SEMINAR 6
14.12.2015
PROBABILITĂȚI

Variabile aleatoare. Caracteristici numerice

① Fie vectorul aleator (X_1, X_2) având distribuția precizată în tabelul următor:

$X_1 \backslash X_2$	2	3	4
1	1/16	2/16	1/16
2	0	1/16	7/16
3	1/16	1/16	2/16

ex $P(X_1=2, X_2=4) = \frac{7}{16}$

Determinați:

a) Funcția de repartiție a vect. al. (X_1, X_2)
b) Distribuția marginală a var. al. X_1
c) Funcția de repartiție marginală a var. al. X_1.
d) Val. medie și varianța v.a. X_1.
e) Distribuția v.a. X_1+X_2.

a) $F_{X_1,X_2}: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2)$, $\forall (x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2$

$x_1 \backslash x_2$	$x_2\in(-\infty,2)$	$x_2\in[2,3)$	$x_2\in[3,4)$	$x_2\in[4,+\infty)$
$x_1\in(-\infty,1)$	0	0	0	0
$x_1\in[1,2)$	0	1/16	3/16	4/16
$x_1\in[2,3)$	0	1/16	4/16	12/16
$x_1\in[3,+\infty)$	0	2/16	6/16	1

ex $F_{X_1,X_2}(e,\pi) = \frac{4}{16}$

b) $X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4/16 & 8/16 & 4/16 \end{pmatrix}$

$P(X_1=1) = P(X_1=1, \underbrace{(X_2=2 \cup X_2=3 \cup X_2=4)}_{\text{ev. sigur}}) = P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=1, X_2=3) + P(X_1=1, X_2=4)$

c) $F_{X_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{X_1}(x) = P(X_1 \le x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$= P(X_1 \le x,\ \underbrace{X_2 \le 4}_{\text{ev sigur}})$$

$$= F_{X_1, X_2}(x, 4)$$

d) $E(X_1) = 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{8}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} = 2$

$V(X_1) = E\left((X_1 - E(X_1))^2\right) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2$

$X_1^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{4}{16} & \frac{8}{16} & \frac{4}{16} \end{pmatrix} \Rightarrow E(X_1^2) = 1 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{8}{16} + 9 \cdot \frac{4}{16} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

$V(X_1) = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{1}{2}$

e) $X_1 + X_2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix}$

<u>Temă</u>: b), c), d) pt X_2 => 3 pct.

e) Sunt X_1 și X_2 independente?

② Fie X - var. aleat. continuă a cărei fct. de densitate este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x \cdot e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$. Să se calculeze $E(X)$ și $V(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \ldots$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$\boxed{!}$ Dacă Z - v.a. cont și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont.

$$E(h(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_Z(x)\,dx$$

$$\Rightarrow V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (E(X))^2$$

$$= \int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx - \left(\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx\right)^2$$

(1p)

3 Fie $X_1, \dots, X_n$ v.a. independente și identic distribuite și având distribuția lui Bernoulli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $p \in (0,1)$. Determinați:

a) distribuția v.a $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

b) $E(Y)$, $V(Y)$

a) $Y \sim \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$ → distribuția binomială

$$P(Y=k) = P(X_1 + \dots + X_n = k) = C_n^k \cdot P(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0)$$
$$= C_n^k \cdot P(X_1 = 1) \cdot \ldots \cdot P(X_k = 1) \cdot P(X_{k+1} = 0) \cdot \ldots \cdot P(X_n = 0)$$
$$= C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

b) $E(Y) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$

$V(Y) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$ - căci indep.

$E(X_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$\Rightarrow E(Y) = n \cdot p$

$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = p - p^2$

$\Rightarrow V(Y) = n \cdot p(1-p)$

4 Temă: -//- având distribuția geometrică $\begin{pmatrix} k \\ pq^k \end{pmatrix}_{k=0,1,\dots}$ $p \in (0,1)$, $q = 1-p$

4p a) -//-, b) -//-

(5) Un program antivirus detectează X viruși pe zi conform legii Poisson cu param $\lambda = 10$. Fiecare virus detectat este izolat în carantină cu prob $= 0,9$. Fie Y nr de viruși detectați și izolați pe zi. Determinați:

a) distribuția v.a Y

(4p) b) $E(Y), V(Y)$, $E(X), V(X)$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \dots$$

a) $X \sim \begin{pmatrix} k \\ e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \end{pmatrix}_{k=0,1,\dots}$

$Y \sim \begin{pmatrix} l \\ \ \end{pmatrix}_{l=0,1,\dots} \sim Poiss((0,9) \cdot \lambda)$

$$P(Y=l) = \sum_{k=l}^{\infty} \underbrace{P(Y=l \mid X=k)}_{C_k^l (0,9)^l \cdot (0,1)^{k-l}} \cdot \underbrace{P(X=k)}_{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$= \underset{2p}{(\dots)} = e^{-(0,9) \cdot \lambda} \cdot \frac{((0,9) \cdot \lambda)^l}{l!}$$