Week 3

程雨歌 12307110079

1 证明隐式 Euler 格式是一阶收敛的（P69/1）

Theorem. 假设 $f(t,u)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件（Lipschitz 常数为 L），$u(t)$ 二阶导数一致有界：$\|u''\|_{C[0,T]} \leqslant M$，则 Euler 隐式格式是一阶收敛的。

证明. 由全局误差的定义：$e_{n+1} = u(t_{n+1}) - u_{n+1}$，代入 Euler 隐式格式，有

$$\begin{aligned}|e_{n+1}| &= |u(t_{n+1}) - u_n - \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1})| \\ &\leqslant |u(t_{n+1}) - u(t_n) - \Delta t f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))| \\ &\quad + |u(t_n) - u_n| + \Delta t\, |f(t_{n+1}, u_{n+1}) - f(t_{n+1}, u(t_{n+1}))|\,.\end{aligned}$$

由截断误差定义，并假设 f 关于 u 满足 Lipschitz 条件，有递推关系：

$$|e_{n+1}| \leqslant |R_{n+1}| + |e_n| + \Delta t L\, |e_{n+1}|\,.$$

如果 u 是二阶连续可微且一致有界，从而 $|R_{n+1}| = \left|-\frac{u''(\xi)}{2}\Delta t^2\right| \leqslant \frac{M}{2}\Delta t^2$. 因此得到：

$$|e_n| \geqslant (1 - \Delta t L)\, |e_{n+1}| - \frac{M}{2}\Delta t^2.$$

由递推关系，有

$$|e_0| \geqslant (1 - \Delta t L)^n\, |e_n| + \frac{M}{2}\Delta t^2 \frac{(1 - \Delta t L)^n - 1}{\Delta t L}.$$

并注意到 $(1 - \Delta t L)^n \geqslant e^{-LT}$，得到

$$|e_0| \geqslant e^{-LT}\, |e_n| + \frac{M}{2L}\Delta t e^{-LT} - \frac{M}{2L}\Delta t.$$

整理后得到

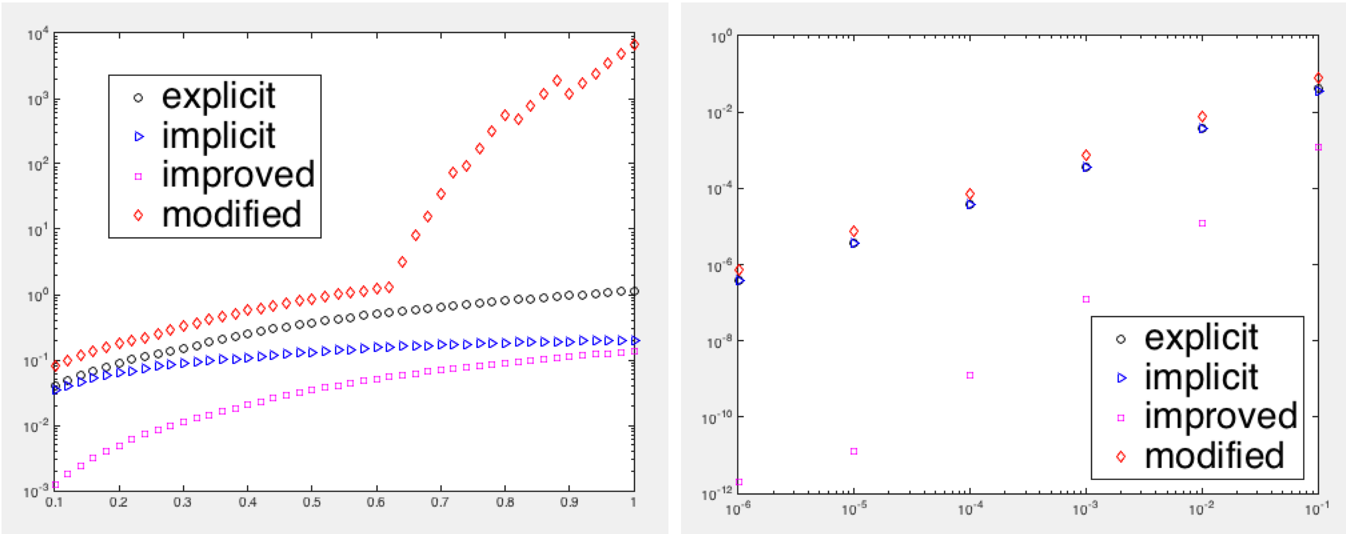
$$|e_n| \leqslant e^{LT}(\frac{M}{2L}\Delta t + |e_0|).$$

□

2 用四种 Euler 格式计算 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -2u\,(t \in [0,8], u(0)=1)$，并说明收敛性及误差与步长的关系（P69/2）

$$
\begin{aligned}
&\text{显式}: u_{n+1} = u_n + \Delta t f_n && \Longrightarrow\ u_{n+1} = (1-2\Delta t)u_n \\
&\text{隐式}: u_{n+1} = u_n + \Delta t f_{n+1} && \Longrightarrow\ u_{n+1} = \frac{1}{(1+2\Delta t)}u_n \\
&\text{改进}: u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}(f_n + f_{n+1}) && \Longrightarrow\ u_{n+1} = \frac{1-\Delta t}{1+\Delta t}u_n \\
&\text{修正}: u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_{n+\frac{1}{2}}, u_n + \frac{\Delta t}{2}f_n) && \Longrightarrow\ u_{n+1} = (1-2\Delta t+2\Delta t^2)u_n
\end{aligned}
$$

将不同步长带入到上面推算出来的四种格式递推式中，可计算出每种格式得到数值解的误差，将其与步长的关系画出来：

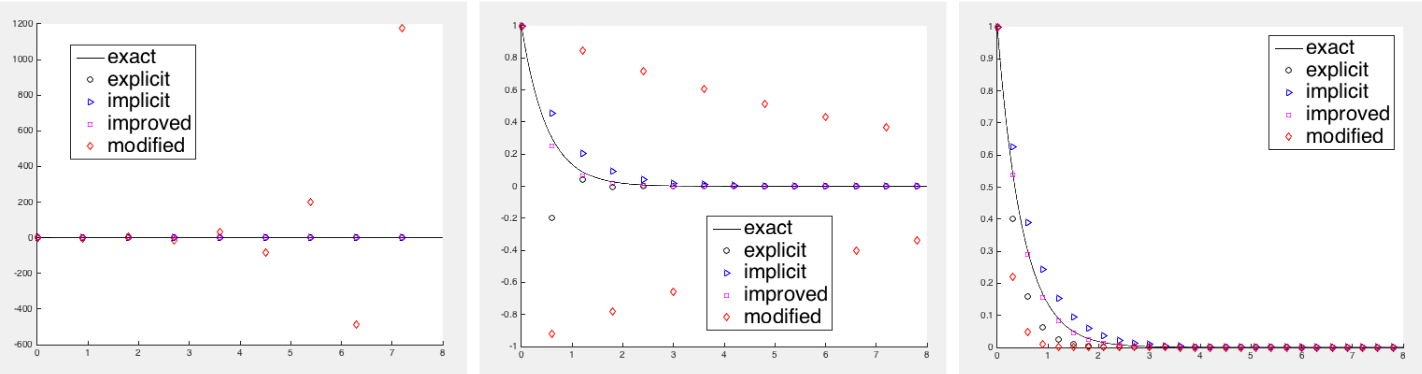


(a) 步长 $\in [0.1, 1]$　　(b) 步长 $\to 0$

图 1: 步长－误差关系图

可以看出四种格式误差均随步长减小而减小。其中修正的 Euler 格式在步长大于 0.6 多的时候会突然变得不稳定，误差以指数级爆炸增长（图 1a）。当步长不断趋近于 0 时，我们从图 1b中可以看出，改进的 Euler 格式收敛阶数是其他三种格式的两倍，在步长为 10^{-6} 时误差已达到 10^{-12}。

我选出几个具有代表性的步长：分别为 0.9, 0.6, 0.3，可以看到修正的 Euler 格式由发散变为震荡收敛，再变为收敛。显式 Euler 格式在 0.6 的震荡和 0.3 的收敛也应证了后文对于显式格式绝对稳定区域的讨论。四种格式求得数值解与符号解对比如下：



(a) 步长 =0.9 (b) 步长 =0.6 (c) 步长 =0.3

图 2: 不同步长下四种格式数值解与符号解对比

3 给出修正和改进 Euler 格式的稳定性分析和绝对稳定区间（P73/1）

3.1 改进的 Euler 格式

$$\text{由 } u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}(f_n + f_{n+1})$$

得到对于标准测试问题（Dahlquist 测试问题）$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = au$，有

$$u_{n+1} = \frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}} u_n,\ u_{n+1}^{\epsilon} = \frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}} u_n^{\epsilon}.$$

$$\text{故 } \left|u_{n+1}^{\epsilon} - u_{n+1}\right| = \left(\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right) \left|u_n^{\epsilon} - u_n\right| = \cdots = \left(\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right)^n \left|u_0^{\epsilon} - u_0\right|.$$

如果希望初始的舍入误差对固定的 Δt，当 $n \to \infty$ 时，仍然可以控制，则必须有:

$$\left|\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}}\right| \leqslant 1.$$

注意到因为 $\Delta t > 0$，所以上式成立当且仅当 $a \leqslant 0$，即此时改进的 Euler 格式对初始扰动稳定。

若令 $z = a\Delta t$，则改进的 Euler 格式的绝对稳定区域为

$$\left|\frac{2+z}{2-z}\right| \leqslant 1,\ z \in \mathcal{Z},$$

即实部为负的半复平面（图 3a）

3.2 修正的 Euler 格式

$$由\ u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(t_{n+\frac{1}{2}}, u_n + \frac{\Delta t}{2} f_n\right)$$

得到对于标准测试问题（Dahlquist 测试问题）$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = au$，有

$$u_{n+1} = \left(1 + a\Delta t + \frac{(a\Delta t)^2}{2}\right) u_n,\ u^{\epsilon}_{n+1} = \left(1 + a\Delta t + \frac{(a\Delta t)^2}{2}\right) u^{\epsilon}_n.$$

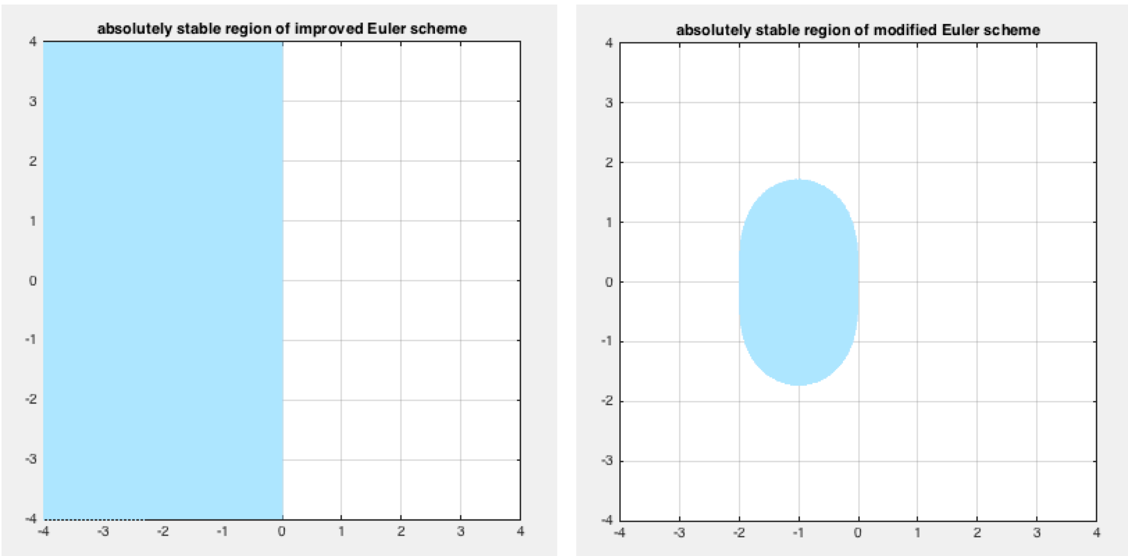
故 $\left|u^{\epsilon}_{n+1} - u_{n+1}\right| = \left(1 + a\Delta t + \frac{(a\Delta t)^2}{2}\right) |u^{\epsilon}_n - u_n| = \cdots = \left(1 + a\Delta t + \frac{(a\Delta t)^2}{2}\right)^n |u^{\epsilon}_0 - u_0|$.

如果希望初始的舍入误差对固定的 Δt，当 $n \to \infty$ 时，仍然可以控制，则必须有：

$$\left|1 + a\Delta t + \frac{(a\Delta t)^2}{2}\right| \leqslant 1.$$

令 $z = a\Delta t$, 则修正的 Euler 格式绝对稳定区域如图 3b所示，即

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| \leqslant 1,\ z \in \mathcal{Z}.$$



(a) 改进的 Euler 格式

(b) 修正的 Euler 格式

图 3: 绝对稳定区域