Calcul Intégral IV

STEP, Mines Paristech*

3 septembre 2019 (#2bf3c07)

Table des matières

TODO – Mesures

Mesure et intégrale

On rappelle:

Tribu

Une *tribu* ou *σ-algèbre* $\mathcal{A}$ sur un ensemble X est une collection d'ensembles de X contenant l'ensemble vide et stable par passage au complémentaire et à l'union dénombrable. Un ensemble de $\mathcal{A}$ est dit *mesurable* ; l'ensemble X muni de $\mathcal{A}$ est un *espace mesurable.*

Tribu engendrée par une collection

Dans un ensemble X, on appelle *tribu engendrée* par une collection $\mathcal{C}$ d'ensembles de X la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ de X contenant $\mathcal{C}$.

Démonstration de l'existence de la tribu engendrée Désignons par $\mathfrak{S}$ la (meta-)collection des tribus de X incluant $\mathcal{C}$ (contenant $\mathcal{C}$ comme sous-ensemble). Elle n'est pas vide : elle contient la collection $\mathcal{P}(X)$ des ensembles de X (qui de toute évidence est un sur-ensemble de $\mathcal{C}$ et une tribu de X). Montrons que la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{C})$ de X contenant $\mathcal{C}$ est l'intersection de $\mathfrak{S}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap \mathfrak{S} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{S}} \mathcal{A},$$

ou encore $\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subset X \,|\, A \in \mathcal{A} \text{ pour tout } \mathcal{A} \in \mathfrak{S}\}$. Il est clair que si $\mathcal{A}$ est une tribu de X contenant $\mathcal{C}$, alors $\mathfrak{S} \subset \mathcal{A}$, car alors $\mathcal{A} \in \mathfrak{S}$. Il nous suffit donc de montrer que $\cap\mathfrak{S}$ est une tribu de X pour conclure ; on vérifiera aisément que comme chaque élément de $\mathfrak{S}$ est une tribu, cette intersection en est également une. ■

Tribu de Lebesgue

On appelle *tribu de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^n$ la tribu composée des ensembles E tels que pour tout pavé P de $\mathbb{R}^n$, la fonction caractéristique de $E \cap P$ soit intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil).

La tribu de Lebesgue est donc composée des ensembles mesurables au sens du chapitre "Calcul Intégral III".

TODO – Référence

Lier au chapitre "Calcul Intégral III" en détail.

Tribu de Borel

On appelle *tribu de Borel* d'un espace topologique X la plus petite tribu contenant tous les fermés (ou tous les ouverts) de X.

Mesure

Une *mesure (positive)* μ sur un espace probabilisable $(X, \mathcal{A})$ est une fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et pour toute collection dénombrable $\{A_1, \dots, A_k, \dots\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, on ait

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k);$$

on dit que μ est *σ-additive*. L'ensemble X muni de $\mathcal{A}$ et μ est un *espace mesuré*.

TODO – Pb

Gérer "pb" des fonctions à valeurs étendues ? Non, il n'y en a pas ...

Fonction mesurable

Une fonction $f : X \to Y$ associée aux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ est *mesurable* si l'image réciproque $A = f^{-1}(B)$ de tout ensemble B de $\mathcal{B}$ par f appartient à $\mathcal{A}$.

Conventions

Lorsque Y a une structure topologique, on supposera par défaut que la tribu associée est la tribu de Borel, et lorsque $X = \mathbb{R}^n$ que la tribu associée est la tribu de Lebesgue. Lorsque l'on souhaitera munir également X de la tribu de Borel, on parlera de fonctions *borélienne* (tribu de Borel au départ et à l'arrivée). Il existe une bonne raison pour adopter cette convention:

Mesurable ou mesurable ?

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est mesurable au sens du chapitre III, c'est-à-dire limite simple de fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil, si et seulement si elle est mesurable au sens de ce chapitre quand l'espace de départ $\mathbb{R}^n$ est muni de la tribu de Lebesgue et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$ de la tribu de Borel.

TODO – Démonstration ■

TODO: composition de fcts mesurables

Intérêt de fcts boréliennes dans ce schéma, lien avec Calcul Intégral III (généralisation résultats composition)

Fonction étagée

On appelle *fonction étagée* toute fonction $f : X \to Y$ telle que l'image réciproque de Y par f soit finie (telle que f ne prenne qu'un nombre fini de valeurs).

Intégrale d'une fonction étagée

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [0, +\infty[$ une fonction étagée positive et mesurable. Soit $Y = f(X)$ l'ensemble des valeurs prises par f. On appelle *intégrale de Lebesgue de f relativement à la mesure μ* la grandeur positive finie

$$\int_X f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sum_{y \in Y} y \times \mu(f^{-1}(\{y\})).$$

Intégrale d'une fonction positive

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Soit $\mathcal{F}$ la collection des fonctions étagées positives et mesurables inférieures à f. On appelle *intégrale de Lebesgue de f relativement à la mesure μ* la grandeur positive (finie ou infinie)

$$\int_X f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \sup_{g \in \mathcal{F}} \int_X g\mu.$$

Intégrale d'une fonction à valeurs réelles

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \mapsto [-\infty, +\infty]$ une fonction mesurable. On dit que la fonction f est *intégrable au sens de Lebesgue relativement à la mesure* μ si elle est mesurable et que les intégrales des fonctions positives $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$ sont finies. *L'intégrale de Lebesgue de* f *relativement à la mesure* μ est alors la grandeur réelle (finie)

$$\int_X f\mu := \int_X f(x)\mu(dx) := \int_X f_+\mu - \int_X f_-\mu.$$

TODO

Noter intégrale de fcts positives "plus souple" et fct pas considérée intégrable (même si on peut donner une valeur à son intégrale !) si l'intégrale est infinie; mais on est obligé d'être plus restrictif pour les fonctions signées, en raison du risque de $+\infty - \infty$. Evoquer certains auteurs qui tolèrent l'une ou l'autre des valeurs

TODO

Noter intégrale de Lebesgue absolue par construction.

TODO

aller vers la mesure de longueur. Par les mesures extérieures ? Yes. Mmmm, oui, mais-pas-que. On a déjà ℓ et les ensembles mesurables associés via la théorie HK (ou v dans $\mathbb{R}^n$), on ne vas pas la jeter si ? Non !

TODO

"Equivalence" intégrabilité Lebesgue et HK absolue (modulo gestion des valeurs infinies.)