Calcul Intégral II

STEP, MINES ParisTech

12 février 2021 (`#7d082cf`)

Question 1 (réponse multiple) Si les ensembles $A_k \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, sont tous mesurables, déterminer quels ensembles dans la liste ci-dessous sont nécessairement mesurables.

- ☐ A: l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ appartenant (au moins) à l'un des A_k,
- ☐ B: l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ n'appartenant à aucun A_k,
- ☐ C: l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ appartenant exactement à l'un des A_k.

Question 2 (réponse multiple) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est nécessairement intégrable si

- ☐ A: elle est mesurable,
- ☐ B: elle est limite de fonctions mesurables,
- ☐ C: elle est mesurable et bornée.

Question 3 (réponse multiple) Si la fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ est intégrable, alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1\}$ est nécessairement :

- ☐ A: mesurable,
- ☐ B: de longueur finie,
- ☐ C: de longueur nulle,
- ☐ D: négligeable.

Question 4 (réponses multiple) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables, lister quelles fonctions dans la liste ci-dessous sont nécessairement mesurables.

- ☐ A: $f + g$,
- ☐ B: $f \times g$,
- ☐ C: $\max(f, g)$,
- ☐ D: $g \circ f$.

Question 5 (réponse multiple) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable sur tout intervalle $[-r, r]$ avec $r \geq 0$ et que

$$\int_{-r}^{r} f(t)\, dt \to A \in \mathbb{R} \text{ quand } r \to +\infty,$$

alors on peut conclure que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale A

- ☐ A: sans hypothèse supplémentaire,
- ☐ B: si $|f| \leq g$ où $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ est intégrable,
- ☐ C: si

$$\sup_{r \geq 0} \int_{-r}^{r} |f(t)|\, dt < +\infty.$$