Обратные задачи для волновых уравнений, связанные с определением коэффициентов уравнений возникают в ультразвуковой медицинской томографии (например, при диагностике рака молочной железы), геофизике (сейсморазведка и электроразведка при поиске углеводородов), задачах неразрушающего контроля. В уравнении акустики неизвестные коэффициенты – плотность, скорость звука, поглощение, в системе теории упругости – плотность и параметры Ламе, в системе Максвелла – диэлектрическая и магнитная проницаемость. Коэффициенты предполагаются независимыми от времени, но произвольно зависящими от пространственных переменных. Данные обратных задач – это волновые поля, измеряемые на границе волнопроводящей области и индуцируемые источниками, расположенными, как правило, на той же границе. Решение этих задач осложняется тем, что они нелинейны и классически некорректны. Оценки устойчивости, причем условные, удается получить при довольно сильных предположениях, которые могут не выполняться. Разработаны различные подходы к практическому решению таких задач. Основные из них – лучевой метод, метод полного обращения, метод граничного управления.

Приближение геометрической оптики или разложении фундаментального решения по сингулярностям приводит к лучевому методу. При этом для определения скорости распространения волн возникает обратная задача для уравнения эйконала. Это нелинейная обратная задача (обратная кинематическая задача - ОКЗ), в которой требуется определить функцию скорости по временам распространения волн между граничными точками. Известно, что единственности решения в этой задаче нет, если в среде присутствуют волноводы. Если ОКЗ решена, то для определения остальных коэффициентов возникает линейная обратная задача, подобная задаче компьютерной томографии (КТ). Отличие от КТ в том, что интегрирование производится не по прямым, а по криволинейным лучам, которые определяются из решения ОКЗ. Недостатки метода в том, что возможные волноводы приводят к неединственности решения ОКЗ, а также в отсутствии эффективных алгоритмов решения ОКЗ.

Как в медицинской томографии (А.В.Гончарский, С.Ю. Романов), так и в геофизике (В.А. Чеверда, И.Ю. Сильвестров и др) развивается метод полного обращения – итерационный метод подбора решения на основании минимизации функционала невязки наблюдаемого волнового поля и рассчитанного для текущего набора коэффициентов. Это универсальный подход к решению любых обратных задач. Его недостаток состоит в том, что он требует малости флуктуаций коэффициентов и знания хорошего начального приближения решения обратной задачи. В противном случае метод обращения или не сходится или дает неверное решение. Кроме того, он требует многократного решения прямой задачи, что делает его весьма затратным.

Весьма популярен также метод миграции, который не решает обратную задачу, но дает изображение среды. Миграционное изображение есть не что иное, как сингулярный носитель кусочно-гладких коэффициентов. Недостатком метода миграции является необходимость задания скоростной модели среды или ее гладкого приближения.

Всех перечисленных недостатков лишен метод граничного управления (М.И. Белишев, 1986). Показано, что он является многомерным обобщением метода Гельфанда-Левитана-Марченко-Крейна, который был разработан для решения одномерных задач (с одной пространственной переменной). Как и метод Гельфанда-Левитана-Марченко-Крейна BC (boundary control) метод сводит решение нелинейной динамической обратной задачи к решению линейных уравнений. Кроме того он не требует сильных ограничений на коэффициенты (в частности, допускаются волноводы). К его недостаткам можно отнести, то, что требуется большое количество граничных источников и большие вычислительные затраты. В настоящее время он не имеет практического применения, но представляется наиболее перспективным методом. Для различных приложений представляет интерес численная реализация различных версий этого метода.