

Calcul Intégral IV

STEP, MINES ParisTech

12 février 2021 (#7d082cf)

Question 1 (réponses multiples) Soit $X = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X . On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$ la grandeur $\mu(A)$ comme le diamètre de A :

$$\mu(A) := \text{diam}(A) := \sup \{\|x - y\| \mid (x, y) \in A \times A\} \in [0, +\infty].$$

Est-ce que μ est une mesure sur (X, \mathcal{A}) ?

- A : non, car \mathcal{A} n'est pas une tribu,
- B : non, car μ n'est pas nulle en 0,
- C : non, car μ n'est pas σ -additive,
- D : oui.

Question 2 (réponses multiples) Si μ et ν sont des mesures sur le même espace mesurable (X, \mathcal{A}) , $\alpha \geq 0$ et $f : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ est continue, alors

- A : $\mu + \nu$ est une mesure,
- B : $\alpha\mu$ est une mesure,
- C : $f \circ \mu$ est une mesure.

Question 3 Soit c la mesure de comptage sur \mathbb{R} (muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont égales c -presque partout si et seulement si :

- A : f et g sont identiques,
- B : f et g diffèrent au plus en un nombre fini de points,
- C : la longueur de $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$ est nulle,
- D : f et g sont en fait égales c -presque partout sans condition.

Question 4 La fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est une fonction étagée

- A : oui,
- B : non.
- C : ça dépend (question ambiguë).

Question 5 Si \mathcal{A} est une tribu de \mathbb{R} et la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est continue, alors h est \mathcal{A} -mesurable

- A : oui,
- B : non, pas nécessairement.

Question 6 (réponse multiple) L'intégrale d'une fonction $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ (positive) mesurable :

- A : est toujours définie,
- B : est toujours positive,
- C : ne peut être infinie que si f prend des valeurs infinies,
- D : est infinie dès que f prend des valeurs infinies.