Determinan

Pengertian Determinan, Metode Kofaktor, Sifat-sifat determinan

Sub CPMK 11

- Mampu menghitung determinan matriks menggunakan aturan sarus, kofaktor dan menggunakan sifat-sifat determinan.

Pengertian Determinan

- Fungsi bernilai real dari suatu matriks
- Misalkan *A* adalah matriks bujur sangkar berukuran 2x2. Determinan matriks *A* didefinisikan sebagai :

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Determinan dapat dihitung dengan menggunakan **metode Sarrus**, diilustrasikan sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $+$

Contoh : Tentukan nilai det(A) dari matriks A=$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$?

Jawab : $\det\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1) - (2 \cdot 1) = 3 - 2 = 1$

Latihan

- Hitunglah determinan dari matriks berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinan Metode Sarus M_{3x3}

$$\det(M_{3x3}) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (a\,e\,i + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Contoh

Tentukan $\det(A)$ dari matriks A $= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

jawab

$$\det(A) = det \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{matrix}$$

$$= (3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot (\text{-}2)) - ((-1) \cdot 1 \cdot (\text{-}2) + 3 \cdot 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 1)$$

$$= (3 + 0 + 2) - (2 + 0 + 2) = 5 - 4 = 1$$

*Aturan Sarrus hanya berlaku untuk matriks berukuran maksimal 3x3

Metode Ekspansi Kofaktor (Minor dan Kofaktor)

- Cara lain untuk menghitung determinan matriks yang memiliki orde lebih besar dari 3x3 yaitu dengan ekspansi kofaktor.
- Jika A sebuah matriks bujursangkar *nxn* maka **minor** dari a_{ij} dituliskan dengan M_{ij} adalah determinan dari sub-matriks yang masih tersisa, setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari A. C_{ij} disebut **kofaktor** anggota a_{ij} dimana

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Contoh

Menentukan Minor

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 0 = 2$$

Menentukan Kofaktor

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} \quad = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} \quad = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \\ & & \\ -4 & 3 & \end{bmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} . M_{23} = -15$$

✍**Latihan**

Dengan menggunakan matriks **contoh 2.1** tentukan M_{31} , C_{31} , M_{21} , C_{21}

Ekspansi Kofaktor

- **Teorema**

Determinan suatu matriks *A* berukuran *n*x*n* dapat dihitung dengan mengalikan anggota- anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan yaitu untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor disepanjang kolom ke-*j*)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor disepanjang baris ke-*i*)

Contoh :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$$

$$= 3.(-1)^2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1.(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0.(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) + (-1)(-11) + 0 = -1$$

✍**Latihan**

Gunakan kolom atau baris lainnya untuk menghitung determinan *A*!

Apakah nilai determinan yang diperoleh sama dengan contoh 2.2? Apakah yang dapat disimpulkan?

Sifat-sifat Determinan

- Hitunglah determinan dari matriks berikut ini!

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots..$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \ldots..$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \ldots.$$

$$\det(A^T) = \ldots.$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Beberapa sifat determinan

Misalkan A matriks bujur sangkar maka:

a) Jika A mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol maka det(A) = 0.
b) det(A)=det(A^T)

Jika A adalah suatu matriks segitiga nxn (segitiga atas,segitiga bawah, atau diagonal) maka det(A) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

Beberapa Sifat Determinan

Misalkan A matriks nxn

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari A dikalikan dengan suatu skalar α, maka $\det(B) = \alpha.\det(A)$.
- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau kolom dari A dipertukarkan maka $\det(B) = -\det(A)$.
- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu panggandaan suatu baris A ditambahkan pada **baris** lainnya atau jika suatu penggandaan suatu **kolom** ditambahkan pada kolom lainnya, maka $\det(B) = \det(A)$.

Determinan

Matriks Adjoint, Matriks Invers, Aturan Cramer

Sub CPMK 12

- Mampu mengimplementasikan determinan untuk menghitung invers matriks dan solusi SPL.

Invers dari Matriks

- **Teorema**

  Matriks A mempunyai invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

- **Definisi**

  Matriks yang mempunyai determinan $\neq 0$ disebut **matriks tak singular**, sedangkan matriks yang mempunyai determinan = 0 disebut **matriks singular**.

Invers dari Matriks

- **Definisi**

Jika *A* adalah sebarang matriks *n*x*n* dan C_{ij}adalah kofaktor dari a_{ij}maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut **matriks kofaktor** dari *A*. Transpos dari matriks ini disebut **adjoin *A*** dinyatakan adj(A).

$$adj(A) = kof(A)^t$$

Invers dari Matriks

- Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Latihan: Tentukan adj(A) dan A^{-1} jika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab

1) Mencari nilai $\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 1$

2) Mencari nilai $\operatorname{adj}(A) = (kof(A))^t$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^t$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} [\quad] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\quad] \\ [\quad] & [\quad] & [\quad] \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}^t$$

$$\operatorname{adj}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\quad} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Aturan Cramer

- **Definisi**

Diketahui suatu sistem persamaan $A\bar{x} = \bar{b}$ linear :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Aturan Cramer

Jika $A\bar{x} = \bar{b}$ merupakan suatu sistem *n* persamaan linear dengan *n* peubah sedemikian sehingga $A \neq 0$ maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \dots, x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

Dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-*j* dari *A* dengan vektor $\bar{b}$.

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Tentukan penyelesaian dari SPL diatas dengan aturan Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Latihan

Tentukan solusi dari SPL berikut dengan menggunakan aturan Cramer

$$\begin{aligned} 4x + 5y \quad\quad &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 5z &= 1 \\ -x - y \quad\quad &= 1 \\ 2x + 4y + 3z &= -1 \end{aligned}$$