Seminar 4
16.11.2015
Probabilități

Variabile aleatoare

- X - v.a. discretă

$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \to$ distribuția lui X

- $p_1, \dots, p_n > 0$, $p_1 + \dots + p_n = 1$
- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\to$ fct de repartiție

- X - v.a. continuă
  - $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ $\to$ fct de repartiție
    ↳ fct de densitate
  - F - fct continuă, derivabilă „aproape peste tot"
  - $f(t) \ge 0$, aproape peste tot, $t \in \mathbb{R}$
  - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$
  - $P(a \le X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$
    $= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$, $\forall\, a < b$
  - $P(X = a) = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$

① Potrivit unei statistici, 60% dintre studenții unei universități suferă de anxietate față de mate. 2 studenți sunt aleși aleator. Fie X - v.a. care indică nr de studenți aleși care suferă.

a) Det distribuția lui X
b) Det fct. de repartiție, $F(x)$
c) Trasați graficul lui $F(x)$

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}16 & 0{,}48 & 0{,}36 \end{pmatrix}$

model cu bilă întoarsă cu 2 stări

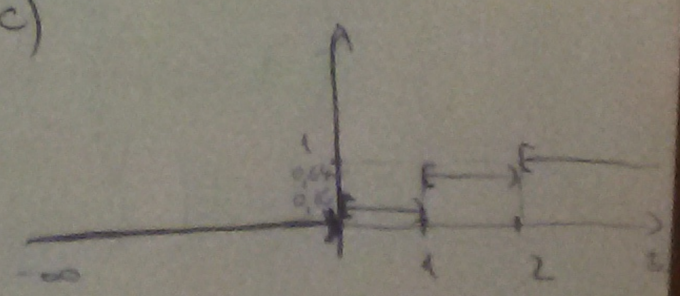
$P(X=0) = b(2,2) = C_2^2 (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^0 = 0{,}16$

$P(X=1) = b(1,2) = C_2^1 (0{,}4)^1 \cdot (0{,}6)^1 = 0{,}48$

$P(X=2) = b(0,2) = C_2^0 (0{,}4)^0 (0{,}6)^2 = 0{,}36$

b) $F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0{,}16 & , 0 \le x < 1 \\ 0{,}64 & , 1 \le x < 2 \\ 1 & , 2 \le x \end{cases}$

c)



② Propunerea de utilizatori a unei platforme online care completează un chestionar trimis pe email e reprezentată pe o variabilă aleatoare X continuă

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+2)/5, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

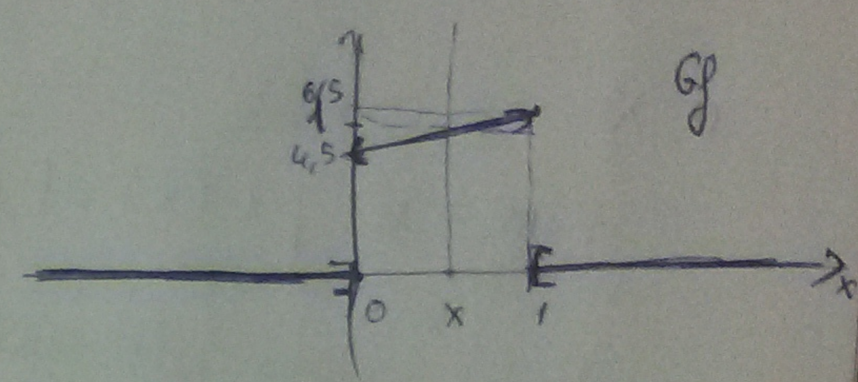
a) $P(0 < x \le 1{,}1) = \int_0^{1{,}1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{1{,}1} f(t)\,dt = 1 + 0 = 1$

b) $P(0{,}25 < x < 0{,}50) = \int_{0{,}25}^{0{,}50} \frac{2(t+2)}{5}\,dt = \frac{2}{5}\left(\frac{t^2}{2} + 2t\right)\Big|_{0{,}25}^{0{,}5}$

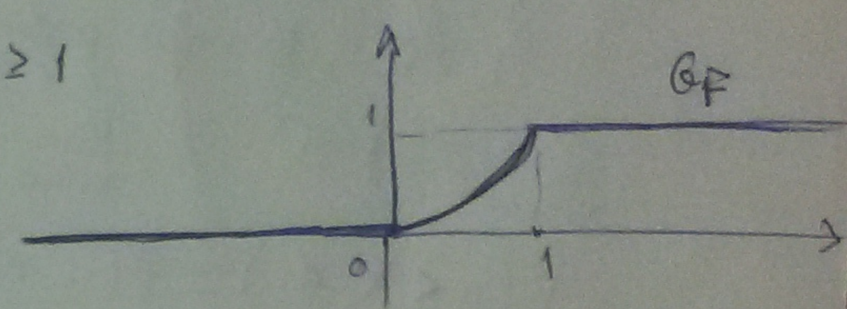
$= \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{32} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{32} = \frac{19}{5 \cdot 16}$

c) $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$



$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt, & x \le 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{2(t+2)}{5}\,dt, & 0 < x < 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 \frac{2(t+2)}{5}\,dt + \int_1^x 0\,dt, & x \ge 1 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right), & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

③ O firmă oferă un bonus la salar în funcție de vechimea în ani conform unei v.a T care are $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \le t < 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 \le t < 5 \\ \frac{3}{4}, & 5 \le t < 7 \\ 1, & 7 \le t \end{cases}$

și distribuția $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$

a) $P(T = 5) = P(T \le 5) - P(T < 5) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P(T > 3) = 1 - P(T \le 3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $P(1{,}4 < T < 6) = \cancel{P(6) - P(1{,}4) = \frac{3}{4} - 1} = P(T < 6) - P(T \le 1{,}4)$

$= P(T \le 5) - P(T \le 1{,}4)$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

d) Distribuția lui X

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(4) Un programator testează 4 jocuri. Fie X v.a care indică nr de jocuri care conțin erori. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{8}, & 1 \le x \le 2 \\ \frac{3}{8}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{3}{4}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$

a) Det distribuția lui X

b) Care e prob ca cel puțin 2 jocuri să conțină erori

(2) v.a X, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2, & 1 \le x \le 2 \\ c \cdot x, & 2 < x < 3 \\ 0, & \text{în best} \end{cases}$

Temă

a) Det $c = ?$

b) $P(X > 2)$

c) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$

d) Det $F(x)$.

---

(4) v.a.c X, $F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \le x < 2 \\ d, & x < 0 \\ e, & x \ge 2 \end{cases}$

$P(1 < X < 2) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Det $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Rez

- F - continuă $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) \Rightarrow c = d \\ \lim\limits_{x \to 2} F(x) = \lim\limits_{x \to 2} F(x) = F(2) \Rightarrow 4a + 2b + c = e \end{cases}$

- $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e - (a + b + c) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 3a + b = \frac{1}{2}$

$4a + 2b = 1$

$2a + b = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = 0$, $b = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1 \Rightarrow e = 1$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \Rightarrow d = 0 = c$