

Calcul Différentiel, Intégral et Stochastique

MINES ParisTech/UE 11 – Examen

STEP, MINES ParisTech*

3 novembre 2020, 9h–12h

Coques fines

Dans ce problème, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 et d la distance associée.

$$\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } d(x, y) := \|y - x\|.$$

Le symbole U désigne le sous-ensemble du plan constitué des points d'abscisse et d'ordonnée strictement positives et C l'arc de cercle constitué des points de U à distance 1 de l'origine.

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\} \text{ et } C = \{x \in U \mid \|x\| = 1\}.$$

On définit la projection p sur l'arc de cercle C comme la fonction :

$$p : x \in U \mapsto \frac{x}{\|x\|} \in C.$$

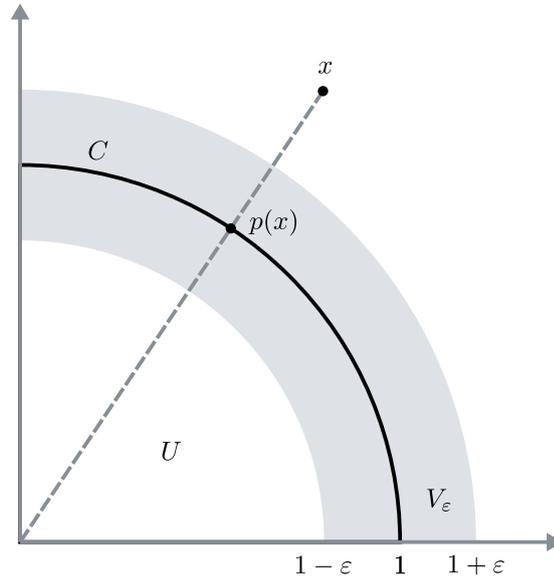
On rappelle que cette projection $p(x)$ minimise la distance entre $x \in U$ et C :

$$d(x, p(x)) = \min_{y \in C} d(x, y) =: d(x, C).$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on définit la coque de C d'épaisseur 2ε par

$$V_\varepsilon := \{x \in U \mid d(x, C) < \varepsilon\}.$$

*Ce document est un des produits du projet  boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions" 4.0 internationale.



Topologie

Question 0 Montrer que l'ensemble U est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Montrer que pour tout $\epsilon \in]0, 1]$

$$V_\epsilon = U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - \epsilon < \|x\| < 1 + \epsilon\},$$

et en déduire que les ensembles V_ϵ sont également des ouverts de \mathbb{R}^2 .

Calcul Différentiel

Question 1 Montrer que les dérivées partielles de la fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ existent et en déduire la valeur de

$$n(x) := \nabla \|x\|.$$

La fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est-elle continûment différentiable?

Question 2 Montrer l'existence et calculer la valeur de $\nabla(1/\|x\|)$ quand $x \in U$.

Question 3 Montrer que si deux fonctions $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $g : U \mapsto \mathbb{R}^2$ sont différentiables, alors le produit fg également. Calculer la jacobienne $J_{fg}(x)$ en fonction de $\nabla f(x)$ et $J_g(x)$.

Question 4 Montrer que p est différentiable et que

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} P(x) \quad \text{où} \quad P(x) = I - n(x) \cdot n(x)^\top.$$

(I désigne la matrice identité de \mathbb{R}^2 .)

Question 5 On pose

$$h(x) = p(x) + \varepsilon(x - p(x)).$$

Montrer que $h : V_1 \rightarrow V_\varepsilon$ est une bijection et déterminer $h^{-1}(y)$ quand $y \in V_\varepsilon$.

Question 6 Calculer $J_h(x)$ et montrer que h est un C^1 -difféomorphisme.

Question 7 Etablir que

$$\det J_h(x) = \varepsilon \left(\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} \right).$$

Calcul Intégral

Question 8 On note $S := [0, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$. Que vaut l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x) dx$$

et pourquoi? (On ne demande pas de justifier l'existence de l'intégrale).

Question 9 Calculer $(-t(\ln t - 1))'$ pour $t > 0$ et en déduire que

$$\int_\varepsilon^2 (-\ln t) dt \rightarrow -2(\ln 2 - 1) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0.$$

En déduire que la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} égale à $-\ln t$ quand $t \in]0, 2]$ et nulle sinon est intégrable sur $[0, 2]$. Est-ce que l'on pourrait se passer de la mention "et nulle sinon" pour répondre à cette dernière question?

Question 10 Montrer l'existence et calculer

$$\int_0^2 \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

quand $x_2 \in]0, 2]$. Indication : $\partial_{x_1} \left(\ln \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (la preuve de cette égalité n'est pas exigée).

Question 11 Montrer que la frontière ∂S de l'ensemble S dans \mathbb{R}^2 est négligeable. (On donnera ∂S sans justification.) En déduire que la fonction

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} 1/\|x\| & \text{si } x \in S \text{ et } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est mesurable. Puis, déduire des questions précédentes son intégrabilité.

Question 12 Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que $f \circ p : U \rightarrow \mathbb{R}$ soit mesurable (c'est-à-dire que son prolongement par 0 à \mathbb{R}^2 est mesurable). Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y)) \, dy$$

est bien définie.

Question 13 Montrer que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y)) \, dy = \frac{1}{2} \int_{V_1} f(p(x)) \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \right) dx.$$

Question 14 Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in]0, 1]}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y)) \, dy.$$

Probabilités — Loi de Maxwell

On désire déterminer la distribution des vitesses des molécules d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre (loi de Maxwell (1859)).

On représente la vitesse d'une molécule d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre dans un repère orthonormal par un vecteur aléatoire $V = (V_1, V_2, V_3)$. Le choix du repère étant arbitraire, il est naturel de supposer que la loi de V est invariante par rotation (autour de l'origine) et que les composantes de V sont indépendantes.

Partie 1

Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^3 de densité $f_{(X,Y,Z)}$. Ce vecteur aléatoire est supposé invariant par rotation : il existe une fonction $\phi :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ (strictement positive) telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Question 1 On suppose de plus les variables aléatoires X, Y et Z indépendantes. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ qui soit une densité telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f(x)f(y)f(z) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer finalement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 2 On suppose de plus que les densités marginales de X, Y et Z ainsi que la fonction ϕ sont continûment différentiables (c'est-à-dire de classe C^1). Montrer que la densité de chacune des composantes s'écrit sous la forme $f(x) = ae^{cx^2/2}$, avec a et c deux constantes réelles.

Question 3 En déduire que le vecteur (X, Y, Z) suit une loi gaussienne d'espérance l'origine dont on précisera la matrice de covariance en fonction de la constante $\sigma = 1/\sqrt{|c|}$.

Partie 2

On suppose que le vecteur aléatoire $(X, Y, Z) = V$ vérifie les hypothèses des questions précédentes.

Question 4 Calculer l'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz, c'est-à-dire l'espérance

$$E_c := \mathbb{E} \left(\frac{1}{2} m \|V\|^2 \right)$$

où m est la masse d'un atome du gaz. L'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz de masse m étant égale à $\frac{3}{2}kT$ où k est la constante de Boltzmann et T la température du gaz, en déduire la valeur de σ^2 en fonction de k, T et m .

Question 5 On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$, alors la loi de $X + Y$ est la loi $\Gamma(a + b, \lambda)$. On rappelle également que la densité g de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ vérifie

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{]0, +\infty[}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où Γ est la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \text{ pour } a \in]0, +\infty[.$$

On remarquera que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Calculer la loi de V_1^2 . En déduire la loi de $\|V\|^2$ puis la densité de $\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$. La probabilité associée est appelée loi de Maxwell.