Transformasi Linear

Pengertian Transformasi Linear, Sifat-sifat Transformasi Linear dan Matriks Transformasi

Sub-CPMK 9

- Mampu menghitung vektor hasil transformasi linear

Pengertian Transformasi Linear

- Suatu fungsi yang memetakan suatu vektor di ruang vektor *V* ke ruang vektor *W* (dituliskan $T: V \rightarrow W$) disebut sebagai *transformasi linear* bila $\overline{u}, \overline{v} \in V$ dan α skalar berlaku

  a) $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$

  b) $T(\alpha\overline{u}) = \alpha T(\overline{u})$

- Transformasi linear memungkinkan suatu vektor berpindah ke ruang vektor lain dengan dimensi yang berbeda
- Contoh: vektor R^2 berpindah ke vektor R^3 menggunakan transformasi linear $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Apakah semua fungsi adalah suatu transformasi linear? Tidak

Menunjukkan suatu fungsi adalah transformasi linear

Diketahui $T: R^2 \rightarrow R^3$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Periksalah apakah *T* adalah transformasi linear?

Jawab

1. Ambil $\overline{u}, \overline{v} \in R^2$ sembarang akan ditunjukkan

$$T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$$

Karena $\overline{u} + \overline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$ maka:

$$T(\overline{u} + \overline{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= T(\overline{u}) + T(\overline{v})$$

Maka terbukti bahwa $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$

Lanjutan

2. Ambil $\overline{u} \in R^2$ dan α sembarang skalar maka akan ditunjukkan

$$T(\alpha\overline{u}) = \alpha T(\overline{u})$$

$$T(\alpha\overline{u}) = T\left(\begin{bmatrix}\alpha u_1 \\ \alpha u_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha u_1 - \alpha u_2 \\ \alpha u_1 \\ \alpha u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha u_1 \\ \alpha u_2\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}u_1 - u_2 \\ u_1 \\ u_2\end{bmatrix} = \alpha T(\overline{u})$$

Berdasarkan 1) dan 2) maka disimpulkan bahwa T adalah suatu transformasi linear

Latihan

Diketahui $T: M_{2x2} \rightarrow R$ dengan $T(A) = \det(A)$,untuk setiap A∈ M_{2x2}.

Periksalah apakah *T* adalah transformasi linear?

Sifat Transformasi Linear

Jika $T: V \rightarrow W$ adalah suatu transformasi linear, maka:

- $T(\bar{0}) = 0$
- $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v})$
- $T(\bar{v} - \bar{w}) = T(\bar{v}) - T(\bar{w})$

Jenis-jenis Transformasi Linear

- Jika *V*=*W* maka transformasi $T: V \rightarrow V$ disebut suatu *operator linear* pada *V*.
- Transformasi $T: V \rightarrow W$ dengan $T(\overline{u}) = \overline{0}$ disebut *transformasi nol*.
- Transformasi $T_A: V \rightarrow W$ dengan $T(\overline{u}) = A\overline{u}$ disebut *transformasi matriks*, sedangkan *A* matriks transformasi.
- Transformasi $I: V \rightarrow V$ dengan $I(\overline{u}) = \overline{u}$ disebut *operator identitas* pada *V*.

Kernel dan Range

Definisi

- Misalkan $T: V \rightarrow W$ transformasi linear

  Kernel dari *T* (dinotasikan Ker(*T*)) adalah $\{\overline{u} \in V | T(\overline{u}) = \overline{0}\}$

  Ker(*T*) disebut ruang nol dari *T*.

- Range dari *T* (dinotasikan *R*(*T*)) adalah $\left\{\overline{b} \in W \middle| b = T(\overline{u}), \text{untuk suatu } \bar{u} \in V\right\}$.

  R(*T*)disebut juga dengan bayangan $\overline{u}$ oleh $T(\overline{u})$

Contoh

Misalkan $T: P_2 \rightarrow R^2$ didefinisikan oleh

$$T\boxed{(a + bx + cx^2)} = \begin{bmatrix} a - b \\ a - c \end{bmatrix}$$

Manakah yang merupakan $Ker(T)$?

$a)\ \ S_1 = 1 + x + x^2$

$b)\ \ S_2 = 1 + 2x + x^2$

Jawab

$$a)\ \ T(S_1) = T(\,1 + \ x\ +\ x^2\,) = \begin{bmatrix} a - b \\ a - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{0} \qquad \Rightarrow S_1 \in Ker(T)$$

$$b)\ \ T(S_2) = T(\,1 + 2x\ +\ x^2\,) = \begin{bmatrix} a - b \\ a - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \bar{0} \qquad \Rightarrow S_1 \notin Ker(T)$$

Rank dan Nullitas

- **Definisi 5.3**
- Jika $T: V \rightarrow W$ adalah suatu transformasi linear, Ker(*T*) dan *R*(*T*) membentuk suatu subruang.
- Dimensi daerah hasil dari *T* dinyatakan sebagai rank dari *T* (notasi : rank(*T*))
- Dimensi dari *T* dinyatakan nullitas dari *T* (notasi:nullitas(*T*)).

Teorema

- Jika A adalah suatu matriks transformasi *mxn* dan $T_A: R^n \to R^m$ adalah transformasi matriks maka :
- Nullitas(T_A)= Nullitas(A)
- Rank(T_A) = Rank (A)
- Rank(T_A) + Nullitas(T_A) = *n*

Contoh

- **Tentukan basis & dimensi dari $Ker(T)$ dan $R(T)$ dari transformasi linear $T: R^4 \to R^3$ dengan**

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{bmatrix}$$

Jawab

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Basis Jangkauan $R(T)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \boxed{-1} & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{B_1 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka Basis Jangkauan $R(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ Rank $= 2$

Contoh (lanjutan)

b) Basis $Ker(T)$ dan dimensi Nulitas

Berdasarkan hasil OBE sebelumnya

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix}0\\-2\\0\end{matrix}} \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & 0 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil OBE sebelumnya kolom yang tidak terdapat 1 utama ada pada kolom c dan d

Maka, dimisalkan *c = s* dan *d = t dimana s,t* $\in R$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a + b & = 0 \\ c - 2d & = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a = -b \\ c = 2d \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} a = -s \\ c = 2t \end{matrix}$$

Pisahkan vector dengan parameternya

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}t$$

Maka Basis $Ker(T) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\}$

Nulitas $= 2$

Latihan

1. Tentukan Nullitas (T) berdasarkan informasi berikut ini

- $T: R^5 \to R^7$ punya rank (T) =3
- $T: P_4 \to P_3$ punya rank(T) =1
- Daerah hasil dari $T: R^6 \to R^3$ adalah R^2

2. Diketahui transformasi matriks $T_A: R^4 \to R^3$memiliki matriks transformasi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Tentukan basis dan dimensi dari $Ker\ (T_A)$ dan $R(T_A)$.

Latihan

3. Anggap $T: R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator linear yang ditentukan dari

$$T(x, y) = [2x - y, -8x + 4y]$$

- Tentukan basis dari ruang Kernel dan ruang Rangenya
- Periksa apakah vektor [5,0] dan vektor [-3,12] berada pada *R*(*T*)
- Periksa apakah vektor [3,2] dan vektor [5,10] berada pada *Ker*(*T*)