

Rychlé připomeňme jak se spouští Nás program.

```
usage: main.py [-h] [-cnt COUNT] [-in INPUT] [-ref REFERENCE] [-err ERROR] [-b]
               {Brute Force,Branch & Bounds,Dynamic Programming decomposition by weight),Dynami
               price,Greedy,Redux,FPTAS}

Process input problem instances.

positional arguments:
  {Brute Force,Branch & Bounds,Dynamic Programming (decomposition by weight),Dynamic Programmin

optional arguments:
  -h, --help            show this help message and exit
  -cnt COUNT, --count COUNT
  -in INPUT, --input INPUT
                        paste path to input files
  -ref REFERENCE, --reference REFERENCE
                        paste path with references
  -err ERROR, --error ERROR
                        relative error
  -b, --benchmark       turn on/off benchmark
```

Stejně uvedeme příklad spouštění:

```
python3.9 main.py fptas -cnt=1 -in=data/task_2/NK/NK15_inst.dat -ref=data/task_2/NK/ --err=0.0
```

[241]:
```
# provide required imports
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

from typing import List
```

[137]:
```
# prepare help functions for data predprocessing
def read_and_store_csv_input_to_df(path_to_csv: str, algorithm: str,␣
↪instance_size: int, accuracy_value = None):
    # read csv input
    df = pd.read_csv(path_to_csv, delimiter="\t", index_col=False)
    # set additinial columns
    df['INSTANCE_SIZE'] = instance_size
    df['ALGORITHM'] = algorithm
    if accuracy_value:
        df['ACCURACY_VALUE'] = accuracy_value
    return df
```

[138]:
```
# define required vars

# constants representing paths to algorithms csv outputs
PATH_TO_CSV_OUTPUTS = 'measures/NK/' # all, but excluding fptas
PATH_TO_CSV_OUTPUTS_FPTAS = 'measures/NK/fptas'

ALGORITHMS = {
    'bb'    : 'Branch & Bounds',
    'dp_dw' : 'Dynamic Programming (decomposition by weight)',
    'dp_dp' : 'Dynamic Programming (decomposition by price)',
    'greedy': 'Greedy',
    'redux' : 'Redux',
    'fptas' : 'FPTAS'
}

INSTANCES_SIZES = [
    4,
    10,
    15,
    20,
    25
]

ACCURACY_VALUES = [
    0.1,
    0.4,
    0.7
]
```

[155]:
```
# prepare storage for algorithms outputs
algorithms_outputs = {}

# read and proceed early prepared csv files containing outputs
for algorithm in ALGORITHMS.keys():
    algorithms_outputs[algorithm] = []
```

```python
    for instance_size in INSTANCES_SIZES:

        if algorithm == 'fptas':
            for accuracy_value in ACCURACY_VALUES:
                df = read_and_store_csv_input_to_df(
                    path_to_csv=f'{PATH_TO_CSV_OUTPUTS_FPTAS}/
↪{algorithm}-{instance_size}-measures-err-{accuracy_value}.csv',
                    algorithm=algorithm,
                    instance_size=instance_size,
                    accuracy_value=accuracy_value
                )
                algorithms_outputs[algorithm].append(df)

        else:
            df = read_and_store_csv_input_to_df(
                path_to_csv=f'{PATH_TO_CSV_OUTPUTS}/
↪{algorithm}-{instance_size}-measures.csv',
                algorithm=algorithm,
                instance_size=instance_size
            )
            algorithms_outputs[algorithm].append(df)

    # concatenate all dataframes of certain alogrithm to single dataframe
    algorithms_outputs[algorithm] = pd.concat(algorithms_outputs[algorithm]).
↪reset_index()
```

[141]:
```python
# Let's display random 10 rows from fptas outputs, to make sure, that csv files␣
↪were proceeded correctly
algorithms_outputs['fptas'].sample(10)
```

[141]:
```
      index  STEPS  TIME[ms]     ERROR  INSTANCE_SIZE ALGORITHM  \
6492    492  11850  7562.987  0.000000             25     fptas
5081     81   6600  4308.566  0.000000             20     fptas
2961    461    810   607.420  0.000000             10     fptas
6180    180  12675  8231.245  0.000000             25     fptas
5991    491   5120  3487.997  0.006469             20     fptas
98       98     64   130.642  0.000000              4     fptas
477     477     56    96.567  0.000000              4     fptas
4818    318   4680  3114.924  0.002544             20     fptas
673     173     28    84.039  1.000000              4     fptas
2556     56    640   502.719  0.000000             10     fptas

      ACCURACY_VALUE
6492             0.1
5081             0.4
2961             0.7
```

```
6180            0.1
5991            0.7
98              0.1
477             0.1
4818            0.1
673             0.4
2556            0.7
```

Máme úspěšně načtena data. Ted si nadefinujeme vlastní univerzální funkci pro analýzu dát a pak se klidně můžeme pustit přímo do analýzy.

[180]:
```
def display_basic_dataframe_analyse(
    df_data: pd.DataFrame,
    additional_values_to_analyze: List[str] = [],
    additional_indexes: List[str] = []
):
    # default values to analyze: STEPS and TIME
    values = ['STEPS', 'TIME[ms]', 'ERROR'] + additional_values_to_analyze
    # default indexes: ALGORITHM and INSTANCE_SIZE
    indexes = ['ALGORITHM', 'INSTANCE_SIZE'] + additional_indexes
    # default funcs to execute on values: min, mean, max and standard deviation
    funcs = [np.min, np.mean, np.max, np.std]

    statistics_for_algorithms = ''
    for algorithm_key in df_data['ALGORITHM'].unique():
        statistics_for_algorithms += f', {ALGORITHMS[algorithm_key]}' if␣
 ↪len(statistics_for_algorithms) else ALGORITHMS[algorithm_key]

    print(f"="*100)
    print(f"{statistics_for_algorithms} algorithm: ")

    display(pd.pivot_table(
        data=df_data,
        values=values,
        index=indexes,
        aggfunc={value: funcs for value in values}
    ))
    print(f"="*100)
```

1.4 3. Analýza a interpretace dat

1.4.1 3.1 Branch & Bounds

[144]:
```
display_basic_dataframe_analyse(df_data=algorithms_outputs['bb'])
```

```
================================================================================
====================
Branch & Bounds algorithm:
```

```
                        ERROR                     STEPS                 \
                         amax amin mean  std       amax amin       mean
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
bb        4               0.0  0.0  0.0  0.0       12.0  1.0      5.624
          10              0.0  0.0  0.0  0.0      220.0  1.0     45.480
          15              0.0  0.0  0.0  0.0     1929.0  8.0    259.440
          20              0.0  0.0  0.0  0.0    14291.0  1.0   1597.742
          25              0.0  0.0  0.0  0.0   129550.0  4.0   7973.566

                                         TIME[ms]                          \
                                std          amax    amin            mean
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
bb        4                1.660162      366.228  10.057       26.916506
          10              32.571943      986.995   8.957      163.668658
          15             264.984596     6665.111  37.586      907.505354
          20            1902.197535    49899.721  19.323     6241.192244
          25           12108.024599   583647.142  35.734    35010.976852


                                std
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
bb        4               16.978612
          10             115.350458
          15             936.983838
          20            7526.919542
          25           55210.389141
================================================================================
====================
```

Algoritmus, analýza měření a výsledků již byly dopodrobna popsané v prvním reportu.

Ted stojí za zmínku jen to, že algoritmus má exponenciální složitost a závislost na konkrétních instancích. Důkazem toho třeba je velký rozdíl mezi průměrnou a maximální hodnotou počtu kroku. Například u instanci velikosti **20** průměr je *1597.742*, avšak maximální hodnota počtu kroku je *14291.0*, což je skoro o *9*-krať větší.

Stejně tak algoritmus je velmi citlivý na instance s věcmi s podobným poměrem cena/váha, kde optimalizační kritérium stavový prostor prořezává nedostatečně a složitost velmi rychle roste. Nalezené řešení je vždy optimální, maximální hodnota chyby je nulová.

1.4.2 3.2 Dynamic Programming (Decomposition by weight & price)

[145]:
```
display_basic_dataframe_analyse(df_data=algorithms_outputs['dp_dw'])
display_basic_dataframe_analyse(df_data=algorithms_outputs['dp_dp'])
```

```
================================================================================
====================
Dynamic Programming (decomposition by weight) algorithm:
```

		ERROR				STEPS			\
		amax	amin	mean	std	amax	amin	mean	
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE								
dp_dw	4	0.0	0.0	0.0	0.0	3690.0	10.0	1229.550	
	10	0.0	0.0	0.0	0.0	19756.0	11.0	6725.466	
	15	0.0	0.0	0.0	0.0	36112.0	128.0	15327.456	
	20	0.0	0.0	0.0	0.0	62475.0	42.0	27838.902	
	25	0.0	0.0	0.0	0.0	96720.0	234.0	40284.348	

			TIME[ms]			\
		std	amax	amin	mean	
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE					
dp_dw	4	769.331196	2010.594	9.150	515.788654	
	10	4024.944172	10742.914	16.918	3702.496920	
	15	8914.713796	20003.144	69.241	8470.421908	
	20	15826.930567	36632.905	35.468	15920.741664	
	25	23053.287459	58337.457	103.172	23184.375556	

		std
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE	
dp_dw	4	363.017824
	10	2399.002491
	15	5197.601250
	20	9440.883398
	25	13797.329423

```
================================================================================
====================
================================================================================
====================
```

Dynamic Programming (decomposition by price) algorithm:

		ERROR				STEPS			\
		amax	amin	mean	std	amax	amin	mean	
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE								
dp_dp	4	0.0	0.0	0.0	0.0	35872.0	4596.0	20262.608	
	10	0.0	0.0	0.0	0.0	193340.0	59470.0	124602.940	
	15	0.0	0.0	0.0	0.0	405210.0	159405.0	279350.820	
	20	0.0	0.0	0.0	0.0	697420.0	347960.0	501462.440	
	25	0.0	0.0	0.0	0.0	1057700.0	528600.0	774038.750	

			TIME[ms]			\
		std	amax	amin	mean	
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE					
dp_dp	4	5712.326794	27447.888	3442.997	15170.583108	
	10	21693.422180	167603.314	41983.801	87811.524090	
	15	40020.262973	278103.537	111082.817	189713.137648	
	20	61164.559961	513808.724	231492.178	351419.924282	

```
25              88281.680971  967276.709  376841.109  566542.401054


                                     std
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
dp_dp     4                  4410.337713
          10                16404.809475
          15                27818.620667
          20                45935.448949
          25                76567.895138
================================================================================
====================
```

Vlastně **Dynamic Programming** je algoritmus s relativně dobrou složitostí, ale vysokou paměťovou náročností. Maximální složitost algoritmu je závislá na součinu *počet věci***nosnost batohu*(/*celková suma* věci).

Jak již bylo zmíněno dříve, algoritmus je optimální a vždy najde nejlepší optimální řešení, neboť stavíme tabulku celého prostoru všech možných řešení, plus je vidět z vypsané statistiky výš, že maximální chyba pro oba dva typy dekompozice je nulová.

Počet kroku je vždy ekvivalentní velikosti postavené dynamické tabulky.

Je třeba poznamenat, že čas byl měřen v microsekundech. A že statistiky je vidět, že je velký rozdíl v času mezi dekompozici podle ceny a podle váhy. Dekompozice podle ceny trvá mnohem déle. Stejně tak, jak již bylo zmíněno dříve, algoritmus je pseudopolynomiální a doba běhu je **O(N*velikost_batohu) nebo O(N*sum_of_all_items_prices)**, v zavilsoti na typu dekompozici.

Pro většinu instancí problémů platí, že velikost(/nosnost) batohu je striktně menší než suma cen všech věci, proto tabulku, kterou stavíme při dekompozici podle váhy, měla by být menší velikosti a stejně tak, čas který potřebujeme pro stavbu takové tabulky bude mnohem menší.

1.4.3 3.3 Greedy

[147]:
```
display_basic_dataframe_analyse(df_data=algorithms_outputs['greedy'])
```

```
================================================================================
====================
Greedy algorithm:
                            ERROR                               STEPS             \
                             amax amin      mean       std  amax  amin  mean
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
greedy    4              0.359189  0.0  0.014534  0.050958   4.0   4.0   4.0
          10             0.531453  0.0  0.013041  0.041269  10.0  10.0  10.0
          15             0.236835  0.0  0.009684  0.022893  15.0  15.0  15.0
          20             0.430054  0.0  0.008604  0.025896  20.0  20.0  20.0
          25             0.152880  0.0  0.007245  0.015007  25.0  25.0  25.0
```

```
                              TIME[ms]
                          std     amax    amin       mean        std
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
greedy    4               0.0   29.905   3.967   5.403292   2.542194
          10              0.0   59.177   7.364  10.106590   4.033660
          15              0.0  253.113  10.419  14.654252  11.448185
          20              0.0   53.640  13.472  17.913444   3.762631
          25              0.0   84.023  16.604  22.513690   6.068293

================================================================================
====================
```

U **Greedy** alogoritmu hlavně soustředíme na relativních chybách. Ale předtím ještě probereme pár důležitých detailů.

Greedy algoritmus nevede vždy k optimálnímu řešení, ale pokud ano, je to obvykle nejjednodušší a nejefektivnější dostupný algoritmus. Slozitost algoritmu je závislá na použitém řazení, nebot hlavním časově náročným krokem je seřazení všech položek v sestupném pořadí podle poměru jejich hodnoty a hmotnosti.

Ze statistiky je vidět, že počet kroku je vždy roveň velikosti instanci. Co se týče chyb, tak třeba u instanci velikosti **20** maximální chyba je **43%**. Je to docela velká odchylka od lepšího řešení, přestože maximální čas pro tu samou instanci je *53.640 mikrosekund* (průměr je *17.913444 mikorsekund*), což je docela rychle (neboť bereme do úvahy, že to je čas pro prostor všech možných řešení velikosti $2^{20} = 1048576$). Maximální hodnota chyby je však u instanci velikosti **10** a je **53%**.

Celkem dá se říct, že hodnoty chyb jsou docela velké. Maximální chyba u všech instancí je v intervalu **<15%, 53%>**.

1.4.4 3.4 Redux

[151]:
```
display_basic_dataframe_analyse(df_data=algorithms_outputs['redux'])
```

```
================================================================================
====================
Redux algorithm:

                            ERROR                               STEPS       \
                             amax amin      mean       std  amax  amin
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
redux     4              0.198842  0.0  0.001215  0.013909   8.0   5.0
          10             0.128065  0.0  0.003478  0.015054  20.0  11.0
          15             0.115781  0.0  0.005181  0.015873  30.0  16.0
          20             0.126417  0.0  0.005565  0.015498  40.0  22.0
          25             0.124240  0.0  0.005337  0.012197  50.0  33.0

                                            TIME[ms]                      \
                           mean       std     amax    amin       mean
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
redux     4               7.840  0.543130   36.814   7.236  10.694928
          10             19.324  1.562019   55.228  12.993  20.372066
```

```
           15             29.014  2.342815  263.138  17.947  28.809288
           20             39.086  2.410441   83.727  21.823  37.296062
           25             49.046  2.713413   96.347  28.214  42.962254


                                std
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
redux     4                3.040697
          10               5.312274
          15              12.108254
          20               7.958808
          25               8.613021
================================================================================
====================
```

Algoritmus **Redux** je vylepšením předchozí heuristiky. Složitost je opět závislá na použitém řazení. Celkem, dá se říct, že je to dobrá optimalizace předchozího alogoritmu. Maximální hodnoty chyb jednotlivých instanci se zmenšily. Třeba u predchozicho algoritmu maximální hodnota chyby u instanci veliksoti **10** byla **53%**. Ted chyba je **12%**, což je skoro o 4-krať menší.

Maximální chyba u všech instancí je v intervalu **<11%, 20%>**.

1.4.5 3.5 FPTAS

[156]:
```
display_basic_dataframe_analyse(
    df_data=algorithms_outputs['fptas'],
    additional_indexes=['ACCURACY_VALUE']
)
```

```
================================================================================
====================
FPTAS algorithm:
                                            ERROR                           \
                                             amax amin      mean       std
ALGORITHM INSTANCE_SIZE ACCURACY_VALUE
fptas     4             0.1              1.000000  0.0  0.002527  0.045528
                        0.4              1.000000  0.0  0.024296  0.140808
                        0.7              1.000000  0.0  0.041386  0.167548
          10            0.1              0.002134  0.0  0.000026  0.000181
                        0.4              0.078431  0.0  0.001016  0.005343
                        0.7              0.118961  0.0  0.002934  0.011433
          15            0.1              0.003003  0.0  0.000026  0.000186
                        0.4              0.008150  0.0  0.000265  0.000996
                        0.7              0.023352  0.0  0.000890  0.002666
          20            0.1              1.000000  0.0  0.002011  0.044721
                        0.4              1.000000  0.0  0.002119  0.044719
                        0.7              1.000000  0.0  0.002448  0.044755
          25            0.1              0.000297  0.0  0.000002  0.000023
```

		0.4	0.004129	0.0	0.000094	0.000386
		0.7	0.006879	0.0	0.000227	0.000744

			STEPS			\
			amax	amin	mean	
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE	ACCURACY_VALUE				
fptas	4	0.1	596.0	168.0	392.488	
		0.4	140.0	32.0	90.024	
		0.7	72.0	16.0	44.912	
	10	0.1	8160.0	2900.0	5417.300	
		0.4	1990.0	690.0	1310.400	
		0.7	1110.0	360.0	725.440	
	15	0.1	25050.0	9810.0	17771.550	
		0.4	6165.0	2355.0	4348.380	
		0.7	3480.0	1290.0	2431.050	
	20	0.1	58080.0	28580.0	41951.400	
		0.4	14320.0	6980.0	10325.800	
		0.7	8180.0	3920.0	5804.920	
	25	0.1	116050.0	53350.0	80107.000	
		0.4	28750.0	13100.0	19776.650	
		0.7	16250.0	7250.0	11150.350	

				TIME[ms]		\
			std	amax	amin	
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE	ACCURACY_VALUE				
fptas	4	0.1	78.779377	705.151	169.463	
		0.4	19.821231	432.444	79.060	
		0.7	11.273973	512.110	66.366	
	10	0.1	880.987394	5822.647	1946.582	
		0.4	219.635880	1427.778	533.866	
		0.7	125.830334	969.475	328.209	
	15	0.1	2379.074155	16043.100	6317.047	
		0.4	595.391432	4380.618	1580.609	
		0.7	339.528506	2692.600	956.024	
	20	0.1	4890.069816	39299.029	18762.090	
		0.4	1223.019343	10733.324	4437.975	
		0.7	700.767825	7505.104	2586.010	
	25	0.1	8911.669974	76497.536	34057.211	
		0.4	2228.779586	20465.911	8226.254	
		0.7	1274.265920	12505.738	4826.498	

			mean	std
ALGORITHM	INSTANCE_SIZE	ACCURACY_VALUE		
fptas	4	0.1	338.197868	62.621351
		0.4	127.950296	27.421851
		0.7	99.616052	27.744885
	10	0.1	3736.817628	619.483077

```
                      0.4              957.555138   153.532134
                      0.7              577.542954    88.556156
          15          0.1            11584.509514  1564.535994
                      0.4             2888.149710   399.419578
                      0.7             1688.163262   232.617615
          20          0.1            28207.705946  3378.735709
                      0.4             6710.800106   838.029579
                      0.7             3927.172524   537.421206
          25          0.1            52107.984912  5950.421316
                      0.4            13238.634680  1827.324390
                      0.7             7291.147060   872.263055

================================================================================
====================
```

Kromě toho, že máme statistiky pro instanci velikosti **4**, **10**, **15**, **20**, **25**, navíc ještě na každé intanci byl spouštěn algoritmus **FPTAS** s (přesností) **0.1**, **0.4** a **0.7**.

Zajímá nás teď sloupec **mean** u chyby. Pozorujeme několik tendenci. Čím větší nastavujeme, tím se zvyšuje průměr chyby, avšak se zmenšuje průměrný čas běhu algoritmu. Při = 0.7 čas průměrný čas běhu se zmenšuje o 5-6-krať oproti = 0.1 a to skoro platí pro instanci všech velikosti. To znamená, že je závislost mezi nastavenou přesností a chybou, a ona není lineární.

Dá se říct, že u instanci menších velikostí průměrná hodnota chyby je větší než u větších instancí, a pravděpodobně je to ovlivněno velikosti prostoru řešení.

Ok, teď se klidně můžeme pustit do porovnání s algoritmem **Dynamic Programming**. Zvolíme výstupy **FPTAS** algoritmu jenom pro = 0.4.

[185]:
```
display_basic_dataframe_analyse(
    df_data=pd.concat([
        algorithms_outputs['dp_dp'],
        # only outputs wehre ACCURACY_VALUE == 0.4
        algorithms_outputs['fptas'].
 ↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.4]
    ])
)
```

```
================================================================================
====================
Dynamic Programming (decomposition by price), FPTAS algorithm:

                            ERROR                                    STEPS  \
                             amax amin      mean       std            amax
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
dp_dp     4              0.000000  0.0  0.000000  0.000000     35872.0
          10             0.000000  0.0  0.000000  0.000000    193340.0
          15             0.000000  0.0  0.000000  0.000000    405210.0
          20             0.000000  0.0  0.000000  0.000000    697420.0
          25             0.000000  0.0  0.000000  0.000000   1057700.0
fptas     4              1.000000  0.0  0.024296  0.140808       140.0
```

```
            10             0.078431  0.0  0.001016  0.005343     1990.0
            15             0.008150  0.0  0.000265  0.000996     6165.0
            20             1.000000  0.0  0.002119  0.044719    14320.0
            25             0.004129  0.0  0.000094  0.000386    28750.0

                                                                 TIME[ms]  \
                                amin        mean           std        amax
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
dp_dp     4                   4596.0   20262.608   5712.326794   27447.888
          10                 59470.0  124602.940  21693.422180  167603.314
          15                159405.0  279350.820  40020.262973  278103.537
          20                347960.0  501462.440  61164.559961  513808.724
          25                528600.0  774038.750  88281.680971  967276.709
fptas     4                     32.0      90.024     19.821231     432.444
          10                   690.0    1310.400    219.635880    1427.778
          15                  2355.0    4348.380    595.391432    4380.618
          20                  6980.0   10325.800   1223.019343   10733.324
          25                 13100.0   19776.650   2228.779586   20465.911


                                  amin           mean           std
ALGORITHM INSTANCE_SIZE
dp_dp     4                   3442.997   15170.583108   4410.337713
          10                 41983.801   87811.524090  16404.809475
          15                111082.817  189713.137648  27818.620667
          20                231492.178  351419.924282  45935.448949
          25                376841.109  566542.401054  76567.895138
fptas     4                     79.060     127.950296     27.421851
          10                   533.866     957.555138    153.532134
          15                  1580.609    2888.149710    399.419578
          20                  4437.975    6710.800106    838.029579
          25                  8226.254   13238.634680   1827.324390

================================================================================
====================
```

Ze statistiky je vidět, že **FPTAS** algoritmus je mnohem rychlejší, než jednoduchý **Dynamic Programming** s dekompozici podle ceny.

Třeba, pokud koukneme na instanci velikosti **25**, máme průměrný čas *566542.401054 mikrosekund VS 13238.634680 mikorsekund*, což znamená, že **FTPAS** je skoro o 42-krat rychlejší.

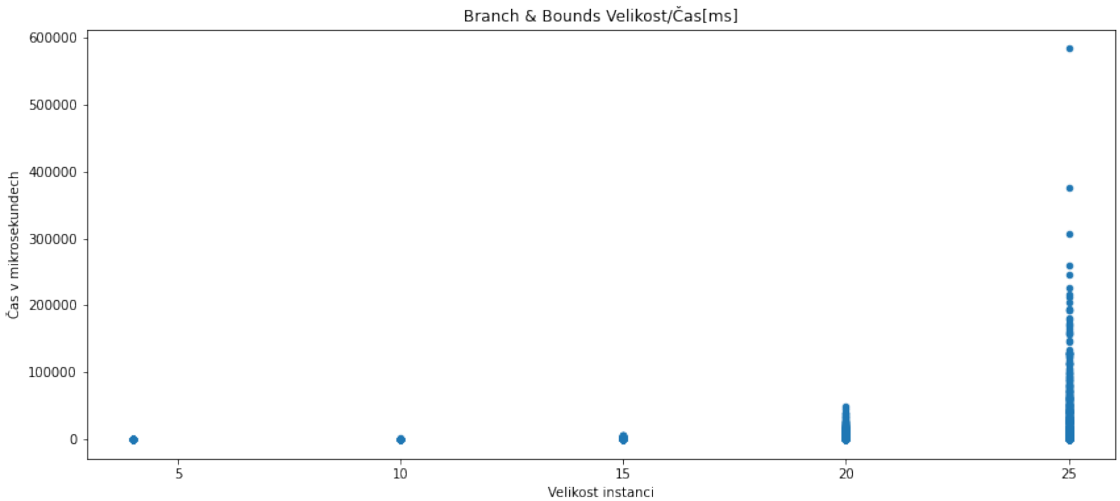
1.5 4. Grafy: velikost/čas[ms]

1.5.1 4.1 Branch & Bounds

[205]:
```
ax = algorithms_outputs['bb'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='TIME[ms]',
```

```
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Branch & Bounds Velikost/Čas[ms]'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Čas v mikrosekundech")
```

[205]: Text(0, 0.5, 'Čas v mikrosekundech')

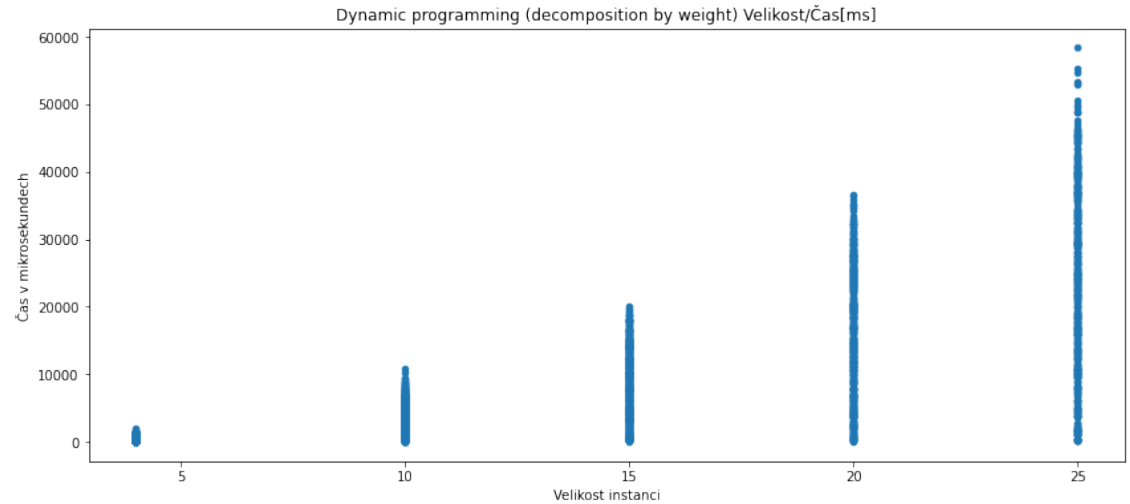


Jak již bylo už několikrát zmíněno dříve, složišť algoritmu je exponenciální. Na scatter grafu je vidět pár outlierů.

1.5.2 4.2 Dynamic programming (decomposition by weight)

[208]:
```
ax = algorithms_outputs['dp_dw'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='TIME[ms]',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Dynamic programming (decomposition by weight) Velikost/Čas[ms]'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Čas v mikrosekundech")
```

[208]: Text(0, 0.5, 'Čas v mikrosekundech')

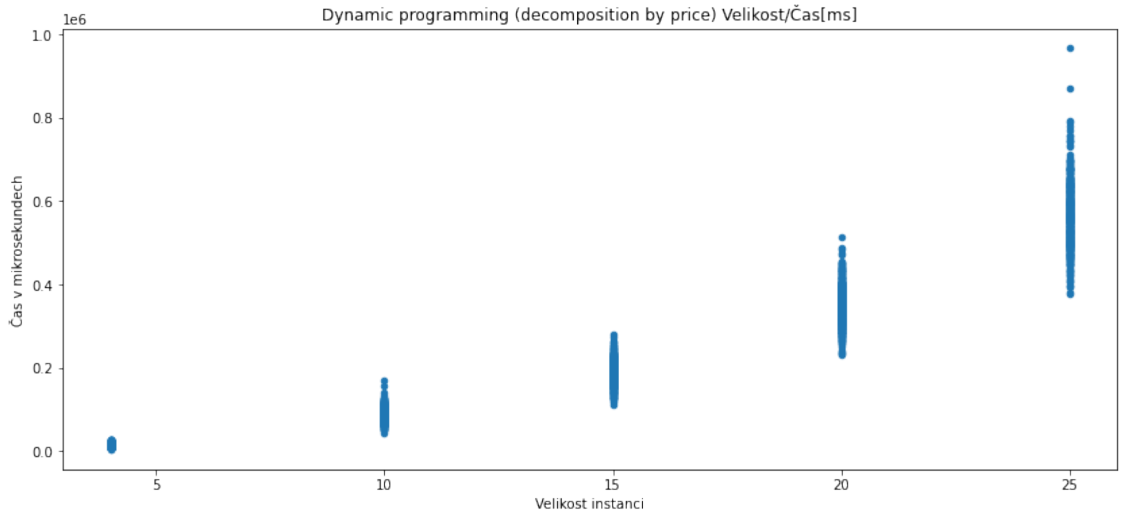


Žádnou závislost na grafu není vidět, neboť jak již bylo zmíněno, závislost je v tomto případě na velikosti(nosnost/maximální váha) batohu.

1.5.3 4.3 Dynamic programming (decomposition by price)

[210]:
```
ax = algorithms_outputs['dp_dp'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='TIME[ms]',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Dynamic programming (decomposition by price) Velikost/Čas[ms]'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Čas v mikrosekundech")
```

[210]: Text(0, 0.5, 'Čas v mikrosekundech')

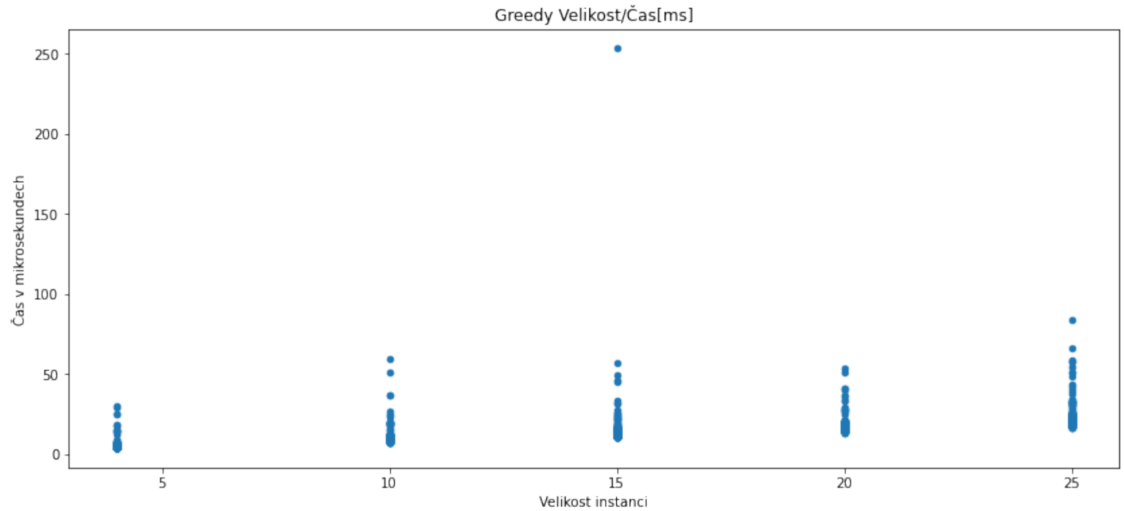


Zase nejde 100% určit závislost z nakresleného grafu, neboť cena není zobrazena na grafu.

1.5.4 4.4 Greedy

[212]:
```
ax = algorithms_outputs['greedy'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='TIME[ms]',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Greedy Velikost/Čas[ms]'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Čas v mikrosekundech")
```

[212]:
```
Text(0, 0.5, 'Čas v mikrosekundech')
```

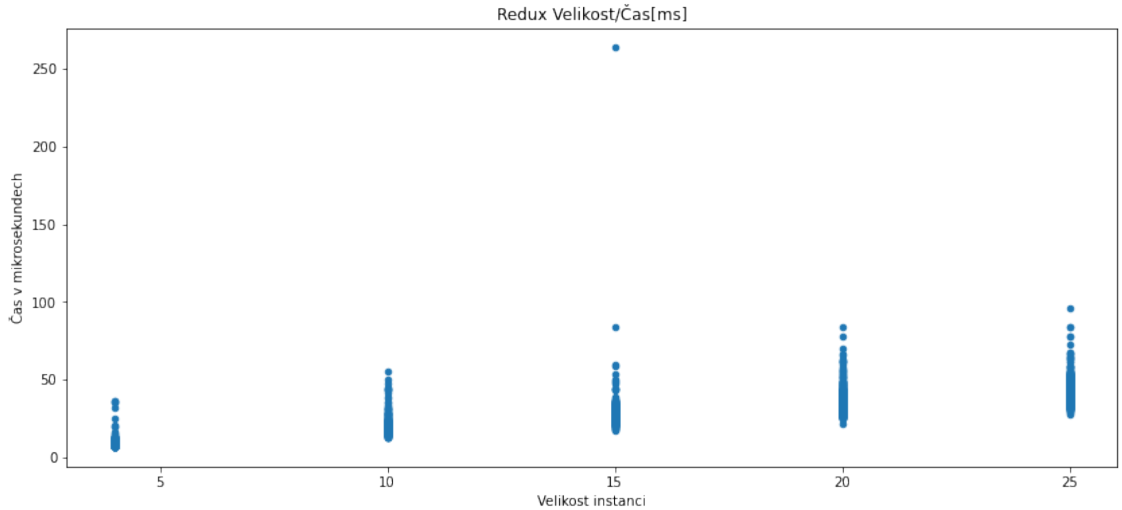


Z tohoto grafu je 100% vidět, že závislost je lineární.

1.5.5 4.5 Redux

[214]:
```python
ax = algorithms_outputs['redux'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='TIME[ms]',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Redux Velikost/Čas[ms]'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Čas v mikrosekundech")
```

[214]:
```
Text(0, 0.5, 'Čas v mikrosekundech')
```

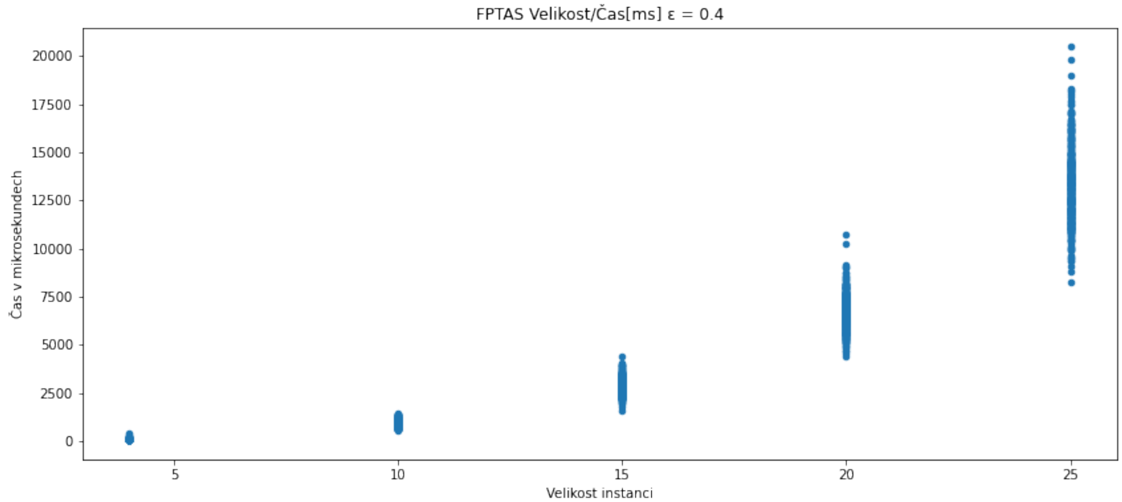


To samé, co i u předchozího **Greedy** algoritmu, závislost je lineární.

1.5.6 4.5 FPTAS

[221]:
```
# only for accuracy=0.4
ax = algorithms_outputs['fptas'].
 ↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.4].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='TIME[ms]',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='FPTAS Velikost/Čas[ms]   = 0.4'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Čas v mikrosekundech")
```

[221]: Text(0, 0.5, 'Čas v mikrosekundech')



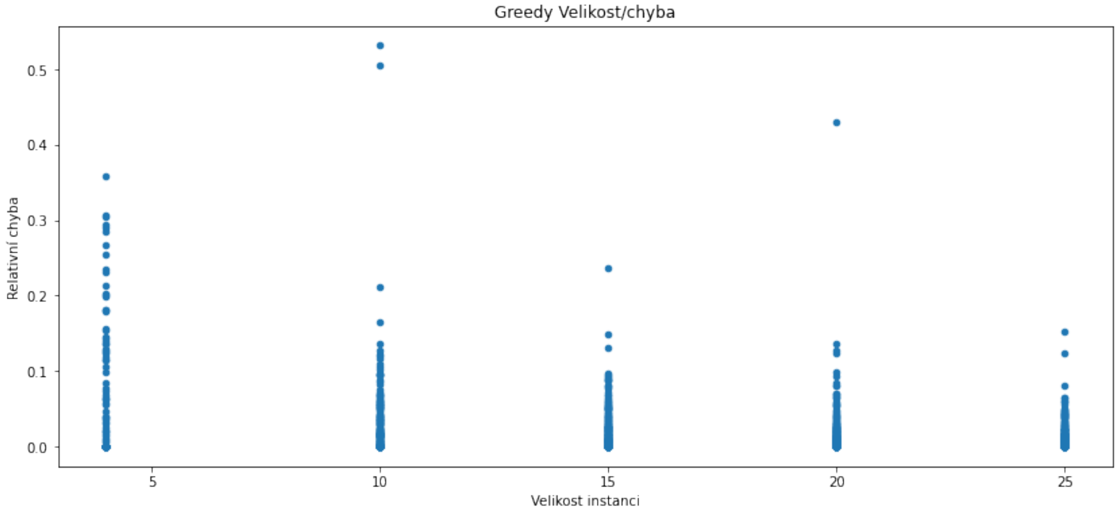
To samé, co i u **Dynamic Programming** s dekompozici podle ceny (neboť je vlastně nadstavba nad tím původním algoritmem).

1.6 5. Grafy: pozorování chyby

1.6.1 5.1 Greedy & Redux : závislosti relativní chyby na velikosti instance u obou heuristik

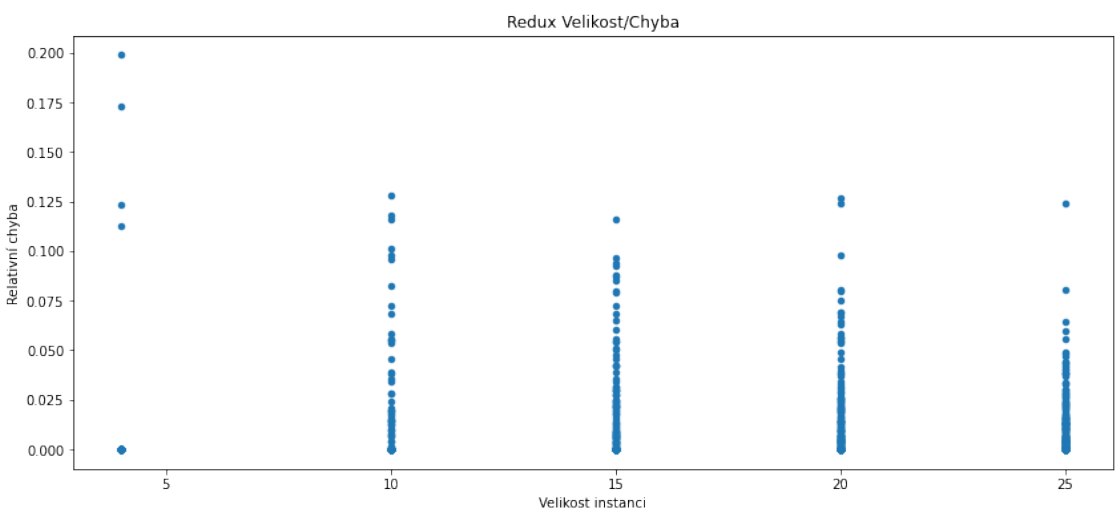
[236]:
```
ax = algorithms_outputs['greedy'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='ERROR',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Greedy Velikost/chyba'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Relativní chyba")
```

[236]: Text(0, 0.5, 'Relativní chyba')



[235]:
```
ax = algorithms_outputs['redux'].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='ERROR',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='Redux Velikost/Chyba'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Relativní chyba")
```

[235]: Text(0, 0.5, 'Relativní chyba')

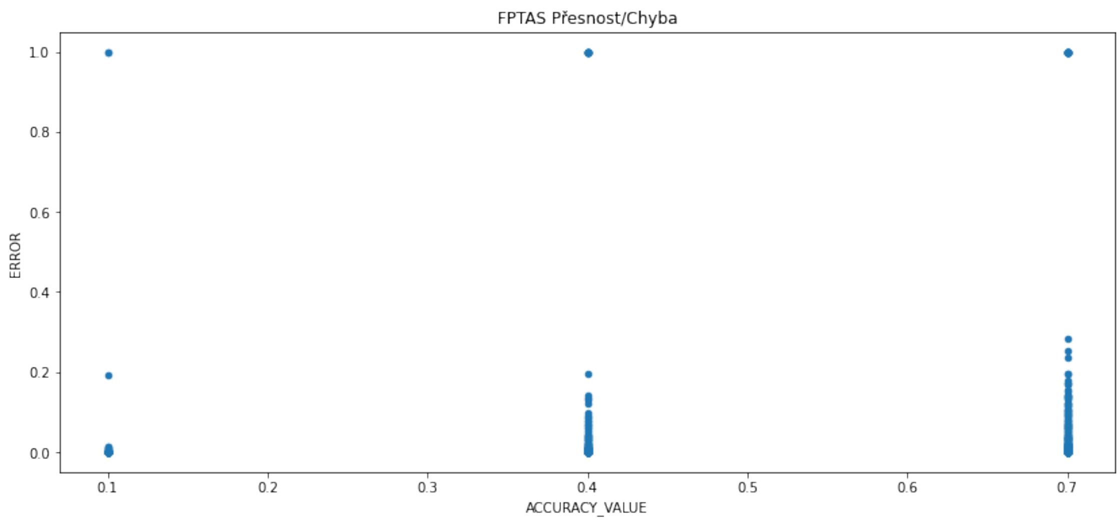


Jediné, co jde říct, a co platí pro obě dvě heuristiky, tak že relativní chyba se zmenšuje pro instanci větší velikosti. To jest, je závislost mezi počtem věci (velikost prostoru) a relativní chybou. Stejne je videt nekolik outlierů.

1.6.2 5.2 FPTAS : závislost chyby a výpočetního času algoritmu na zvolené přesnosti, srovnání maximální naměřené chyby s teoreticky předpokládanou

[239]:
```
print("="*35, " FPTAS Přesnost/chyba", "="*35)
ax = algorithms_outputs['fptas'].plot.scatter(
    x="ACCURACY_VALUE",
    y='ERROR',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='FPTAS Přesnost/Chyba'
)
```

```
===================================  FPTAS Přesnost/chyba
===================================
```



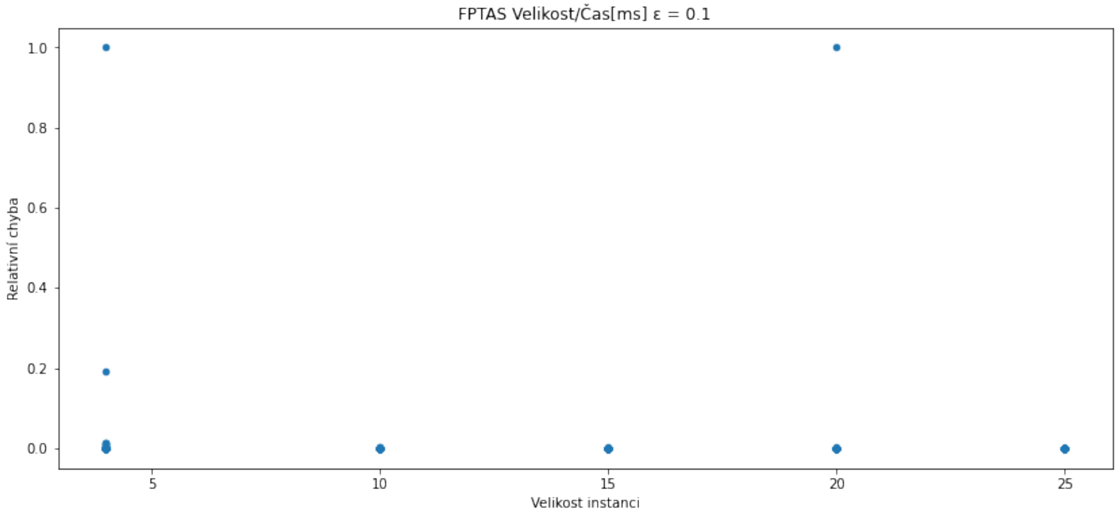
Při rostoucí přesností , taky narůstá velikost relativní chyby.

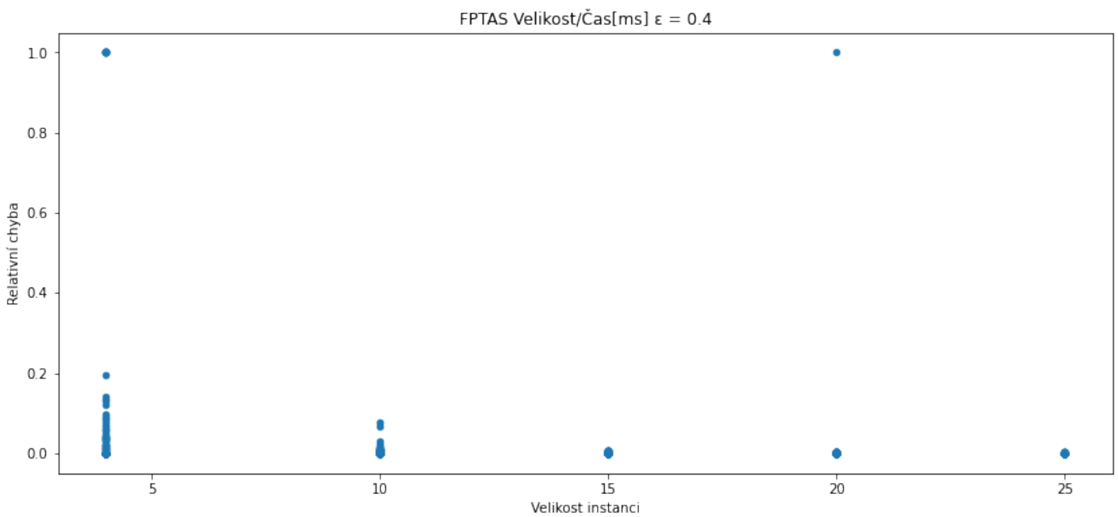
[234]:
```
print("="*35, " FPTAS Velikost/chyba, pro   = 0.1, 0.4, 0.7", "="*35)

#  =0.1
ax = algorithms_outputs['fptas'].
↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.1].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='ERROR',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
```

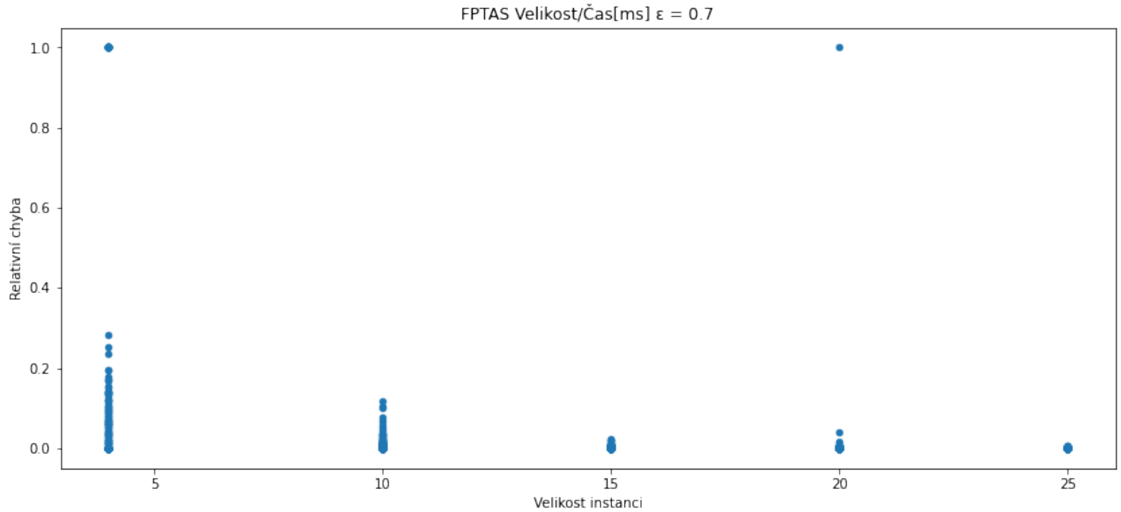
```
    title='FPTAS Velikost/Čas[ms]   = 0.1'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Relativní chyba")


# =0.4
ax = algorithms_outputs['fptas'].
↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.4].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='ERROR',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='FPTAS Velikost/Čas[ms]   = 0.4'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Relativní chyba")


# =0.7
ax = algorithms_outputs['fptas'].
↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.7].plot.scatter(
    x="INSTANCE_SIZE",
    y='ERROR',
    figsize=(14, 6),
    colormap='jet',
    title='FPTAS Velikost/Čas[ms]   = 0.7'
)

ax.set_xlabel("Velikost instanci")
ax.set_ylabel("Relativní chyba")
```

```
===================================  FPTAS Velikost/chyba, pro   = 0.1, 0.4, 0.7
===================================
```

[234]:
```
Text(0, 0.5, 'Relativní chyba')
```

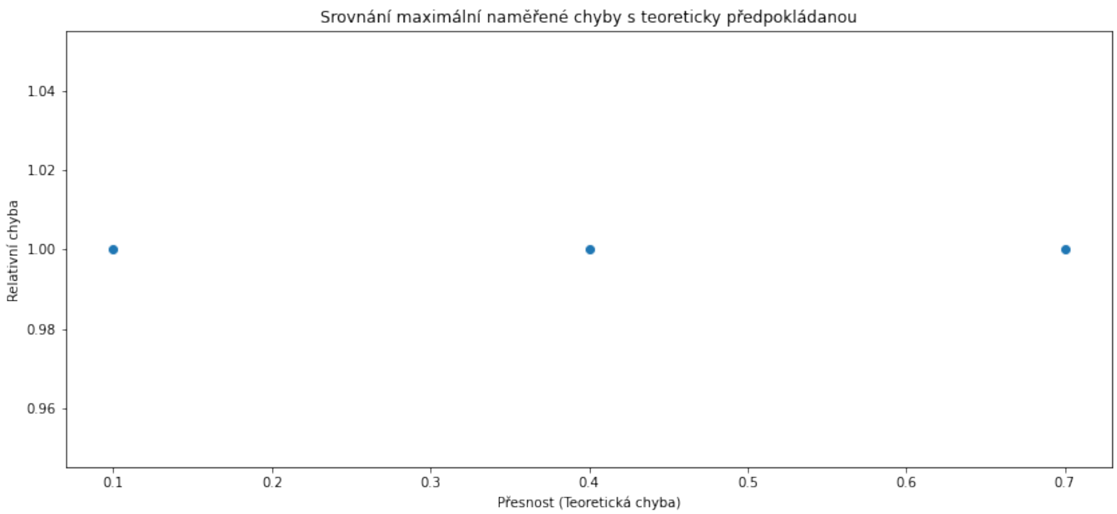

FPTAS Velikost/Čas[ms] ε = 0.1
Relativní chyba
Velikost instanci
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20
25


FPTAS Velikost/Čas[ms] ε = 0.4
Relativní chyba
Velikost instanci
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
5
10
15
20
25



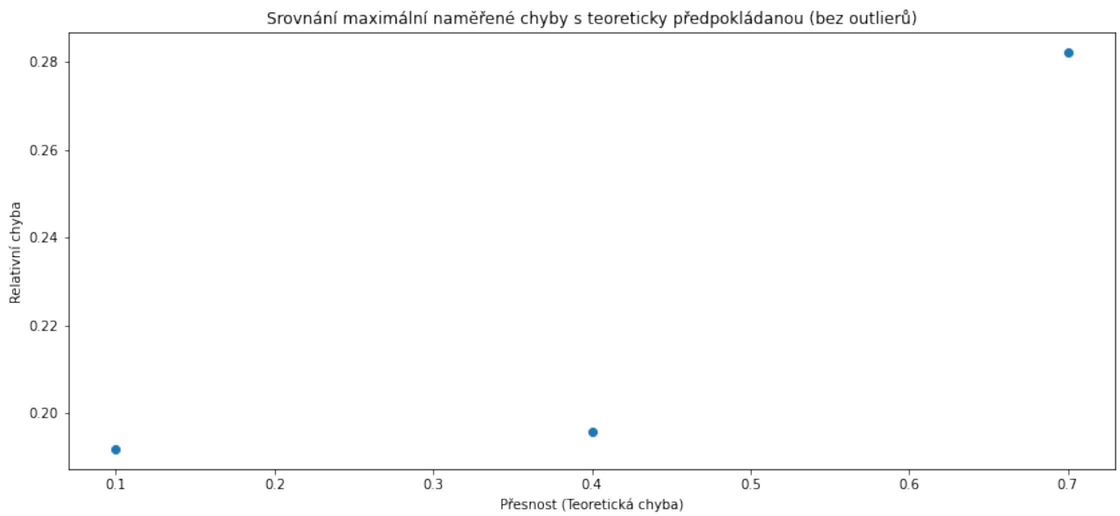
Pro každou zvolenou přesnost je vidět zavilost mezi velikost relativní chyby a velikosti instanci. Čím větší velikost instanci, tím menší je relativní chyba.

[258]:
```
x = np.array([
    0.1, 0.4, 0.7
])
y = np.array([
    algorithms_outputs['fptas'].
 ↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.1]['ERROR'].max(),
    algorithms_outputs['fptas'].
 ↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.4]['ERROR'].max(),
    algorithms_outputs['fptas'].
 ↪loc[algorithms_outputs['fptas']['ACCURACY_VALUE'] == 0.7]['ERROR'].max(),
])

plt.scatter(x, y)
plt.title("Srovnání maximální naměřené chyby s teoreticky předpokládanou")
plt.xlabel("Přesnost (Teoretická chyba)")
plt.ylabel("Relativní chyba")
plt.gcf().set_size_inches((14, 6))
plt.show()
```



Pro každou z nastavených přesností, velikost relativní chyba je větší, než prenost(/teoretická chyba). To je spíš kluli přítomnosti outlierů v datech. Proto zkusíme ještě vyčistit data od outlierů.

[257]:
```
filtered_out_outliers_fptas =␣
↪algorithms_outputs['fptas'][algorithms_outputs['fptas']['ERROR'] < 0.95]

x = np.array([
    0.1, 0.4, 0.7
])
y = np.array([
    filtered_out_outliers_fptas.
↪loc[filtered_out_outliers_fptas['ACCURACY_VALUE'] == 0.1]['ERROR'].max(),
    filtered_out_outliers_fptas.
↪loc[filtered_out_outliers_fptas['ACCURACY_VALUE'] == 0.4]['ERROR'].max(),
    filtered_out_outliers_fptas.
↪loc[filtered_out_outliers_fptas['ACCURACY_VALUE'] == 0.7]['ERROR'].max(),
])

plt.scatter(x, y)
plt.title("Srovnání maximální naměřené chyby s teoreticky předpokládanou (bez␣
↪outlierů)")
plt.xlabel("Přesnost (Teoretická chyba)")
plt.ylabel("Relativní chyba")
plt.gcf().set_size_inches((14, 6))
plt.show()
```



Po vyčištění outlieru je vidět, že maximální relativní chyba nikdy nepřesahuje přesnost(/teoretickou chybu).

1.7 6. Závěr

Během této práci bylo implementováno spoustu nových algoritmu a prozkoumáno nových přístupu k řešení problémů bathou. Taky jsem seznámil s pojemem relativní chyby u heruistickych algoritmu. Stejně tak jsem se naučil takovým optimalizačním trikům, jak **Redux** nadstavba nad jednoduchým **Greedy** algoritmem, která docela silné znizuje relativní chybu, a **FPTAS** nadstavba nad **Dynamic Programming**, která docela zrychluje původní algorimus, ale s tím přináší relativní chybu.

Dynamic Programming s dekompozici podle váhy a **Branch & Bounds** se ukázaly jako nejrychlejší algoritmy, které navíc vždy dokážou získat optimální nejlepší řešení.