

LINMA1510 Autolin - Laboratoire 1

Kuypers Bénédicte & Schoenauen Thibaud

Octobre 2021

1 Introduction

Ce premier laboratoire a pour thème la régulation d'un niveau d'eau dans un réservoir alimenté par un débit réglable. Les manipulations sont réalisées et circuit ouvert ainsi qu'en circuit fermé et une perturbation peut être mise.

2 Manipulations

2.1 Données

$$\begin{aligned}S_R &= 43[cm^2] \\g &= 981[cm \cdot s^{-2}] \\S_{S23} &= 0 \quad (\text{vanne tjs fermée dans ce labo})\end{aligned}$$

2.2 Formules

Bilan des débits (équation de continuité):

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{1}{S_R}q_{P1} - \frac{1}{S_R}(q_{F30} + q_{S30})$$

Modélisation du débit (loi de Toricelli) :

$$\begin{aligned}q_{F30} &= S_{F30}\sqrt{2gh_3} \\q_{S30} &= S_{S30}\sqrt{2gh_3}\end{aligned}$$

2.3 Variables

Pour modéliser notre système, nous avons besoin des différentes variables suivantes (grandeurs variationnelles):

- sortie: $y = \tilde{h} = h - \bar{h}$
- entrée: $u = \tilde{q}_P = q_P - \bar{q}_P$
- perturbation: $v = \tilde{S}_F = S_F - \bar{S}_F$

Initialement, un échelonnage a été réalisé. Les coefficients de proportionnalité calculés de ce fait sont:

- pour la commande du débit de la pompe q_{P1} : Coeff. $P_1 = 1,1628$;
- pour la mesure de la hauteur de la colonne d'eau h_3 : Coeff. H. $T_3 = 0,686754$;
- un offset pour la mesure de la colonne d'eau h_3 : Offset H. $T_3 = 0,118563$.

3 Questions

3.1 Les valeurs choisies pour q_{P1} et \bar{h}_3 . Calcul de la section S_{S30}

L'énoncé demande initialement de placer le débit $u_0 = q_{P1} = 30$ [ml/s]. Nous devons calculer la valeur de \bar{h}_3 qui correspond à la hauteur à laquelle le système atteint un équilibre pour un débit donné. L'expérience a été réalisée 2 fois. La première, l'eau est arrivée à une hauteur de $\bar{h}_3 = 19,86$ cm. La seconde, la hauteur mesurée est de $\bar{h}_3 = 17,4$ cm. Dans la suite, une hauteur de $\bar{h}_3 = 17,9$ cm a été utilisée. Grâce à l'équation de bilan des débits, nous pouvons calculer la valeur de la section de la vanne S_{S30} . En remplaçant les valeurs des débits grâce à la loi de Toricelli et en annulant cette nouvelle équation, on peut trouver:

$$\frac{d\bar{h}_3}{dt} = \frac{1}{S_R} q_{P1} - \frac{1}{S_R} (S_{F30} \sqrt{2g\bar{h}_3} + S_{S30} \sqrt{2g\bar{h}_3}) = 0$$

La section frontale S_{F30} étant fermée, on peut la considérée comme nulle. En multipliant par S_R , on a:

$$q_{P1} = S_{S30} \sqrt{2g\bar{h}_3}$$

Ce qui nous donne:

$$S_{S30} = \frac{q_{P1}}{\sqrt{2g\bar{h}_3}} = \frac{30}{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,179}} = 16[mm^2]$$

3.2 Le modèle dynamique linéarisé du système ainsi que les fonctions de transfert $G(s)$ et $H(s)$

Nous devons réécrire le modèle avec les variables x , u et v de manière linéaire.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{S_R} u - \frac{1}{S_R} (S_L \sqrt{2gx} + v \sqrt{2gx}) = f(x, u, v)$$

Avec la relation de sortie:

$$y = Cx = h(x)$$

Pour les développements en série de Taylor, on trouve alors:

$$f(x, u, v) = f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}) + A(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x})\tilde{x} + B(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x})\tilde{u} + D(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x})\tilde{v}$$

- $f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}) = 0$ par définition
- $A(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{h}_3, u=q_{P1}, v=S_F=0} = -\frac{S_L}{S_R} \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_3}} = -0,019478 [s^{-1}]$
- $B(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=\bar{h}_3, u=q_{P1}, v=S_F=0} = \frac{1}{S_R} = 0,023 [cm^{-2}]$
- $D(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}) = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{x=\bar{h}_3, u=q_{P1}, v=S_F=0} = -\frac{\sqrt{2g\bar{h}_3}}{S_R} = -4,35820 [cm^{-1}s^{-1}]$
- comme $x = y$, nous obtenons également $C := \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\bar{h}_3, u=q_{P1}, v=0} = 1$

Fonction de transfert:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{B}{s - A} = \frac{0,023}{s + 0,019478} \quad (1)$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}D = \frac{D}{s - A} = \frac{-4,35820}{s + 0,019478} \quad (2)$$

La réponse du système en boucle ouverte (théorique et expérimentale) est donnée à la figure 1.

3.3 Les équations en boucle fermée : fonctions de transfert $G_1(s)$ et $G_2(s)$

Soit notre contrôleur PI représenté par le schéma suivant.

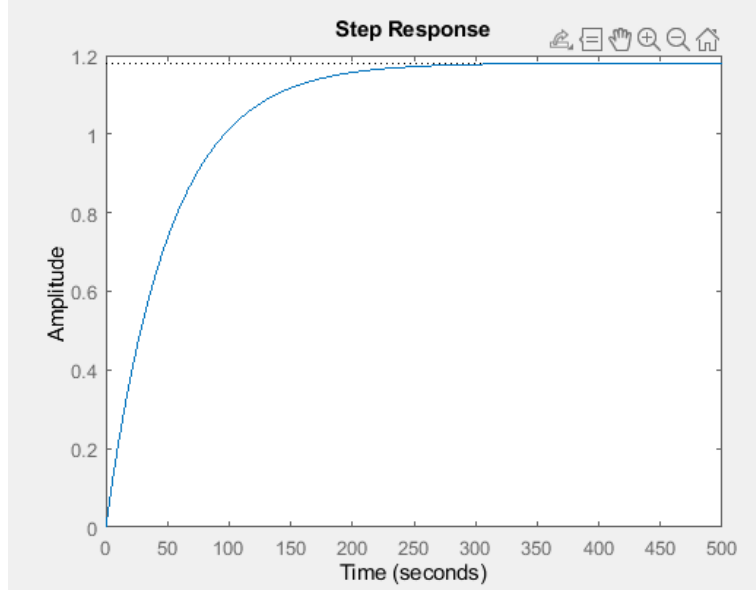


Figure 1: Réponse théorique en boucle ouverte

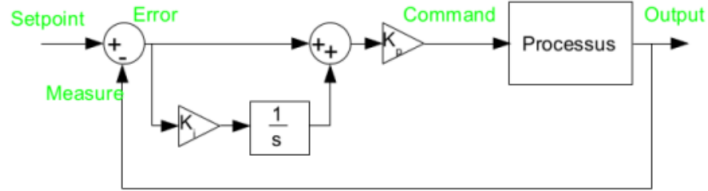


Figure 2: Schéma bloc du régulateur PI

Boucle fermée avec régulateur PI: $C(s) = (1 + \frac{K_i}{s})K_p = \frac{1}{s}(s + K_i)K_p$

$$T_r(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(s + K_i)K_p B}{s(s - A) + (s + K_i)K_p B} \quad (3)$$

$$T_v(s) = \frac{H(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{Ds}{s(s - A) + (s + K_i)K_p B} \quad (4)$$

On observe que le temps de stabilisation du niveau d'eau en pratique est supérieur à la théorie, ce qui veut dire que notre système n'est pas contrôlé de façon optimale. cela peut - entre autres - être dû au système de mesure, qui n'est pas précis en raison de l'agitation de l'eau.

3.4 Analyse des performances des différents réglages du régulateur PI vis-à-vis de la perturbation en section de la vanne frontale

3.4.1 Le calcul de la réponse temporelle théorique du système en boucle fermée, à un échelon de perturbation

Lorsqu'on est en boucle fermée, la relation entre l'entrée et la sortie devient

$$Y(s) = T_r(s)R(s) + T_v(s)V(s)$$

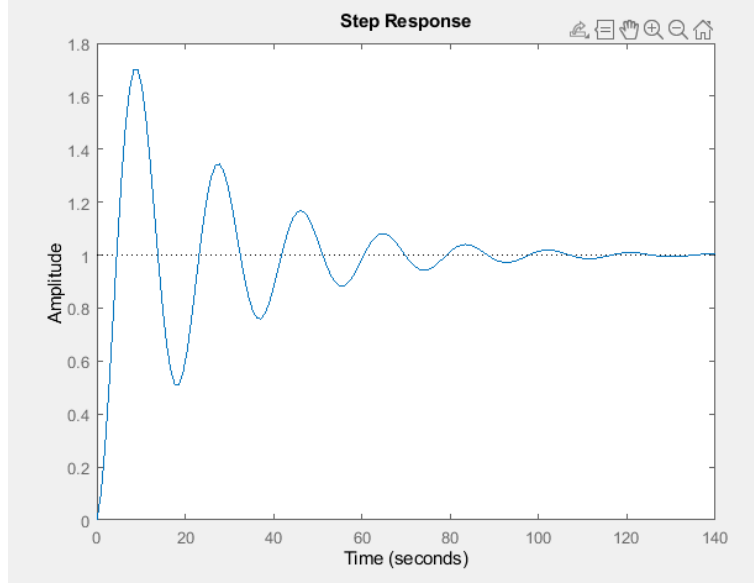


Figure 3: Réponse théorique en boucle fermée avec certains paramètres $[K_p, K_i]$

Dans notre cas, la perturbation étant un échelon, nous avons $V(s) = \frac{\bar{V}}{s}$ et $R(s) = 0$. Nous avons donc (grâce à l'équation 31.1 des fiches):

$$Y(s) = \frac{D\bar{V}}{s(s-A) + (s+K_i)K_pB} \quad (5)$$

En manipulant cette expression, on peut obtenir quelque chose de plus digeste:

$$Y(s) = \frac{D\bar{V}}{s^2 + (K_pB - A)s + K_iK_pB}$$

On recherche $y(t)$, à savoir la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$. C'est donc ce qu'on va faire en traitant deux cas différent: $K_i = 0$ et $K_i \neq 0$.

Cas $K_i = 0$:
la réponse du système s'en retrouve légèrement simplifiée:

$$Y(s) = \frac{D\bar{V}}{s(s-A + K_pB)}$$

La transformée de Laplace inverse donne¹:

$$y(t) = \frac{D\bar{V}}{K_pB - A}(1 - e^{-(K_pB - A)t}) \cdot u(t)$$

Cas $K_i \neq 0$:

On va essayer de transformer l'expression de $Y(s)$ pour en avoir une qui correspond aux valeurs de la table et ainsi retrouver la réponse temporelle du système en boucle fermée.

$$Y(s) = \frac{D\bar{V}}{s^2 + (K_pB - A)s + K_iK_pB} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha\omega}{(s-f)^2 + \omega^2} = \frac{\alpha\omega}{s^2 - 2sf + f^2 + \omega^2}$$

où on a posé $\alpha = \frac{D\bar{V}}{\omega}$. La transformée de Laplace inverse de cette expression est bien connue et vaut:

$$y(t) = \alpha e^{ft} \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$$

¹Fiche 34: Transformées usuelles de Laplace

Il reste donc à déterminer les paramètres f et ω en fonction de K_p, K_i, B et A . En comparant terme à terme, on obtient:

$$\begin{cases} -2f &= K_p B - A \\ f^2 + \omega^2 &= K_i K_p B \end{cases}$$

De la première expression on peut trouver l'expression de f et ainsi remplacer dans la seconde pour avoir ω .

$$\begin{cases} f &= \frac{A - K_p B}{2} \\ \omega^2 &= K_i K_p B - f^2 = K_i K_p B - \left(\frac{A - K_p B}{2}\right)^2 = \frac{4K_i K_p B - (A - K_p B)^2}{4} \end{cases}$$

On a alors une belle expression finale:

$$y(t) = \frac{2D\bar{V}}{\sqrt{4K_i K_p B - (A - K_p B)^2}} \cdot e^{\frac{A - K_p B}{2} \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4K_i K_p B - (A - K_p B)^2}}{2} \cdot t\right)$$

3.4.2 La valeur de l'instant auquel l'amplitude de l'erreur due à la perturbation est à son maximum pour chaque couple de paramètres (K_p ; K_I)

Soit $e(t) = h_3(t) - h_3^-(t)$ l'erreur due à la perturbation. L'amplitude maximale correspond à l'annulation de la dérivée première selon t .

Pour $K_i = 0$, on trouve:

$$\frac{dy}{dt} = D\bar{V} \cdot e^{-(K_p B - A)t}$$

Si on essaye d'annuler cette dérivée, on trouve un temps infini et ce peu importe le couple (K_p, K_i) ! En effet, l'exponentielle décroissante va prendre un très long temps avant de s'annuler. On peut regarder alors à quel moment est-ce que l'exponentielle s'approche suffisamment de 0, par exemple lorsqu'elle vaut 1.10^{-10} . On a alors un temps dépendant de la perturbation \bar{V} :

$$t = \frac{-\ln\left(\frac{1.10^{-10}}{D\bar{V}}\right)}{K_p B - A}$$

Pour $K_i \neq 0$, on a:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha f e^{ft} \sin(\omega t) + \alpha e^{ft} \cdot \omega \cos(\omega t)$$

Annuler la dérivée revient à résoudre:

$$\begin{aligned} f \sin(\omega t) &= -\omega \cos(\omega t) \\ \Leftrightarrow \tan(\omega t) &= -\frac{\omega}{f} \end{aligned}$$

Cette dernière équation est par contre indépendant de la perturbation ! Une première solution est la solution triviale où ω est nul mais ce n'est pas notre cas ici. Pour $\omega \neq 0$, $f \neq 0$ et $\omega^2 + f^2 \neq 0$, on trouve un temps

$$t = \frac{\pi n - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{f}\right)}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Différents couples de $(K_p; K_i)$ sont à traiter.

$(K_p = 2, 5; K_i = 2)$:

En remplaçant, on trouve:

$$\begin{cases} f &= \frac{A - K_p B}{2} = -0,038 \\ \omega^2 &= K_i K_p B - f^2 = K_i K_p B - \left(\frac{A - K_p B}{2}\right)^2 = \frac{4K_i K_p B - (A - K_p B)^2}{4} = 0,1135 \end{cases}$$

Le temps t où l'amplitude de l'erreur due à la perturbation sera à maximum est:

$$t = \frac{\pi n - \tan^{-1}\left(\frac{0,34}{-0,038}\right)}{0,34}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pour $n = 0$, on a :

$$t = \frac{1,46}{0,34} = 4,29 \text{ [s]}$$

$(K_p = 10; K_i = 0)$:

Plus on attendra, plus l'amplitude de l'erreur grandira puisque ce n'est qu'à l'infini qu'elle sera maximale. Cette fois-ci, l'instant va par contre dépendre de la perturbation elle-même selon la formule décrite précédemment. On obtient :

$$t = \frac{-\ln(\frac{1 \cdot 10^{-10}}{-4,3582 \cdot \bar{V}})}{0,25} \approx -4 \cdot \ln(\frac{1 \cdot 10^{-10}}{-4,3582 \cdot \bar{V}})$$

$(K_p = 3; K_i = 1)$:

En remplaçant, on trouve :

$$\begin{cases} f &= \frac{A-K_p B}{2} = -0,044 \\ \omega^2 &= K_i K_p B - f^2 = K_i K_p B - (\frac{A-K_p B}{2})^2 = \frac{4K_i K_p B - (A-K_p B)^2}{4} = 0,067 \end{cases}$$

Le temps t où l'amplitude de l'erreur due à la perturbation sera à maximum est :

$$t = \frac{\pi n - \tan^{-1}(\frac{0,26}{-0,044})}{0,26}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pour $n = 0$, on a :

$$t = \frac{1,4}{0,26} = 5,38 \text{ [s]}$$

$(K_p = 10; K_i = 0,1)$:

En remplaçant, on trouve :

$$\begin{cases} f &= \frac{A-K_p B}{2} = -0,125 \\ \omega^2 &= K_i K_p B - f^2 = K_i K_p B - (\frac{A-K_p B}{2})^2 = \frac{4K_i K_p B - (A-K_p B)^2}{4} = 7,44 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

Le temps t où l'amplitude de l'erreur due à la perturbation sera à maximum est :

$$t = \frac{\pi n - \tan^{-1}(\frac{0,086}{-0,125})}{0,086}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pour $n = 0$, on a :

$$t = \frac{0,603}{0,086} = 7,007 \text{ [s]}$$

3.4.3 La valeur du temps mis par le système régulé pour compenser l'effet de la perturbation pour chaque couple de paramètres

On va rechercher le temps de réponse du système face à une perturbation.

En boucle ouverte sans régulateur

La fonction de transfert du système est donnée par :

$$H(s) = \frac{-4,35820}{s + 0,019478}$$

. On a ici un unique pôle dominant: $-p = 0,019478$. On est dans le cas d'une fonction de transfert du premier ordre. La réponse est temporelle est donc simple à calculer. On va avoir une constante de temps en boucle ouverte $\tau_{BO} = \frac{1}{p} = 51,34$. Pour une réponse à 95%, on a :

$$\tau_r = \tau_{BO} \cdot \ln(20) = 153,8$$

Pour une réponse à 98%, on a:

$$\tau_r = \tau_{BO} \cdot \ln(50) = 200,84$$

En boucle fermée avec régulateur et différents paramètres $[K_p; K_i]$

Nous avons besoin de la fonction de transfert $T_v(s)$:

$$\begin{aligned} T_v(s) &= \frac{Ds}{s(s-A) + (s+K_i)K_pB} \\ &= \frac{-4,35820s}{s(s+0,019478) + (s+K_i)K_p0,023} \\ &= \frac{-4,35820s}{s^2 + s(0,019478 + K_p0,023) + K_pK_i0,023} \end{aligned}$$

Pour les différents paramètres de K_p et K_i à regarder, on obtient les résultats suivants.

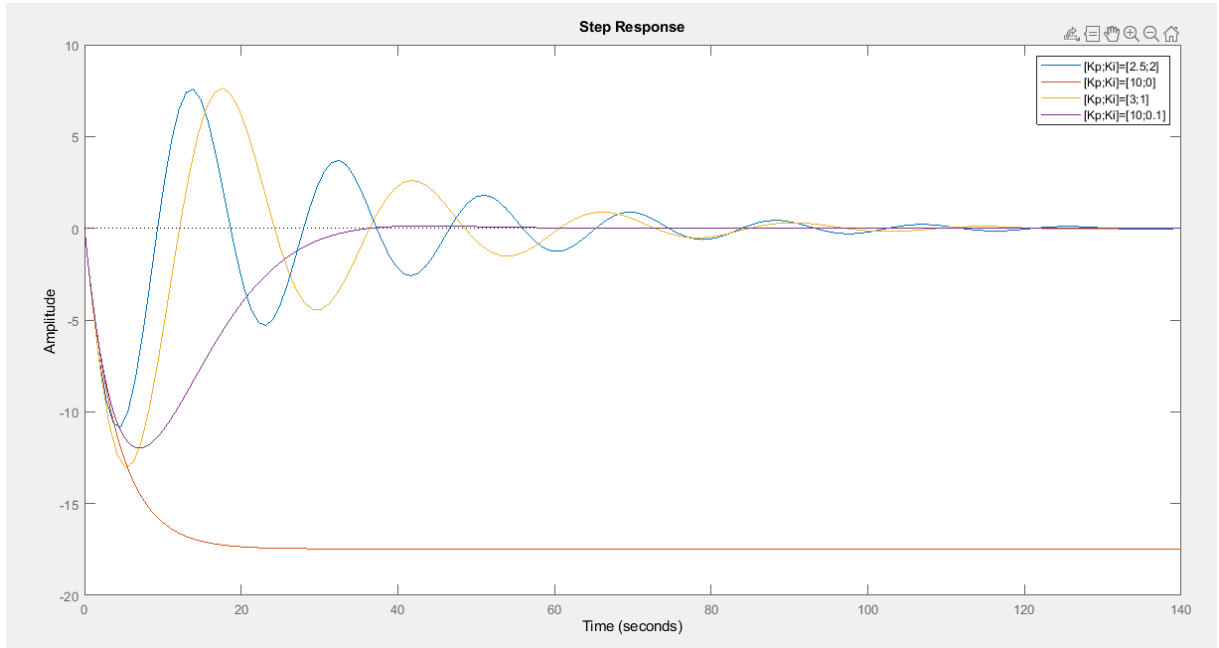


Figure 4: Réponse théoriques à une perturbation pour différents paramètres $[K_p; K - i]$

On peut remarquer que le temps de réponse est bien plus rapide en boucle fermée qu'en boucle ouverte ! Ceci est cohérent avec la théorie puisque l'action intégrale a une influence réductrice sur les constantes de temps. Il faut cependant faire attention à ne pas trop réduire notre τ_i associé. A trop haute vitesse, notre système risquerait d'osciller.

3.4.4 Représentation graphique de la réponse théorique obtenue grâce à MATLAB et comparaison entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux

Sur la figure 5, on peut voir les différents temps de réponses pour certains paramètres K_i et K_p obtenus en regardant la réponse de $T_r(s)$. On peut constater que la courbe rouge ne se stabilise pas en 1. ce la est dû au fait que l'action intégrale est nulle et l'erreur statique ne s'annule pas.

De plus, le système correspond à les courbes jaunes et bleues possèdent un temps d'établissement important car leur valeur du K_i est trop importante et la commande réagit "trop fort".

Globalement, les résultats obtenus sont ceux que l'on attendait.

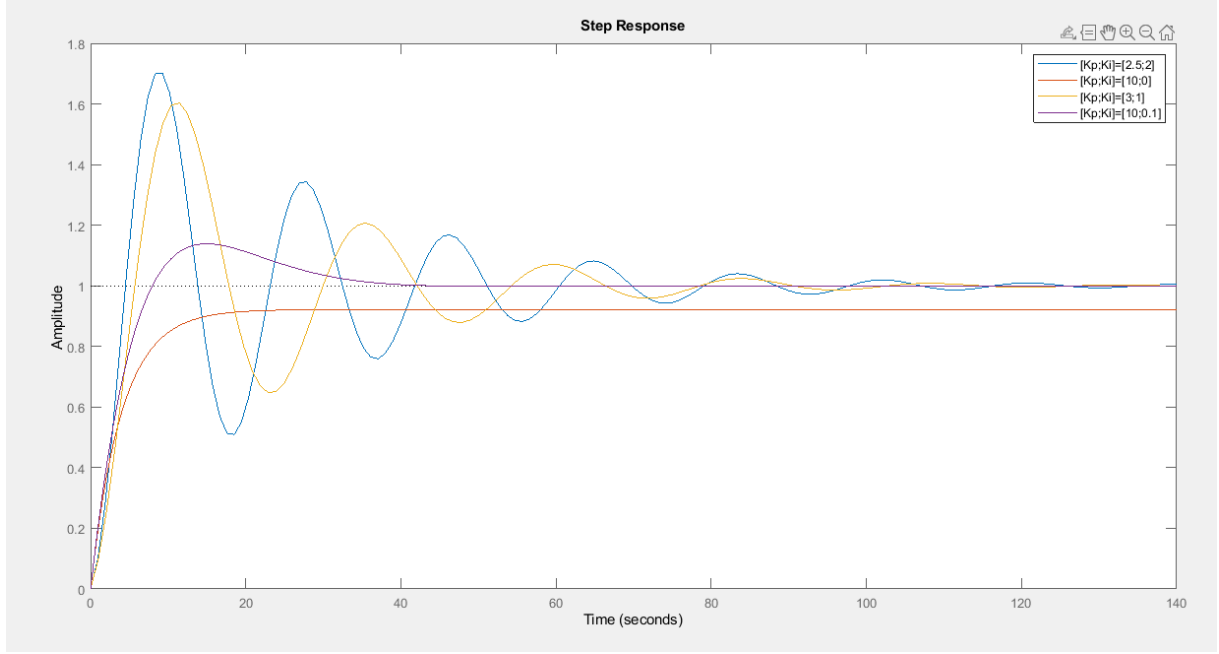


Figure 5: Réponse théoriques pour différents paramètres $[K_p; K - i]$

3.5 Comparaison des temps de réponse du modèle linéarisé et non-linéarisé

La réponse indicielle du système linéarisée est celle qui est développée précédemment. Pour prendre en compte les non-linéarités, nous allons utiliser la fonction ODE45 de Matlab qui donne l'évolution des débits grâce à la loi des débits donnée plus haut.

On observe sur la figure 6 que le temps de réponse du système linéarisé est plus lent que celui du système théorique résolu avec Matlab. Ceci peut venir des erreurs de précisions du système réel. On voit également que le point d'équilibre n'est pas exactement le même, ceci vient entre autres de la taille de la valve SF_{30} qui n'a peut être pas été calculée parfaitement.

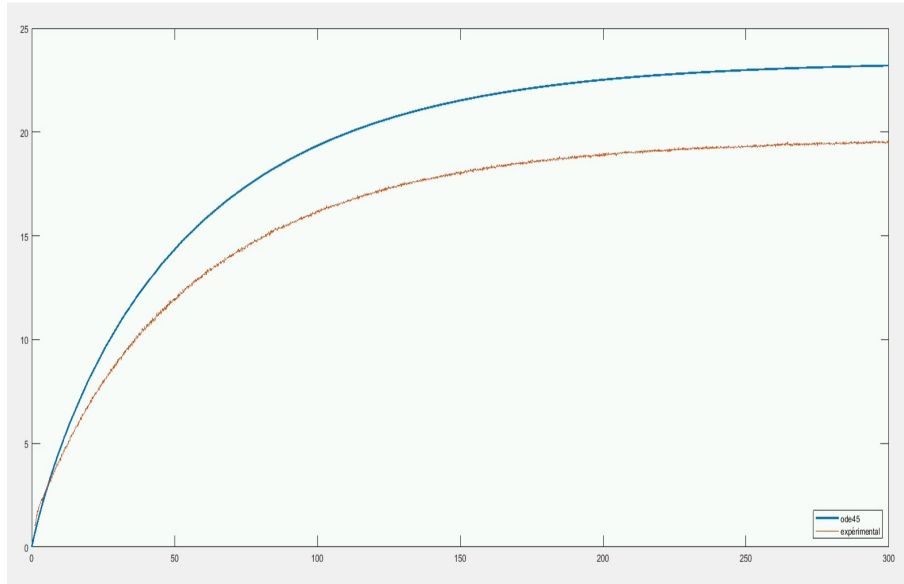


Figure 6: Comparaison des temps de réponses pour les systèmes linéarisés ou non

3.6 Le calcul des paramètres (K_P ; K_I) du régulateur pour satisfaire les spécifications demandées pour la réponse à un échelon de consigne. Une comparaison entre la réponse théorique et les résultats expérimentaux

Les spécifications demandées sont:

- Réponse à un échelon de consigne sans dépassement;
- Régulation du système 3 fois plus rapidement que dans le cas non-régulé.

La fonction de transfert du système est:

$$T_r(s) = \frac{(s + K_i)K_p B}{s(s - A) + (s + K_i)K_p B}$$

K_i étant une valeur positive, on sait qu'il correspond à un pôle stable. De la même manière que pour le labo 2, on va utiliser les dynamiques dominantes qui peuvent être une bonne approximation du système en régime transitoire. Ainsi, on isole les pôles et les zéros dominant des dynamiques négligeables.² En choisissant $K_i = -A = 0,019478$, on va avoir l'annulation pôle-zéro recherchée. On a à présent une fonction de transfert du premier ordre:

$$T_r(s) = \frac{K_p B}{s + K_p B} = \frac{1}{\frac{s}{K_p B} + 1}$$

Le but est de ne pas avoir de dépassement. (pôles stables ???) De plus, il faut avoir un temps de réponse trois fois plus court qu'en boucle ouverte:

$$\tau_{PI} = \frac{\tau_{BO}}{3}$$

Grâce à la fonction de transfert $T_r(s)$, on peut voir que $\tau_{PI} = \frac{1}{K_p B}$. On a donc une simple équation à résoudre:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_p B} &= \frac{-1}{3A} \\ \Leftrightarrow K_p &= \frac{-3A}{B} = 2,54 \end{aligned}$$

On a donc un couple de paramètres ($K_p = 2,54$; $K_i = 0,019$). Graphiquement, on obtient la réponse suivante:

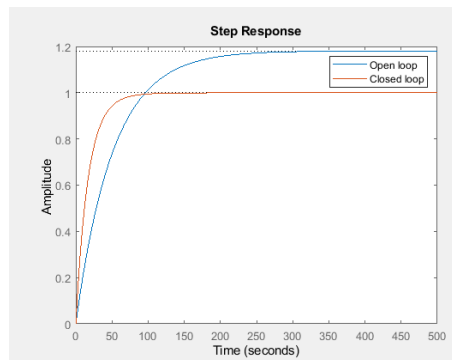


Figure 7: Réponse théorique du système contrôlé par rapport aux spécifications données

²Fiches 10. Définition 10.3: *Modèles de référence*

3.7 Quelles sont les non-linéarités présentes dans le système régulé (+ brèves descriptions et explications) ?

1. Le système est non linéaire à la base car il y a la racine de h_3 (Torricelli).
2. La saturation de la pompe. En effet, elle ne peut fonctionner que dans la gamme $[0;100 \text{ ml}]$ de débit.
3. Le tuyau est une partie non linéaire du système. En effet, on a un retard entre la commande et la mesure dû au fait que l'eau n'est pas incompressible. Cette non-linéarité reste cependant négligeable car l'eau est proche de l'incompressibilité.
4. La vanne car la section efficace de la vanne se réduit quand le débit augmente.
5. Les capteurs sont des éléments non linéaires.
6. Il faut imposer des échelons qui restent proches du point de fonctionnement à l'équilibre obtenu avec la linéarisation, sinon les équations utilisées ne sont plus valables.