Week 8

程雨歌 12307110079

1 （P136/1）

说明极值原理中 $c(x)$ 为负时，极值原理可能不成立。考虑一维的 Helmholtz 方程，找 u 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+k^2u=1,\ u(0)=u(1)=0.$$

2 （P136/3）

设 $u(0)=u(1)=0$ 且满足 $-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$. 利用 Green 函数表达式

$$G(x)=\begin{cases}(1-x_0)x, & 0<x<x_0,\\ x_0(1-x), & x_0<x<1.\end{cases}$$

证明

$$u(x)=\int_0^1 G(x;x_0)f(x_0)\mathrm{d}x_0.$$

3 解:

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\delta(x-x_0),\ G(0)=0,\ G'(1)=0.$$

4 （P143/3 改）

对方程

$$-a\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+cu=1,$$

如果边界条件改为 $u(1)=0, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0)+u(0)=0$, 求其精确解；并用三点差分格式离散求解，同时分析查分格式的精度。

5 用三点差分格式解：

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u=f, & x\in(0,1) \\ u(0)=\alpha,\ u(1)=\beta. \end{cases}$$

其中 f,α,β 由 $u=\cos x$ 得到。即 $f=2\cos x,\ u(0)=1,\ u(1)=\cos 1.$

6 （P151/2）

证明不等式 $\|\mathbf{e}\|_{\ell^2}\leqslant\|\delta_x^+\mathbf{e}\|_{\ell^2}$, 并用它来证明当 $c(x)=0$ 时，下述方程三点差分格式的收敛性：

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+u=f(x),\ u(0)=u(1)=0.$$

且三点差分格式函数值和导数值都是两阶收敛的。