Zapoctova uloha c.1

Nail Sultanvekov

Abstrakt

Metoda střelby je účinná numerická technika pro řešení obyčejných diferenciálnich rovnic. Tento protokol poskytuje průvodce implementací této metody na základě různých numerických metod a jejích srovnání pro některou pravou stranu Poissonovy rovnice.

1 Popis metody

Metoda střelby je numerická technika používaná k řešení okrajových úloh diferenciálních rovnic. Hlavní myšlenkou metody střelby je převést daný problém s okrajovými podmínkami na počáteční problém a poté řešit tento počáteční problém pomocí vhodných numerických metod. Postup metody střelby je následující:

1. Nejprve se daný problém s okrajovými podmínkami transformuje na počáteční problém přidáním dalšího parametru nazývaného "střelný parametr".
2. Poté je počáteční problém řešen pomocí vhodné numerické metody. V tomto textu jsem výbral Eulerovu metodu a metodu Runge-Kutta 4. řádu (RK4). Řešení je prováděno pro různé hodnoty střelného parametru.
3. Hodnota střelného parametru je postupně upravována tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Použiváme tady Newtonovu metodu a bisekční metodu. Uprávení budeme provádět až nedojde ke konvergencí k hodnotě na konci intervalu.

2 Průběh prace

V této prace budu rozebírat následující Poissonovu rovnice

$$\begin{aligned} &u''(x) = \sin(x) + x\cos(2x) \\ &u(0) = 0 \\ &u(5) = 1 \end{aligned}$$

Po jednoduchém integrování, dosázením okrajových podmínek a řešení soustavy rovnic dostaneme přesné:

$$u(x) = \frac{(4x + x\sin(10) + 4x\sin(5) - 20\sin(x) - 5\sin(2x) + 5x\cos(2x) - 5x\cos(10))}{20}$$

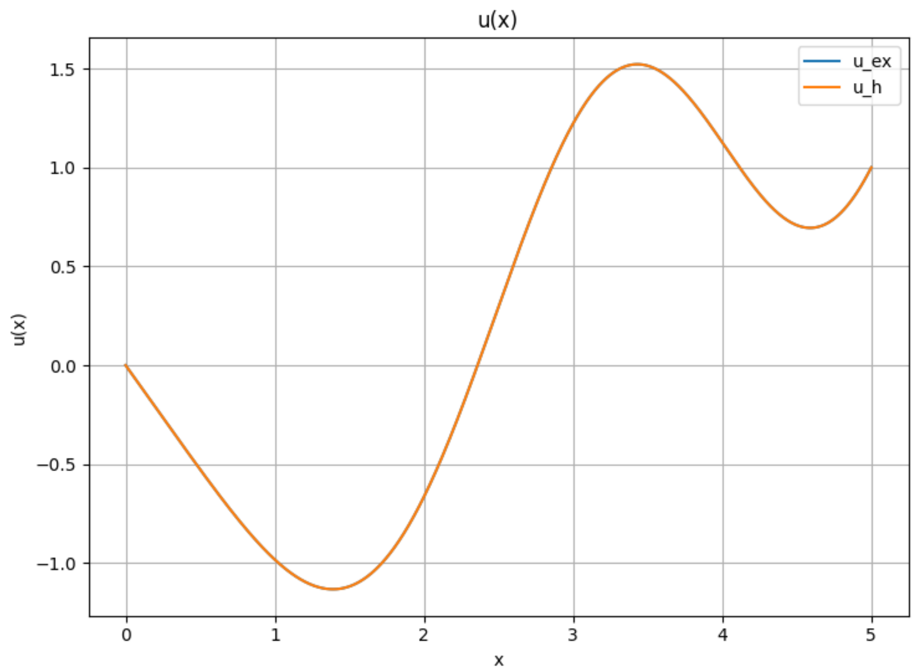
Jak jsem zmínil před tím, budeme hledat přibližné řešení tyto úlohy metodou střelby. Rozdělíme naši rovnice 2. řádu do soustavy rovnic 1. řádu:

$$\begin{aligned} u'(x) &= v(x) & u(0) &= 0 \\ v'(x) &= \sin(x) + x\cos(2x) & v(5) &= 1 \end{aligned}$$

Známé metody řešení ODR (Euler, RK4) nám bohužel nepomohou s řešením pouze s jednou počáteční podmínkou. Proto potřebujeme najít takovou druhou počáteční podmínku tak, aby byla splněná druhá okrajová podmínka. Tím pádem máme $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $g(v(0)) = v(5)$, a budeme se snažít najít kořen funkce $g - 1$. Uděláme tohle metodami pro hledání korenů.

Výsledky

Nejprve jsem zvolil bisekční metodu.

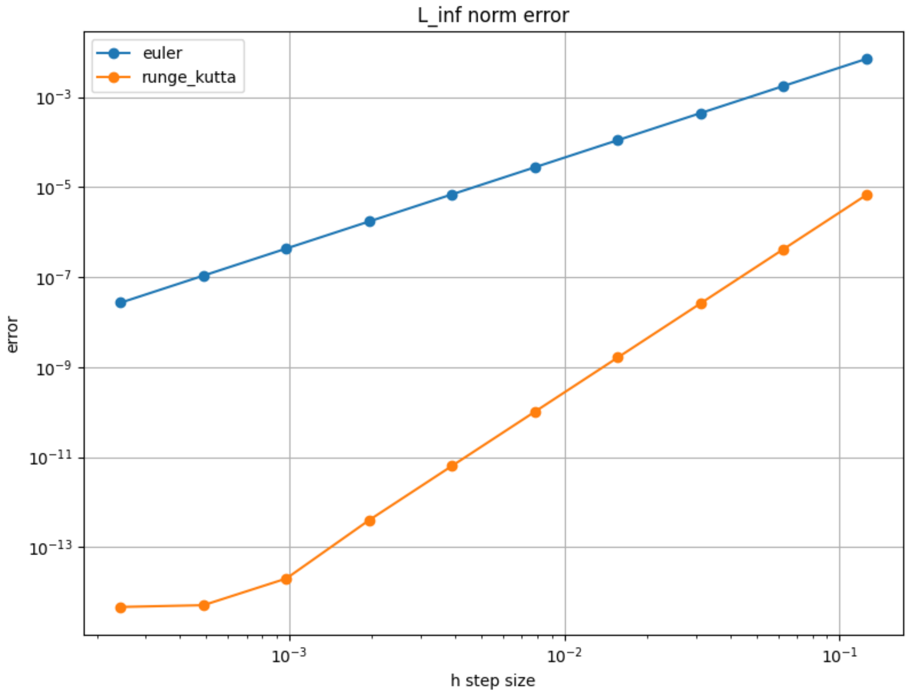


Obrázek 1: Euler + Bisekční metoda, tol $= 10^{-14}$, krok $h = 10^{-2}$, $||u_h - u_{ex}||_{L^\infty} = 4.53 \cdot 10^{-5}$, čas $t = 0.383s$

Tady je vidět, že naše numerické řešení je už docela přesné. Nic méně zkusíme použit Newtonovu metodu namisto bisekční a tím dostaneme podobný vysledek, za vyjimkou času konání který bude $t = 0.061s$ (ukazovat obrázek asi nemá smysl). Je tohle očekávaně, neboť víme, že Newtonova metoda konverguje rychlejí než bisekční.

Konvergence

Zkusíme teď srovnát L^∞ approximační chybu Eulerovy a Runge-Kuttovy metody. Použijme teď jenom Newtonovu metodu.



Obrázek 2: Srovnání Eulerové a Runge-Kuttovy metody, tol $=10^{-14}$

Na Obrázku č. 2 je vidět, že Runge-Kuttova metoda opravdu konverguje rychlejí než Eulerova při zmenšování kroku h. Co je zajímavý, je že při dosázení approximační chyby do urovní 10^{-14} její klesání se zastáví. Je to tak kvůli konečné tolerancí Newtonovy metody, která je nastavena přesně na tuto hodnotu.

V příloze mám několik dalších příkladů funkcí pravé strany a pro ně jsou výsledky dost podobné.