Ruang Eigen

Sub CPMK 13

- Mampu menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari sebuah matrik.

Pengantar

- Perhatikan transformasi matriks berikut:

$$T_A: R^2 \to R^2, \qquad T(\bar{x}) = A\bar{x} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Jika $\bar{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ memenuhi $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ maka tentukan λ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$ maka haruslah λ=0

- Carilah vektor lain bukan vektor 0 yang punya karakteristik seperti vektor $\bar{v}$ dengan nilai λ yang berbeda.
- Adakah nilai λ lain yang bisa memenuhi

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

Pengantar

- Perhatikan transformasi matriks berikut:

$$T_A: R^2 \rightarrow R^2, \quad T(\bar{x}) = A\bar{x} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Carilah vektor lain yang punya karakteristik seperti vektor $\bar{v}$
- Vektor-vektor $\bar{v}$ yang dikalikan dengan suatu matriks A sama dengan kelipatan dari vektor $\bar{v}$ tersebut adalah vektor eigen dari matriks A dan kelipatannya (λ) disebut nilai eigen.
- Vektor eigen dan nilai eigen menentukan karakteristik dari matriks A.
- Himpunan semua vektor-vektor eigen dari suatu matriks disebut ruang vektor eigen (ruang eigen).

Penggunaan Vektor Eigen dan Nilai Eigen

Penggunaan nilai eigen dan vektor eigen banyak digunakan diantaranya:

1. Dasar dari metode PCA (Principle Component Analysis) untuk mereduksi dimensi dalam pemodelan mechine learning.
2. Digunakan dalam Algoritma Page Rank pada Google yang bekerja berdasarkan keterhubungan antara web dengan tautan (link) yang dirujuk.

Sumber: https://gowrishankar.info/blog/eigenvalue-eigenvector-eigenspace-and-implementation-of-googles-pagerank-algorithm/

Nilai dan Vektor Eigen

Jika A matriks $n \times n$ maka vektor tak nol $\bar{x} \in R^n$ disebut *vektor eigen* dari A jika $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut *nilai eigen* dari A dan $\bar{x}$ sering disebut sebagai vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen λ.

Untuk mencari nilai eigen, pandang persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ dapat dituliskan kembali menjadi $A\bar{x} = \lambda I\bar{x}$ dan ekivalen dengan

$$(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}\ .$$

Agar suatu nilai eigen λ dapat ditentukan maka SPL homogen harus punya solusi trivial, hal ini hanya terjadi jika $\det(\lambda I - A) = 0$.

Ruang Eigen

- Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut *persamaan karakteristik* dan $\mathrm{p}(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ disebut *polinom karakteristik.*
- Nilai dan vektor eigen sering disebut *nilai dan vektor karakteristik*.
- Ruang eigen adalah ruang solusi dari SPL $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$

Contoh

- Diketahui $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan : Nilai dan vektor eigen serta ruang eigen

Penyelesaian:

- $\det(\lambda I - A) = \bar{0}$ maka

$$det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2(0 + \lambda - 2) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

dengan memfaktorkan diperoleh $(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$=0 maka nilai eigen adalah 2 dan 1.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan : Nilai dan vektor eigen serta ruang eigen

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan vektor eigen maka disubstitusikan nilai-nilai eigen ke persamaan $(A - \lambda I)\overline{x} = \overline{0}$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga solusi $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, maka vektor eigen adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan : Nilai dan vektor eigen serta ruang eigen

Penyelesaian:

- Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dengan OBE diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Sehingga solusi $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan vektor eigen adalah $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan : Nilai dan vektor eigen serta ruang eigen

Penyelesaian:

Ruang eigen yang berkaitan dengan nilai $\lambda = 2$ adalah

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dengan basis = $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ dan

Ruang eigen yang berkaitan dengan nilai $\lambda = 1$adalah

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dengan basis =$\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Hitung Nilai Eigen, Vektor Eigen dan tentukan

B= $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$