

# Calcul Intégral II

STEP, MINES ParisTech\*

12 février 2021 (#7d082cf)

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>Objectifs d'apprentissage</b>	<b>3</b>
<b>Théorèmes de convergence</b>	<b>4</b>
Théorème de convergence dominée . . . . .	4
Dérivation sous le signe somme . . . . .	5
Théorème de convergence monotone . . . . .	6
<b>Ensembles mesurables</b>	<b>7</b>
Ensemble mesurable . . . . .	8
Interprétation . . . . .	8
Propriétés élémentaires (tribu) . . . . .	8
Intersection d'ensemble mesurables . . . . .	9
Complémentaire relatif . . . . .	10
Topologie et ensembles mesurables . . . . .	10
Ensembles négligeables . . . . .	11
Complétude de la longueur . . . . .	12
<b>Fonctions mesurables</b>	<b>12</b>
Fonction mesurable . . . . .	12
Mesurabilité sur un intervalle . . . . .	12
Critère d'intégrabilité dominée . . . . .	12
Interprétation . . . . .	13
Les fonctions intégrables sont mesurables . . . . .	13
Les fonctions mesurables forment un espace vectoriel . . . . .	13
Les fonctions continues presque partout sont mesurables . . . . .	13
Critère de l'image réciproque . . . . .	14
Stabilité par passage à la limite . . . . .	14
Fonctions égales presque partout . . . . .	14

---

\*Ce document est un des produits du projet  [boisgera/CDIS](#), initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions" 4.0 internationale.

Composition par une fonction continue . . . . .	17
Mesurabilité du produit . . . . .	17
Mesurabilité de la valeur absolue . . . . .	17
Ensemble mesurable . . . . .	18
Intégrabilité sur un sous-ensemble . . . . .	18
Restriction à des ensembles mesurables . . . . .	18
<b>Annexe – Intégrabilité conditionnelle</b>	<b>19</b>
<b>Exercices</b>	<b>21</b>
Intégrale de Gauss . . . . .	21
Théorème de convergence dominée . . . . .	22
Ensembles de longueur finie . . . . .	22
Intégrabilité locale . . . . .	22
Fonctions mesurables . . . . .	22
Composition de fonctions et mesurabilité . . . . .	23
Composition par une fonction lipschitzienne . . . . .	23
Formule de la moyenne . . . . .	23
<b>Solutions</b>	<b>24</b>
Exercices essentiels . . . . .	24
Intégrale de Gauss . . . . .	28
Théorème de convergence dominée . . . . .	30
Ensembles de longueur finie . . . . .	30
Intégrabilité locale . . . . .	31
Fonction mesurables . . . . .	31
Composition de fonctions et mesurabilité . . . . .	32
Composition par une fonction lipschitzienne . . . . .	32
Formule de la moyenne . . . . .	33
<b>Références</b>	<b>35</b>

## Introduction

L'intégrale de Lebesgue, introduite dans "Calcul Intégral I", présente l'avantage de pouvoir intégrer une plus grande gamme de fonctions que l'intégrale de Riemann : moins régulières, non bornées et/ou définies sur des intervalles non-bornés<sup>1</sup>.

Il faut néanmoins reconnaître qu'à ce stade de notre exposé l'intégrale de Riemann est parfois plus pratique. Par exemple : si avec l'intégrale de Lebesgue, on sait que  $\lambda f$  et  $f + g$  sont intégrables quand  $f$  et  $g$  le sont, il n'est pas certain que le produit  $fg$  soit intégrable ; et nous ne disposons pas encore des outils adaptés pour étudier cette intégrabilité. Or dans le cadre Riemannien, rien de plus

---

1. Sans nécessiter de construction supplémentaire ; dans le cadre de l'intégrale de Riemann, certaines de ces intégrales peuvent être calculées comme des intégrales *impropres*, par un passage à la limite d'intégrales de Riemann de fonctions définies sur un sous-ensemble. Mais l'intégrale qui en résulte – on parle parfois d'intégrale de *Cauchy-Riemann* – perd une bonne partie des propriétés de l'intégrale de Riemann.

simple : si  $f$  et  $g$  sont des fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment, le produit  $fg$  est systématiquement intégrable au sens de Riemann sur ce segment <sup>2</sup>.

Cette remarque ne souligne pas à proprement parler un défaut de l'intégrale de Lebesgue, mais plutôt une conséquence de sa généralité : en permettant d'intégrer des fonctions telles que  $x \in [0, 1] \mapsto 1/\sqrt{x}$  (presque partout), on s'expose à devoir refuser d'intégrer le produit d'une fonction par elle-même, ici  $x \in [0, 1] \mapsto 1/x$  (presque partout). Il est donc normal de devoir imposer des conditions supplémentaires pour garantir l'intégrabilité d'un produit.

Heureusement, comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, un critère d'intégrabilité des fonctions – nécessaire et suffisant – existe pour établir ce type de résultat (et bien d'autres). Comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, il se décompose en deux tests indépendants : pour être intégrable une fonction doit être “dominée par une fonction intégrable” et “suffisamment régulière”. Bien sûr ici la fonction qui domine devra être intégrable au sens de Lebesgue (et non plus de Riemann) ; quant à la régularité, il ne s'agira plus de tester la continuité presque partout, mais de vérifier la *mesurabilité* de la fonction considérée, une propriété que possèdent presque toutes les fonctions “non-pathologiques”.

Dans ce chapitre pour des raisons de simplicité, nous mettrons l'accent sur les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  ; par défaut le symbole intégrale sans bornes désignera donc l'intégrale entre  $-\infty$  et  $+\infty$ :

$$\int := \int_{-\infty}^{+\infty}.$$

Si une fonction n'est définie que sur un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  – qui pourra être un intervalle ou un ensemble plus complexe – il est naturel de l'étendre en une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  prenant la valeur 0 en dehors de  $A$  puisque dans le cas des intervalles, cette opération ne change pas la valeur de l'intégrale. Le mouvement inverse – restreindre une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à un sous-ensemble nécessite de considérer le produit  $1_A f$  de  $f$  par la fonction caractéristique de  $A$ , ce qui soulève la question de l'étude de l'intégrabilité de ces fonctions caractéristiques.

Mais notre première étape dans ce chapitre sera de nous doter de théorèmes de convergence qui nous permettront – sous certaines conditions qui sont plus simples que dans le cadre Riemannien – de calculer l'intégrale d'une fonction  $f$  comme la limite d'intégrales de fonctions convergeant vers  $f$ .

## Objectifs d'apprentissage

### Ensembles mesurables

---

2. En première approche on pourra rapidement s'en convaincre en remplaçant “intégrables au sens de Riemann” par “continues”. Dans le cas général, supposons que  $f$  et  $g$  sont intégrables au sens de Riemann sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire bornées et continues presque partout. De toute évidence, leur produit est borné. Si  $f$  est continue en tout point de  $[a, b]$  à l'exception de l'ensemble négligeable  $A$  et  $g$  en tout point de  $[a, b]$  à l'exception de l'ensemble négligeable  $B$ , l'ensemble  $C$  des points de discontinuité de  $fg$  est nécessairement dans  $A \cup B$ , donc négligeable. Le produit  $fg$  est donc intégrable au sens de Riemann.

- • savoir qu'un ensemble est mesurable si sa longueur est bien définie,
- • connaître la définition formelle d'ensemble mesurable,
- • savoir calculer sa longueur comme une intégrale,
- connaître les propriétés principales des ensembles mesurables :
  - • les ensembles mesurables forment une tribu,
  - •• ensembles ouverts (et fermés) sont mesurables,
  - •• négligeable = de longueur nulle.
- connaître quelques propriétés secondaires qui s'en déduisent :
  - • intersection dénombrable d'ensembles mesurables.
  - • complémentaire relatif d'ensembles mesurables,
- savoir les exploiter pour :
  - •• montrer qu'un ensemble donné est mesurable,
  - ••• déduire de nouvelles propriétés secondaires.

### Fonctions mesurables

- • connaître la définition des fonctions mesurables,
- • connaître leur caractérisation par le critère de l'image réciproque,
- savoir que les fonctions suivantes sont mesurables :
  - • les fonctions intégrables,
  - • les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables,
  - • les fonctions égales presque partout à des fonctions mesurables,
  - •• les limites (simples) de fonctions mesurables,
  - •• les compositions de fonctions mesurables et continues.
- savoir exploiter les éléments précédents pour :
  - •• montrer qu'une fonction donnée est mesurable,
  - ••• déduire de nouvelles classes de fonctions mesurables.

### Fonctions intégrables

- • connaître le critère d'intégrabilité dominée,
- • connaître le théorème de convergence dominée,
- •• connaître le théorème de convergence monotone,
- savoir mettre en oeuvre ces théorèmes pour :
  - • montrer qu'une fonction est intégrable,
  - •• calculer l'intégrale d'une fonction comme une limite,
  - ••• démontrer qu'une fonction n'est pas intégrable.
- • connaître la définition d'intégrale sur un sous-ensemble (mesurable).

## Théorèmes de convergence

### Théorème – Théorème de convergence dominée

Si une suite de fonctions intégrables  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  converge simplement vers la fonction  $f$ , c'est-à-dire si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x)$$

et qu'il existe une fonction intégrable  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  dominant la suite  $f_k$ , c'est-à-dire telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_k(x)| \leq g(x)$$

alors la fonction  $f$  est intégrable et

$$\int f(t) dt = \int \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(t) dt.$$

**Démonstration** Se reporter à Demailly (2011). ■

**Exercice – Défaut de domination (•)** Comparer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(t) dt \quad \text{et} \quad \int \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t) dt$$

pour la suite de fonctions  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq t \leq k+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Expliquer le résultat. (Solution p. 24.)

**Exercice – Intégrale fonction d'un paramètre (••)** Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

(Solution p. 24.)

**Exercice – Théorème fondamental du calcul (•••)** Dédurre de la forme classique du théorème fondamental du calcul et du théorème de convergence dominée (p. 4) que si  $f : [a, b] \subset [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $[a, b]$  et de dérivée  $f'$  intégrable, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

(Indication : considérer une suite d'intervalles fermés bornés  $[a_k, b_k]$  de  $\mathbb{R}$  tels que  $[a_k, b_k] \subset [a, b]$  et tels que  $a_k \rightarrow a$  et  $b_k \rightarrow b$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .) (Solution p. 30.)

**Théorème – Dérivation sous le signe somme**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que :

1. pour tout  $\lambda \in I$ , la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\lambda, t)$  est intégrable,

2. pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $\lambda \in I \mapsto f(\lambda, t)$  est dérivable et

$$\sup_{\lambda \in I} |\partial_\lambda f(\lambda, t)| \leq g(t)$$

où  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction intégrable.

Alors, la fonction  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$S(\lambda) := \int f(\lambda, t) dt$$

est dérivable; pour tout  $\lambda \in I$ , la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto \partial_\lambda f(\lambda, t)$  est intégrable et

$$S'(\lambda) = \int \partial_\lambda f(\lambda, t) dt.$$

**Démonstration** Par linéarité de l'intégrale, pour tout  $\lambda \in I$  et tout  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\lambda + h \in I$ , on a

$$\frac{S(\lambda + h) - S(\lambda)}{h} = \int \frac{f(\lambda + h, t) - f(\lambda, t)}{h} dt.$$

Soit  $h_k$  une suite de réels non nuls tels que  $\lambda + h_k \in I$  et  $h_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . En raison de la dérivabilité de  $f$  par rapport à son premier argument, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda + h_k, t) - f(\lambda, t)}{h_k} = \partial_\lambda f(\lambda, t).$$

De plus, par l'inégalité des accroissements finis, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \frac{f(\lambda + h_k, t) - f(\lambda, t)}{h_k} \right| \leq \sup_{\mu \in I} |\partial_\lambda f(\mu, t)| \leq g(t).$$

Les taux d'accroissements de  $f$  sont donc bornés par une fonction intégrable. Par le théorème de convergence dominée (p. 4), on conclut que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S(\lambda + h_k) - S(\lambda)}{h_k} = \int \partial_\lambda f(\lambda, t) dt,$$

ce qui achève la démonstration. ■

### Théorème – Théorème de convergence monotone

Si une suite de fonctions intégrables  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante et majorée en tout point, c'est-à-dire si pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \text{ et } \sup_k f_k(x) < +\infty,$$

alors la limite simple  $f$  des  $f_k$  est intégrable si et seulement si

$$\sup_k \int f_k(t) dt < +\infty.$$

et dans ce cas,

$$\int f(t) dt = \int \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(t) dt.$$

**Démonstration** Se reporter à Demailly (2011). ■

**Exercice – Fonctions puissance (•)** Montrer que la fonction puissance  $t \in [1, +\infty[ \mapsto t^\alpha$  est intégrable si et seulement  $\alpha < -1$  et que la fonction puissance  $t \in ]0, 1] \mapsto t^\alpha$  est intégrable si et seulement si  $\alpha > -1$ . (Solution p. 25.)

**Intégrabilité et intégrales impropres (••)** Montrer qu’une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est intégrable sur tout intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k |f(t)| dt < +\infty.$$

(Solution p. 25.)

## Ensembles mesurables

Il existe un lien étroit entre la notion de longueur d’un ensemble de réels et le calcul intégral. Nous savons par exemple que pour tout intervalle fermé borné  $E = [a, b]$ , la longueur  $b - a$  de l’intervalle peut être calculée par l’intégrale de la fonction caractéristique de  $E$  :

$$\ell(E) = \ell([a, b]) := b - a = \int_a^b dt = \int 1_{[a, b]}(t) dt = \int 1_E(t) dt.$$

Si  $E$  est une collection finie d’intervalles disjoints  $[a_i, b_i]$ , l’intégrale de  $1_E$  vaut cette fois-ci  $\sum_i b_i - a_i$ , ce qui correspond toujours à la valeur “intuitive” de la longueur de l’ensemble.

Il apparaît donc légitime pour définir la longueur d’un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  aussi général que possible<sup>3</sup> de  $\mathbb{R}$  de prendre cette égalité comme une définition, ce qui suppose toutefois que la fonction caractéristique soit intégrable ; on parle alors d’*ensemble intégrable* ou de *longueur finie*. Cette définition laisse toutefois de côté les ensembles “trop grands” pour être intégrables, mais par ailleurs parfaitement anodins, comme  $\mathbb{R}$  tout entier ou l’ensemble des réels positifs. Nous préférons donc mettre l’accent sur la notion d’ensemble *mesurable* :

---

3. Il existe des ensembles dont on ne peut pas définir raisonnablement la longueur, sauf à accepter un concept de longueur aux propriétés très étranges. Cette situation ne résulte pas de la méthode de définition de la longueur par l’intégrale ; c’est au contraire une limitation intrinsèque de la théorie de la mesure que nous étudierons plus en détail par la suite. Malheureusement pour la didactique, il n’existe aucun exemple explicite (élaboré par un procédé constructif) d’ensemble qui ne soit pas mesurable. On peut se consoler en apprenant que, du point de vue logique, si l’on suppose que tous les ensembles sont mesurables – ce qui peut sembler relativement anodin – on peut alors prouver des propositions beaucoup plus perturbantes, comme l’existence de partitions de  $\mathbb{R}$  “contenant strictement plus d’éléments” que  $\mathbb{R}$  lui-même.

### Définition – Ensemble mesurable

Un ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  est *de longueur finie* si sa fonction caractéristique  $1_E$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  ; il est *mesurable* si sa fonction caractéristique est intégrable sur tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . La (mesure de) *longueur* d'un ensemble  $E$  mesurable est définie par

$$\ell(E) := \int 1_E(t) dt$$

si  $E$  est de longueur finie et

$$\ell(E) := +\infty$$

dans le cas contraire (si  $E$  est mesurable mais pas de longueur finie).

### Remarque – Interprétation

Il faut comprendre le terme “mesurable” littéralement, comme signifiant “dont on peut définir la mesure (de longueur)”, qui est un nombre fini ou infini. Cette interprétation est cohérente, puisque tous les ensembles  $E$  de longueur finie sont bien mesurables ; en effet si la fonction caractéristique  $1_E$  est intégrable, sa restriction à tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  également.

**Exercice – Ensemble de longueur finie I (•)** Montrer que l'ensemble  $E = [-1, 0[ \cup ]0, 1]$  est de longueur finie et calculer sa longueur. (Solution p. 26.)

**Exercice – Ensemble de longueur finie II (•)** Montrer que l'ensemble  $\mathbb{Q}$  est de longueur finie et calculer sa longueur. (Solution p. 26.)

**Exercice – Ensemble de longueur finie III (••)** Montrer que l'ensemble  $E = \cup_{k=0}^{+\infty} [k, k + 2^{-k}[$  est de longueur finie et calculer sa longueur. (Solution p. 26.)

**Exercice – La longueur est additive (•••)** Montrer que la longueur  $\ell$  est additive : si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles mesurables de  $\mathbb{R}$  disjoints, alors  $A \cup B$  est mesurable et  $\ell(A \cup B) = \ell(A) + \ell(B)$ . (Solution p. 26.)

### Théorème – Propriétés élémentaires (tribu)

1. L'ensemble vide est mesurable.
2. Le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.
3. L'union d'une collection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

(On rappelle qu'un ensemble est *dénombrable* s'il est fini ou en bijection avec  $\mathbb{N}$ .)

On agrège cet ensemble de propriétés en disant que les ensembles mesurables de  $\mathbb{R}$  forment une *tribu* – ou  *$\sigma$ -algèbre* – de  $\mathbb{R}$ .

### Démonstration

1. La fonction caractéristique  $1_{\emptyset}$  est identiquement nulle ; l'ensemble vide  $\emptyset$  est donc de longueur finie et par conséquent mesurable.
2. Si l'ensemble  $A$  est mesurable et  $B = \mathbb{R} \setminus A$ , pour tout  $[a, b]$ , l'ensemble  $A \cap [a, b]$  est de longueur finie. Par ailleurs, l'ensemble  $[a, b]$  est de longueur finie. Donc, comme

$$1_{B \cap [a, b]} = 1_{[a, b]} - 1_{A \cap [a, b]},$$

l'ensemble  $B \cap [a, b]$  est de longueur finie ; l'ensemble  $B$  est donc mesurable.

3. Montrons tout d'abord que l'union d'une collection finie d'ensembles mesurables est mesurable ; il suffit d'établir que si  $A$  et  $B$  sont mesurables, alors leur union  $A \cup B$  l'est également. Or, pour tout intervalle fermé borné  $[a, b]$ , on a

$$(A \cup B) \cap [a, b] = (A \cap [a, b]) \cup (B \cap [a, b]),$$

ce qui se traduit au moyen des fonctions caractéristiques par la relation

$$\begin{aligned} 1_{(A \cup B) \cap [a, b]} &= \max(1_{A \cap [a, b]}, 1_{B \cap [a, b]}) \\ &= 1_{A \cap [a, b]} + (1_{B \cap [a, b]} - 1_{A \cap [a, b]})_+ \end{aligned}$$

où  $x_+ := \max(x, 0)$ . Comme  $1_{B \cap [a, b]} - 1_{A \cap [a, b]}$  est intégrable et sa partie positive majorée par  $2 \times 1_{[a, b]}$  qui est également intégrable, sa partie positive est intégrable (cf. annexe "Calcul Intégral I"). La fonction caractéristique de  $(A \cup B) \cap [a, b]$  est donc intégrable.

Considérons désormais une suite d'ensembles mesurables  $A_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ . Quitte à remplacer  $A_k$  par  $\bigcup_{j=0}^k A_j$  – ce qui ne change pas le caractère mesurable des  $A_k$  ou leur union jusqu'à l'ordre  $k$  – on peut supposer que  $A_k \subset A_{k+1}$ . Pour tout intervalle fermé borné  $[a, b]$ ,

$$\left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) \cap [a, b] = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (A_k \cap [a, b]);$$

les ensembles  $A_k \cap [a, b]$  sont de longueur finie, c'est-à-dire que  $1_{A_k \cap [a, b]}$  est intégrable. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq 1_{A_k \cap [a, b]} \leq 1_{[a, b]}$  ; les ensembles  $A_k \cap [a, b]$  formant une suite croissante pour l'inclusion, la suite des fonctions caractéristiques  $1_{A_k \cap [a, b]}$  est croissante et majorée par  $1_{[a, b]}$  ; pour tout réel  $x$  on a donc

$$1_{(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) \cap [a, b]}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1_{A_k \cap [a, b]}(x)$$

Par le théorème de convergence dominée (p. 4), la fonction caractéristique de  $(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) \cap [a, b]$  est intégrable ; cet ensemble est donc mesurable.

■

### Proposition – Intersection d'ensembles mesurables

L'intersection d'une collection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable.

**Démonstration** Notons que pour toute collection  $\mathcal{A}$  d'ensembles de  $\mathbb{R}$ ,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left( \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c \right)^c.$$

La conclusion quand  $\mathcal{A}$  est dénombrable résulte alors des propriétés élémentaires des ensembles mesurables (p. 8). ■

**Exercice – Suite d'ensembles (••)** Soit  $A_k, k \in \mathbb{N}$ , une suite d'ensembles mesurables de  $\mathbb{R}$ ,

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, x \in A_k\}$$

et

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall k_0 \in \mathbb{N}, \exists k \geq k_0, x \in A_k\}.$$

Montrer que les ensembles  $B$  et  $C$  sont mesurables. (Solution p. 27.)

### Proposition – Complémentaire relatif

Si les ensembles  $A$  et  $B$  sont mesurables, le complémentaire  $B \setminus A$  de  $A$  dans  $B$  est mesurable.

**Démonstration** Les ensembles  $A$  et  $B$  appartenant à  $\mathbb{R}$ , on a  $B \setminus A = B \cap A^c$ ; le complément de  $A$  dans  $B$  est donc mesurable comme intersection d'ensembles mesurables. ■

### Théorème – Topologie et ensembles mesurables

Tout ensemble fermé (ou ouvert) est mesurable.

**Démonstration** Les ensembles fermés et ouverts étant complémentaires les uns des autres et le complémentaire d'un ensemble mesurable étant mesurable (p. 8), on peut se contenter de démontrer le résultat soit pour les ouverts soit pour les fermés; la preuve s'avère plus simple dans le cas des ouverts.

Tout intervalle ouvert  $I$  est mesurable : en effet, son intersection avec un intervalle fermé borné  $[a, b]$  est un intervalle inclus dans  $[a, b]$ . La fonction caractéristique associée est de la forme  $1_{[c, d]}$ , ou en diffère au plus en deux points; dans tous les cas, elle est intégrable.

Si maintenant  $U$  est un ensemble ouvert, pour chaque point  $x$  de  $U$  on peut construire le plus grand intervalle ouvert  $I_x$  contenant  $x$  et inclus dans  $U$  (c'est l'union de tous les intervalles ouverts vérifiant ces deux propriétés). Pour un couple  $x$  et  $y$  dans  $U$ , soit  $I_x = I_y$ , soit  $I_x$  et  $I_y$  sont disjoints et l'union de tous les intervalles  $I_x$  est égale à  $U$ . Comme dans chaque  $I_x$  on peut choisir un nombre rationnel  $y$  tel que  $I_x = I_y$ , la collection de  $I_x$  est dénombrable. L'ouvert  $U$  est donc une union dénombrable d'intervalles ouverts<sup>4</sup>, qui sont tous mesurables, il est donc mesurable. ■

4. le résultat correspondant est faux pour les intervalles fermés.

**Exercice – Ni ouvert ni fermé (•)** Exhiber un ensemble mesurable  $E$  de  $\mathbb{R}$  qui ne soit ni ouvert ni fermé. (Solution p. 27.)

### Théorème – Ensembles négligeables

Un ensemble est de longueur nulle si et seulement s'il est négligeable.

**Démonstration** Si l'ensemble  $A$  est négligeable, sa fonction caractéristique est égale presque partout à la fonction identiquement nulle, qui est intégrable et d'intégrale nulle. Par conséquent,  $1_A$  est intégrable et d'intégrale nulle, donc l'ensemble  $A$  est intégrable et de longueur nulle.

Réciproquement, supposons l'ensemble  $A$  de longueur nulle; nous cherchons à montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une famille dénombrable d'intervalles  $I_i$  de  $\mathbb{R}$  qui recouvre  $A$  et telle que

$$\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Supposons temporairement que  $A$  soit inclus dans un intervalle fermé borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . La fonction caractéristique  $1_A$  de  $A$  est intégrable, donc pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que, si la subdivision pointée (totale ou partielle)  $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i)\}_i$  est subordonnée à  $\gamma$ , on a

$$S(1_A, \mathcal{D}) = \left| S(1_A, \mathcal{D}) - \sum_i \int_{I_i} 1_A(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Pour conclure, nous allons construire une famille dénombrable  $\{(t_i, I_i)\}_i$  où les  $I_i$  sont des intervalles fermés bornés de  $[a, b]$  sans chevauchement, tels que pour tout  $i$ ,  $t_i \in A$ ,  $I_i \subset \gamma(t_i)$  et tels que la famille des  $I_i$  recouvre  $A$ . Si cette construction est acquise et que  $\mathcal{D}_k$  désigne la collection des  $\{(t_i, I_i)\}$  pour  $0 \leq i \leq k-1$ , alors c'est une subdivision pointée partielle de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$  et donc

$$S(1_A, \mathcal{D}_k) = \sum_{i=0}^{k-1} 1_A(t_i) \ell(I_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite sur  $k$ , cette inégalité fournit comme souhaité

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Procédons à la construction de la collection de  $(t_i, I_i)$ , par dichotomie. S'il existe un  $t \in [a, b]$  tel que  $t \in A$  et  $[a, b] \subset \gamma(t)$ , alors on prend pour collection le singleton  $\{(t, [a, b])\}$ . Dans le cas contraire, on considère la décomposition de  $[a, b]$  en  $[a, (a+b)/2]$  et  $[(a+b)/2, b]$ . On examine chacun de ces intervalles  $J$  et s'il existe un  $t \in A \cap J$  tel que  $J \subset \gamma(t)$ , on inclut la paire  $(t, J)$  dans la collection; dans le cas contraire, on poursuit la dichotomie. Cette procédure définit par construction une famille dénombrable  $\{(t_i, I_i)\}_i$  où  $t_i \in A$  et les  $I_i$

sont des intervalles fermés bornés de  $[a, b]$  sans chevauchement tels que pour tout  $t_i$ ,  $I_i \subset \gamma(t_i)$ . De plus, les  $I_i$  recouvrent  $A$  : en effet si l'on considère  $t \in A$ , il existe nécessairement un entier  $k$  tel que tout intervalle fermé borné  $I$  de longueur inférieure ou égale à  $(b - a)/2^k$  contenant  $t$  vérifie  $I \subset \gamma(t)$ . Par conséquent,  $t$  appartient à l'un des intervalles inclus par le procédé au plus tard à l'étape  $k$  de la dichotomie.

Finalement, supposons  $A$  de longueur nulle mais plus nécessairement borné. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $A \cap [-k, k]$  est de longueur nulle et borné ; il peut donc être recouvert par une famille dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure  $\varepsilon/2^{k+1}$ . Comme  $A = \cup_{k=0}^{+\infty} (A \cap [-k, k])$ , la collection de tous ces intervalles recouvre  $A$  ; la somme de leur longueur est majorée par  $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon/2^{k+1} = \varepsilon$ . L'ensemble  $A$  est donc négligeable. ■

### Corollaire – Complétude de la longueur

Un sous-ensemble d'un ensemble de longueur nulle est de longueur nulle.

**Démonstration** Un sous-ensemble  $A$  d'un ensemble négligeable  $B$  est négligeable car pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une famille dénombrable d'intervalles  $I_i$  recouvrant  $B$  et tels que  $\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon$  ; or cette famille recouvre aussi  $A$ . Comme un ensemble est négligeable si et seulement si il est de longueur nulle (p. 11), cet argument conclut la démonstration. ■

## Fonctions mesurables

### Définition – Fonction mesurable

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est *mesurable* si elle est la limite simple d'une suite de fonctions intégrables, c'est-à-dire s'il existe une suite de fonctions intégrables  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est mesurable si chacune de ses composantes est mesurable.

### Remarque – Mesurabilité sur un intervalle

Nous nous limitons dans ce chapitre à l'étude des fonctions mesurables définies sur  $\mathbb{R}$ . La notion peut être très facilement étendue à une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  de la façon suivante : on dira que  $f$  est mesurable si son prolongement par 0 dans le complémentaire de  $I$  est mesurable. Nous vous laissons le soin de généraliser en conséquence les énoncés qui vont suivre.

### Théorème – Critère d'intégrabilité dominée

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si et seulement si  $f$  est mesurable et il existe une fonction intégrable  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $|f| \leq g$ .

La démonstration de ce théorème, qui nécessite des résultats intermédiaires, est donnée à la fin de cette section (p. 17).

### Remarque – Interprétation

Souvenons-nous qu’une fonction définie sur un intervalle fermé et borné est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est encadrée par deux fonctions intégrables au sens de Riemann et continue presque partout.

Dans le cas de l’intégrale de Riemann comme de Lebesgue, l’intégrabilité est donc caractérisée par une structure analogue qui repose sur deux propriétés distinctes : être encadrée par deux fonctions intégrables (pour la notion d’intégrale considérée) et être “suffisamment régulière”. La différence est que dans le cas de l’intégrale de Riemann l’exigence de régularité est forte – être continue presque partout – alors que dans le cas de l’intégrale de Lebesgue, la régularité demandée – la mesurabilité – s’avère être une condition très peu contraignante<sup>5</sup>.

Plusieurs propriétés des fonctions mesurables se déduisent directement de leur définition :

### Proposition – Les fonctions intégrables sont mesurables

**Démonstration** Si  $f$  est une fonction intégrable, elle est la limite simple de la suite constante égale à  $f$ . ■

### Proposition – Les fonctions mesurables forment un espace vectoriel

**Démonstration** Si  $f$  et  $g$  sont mesurables et  $\lambda$  est un nombre réel, il existe des suites  $f_k$  et  $g_k$  de fonctions intégrables convergeant simplement vers  $f$  et  $g$  respectivement. Les fonctions  $f_k + g_k$  et  $\lambda f_k$  sont intégrables et convergent alors simplement vers  $f + g$  et  $\lambda f$  respectivement. ■

### Proposition – Les fonctions continues presque partout sont mesurables

**Démonstration** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue presque partout. Soit  $k \in \mathbb{N}$ ; on note  $\sigma_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\sigma_k(x) = \begin{cases} -k & \text{si } x \in ]-\infty, -k], \\ x & \text{si } x \in ]-k, k[, \\ k & \text{si } x \in [k, +\infty[. \end{cases}$$

Comme  $\sigma_k$  est continue et bornée, la fonction  $g_k : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$x \in [-k, k] \mapsto (\sigma_k \circ f)(x)$$

---

5. À tel point que, si l’on peut prouver l’existence d’une fonction non-mesurable, sa “construction explicite” est impossible. Les fonctions non-mesurables font partie des objets “intangibles” (cf. Schechter (1996)) dont l’existence est prédite par la théorie mais que l’on ne rencontre jamais en pratique ...

est continue presque partout sur  $[-k, k]$  et bornée. Par conséquent, elle est intégrable au sens de Riemann – et donc de Lebesgue – sur  $[-k, k]$ . Son extension  $f_k$  par zéro au reste de  $\mathbb{R}$  est donc intégrable au sens de Lebesgue. De plus, la suite des  $f_k$  converge simplement vers  $f$ ; la fonction  $f$  est donc mesurable. ■

### **Théorème – Critère de l’image réciproque**

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est mesurable si et seulement l’image réciproque de tout fermé (ou de tout ouvert) de  $\mathbb{R}^m$  par  $f$  est mesurable.

**Exercice – Fonctions continues (•)** Montrer en utilisant le critère de l’image réciproque que toute fonction continue est mesurable. (Solution p. 27.)

**Exercice – Image réciproque d’un intervalle (•)** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable, alors l’image réciproque d’un intervalle arbitraire par  $f$  est mesurable. (Solution p. 27.)

En se basant exclusivement sur ce critère de mesurabilité par les images réciproques (donc en comprenant temporairement “mesurable” comme “satisfaisant le critère de l’image réciproque” en attendant la preuve de l’équivalence des deux propriétés), on peut montrer les résultats suivants:

### **Stabilité par passage à la limite**

Les limites simples de fonctions mesurables sont mesurables.

**Démonstration** Soit  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions vérifiant le critère de l’image réciproque (p. 14), telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Montrons que  $f$  vérifie également ce critère. Il suffit pour cela de remarquer que comme  $U$  est ouvert et que  $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ,  $f(x) \in U$  si et seulement si  $f_k(x) \in U$  pour  $k$  assez grand. Cette déclaration se traduit par la formule

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{k=j}^{+\infty} f_k^{-1}(U)$$

qui établit que  $f^{-1}(U)$  est un ensemble mesurable, comme union (dénombrable) d’intersections (dénombrable) d’ensembles mesurables. ■

### **Théorème – Fonctions égales presque partout**

Toute fonction égale presque partout à une fonction mesurable est mesurable.

**Démonstration** Toute fonction  $f$  égale presque partout à une fonction  $g$  qui vérifie le critère de l'image réciproque (p. 14) vérifie également le critère de l'image réciproque (p. 14). En effet, si pour tout ouvert  $U$  l'ensemble  $g^{-1}(U)$  est mesurable, alors

$$f^{-1}(U) = (g^{-1}(U) \setminus E) \cup F$$

où  $E$  et  $F$  sont négligeables et donc mesurables puisque la mesure de Lebesgue est complète (p. 12); par conséquent,  $f^{-1}(U)$  est mesurable. ■

**Démonstration du critère de l'image réciproque (p. 14)** Il suffit de démontrer le critère pour les ensembles ouverts : si une fonction satisfait le critère de l'image réciproque pour tout ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , alors si  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^m$ , en utilisant l'égalité  $f^{-1}(F) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus F)$ , le fait que le complémentaire d'un fermé soit un ouvert et que le complémentaire d'un ensemble mesurable soit mesurable (p. 8), on établit le critère pour les fermés.

Montrons tout d'abord le résultat pour les fonctions scalaires ( $m = 1$ ). Supposons le critère de l'image réciproque (p. 14) satisfait. La démonstration repose sur la construction explicite d'une suite  $f_k(x)$  de fonctions intégrables qui soient étagées, c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs possibles.

Définissons  $f_0(x) = 0$  et  $f_k(x)$  par la relation de récurrence

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + \begin{cases} -1/k & \text{si } f(x) \leq f_k(x) - 1/k \text{ et } |x| \leq k, \\ +1/k & \text{si } f_k(x) + 1/k \leq f(x) \text{ et } |x| \leq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, si  $f(x) = 0$ ,  $f_k(x) = 0$ . Si  $f(x) \geq 0$ , les  $f_k(x)$  forment une suite croissante convergeant vers  $f(x)$ , car la suite des  $1/k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , mais leur somme est divergente. La situation est similaire si  $f(x) \leq 0$ , mais avec une suite  $f_k(x)$  décroissante.

Montrons que la suite des  $f_k$  est intégrable, ce qui conclura cette section de la preuve. L'ensemble des valeurs  $\{y_j\}$  que prend chaque  $f_k$  est bien fini; il comprend la valeur  $y_0 = 0$  et la fonction peut s'écrire sous la forme

$$f_k = \sum_j y_j 1_{A_j}$$

où les  $A_j = f_k^{-1}(y_j)$  sont en nombre fini et disjoints. A part  $A_0$ , les  $A_j$  sont également bornés, car  $f_k$  est nulle en dehors de  $[-k, k]$ . Montrons qu'à tout rang  $k$ , les ensembles  $A_j$  sont mesurables, ce qui prouvera que chaque  $f_k$  est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables. C'est évident au rang 0 où  $\{y_j\} = \{0\}$  et la collection des  $A_j$  se réduit à  $\{A_0\} = \{\mathbb{R}\}$ . Supposons cette propriété valable au rang  $k$ ; l'ensemble  $E$  des réels  $x$  tels que  $f_k(x) + 1/k \leq f(x)$  et  $|x| \leq k$  peut être écrit comme

$$E = \left( \bigcup_j \{x \in \mathbb{R} \mid y_j + 1/k \leq f(x)\} \cap A_j \right) \cap [-k, k],$$

qui est mesurable. De même, on peut montrer que l'ensemble  $F$  des réels  $x$  tels que  $f(x) \leq f_k(x) - 1/k$  et  $|x| \leq k$  est mesurable. On a alors par construction:

$$f_{k+1} = \sum_j y_j 1_{A_j} + \frac{1}{k} 1_E - \frac{1}{k} 1_F$$

qui est sous la forme souhaitée, à ceci près que les ensembles intervenant ne sont pas nécessairement disjoints. Mais pour toute valeur  $y$  dans l'image de  $f_{k+1}$ , l'image réciproque de  $\{y\}$  par  $f$  est nécessairement une union (finie) d'intersections (finies) d'ensembles dans la collection  $\{\dots, A_j, \dots, E, F\}$  et donc un ensemble mesurable. La fonction  $f_{k+1}$  peut donc être mise sous la forme souhaitée.

Réciproquement, considérons désormais une fonction intégrable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Par le théorème de dérivation des intégrales indéterminées, si l'on définit la fonction  $f_k(x)$  comme le taux d'accroissement

$$f_k(x) := \frac{F(x + 2^{-k}) - F(x)}{2^{-k}} \quad \text{où } F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t) dt,$$

alors  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  presque partout quand  $k \rightarrow +\infty$ . Or chaque  $f_k$  est continue, donc l'image réciproque de tout ouvert par  $f_k$  est un ouvert et donc un ensemble mesurable (p. 10); c'est encore le cas des fonctions qui sont égales presque partout aux  $f_k$  mais valent 0 aux points où les  $f_k$  ne convergent pas, car elles sont égales presque partout aux fonctions  $f_k$  (p. 14). L'ensemble des fonctions satisfaisant le critère de l'image réciproque étant stable par passage à la limite (p. 14), une fonction égale à  $f$  presque partout satisfait le critère de l'image réciproque (p. 14); la fonction intégrable  $f$  satisfait donc elle-même le critère de l'image réciproque.

Finalement, une fonction mesurable est une limite simple d'une suite de fonctions intégrables et les fonctions intégrables vérifient le critère de l'image réciproque, par une nouvelle application du résultat de stabilité par passage à la limite (p. 14), ce critère est également satisfait pour toute fonction mesurable.

Pour établir le résultat dans le cas où  $n > 1$ , il suffit de montrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfait le critère de l'image réciproque si et seulement si toutes ses composantes le satisfont. Pour le sens direct, il suffit de constater que

$$f_k^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{R} \times \dots \times U \times \dots \times \mathbb{R})$$

et que si  $U$  est ouvert,  $\mathbb{R} \times \dots \times U \times \dots \times \mathbb{R}$  également. Pour la réciproque, nous exploitons le fait<sup>6</sup> que tout ouvert de  $\mathbb{R}^m$  peut être décomposé comme l'union d'une collection dénombrable  $\mathcal{P}$  de pavés ouverts de la forme

$$P = ]a_1, b_1[ \times \dots \times ]a_n, b_n[.$$

6. Pour chaque point  $x$  de  $U \subset \mathbb{R}^m$  ouvert dont les coordonnées sont rationnelles, on considère le plus grand pavé ouvert de la forme

$$]x_1 - h, x_1 + h[ \times \dots \times ]x_m - h, x_m + h[, \quad h > 0$$

qui soit inclus dans  $U$ ; ces pavés forment une collection dénombrable et leur union est égale à  $U$  par construction.

Il nous suffit alors de noter que pour tout pavé  $P$ ,

$$f^{-1}(P) = f_1^{-1}(]a_1, b_1]) \times \cdots \times f_n^{-1}(]a_n, b_n])$$

et donc  $f^{-1}(P)$  est mesurable. Comme  $f^{-1}(U) = \cup_{P \in \mathcal{P}} f^{-1}(P)$  et que  $\mathcal{P}$  est dénombrable, l'image réciproque de  $U$  par  $f$  est bien mesurable. ■

**Démonstration du critère d'intégrabilité dominée** Le sens direct est évident : si la fonction  $f$  est intégrable, elle est mesurable et est dominée par la fonction  $|f|$  qui est intégrable.

Pour montrer la réciproque dans ce cas, nous approchons la fonction mesurable  $f$  par la suite de fonctions étagées  $f_k$  introduites dans la démonstration du critère de l'image réciproque (p. 15). La fonction  $f$  apparaît comme une limite simple des fonctions  $f_k$ , qui sont intégrables et dominées par la fonction intégrable  $g$ . Par le théorème de convergence dominée (p. 4),  $f$  est intégrable. ■

### **Théorème – Composition par une fonction continue**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction mesurable et  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue. La composée  $g \circ f$  de ces deux fonctions est mesurable.

Dans le cas d'une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , il suffit de supposer que  $g$  soit continue par morceaux pour pouvoir conclure (cf. exercice "Composition de fonctions et mesurabilité" (p. 23)). (En général, les fonctions  $g$  qui assurent que  $g \circ f$  soit mesurable pour toutes les fonctions mesurables  $f$  sont appelées fonctions *boréliennes*.)

**Démonstration** Si  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^p$ , par continuité de  $g$ , l'ensemble  $g^{-1}(F)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^m$  et par conséquent, par le critère de mesurabilité par les images réciproques (p. 14)

$$(g \circ f)^{-1}(F) = f^{-1}(g^{-1}(F))$$

est un ensemble mesurable. Par le même critère, la composée  $g \circ f$  est donc mesurable. ■

Les corollaires de ce résultat sont nombreux et immédiats. Citons les deux instances les plus directement utiles.

### **Corollaire – Mesurabilité du produit**

Le produit de deux fonctions scalaires mesurables est mesurable.

**Démonstration** Par continuité de l'application produit  $\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

### **Corollaire – Mesurabilité de la valeur absolue**

La valeur absolue d'une fonction scalaire mesurable est mesurable.

**Démonstration** Par continuité de l'application valeur absolue  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

**Exercice – Intégrabilité du produit (•)** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions mesurables dont les carrés sont intégrables. Montrer que le produit  $fg$  est intégrable. (Solution p. 27.)

**Exercice – Intégrabilité du maximum (•)** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions intégrables. Montrer que la fonction  $\max(f, g)$  est intégrable. (Solution p. 27.)

**Exercice – Fonction d'ordre exponentiel (•)** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable pour laquelle il existe des constantes réelles  $M$  et  $\sigma$  telles que  $|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$ . Montrer que si  $x \geq \sigma$  alors l'application  $t \in [0, +\infty[ \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable. (Solution p. 28.)

### Proposition – Ensemble mesurable

Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  est mesurable si et seulement si sa fonction caractéristique  $1_E$  est mesurable.

**Démonstration** Si l'ensemble  $E$  est mesurable, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $E_k := E \cap [-k, k]$  est de longueur finie, c'est-à-dire que la fonction  $1_{E_k}$  est intégrable. La fonction  $1_E$  est donc mesurable car limite simple de fonctions intégrables.

Réciproquement, si une fonction caractéristique  $1_E$  est mesurable, par le critère de l'image réciproque (p. 14), comme  $E = 1_E^{-1}(\{1\})$  et que le singleton  $\{1\}$  est fermé,  $E$  est mesurable. ■

### Définition – Intégrabilité sur un sous-ensemble

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *intégrable sur un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$*  si la fonction  $f1_E$  est intégrable. On note alors

$$\int_E f(t) dt := \int 1_E(t)f(t) dt.$$

Cette définition est cohérente avec la définition existant déjà dans le cas où  $E$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  (cf. "Calcul Intégral I").

### Corollaire – Restriction à des ensembles mesurables

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $E$  pour tout ensemble mesurable  $E$ .

**Démonstration** Si  $f$  est intégrable, elle est mesurable ; si l'ensemble  $E$  est mesurable, sa fonction caractéristique  $1_E$  est également mesurable, comme limite des  $1_{E \cap [-k, k]}$  qui sont intégrables, et donc mesurables. Par conséquent, le produit  $f1_E$  est mesurable, comme sa valeur absolue  $|f1_E|$ . Par ailleurs, comme  $|1_E| \leq 1$ , on a  $|f1_E| \leq |f|$ . Par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12),  $f1_E$  est donc intégrable.

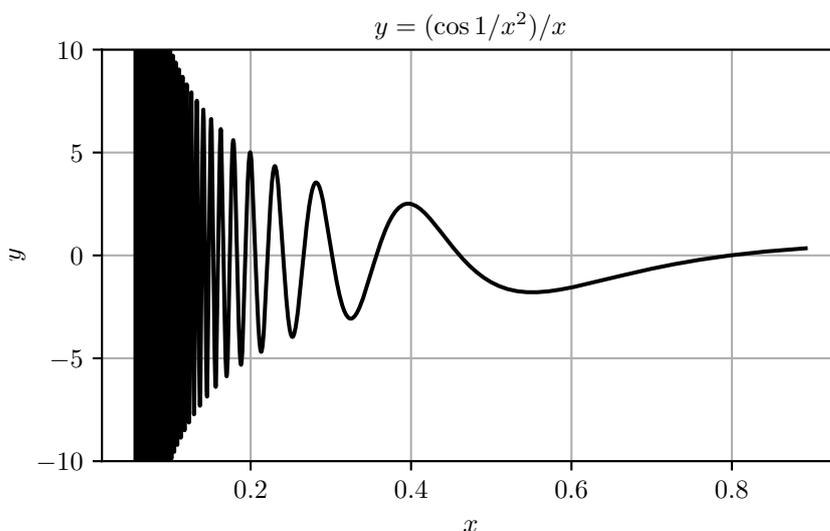
Réciproquement, supposons  $f1_E$  intégrable pour tout ensemble mesurable  $E$ . En prenant  $E = \mathbb{R}$ , on constate que  $f$  est nécessairement intégrable. ■

## Annexe – Intégrabilité conditionnelle

On utilise parfois le terme *conditionnellement intégrable* pour qualifier les fonctions qui sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil mais pas au sens de Lebesgue, car leur valeur absolue n'est pas intégrable. Nous fournissons dans cette section l'exemple d'une telle fonction, en démontrant que la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

est conditionnellement intégrable.



Pour montrer qu'elle est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, nous exploitons la forme générale du théorème fondamental du calcul (cf "Calcul Intégral I"), appliqué à la fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

Cette fonction est dérivable en tout point de  $[0, 1]$  ; en 0, sa dérivée est nulle<sup>7</sup> et

7. En effet,

$$\left| \frac{g(h) - g(0)}{h} \right| \leq \frac{|h|}{2} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

quand  $x > 0$ ,

$$\left[ -\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2} \right]' + x \sin \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12), la fonction  $h(x)$  égale à  $x \sin(1/x^2)$  si  $x > 0$  et nulle en zéro est absolument intégrable car continue sur  $[0, 1]$ . La fonction  $g'$  étant également intégrable au sens de Henstock-Kurzweil,  $f = g' + h$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil comme somme de deux fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil.

La fonction  $f$  n'est pourtant pas intégrable au sens de Lebesgue, car  $h$  est intégrable au sens de Lebesgue mais pas  $g'$ . En effet, si c'était le cas, toute fonction intégrable au sens de Lebesgue dont la valeur absolue est majorée par  $|g'|$  aurait par l'inégalité triangulaire son intégrale majorée par celle de  $|g'|$ . Or nous allons exhiber une suite de telles fonctions dont l'intégrale tend vers  $+\infty$ , ce qui établira la contradiction.

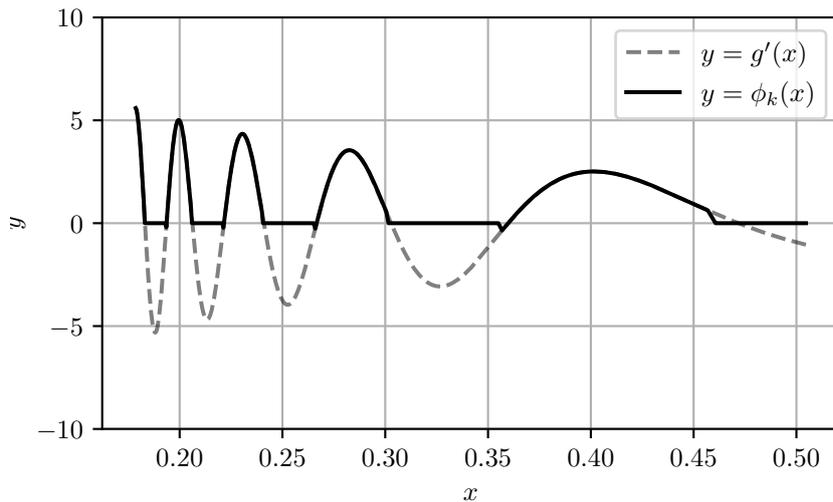
Soit  $k \geq 1$  un entier ; on définit la fonction  $\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\phi_k(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } \alpha_j \leq x \leq \beta_j, 1 \leq j \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi(j+1/4)}} \quad \text{et} \quad \beta_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi(j-1/4)}},$$

L'idée sous-jacente est la suivante : les fonctions  $\phi_k$  sont faites pour coïncider avec  $g'$  dans les plages de valeurs où  $\cos 1/x^2$  est positif ; comme  $g'(x) = -x \sin 1/x^2 + (1/x) \cos 1/x^2$ , et que pour  $x$  petit,  $1/x$  est grand devant  $x$ , cela correspond approximativement aux plages où  $g'(x)$  est positif.



Par construction,  $\phi_k$  est continue par morceaux et donc intégrable au sens de Lebesgue, et bien telle que  $|\phi_k| \leq |g'|$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_k(t) dt &= \sum_{j=0}^k \int_{\alpha_j}^{\beta_k} \phi_k(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^k \left[ -\frac{x^2}{2} \sin \frac{1}{x^2} \right]_{\alpha_j}^{\beta_j} \\ &= \sum_{j=0}^k \left[ -\frac{1}{4\pi(j-1/4)} \sin(2\pi(j-1/4)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi(j+1/4)} \sin(2\pi(j+1/4)) \right] \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{j-1/4} + \frac{1}{j+1/4} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^k \frac{j}{j^2 + 1/16}. \end{aligned}$$

Comme la série associée à cette équation est divergente, on peut rendre l'intégrale arbitrairement grande en choisissant un  $k$  suffisamment grand, ce qui permet de conclure.

## Exercices

### Intégrale de Gauss

Source : Swartz (2001)

On s'intéresse à la valeur de l'intégrale

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

On pose

$$g(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

**Question 1 (••)** Montrer que  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Calculer  $F(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ . (Solution p. 28.)

**Question 2 (••)** Montrons que la fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x}).$$

(Solution p. 28.)

**Question 3 (●●●)** Evaluer de deux façons différentes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(\varepsilon^{-1}) - F(\varepsilon)$$

et en conclure que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Solution p. 29.)

## Théorème de convergence dominée

**Question 1 (●●●)** Montrer que la conclusion du théorème de convergence dominée (p. 4) est toujours valide si les fonctions  $f_k$  ne satisfont les hypothèses de convergence et d'encadrement que presque partout. (Solution p. 30.)

## Ensembles de longueur finie

**Question 1 (●)** Soit  $A$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  pour lequel il existe une constante  $L$  (finie) telle que pour tout intervalle fermé borné  $[a, b]$ , on ait

$$\int_a^b 1_A(t) dt \leq L.$$

Montrer que  $A$  est de longueur finie et que  $\ell(A) \leq L$ . (Solution p. 30.)

## Intégrabilité locale

Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *localement intégrable* si tout point  $x$  de  $\mathbb{R}$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  et un intervalle  $[x + \varepsilon, x + \varepsilon]$  où la fonction  $f$  soit intégrable.

**Question 0 (●●●)** Montrer que  $f$  est localement intégrable si et seulement si pour tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ . (Solution p. 31.)

**Question 1 (●)** Montrer que toute fonction localement intégrable est mesurable. (Solution p. 31.)

**Question 2 (●●)** La réciproque est-elle vraie? (Solution p. 31.)

## Fonctions mesurables

**Question 1 (●●●●)** Montrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable si et seulement si pour tout nombre réel  $a$ , l'ensemble

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$$

est mesurable. (Solution p. 31.)

**Question 2 (••)** En déduire qu'une fonction croissante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur tout intervalle fermé borné. (Solution p. 32.)

## Composition de fonctions et mesurabilité

**Question 1 (•••)** Montrer que si la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et que la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue par morceaux, alors la fonction composée  $g \circ f$  est mesurable. (Solution p. 32.)

## Composition par une fonction lipschitzienne

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $g$  est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe un  $K \geq 0$  tel que pour toute paire de réels  $x$  et  $y$  on ait  $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$ .

**Question 1 (•)** Si  $f$  est mesurable est-ce que  $g \circ f$  est mesurable ? (Solution p. 32.)

**Question 2 (•)** Si  $f$  est intégrable, est-ce que  $g \circ f$  est intégrable ? (Solution p. 33.)

## Formule de la moyenne

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction définie sur un ensemble  $U$  ouvert et supposée continûment différentiable. On considère  $c \in U$  et  $R > 0$  tel que le disque fermé centré en  $c$  et de rayon  $R$  soit inclus dans  $U$ ; on définit alors la grandeur  $I(r)$  pour tout  $r \in [0, R] \rightarrow \mathbb{R}^2$  comme la valeur moyenne du vecteur  $f$  sur le cercle de rayon  $c$  et de rayon  $r$ :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_{\alpha,r}) d\alpha \quad \text{où } z_{\alpha,r} = c + r(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

**Question 1 (•)** Que vaut  $I(0)$  ? (Solution p. 33.)

**Question 2 (•••)** Montrer que l'application  $r \in [0, R] \mapsto I(r)$  est dérivable et calculer  $I'(r)$  pour tout  $r \in [0, R]$ . (Solution p. 33.)

**Question 3 (•••)** On suppose désormais que  $f$  vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout point  $(x, y)$  de  $U$ , c'est-à-dire que

$$\partial_y f(x, y) = R(\pi/2) \cdot \partial_x f(x, y)$$

où  $R(\alpha)$  désigne la rotation d'angle  $\alpha$  centrée sur l'origine. Simplifier l'expression de  $I'(r)$  et conclure. Indication: on pourra évaluer  $\partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))$ . (Solution p. 34.)

## Solutions

### Exercices essentiels

**Défaut de domination** On établit sans difficultés que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int f_k(t) dt = \int_k^{k+1} dt = 1,$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(t) dt = 1.$$

D'autre part, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $f_k(t) = 0$  si  $k > t$ , donc  $f_k(t) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ ; par conséquent,

$$\int \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(t) dt = 0.$$

L'intégrale de la limite des  $f_k$  diffère donc de la limite des intégrales des  $f_k$ . Cela ne contredit pas le théorème de convergence dominée (p. 4) puisque nous n'avons pas exhibé de fonction intégrable dominant les  $f_k$ ; en l'occurrence, une fonction  $g$  dominant toutes les  $f_k$  vérifie nécessairement  $1 \leq g(t)$  pour tout  $t \geq 0$ , or aucune fonction de ce type n'est intégrable.

**Intégrale fonction d'un paramètre** Au préalable, on note que l'application arctan est continue et donc intégrable sur  $[0, 1]$ ; le théorème fondamental du calcul nous garantit donc l'intégrabilité de sa primitive  $t \in [0, 1] \mapsto 1/(1+t^2)$  et nous fournit la valeur de son intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \arctan'(t) dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, pour tout  $x \geq 0$  et tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $|e^{-xt}| \leq 1$ ; pour toute suite de réels strictement positifs  $x_k$  tendant vers 0, on a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x_k t}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \text{ et } \left| \frac{e^{-x_k t}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Si l'on introduit des prolongements des fonctions considérées par zéro en dehors de  $[0, 1]$ , le théorème de convergence dominée (p. 4) nous fournit donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

**Théorème fondamental du calcul** Soit  $[a_k, b_k]$  une suite d'intervalles fermés bornés de  $\mathbb{R}$  tels que  $[a_k, b_k] \subset [a, b]$  et tels que  $a_k \rightarrow a$  et  $b_k \rightarrow b$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_k$  définie par

$$g_k(t) = \begin{cases} f'(t) & \text{si } t \in [a_k, b_k], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est intégrable car  $f'|_{[a_k, b_k]}$  est intégrable par restriction ; la suite des  $g_k$  est dominée par la fonction valant  $|f'|$  sur  $]a, b[$  et 0 en dehors, fonction qui est intégrable par additivité. De plus la suite des  $g_k$  converge simplement vers la fonction égale à  $f'$  sur  $]a, b[$  et nulle en dehors. Appliquer le théorème fondamental du calcul à  $f'|_{[a_k, b_k]}$  donne par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_k(t) dt = \int_{a_k}^{b_k} f'(t) dt = f(b_k) - f(a_k).$$

Par application du théorème de convergence dominée (p. 4), on obtient donc

$$\int_a^b f'(t) dt = \int g(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int g_k(t) dt,$$

donc

$$\int_a^b f'(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(b_k) - f(a_k) = f(b) - f(a).$$

**Fonctions puissance** Pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , si  $\alpha \neq -1$ , on a

$$\int_1^x t^\alpha dt = \left[ \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1},$$

et pour  $\alpha = -1$ ,

$$\int_1^x t^{-1} dt = [\ln t]_1^x = \ln x.$$

Si nous définissons les fonctions  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $k \geq 1$  par

$$f_k(t) = \begin{cases} t^\alpha & \text{si } t \in [1, k], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_1^k t^\alpha dt,$$

donc cette limite est finie si et seulement si  $\alpha < -1$ . Comme la suite des fonctions  $f_k$  est croissante et converge simplement vers la fonction égale à  $t \mapsto t^\alpha$  sur  $[1, +\infty[$  et nulle ailleurs, nous en déduisons par le théorème de convergence monotone (p. 6) que la fonction  $t \in [1, +\infty[ \mapsto t^\alpha$  est intégrable si et seulement si  $\alpha < -1$ . Le cas de la fonction puissance sur l'intervalle  $]0, 1]$  peut être analysé de façon similaire, ou bien en pratiquant le changement de variable  $t \mapsto 1/t$  pour se ramener à l'intervalle que nous avons déjà étudié.

**Intégrabilité et intégrales impropres** Si une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur tout intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , alors la suite  $|f_k| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des restrictions de  $|f|$  à  $[-k, k]$  prolongées par zéro à  $\mathbb{R}$  est croissante, composée de fonctions intégrables, et sa limite est la fonction  $|f|$ . Par le théorème de convergence monotone (p. 6), on a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_k^k |f(t)| dt = \int |f(t)| dt$$

si la limite du membre de gauche est finie. La fonction  $|f|$  est alors intégrable ; elle domine les fonctions  $f_k$  qui convergent simplement vers  $f$ , donc  $f$  est également intégrable par le théorème de convergence dominée (p. 4).

Réciproquement, si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k |f(t)| dt = +\infty,$$

le théorème de convergence monotone (p. 6) prouve que la fonction  $|f|$  n'est pas intégrable et donc que  $f$  n'est pas intégrable.

**Ensemble de longueur finie I** La fonction caractéristique  $1_E$  est égale presque partout à la fonction  $1_{[-1,1]}$  qui est intégrable et satisfait

$$\int 1_{[-1,1]}(t) dt = \int_{-1}^1 dt = 2.$$

L'ensemble  $E$  est donc de longueur finie égale à 2.

**Ensemble de longueur finie II** La fonction caractéristique  $1_{\mathbb{Q}}$  est nulle presque partout puisque  $\mathbb{Q}$  est dénombrable. Elle est donc intégrable d'intégral nulle ; l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  est donc de longueur nulle.

**Ensemble de longueur finie III** La fonction caractéristique  $f = 1_E$  est la limite de la suite croissante de fonctions  $f_j = 1_{\cup_{k=0}^j [k, k+2^{-k}[}$ . Comme par linéarité de l'intégrale on a

$$\int f_j(t) dt = \sum_{k=0}^j \int 1_{[k, k+2^{-k}[}(1) dt = \sum_{k=0}^j \int_k^{k+2^{-k}} dt = \sum_{k=0}^j 2^{-k} = 2 - 2^{-j},$$

par le théorème de convergence monotone (p. 6), la fonction  $1_E$  est intégrable et

$$\ell(E) = \int 1_E(t) dt = 2.$$

**La longueur est additive** Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles de  $\mathbb{R}$  disjoints et de longueur finie, alors  $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$  donc  $A \cup B$  est de longueur finie par linéarité de l'intégrale et

$$\ell(A \cup B) = \int 1_{A \cup B}(t) dt = \int 1_A(t) dt + \int 1_B(t) dt = \ell(A) + \ell(B).$$

Si  $A$  et  $B$  sont mesurables et disjoints, alors sur tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , comme

$$1_{(A \cup B) \cap [a, b]} = 1_{A \cap [a, b]} + 1_{B \cap [a, b]},$$

$A \cup B$  est mesurable. Si l'un des ensembles  $A$  et  $B$  au moins a une longueur infinie, disons  $A$  par exemple, alors par le théorème de convergence monotone (p. 6), on a

$$\int_{-k}^k 1_A(t) dt \rightarrow +\infty \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent,

$$\int_{-k}^k 1_A(t) dt \leq \int_{-k}^k 1_{A \cup B}(t) dt \rightarrow +\infty \text{ quand } k \rightarrow +\infty$$

et donc dans ce cas aussi on a donc  $\ell(A \cup B) = \ell(A) + \ell(B)$ .

**Suite d'ensembles** Il suffit de réaliser que d'après leur définition,

$$B = \bigcup_{k_0=0}^{+\infty} \bigcap_{k=k_0}^{+\infty} A_k \text{ et } C = \bigcap_{k_0=0}^{+\infty} \bigcup_{k=k_0}^{+\infty} A_k$$

puis d'invoquer la stabilité des ensembles mesurables par union dénombrable (p. 8) et intersection dénombrable (p. 9).

**Ni ouvert ni fermé** L'ensemble  $E = [0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé : 0 est un point frontière qui appartient à  $E$  donc  $E$  n'est pas ouvert et 1 est un point frontière de  $E$  qui n'appartient pas à  $E$  donc  $E$  n'est pas fermé. Mais  $E = [0, 1] \setminus \{1\}$  donc l'ensemble est le complémentaire d'un ensemble fermé dans un autre ensemble fermé; or les ensembles fermés sont mesurables (p. 10) et le complémentaire relatif de deux ensembles mesurables est mesurable (p. 10), donc  $E$  est mesurable.

**Fonctions continues** L'image réciproque de tout fermé par une application continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est fermé. Comme tout fermé est mesurable (p. 10), le critère de l'image réciproque (p. 14) prouve qu'une telle fonction continue est mesurable.

**Image réciproque d'un intervalle** Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  peut être décomposé comme l'union (disjointe) d'un ouvert  $U$  et d'un ensemble fermé  $F$  (composé de 0, 1 ou 2 points); comme ensembles ouverts ou fermés sont mesurables (p. 10), il est donc mesurable et son image réciproque par  $f$  est donc mesurable (p. 14).

**Intégrabilité du produit** Les produits  $fg$  est mesurable comme produit de fonctions mesurables (p. 17); la fonction  $|fg|$  est donc également mesurable (p. 17). De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , comme  $(|f(x)| + |g(x)|)^2 \geq 0$ ,

$$|fg|(x) \leq \frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{2}g(x)^2.$$

Par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12),  $fg$  est donc intégrable.

**Intégrabilité du maximum** Les fonctions  $f$  et  $g$  étant intégrables, elles sont mesurables. Par composition avec une fonction continue (p. 17),  $\max(f, g)$  est également mesurable.

De plus, on a  $|\max(f, g)| \leq |f| + |g|$ . La fonction  $|\max(f, g)|$  est donc dominée par une fonction intégrable; par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12),  $\max(f, g)$  est donc intégrable.

**Fonction d'ordre exponentiel** La fonction  $t \in [0, +\infty[ \mapsto f(t)e^{-xt}$  est mesurable comme produit de fonctions mesurables. De plus,

$$|f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-\varepsilon t} \text{ avec } \varepsilon = x - \sigma > 0,$$

La fonction  $t \mapsto Me^{-\varepsilon t}$  étant intégrable (intégrer la fonction sur un intervalle borné, puis passer à la limite par le le théorème de convergence monotone (p. 6)), la fonction  $t \in [0, +\infty[ \mapsto f(t)e^{-xt}$  est intégrable par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12).

## Intégrale de Gauss

### Question 1

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

$$F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

La fonction  $F$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . En effet, si  $x_0 \in [0, +\infty[$ , alors

$$\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \rightarrow \frac{e^{-x_0(1+t^2)}}{1+t^2} \text{ quand } x \rightarrow x_0.$$

De plus pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

Le second membre de cette équation étant intégrable (il est intégrable sur tout intervalle fermé borné et décroît quand  $t \rightarrow +\infty$  comme  $1/t^2$ ), par le théorème de convergence dominée (p. 4),

$$F(x) \rightarrow F(x_0) \text{ quand } x \rightarrow x_0.$$

De plus, toujours par le théorème de convergence dominée (avec la même domination), on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

**Question 2** Montrons que la fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; la fonction

$$x \in ]\varepsilon, +\infty[ \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$$

est dérivable en tout  $x$ , de dérivée égale à  $-e^{-x(1+t^2)}$ , qui est dominée par  $e^{-\varepsilon/(1+t^2)}$ . La fonction  $t \in [0, 1] \mapsto e^{-\varepsilon/(1+t^2)}$  est intégrable car continue. Par le théorème de dérivation sous le signe somme (p. 5), on a donc

$$F'(x) = - \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$$

quand  $x > \varepsilon$  et donc quand  $x > 0$  puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitraire. Avec  $g : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

pour tout  $x > 0$ , on a donc

$$F'(x) = - \int_0^1 e^{-x} e^{-xt^2} dt = -e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt,$$

soit avec le changement de variable  $u = \sqrt{x}t$ ,

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x}).$$

**Question 3** On a d'une part par le théorème fondamental du calcul et les résultats de la question 1

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} F'(x) dx = F(\varepsilon^{-1}) - F(\varepsilon) \rightarrow -\frac{\pi}{4} \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

et d'autre part avec l'expression de la question 2 de  $F'$  et le changement de variable  $x = \sqrt{t}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} F'(x) dx &= - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) dx \\ &= -2 \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} e^{-\sqrt{x^2}} g(\sqrt{x}) \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ &= -2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} e^{-u^2} g(u) du \\ &= - \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} 2g'(u)g(u) du \\ &= - \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} ((g(u))^2)' du \\ &= - [(g(u))^2]_{\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} \\ &= - (g(1/\sqrt{\varepsilon}))^2 + (g(\sqrt{\varepsilon}))^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} F'(x) dx \rightarrow - \left( \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

On conclut finalement que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Théorème de convergence dominée

**Question 1** Imaginons que les fonctions mesurables  $f_k$  convergent vers la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R} \setminus A$  où  $A$  est négligeable, et satisfont  $g \leq f_k \leq h$  sur l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus B_k$  où  $B_k$  est négligeable.

Alors l'ensemble  $C := A \cup (\cup_{k=1}^{+\infty} B_k)$  est négligeable, comme on l'a montré dans l'exercice "Union d'ensembles négligeables" du chapitre précédent. On peut aussi s'en convaincre avec le calcul intégral :  $A$  et les  $B_k$  sont négligeables, donc mesurables et de longueur nulle (p. 11) ; la suite des  $C_j := A \cup (\cup_{k=1}^j B_k)$  est composée d'ensemble mesurables, croissante et comme

$$1_{C_j} = 1_{A \cup (\cup_{k=1}^j B_k)} \leq 1_A + \sum_{k=1}^j 1_{B_k},$$

on a

$$\int 1_{C_j}(x) dx \leq \int 1_A(x) dx + \sum_{k=1}^j \int 1_{B_k}(x) dx = \ell(A) + \sum_{k=1}^j \ell(B_k) = 0.$$

Par le théorème de convergence monotone (p. 6),

$$\ell(C) = \int 1_C(x) dx = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int 1_{C_j}(x) dx = 0.$$

L'ensemble  $C$  est de longueur nulle et donc négligeable (p. 11).

Sachant que  $C$  est négligeable, c'est-à-dire mesurable et de longueur nulle, il suffit alors de rédéfinir chaque fonction  $f_k$ ,  $f$ ,  $g$  et  $h$  pour leur assigner la valeur 0 en tout  $x \in C$  ; cette opération ne change pas leur caractère mesurable ou intégrable, ni la valeur des intégrales associées. Et les nouvelles fonctions satisfont partout les hypothèses de convergence et d'encadrement du théorème de convergence dominée (p. 4). On peut donc conclure sous les hypothèses plus faibles considérées dans cet exercice.

## Ensembles de longueur finie

**Question 1** La suite des fonctions  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_k(t) = \begin{cases} 1_A(t) & \text{si } t \in [-k, k], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est croissante, de limite simple  $1_A$ . A tout rang  $k$ , on a

$$\int f_k(t) dt = \int_{-k}^k 1_A(t) dt \leq L,$$

donc

$$\sup_k \int f_k(t) dt \leq L < +\infty.$$

Le théorème de convergence monotone (p. 6) nous garantit l'intégrabilité de  $1_A$  – c'est-à-dire le fait que  $A$  est de longueur finie – et fournit

$$\ell(A) = \int 1_A(t) dt = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int f_k(t) dt \leq L.$$

## Intégrabilité locale

**Question 0** De toute évidence, si  $f$  est intégrable sur tout intervalle fermé borné, elle est intégrable sur tous les intervalles de la forme  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ .

Réciproquement, supposons que pour tout  $x$  il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $f$  soit intégrable sur  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Si la fonction  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b]$ , par additivité c'est qu'elle n'est pas intégrable sur  $[a, (a+b)/2]$  ou sur  $[(a+b)/2, b]$  (voire sur les deux sous-ensembles). En procédant par récurrence, on construit ainsi une suite d'intervalles fermés emboîtés  $[a_k, b_k]$ , indexés par l'entier  $k$ , avec  $[a_0, b_0] = [a, b]$ , de longueur  $(b-a)/2^k$  où la fonction  $f$  n'est pas intégrable. La suite des points centraux  $(a_k + b_k)/2$  étant de Cauchy, elle a une limite  $x$  appartenant à tous ces intervalles fermés; pour  $k$  assez grand, on a  $I_k \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . Par restriction,  $f$  devrait donc être intégrable sur  $I_k$ , d'où une contradiction;  $f$  est donc intégrable sur  $[a, b]$ .

**Question 1** Une fonction  $f$  localement intégrable est intégrable sur tout intervalle de la forme  $[-k, k]$  où  $k \in \mathbb{N}$  par le résultat de la question 0 (p. 22). La fonction  $f$  étant la limite simple des fonctions  $f_k = 1_{[-k, k]} f$ , elle est mesurable.

**Question 2** La réciproque est fautive. Par exemple, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est mesurable; c'est par exemple la limite des fonctions intégrables

$$f_k(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } |x| \geq 2^{-k}, \\ 0 & \text{si } |x| < 2^{-k}, \end{cases}$$

Mais elle n'est intégrable sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  pour aucun  $\varepsilon > 0$ . En effet, quand  $2^{-k} \leq \varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_k(x) dx &= \int_{-\varepsilon}^{-2^{-k}} \frac{dx}{x^2} + \int_{2^{-k}}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^2} \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-\varepsilon}^{-2^{-k}} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_{2^{-k}}^{\varepsilon} \\ &= (2^k - 1/\varepsilon) + (2^k - 1/\varepsilon) = 2^{k+1} - 2/\varepsilon. \end{aligned}$$

Cette grandeur tendant vers  $+\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , le théorème de convergence monotone (p. 6) nous garantit que la fonction  $f$  n'est pas intégrable sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

## Fonction mesurables

**Question 1** Compte tenu du critère de l'image réciproque (p. 14), comme tous les ensembles  $] -\infty, a]$  sont fermés, le critère de l'énoncé est bien vérifié pour toute fonction mesurable.

Montrons désormais la réciproque. Supposons le critère de l'énoncé vérifié et soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ ; l'ensemble  $U$  peut être décomposé comme union dénombrable d'intervalles ouverts bornés  $I_k$  de  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, comme

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_k I_k\right) = \bigcup_k f^{-1}(I_k),$$

il nous suffit de montrer que l'image réciproque de tout intervalle ouvert borné  $]a, b[$  par  $f$  est mesurable, pour conclure que  $f^{-1}(U)$  est mesurable, comme union dénombrable d'ensembles mesurables.

Or, un point  $x$  vérifie  $a < f(x) < b$  si et seulement il ne vérifie pas  $f(x) \leq a$  et vérifie  $f(x) \leq b - 2^{-k}$  pour au moins un entier  $k$ , ce qui se traduit par la relation ensembliste

$$f^{-1}(]a, b[) = (\mathbb{R} \setminus f^{-1}(]-\infty, a])) \cap \left( \bigcup_{k=0}^{+\infty} f^{-1}(]-\infty, b - 2^{-k}]) \right).$$

Les images réciproques au second membre sont mesurables par hypothèse, et sont combinées par complément, union dénombrable et intersection, par conséquent  $f^{-1}(]a, b[)$  est également mesurable. Le critère de l'image réciproque (p. 14) pour la mesurabilité de  $f$  est donc bien vérifié.

**Question 2** Si la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante, les images réciproques des ensembles de la forme  $]-\infty, a[$  sont des intervalles. En effet, si  $f(x) \leq a$  et  $f(y) \leq a$  et  $x \leq y$ , pour tout point intermédiaire  $x \leq z \leq y$ ,  $f(z) \leq a$ . Par conséquent,  $f$  est mesurable.

De plus,  $f$  étant croissante, pour tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  et tout  $x \in [a, b]$ , on a  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ . Par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12),  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

## Composition de fonctions et mesurabilité

**Question 1** Soient  $\dots \leq a_{-k} \leq \dots \leq a_{-1} \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k$  des nombres réels tels que la fonction  $g$  soit continue sur chaque intervalle ouvert  $]a_j, a_{j+1}[$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ ; alors pour tout  $j$ , si  $g_j$  désigne la restriction de  $g$  à  $]a_j, a_{j+1}[$ , par continuité de  $g_j$ , l'image réciproque  $V_j = g_j^{-1}(U)$  est ouverte dans  $]a_j, a_{j+1}[$  et donc dans  $\mathbb{R}$ . L'image réciproque de  $U$  par  $g$  est donc la réunion  $V$  de ces ouverts, c'est-à-dire un ouvert, et éventuellement d'un sous-ensemble  $N$  des  $\{a_k\}$  qui est nécessairement dénombrable, donc mesurable (et de longueur nulle).

L'image réciproque de  $U$  par  $g \circ f$  est donc l'image réciproque de  $V \cup N$  par  $f$ . La fonction  $f$  étant mesurable,  $f^{-1}(V)$  et  $f^{-1}(N)$  sont mesurables, ainsi que  $f^{-1}(V \cup N) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(N)$ . La fonction composée  $g \circ f$  est donc mesurable.

## Composition par une fonction lipschitzienne

**Question 1** Oui, car toute fonction lipschitzienne est continue ;  $g \circ f$  est donc mesurable comme composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue (p. 17).

**Question 2** Oui. D'une part,  $f$  étant intégrable, elle est mesurable et donc par la question 1, la composée  $g \circ f$  est mesurable. D'autre part, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|g \circ f(x) - g \circ f(0)| \leq K|f(x) - f(0)|$$

et donc

$$|g \circ f(x)| \leq K|f(x)| + (K|f(0)| + |g \circ f(0)|)$$

Le membre de droite de cette inégalité est une fonction intégrable sur  $[0, 1]$ , donc par le critère d'intégrabilité dominée (p. 12), la fonction  $g \circ f$  est intégrable.

## Formule de la moyenne

**Question 1** On a

$$I(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c_1, c_2) d\alpha = f(c_1, c_2) = f(c).$$

**Question 2** Formons le taux d'accroissement de  $I$  en  $r$ , pour une variation de l'argument  $h$  telle que  $r + h \in [0, R]$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{I(r+h) - I(r)}{h} &= \frac{1}{2\pi h} \left( \int_0^{2\pi} f(c_1 + (r+h)\cos\alpha, c_2 + (r+h)\sin\alpha) d\alpha \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} f(c_1 + r\cos\alpha, c_2 + r\sin\alpha) d\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_{r+h,\alpha}) - f(z_{\alpha,r})}{h} d\alpha. \end{aligned}$$

La fonction  $g_\alpha : r \mapsto f(z_{\alpha,r})$  étant différentiable pour tout  $\alpha$ , on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_{r+h,\alpha}) - f(z_{\alpha,r})}{h} &= \frac{d}{dr} f(z_{\alpha,r}) \\ &= df(z_{r,\alpha}) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ &= \partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos\alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin\alpha. \end{aligned}$$

De plus, par le théorème des accroissements finis,

$$\left\| \frac{g_\alpha(r+h) - g_\alpha(r)}{h} \right\| \leq \sup_{r \in [0, R]} \left\| \frac{d}{dr} g_\alpha(r) \right\|$$

où le sup du membre de droite est bien fini puisque  $dg_\alpha(r)/dr$  est une fonction continue du couple  $(\alpha, r)$  qui appartient à l'ensemble fermé borné  $[0, 2\pi] \times [0, R]$ . Par conséquent, pour toute suite  $h_k$  tendant vers 0 et telle que  $r + h_k \in [0, R]$ , la suite des

$$\frac{g_\alpha(r + h_k) - g_\alpha(r)}{h_k}$$

associée converge simplement vers

$$\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos \alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin \alpha$$

et chacune des composantes de ce vecteur de  $\mathbb{R}^2$  est bornée par la fonction intégrable (constante)

$$\alpha \in [0, 2\pi] \mapsto \sup_{r \in [0, R]} \left\| \frac{d}{dr} g_\alpha(r) \right\|.$$

Par conséquent, par le théorème de convergence dominée, la dérivée de  $I$  est définie en tout point  $r$  et est donnée par

$$I'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos \alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin \alpha) d\alpha.$$

**Question 3** Evaluons la dérivée par rapport à  $\alpha$  de  $f(z_{\alpha,r})$ . On a

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) &= \partial_\alpha(f(c_1 + r \cos \alpha, c_2 + r \sin \alpha)) \\ &= \partial_x f(z_{\alpha,r})(-r \sin \alpha) + \partial_y f(z_{\alpha,r})(r \cos \alpha). \end{aligned}$$

Comme  $\partial_y f(z_{\alpha,r}) = R(\pi/2) \partial_x f(z_{\alpha,r})$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) &= r(-\sin \alpha \times I + \cos \alpha \times R(\pi/2)) \cdot \partial_x f(z_{\alpha,r}) \\ &= rR(\pi/2 + \alpha) \cdot \partial_x f(z_{\alpha,r}) \\ &= rR(\pi/2)R(\alpha) \cdot \partial_x f(z_{\alpha,r}) \end{aligned}$$

D'un autre coté, l'intégrande dans l'expression de  $I'(r)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos \alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin \alpha &= (\cos \alpha \times I + \sin \alpha \times R(\pi/2)) \cdot \partial_x f(z_{r,\alpha}) \\ &= R(\alpha) \cdot \partial_x f(z_{r,\alpha}). \end{aligned}$$

Par conséquent lorsque  $r$  est non nul

$$\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos \alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin \alpha = \frac{1}{r} R(-\pi/2) \cdot \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r}))$$

et donc

$$\begin{aligned} I'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_x f(z_{r,\alpha}) \cos \alpha + \partial_y f(z_{r,\alpha}) \sin \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi r} \left( \int_0^{2\pi} R(-\pi/2) \cdot \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) d\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2\pi r} R(-\pi/2) \cdot \left( \int_0^{2\pi} \partial_\alpha(f(z_{\alpha,r})) d\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2\pi r} R(-\pi/2) \cdot [f(z_{\alpha,r})]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, un calcul direct montre que  $I'(0) = 0$ . La dérivée de  $I$  est donc identiquement nulle; on en conclut que pour tout  $r$ ,

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_{\alpha,r}) d\alpha = I(0) = f(c).$$

## Références

- Demailly, Jean-Pierre. 2011. *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Kurzweil-Henstock*. Université Joseph Fourier Grenoble I. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>.
- Schechter, E. 1996. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Elsevier Science. <https://books.google.fr/books?id=eqUv3Bcd56EC>.
- Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals*. Singapore: World Scientific.