

Week 1

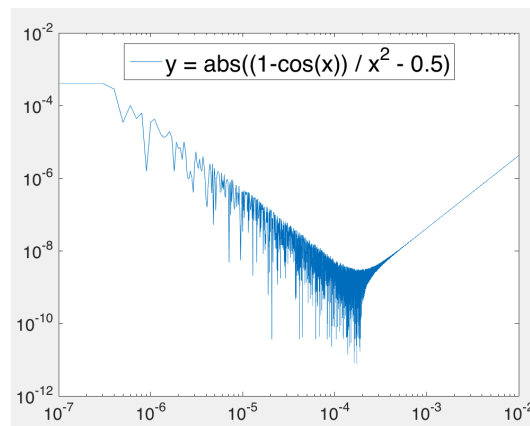
程雨歌 12307110079

1 “抵消现象”：考察 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ 的计算值 (P7)

为了考察计算值与极限值 $\frac{1}{2}$ 的差，做函数 $y = |\frac{1-\cos(x)}{x^2} - 0.5|$ ，并用双对数坐标轴画出函数图像。代码如下：

```
1 % Week 1 Problem 1
2 % show lim(x->0) (1-cos(x))/x^2
3 % cheng yu ge
4 % 12307110079
5
6 x = linspace(0,0.01,10e4);
7 y = abs((1-cos(x)) ./ (x.^2) - 0.5);
8 loglog(x, y);
9 h = legend('y = abs((1-cos(x)) / x^2 - 0.5)', 'Location', 'North');
10 set(h, 'FontSize', 22);
11 set(gca, 'FontSize', 16);
```

得到的图像如下：



可以看出，在 x 从上接近 10^{-4} 时，函数值越来越接近极限值 $\frac{1}{2}$ ，误差一度达到近 10^{-10} ；而当 x 继续趋近 0 时，误差的数量级开始震荡上升，当 x 小到 10^{-7} 级别时，误差竟然已经扩大到了 10^{-3} 级别。可见在求无穷小之比的未定型数值时，过小的量反而会放大误差，这是因为用于计算的数值大小不断接近浮点数的舍入误差大小（机器精度）造成的。

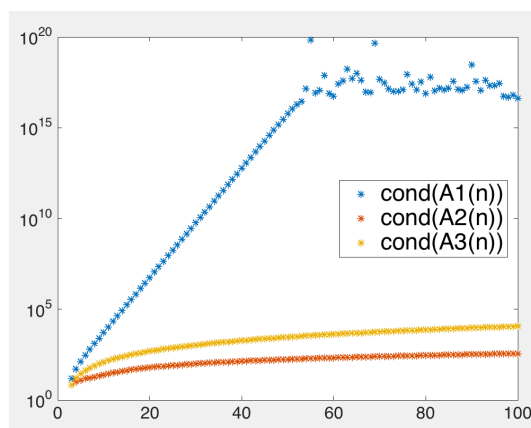
2 考察三种迭代矩阵 A 的条件数 $\text{cond}(A)$ 随阶数增长的变化 (P9/图 1.3)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 2 & -3 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 1 & & \\ 2 & -3 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{N \times N}$$

运用 Matlab 计算以上三种迭代矩阵的条件数:

```
1 % Week 1 Problem 2
2 % show cond(A) in Example 1.1.2 , 1.1.20 and 1.1.1
3 % cheng yu ge
4 % 12307110079
5
6 cond1 = zeros(1,100);
7 cond2 = zeros(1,100);
8 cond3 = zeros(1,100);
9 for i = 3 : 100
10     A1 = eye(i) + diag([0,-3*ones(1,i-2)],-1) + diag(2*ones(1,i-2),-2);
11     cond1(i) = cond(A1); % 1.1.2
12     A2 = A1 + diag(-1, i-1);
13     cond2(i) = cond(A2); % 1.1.20
14     A3 = eye(i) + diag([0,-2*ones(1,i-2)],-1) + diag(ones(1,i-2),-2);
15     cond3(i) = cond(A3); % 1.1.1
16 end
17 semilogy(1:100, cond1,'*');hold on;
18 semilogy(1:100, cond2,'*');
19 semilogy(1:100, cond3,'*');
20 h = legend('cond(A1(n))', 'cond(A2(n))', 'cond(A3(n))', 'Location', 'East');
21 set(h,'FontSize', 22);
22 set(gca,'FontSize', 16);
```

其条件数随阶数增长的趋势如图:



可以看出 A_1 条件数随阶数增长速度远高于 A_3 的增长, 呈指数增长趋势, 到 60 阶左右时就达到 10^{16} 数量级且开始出现计算偏差。而再矩阵的右上角加上一个 -1, 也就是限定了迭代最后一项和第一项的关系, 这时 A_2 的条件数增长速度一下就降低了。

3 证明不动点迭代的误差估计式 (P17/式 1.2.8)

Proof. 如果映射 $G(x)$ 是一个压缩映射, 则存在常数 $\alpha \in [0, 1)$, 有

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \alpha \|x - y\|,$$

由单步迭代, 上式等价于

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\|,$$

反复运用上式, 得到

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &\leq \alpha^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\leq \alpha^3 \|x_{n-2} - x_{n-3}\| \\ &\dots \\ &\leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

所以当 $m > n$ 时,

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq (\alpha^{m-n-1} + \alpha^{m-n-2} + \dots + \alpha + 1) \|x_{n+1} - x_n\| \\ &= \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \alpha^n \|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

因为 $\alpha \in [0, 1)$, 所以令 $m \rightarrow \infty$, 有 $\alpha^{m-n} \rightarrow 0$, 此时 $x_m \rightarrow x^*$, 便得到了不动点迭代的误差估计式:

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|.$$

□

4 比较不动点迭代和 Newton-Raphson 迭代，实现数值例子并定性说明理由（P24/2）

取 $G(x) = e^{-x}$ 和 $F(x) = x - e^{-x}$ ，取 $x_0 = 1$ 为迭代初始值，则由不动点迭代和 Newton-Raphson 迭代得到的结果与其误差如下表：

| n | Fixed-point Iteration | | | Newton-Raphson Iteration | | |
|----|-----------------------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| | x_n | $\frac{ x_n - x_{n-1} }{ x_n }$ | $\frac{ x_n - x^* }{ x^* }$ | x_n | $\frac{ x_n - x_{n-1} }{ x_n }$ | $\frac{ x_n - x^* }{ x^* }$ |
| 0 | 1.000000 | - | 1.8e+00 | 1.000000 | - | 1.8e+00 |
| 1 | 0.367879 | 1.7e+00 | 3.5e-01 | 0.537883 | 8.6e-01 | 5.2e-02 |
| 2 | 0.692201 | 4.7e-01 | 2.2e-01 | 0.566987 | 5.1e-02 | 2.8e-04 |
| 3 | 0.500474 | 3.8e-01 | 1.2e-01 | 0.567143 | 2.8e-04 | 7.8e-09 |
| 4 | 0.606244 | 1.7e-01 | 6.9e-02 | 0.567143 | 7.8e-09 | 2.0e-16 |
| 5 | 0.545396 | 1.1e-01 | 3.8e-02 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 6 | 0.579612 | 5.9e-02 | 2.2e-02 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 7 | 0.560115 | 3.5e-02 | 1.2e-02 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 8 | 0.571143 | 1.9e-02 | 7.1e-03 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 9 | 0.564879 | 1.1e-02 | 4.0e-03 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 10 | 0.568429 | 6.2e-03 | 2.3e-03 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 11 | 0.566415 | 3.6e-03 | 1.3e-03 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 12 | 0.567557 | 2.0e-03 | 7.3e-04 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 13 | 0.566909 | 1.1e-03 | 4.1e-04 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 14 | 0.567276 | 6.5e-04 | 2.3e-04 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 15 | 0.567068 | 3.7e-04 | 1.3e-04 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 16 | 0.567186 | 2.1e-04 | 7.5e-05 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 17 | 0.567119 | 1.2e-04 | 4.3e-05 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 18 | 0.567157 | 6.7e-05 | 2.4e-05 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 19 | 0.567135 | 3.8e-05 | 1.4e-05 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 20 | 0.567148 | 2.2e-05 | 7.8e-06 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 21 | 0.567141 | 1.2e-05 | 4.4e-06 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 22 | 0.567145 | 6.9e-06 | 2.5e-06 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 23 | 0.567142 | 3.9e-06 | 1.4e-06 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 24 | 0.567144 | 2.2e-06 | 8.1e-07 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |
| 25 | 0.567143 | 1.3e-06 | 4.6e-07 | 0.567143 | 2.0e-16 | 0.0e+00 |
| 26 | 0.567143 | 7.2e-07 | 2.6e-07 | 0.567143 | 2.0e-16 | 2.0e-16 |

由 Newton-Raphson 迭代在第四次迭代以后就已经达到了机器精度，故表中精确值 x^* 用牛顿迭代的 x_{29} 代替。而不动点迭代在迭代 24 次以后也没有达到这个精度，这是由于不动点迭代误差有 $|\epsilon_{n+1}| \leq \alpha |\epsilon_n|$ ，在本例中 $\alpha = |G'(x^*)| \approx 0.567$ ，而牛顿迭代误差有 $|\epsilon_{n+1}| \approx \rho |\epsilon_n|^2$ ，在本例中 $\rho = \frac{1}{2} |(F'(x^*))^{-1}| |F''(x^*)| \approx 0.181$ 。 α 与 ρ 属同一数量级，而不动点迭代误差是一阶减少，但牛顿迭代误差是二阶的，故收敛较快。这一结果也与表中数据相吻合。

附数据生成代码：

```

1 % Week 1 Problem 4
2 % Show accuracy difference between Fixed-point iteration & Newton-Raphson
3 % iteration
4 % cheng yu ge
5 % 12307110079
6
7 G = @(x)exp(-x);
8 F = @(x)x-exp(-x);
9 F1 = @(x)1+exp(-x);
10 NRI = @(x)x - F(x)/F1(x);
11 x1 = zeros(1,30); x2 = x1;
12 x1(1) = 1; x2(1) = 1;
13 for i = 2:30
14     x1(i) = G(x1(i-1));
15     x2(i) = NRI(x2(i-1));
16 end
17 xe = x2(30);
18 fprintf('\n n & FPx_n & FPrel & FPerr & NRx_n & NRrel & NRerr \\\n');
19 for i = 2:30
20     fprintf('%2d & %.6f & %.1e & %.1e & %.6f & %.1e & %.1e \\\n', ...
21         i-1, x1(i), abs((x1(i)-x1(i-1))/x1(i)), abs((x1(i)-xe)/xe), ...
22         x2(i), abs((x2(i)-x2(i-1))/x2(i)), abs((x2(i)-xe)/xe));
23 end

```

5 证明范数等价关系 (P34/1)

对于 n 维向量 \mathbf{x} , 当 $1 \leq p \leq q$ 时, 有

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_q} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell_p} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_{\ell_q}.$$

Proof. 由幂平均不等式, 当 $0 < p \leq q$ 时, 有

$$\left(\frac{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{|x_1|^q + |x_2|^q + \cdots + |x_n|^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}},$$

整理后即得到右边的不等式

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\mathbf{x}\|_{\ell_q}.$$

另外, 将 \mathbf{x} 按 q 范数单位化, 即令 $\hat{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|_{\ell_q}^{-1} \mathbf{x}$, 此时 $\|\hat{\mathbf{x}}\|_{\ell_q} = 1$, 每个分量 $\hat{x}_i = \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_q}} \leq 1$, 所以

$$\left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_q}} \right)^p \geq \left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_q}} \right)^q \quad (p < q),$$

求和后仍有

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_q}} \right)^p \geq \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_q}} \right)^q = 1$$

所以

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_{\ell_p} = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_{\ell_q}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 1 = \|\hat{\mathbf{x}}\|_{\ell_q}.$$

最后，由范数的齐次性 $\|a\mathbf{x}\| = a\|\mathbf{x}\|$ ，取 $a = \|\hat{\mathbf{x}}\|_{\ell_q}^{-1}$ 便得到了左边的不等式

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_q} \leq \|\mathbf{x}\|_{\ell_p}.$$

□