凸集（Convex Set）

张伯雷
南京邮电大学 计算机学院、通达学院
https://bolei-zhang.github.io/opt.html
bolei.zhang@njupt.edu.cn

上一节课-优化问题

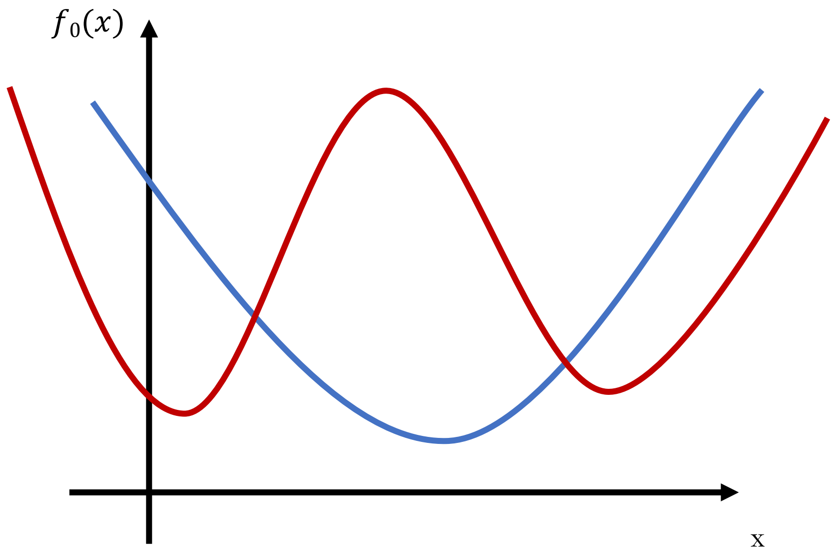
- 优化问题

$$\min \quad f_0(x).$$
$$\text{s.t.} \quad f_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

- 其中
  - $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$： 优化变量(variable)
  - f_0: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$： 目标函数(Objective function)
  - f_i: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$： 约束函数(Constraints)
  - 最优解x^* 所有满足约束条件的解中使得目标函数f_0最小

上一节课-凸规划

- 凸规划
  - 可行解集是凸集，目标函数是凸函数
  - $f_i(\alpha x+\beta y)\le \alpha f_i(x)+\beta f_i(y), i=0,1,\dots,m$

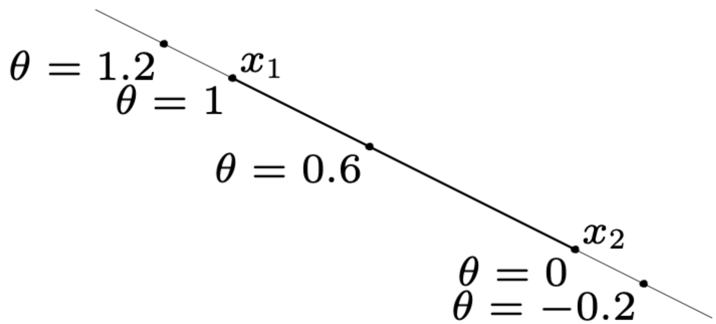


目录

- 内容
  - **仿射集、凸集、凸锥**
  - 几种重要的凸集
  - 保凸的运算
- 目标
  - 凸集的定义
  - 常见的集合中哪些是凸集
  - 如何判定凸集

仿射集（Affine Set）

- 直线
  - 对于穿过x_1, x_2两个不同的点的直线，所有满足以下条件的点：
$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}$$



- 仿射集
  - 一个集合C是仿射集，若$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{C}$，连接$x_1, x_2$的直线也在C内
- 思考：
  - 该条直线上所有的点组成的集合
  - 空集、点、线段是仿射集吗？
  - 实数集、正实数集、整数集是仿射集吗？

例子

- 证明：线性方程组的所有解集是仿射集

凸集（Convex Set）

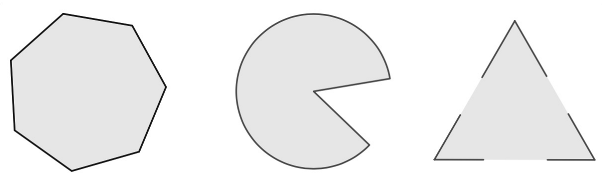
- 线段：对于穿过x_1, x_2两点的直线，所有满足以下条件的点：

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2, 0 \le \theta \le 1$$

- 凸集：集合中任意两点所组成的线段仍然在该集合中

$$x_1, x_2 \in \mathrm{C}, 0 \le \theta \le 1. \Rightarrow \ \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in \mathrm{C}$$

- 例子：



(a) (b) (c)

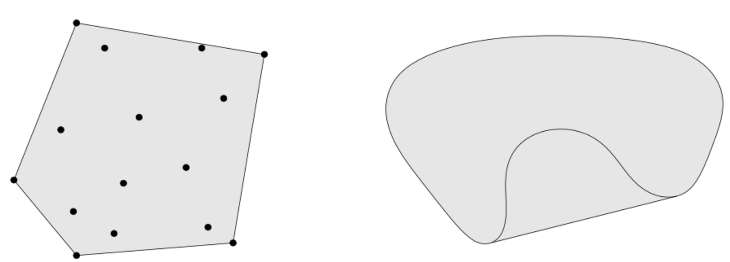
- 思考：
  - 点、直线
  - 实数集、正实数集、整数集是否为凸集
  - 仿射集是否为凸集

凸组合与凸包

- 凸组合（Convex Combination）
  - 对于任意的k个点：$x_1, x_2, \ldots, x_k$，凸组合是以下的形式：

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k$$

  - 其中$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geq 0$
  - C为凸集⟺C中任意元素的凸组合属于C
- 凸包（Convex Hull）
  - $conv$C: 所有集合C中的点的凸组合，是包含 S 的最小的凸集
  - 用一个绳子连起来

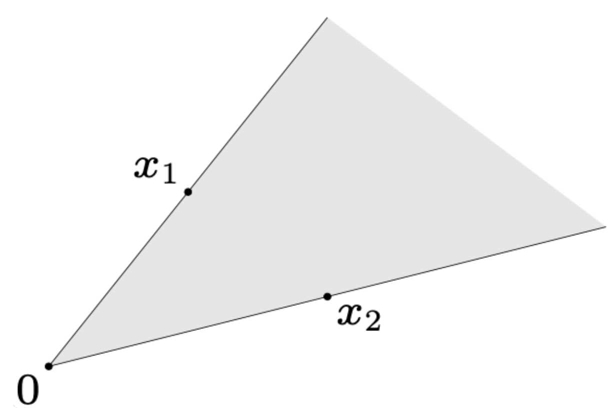


凸锥（Convex Cone）

- 锥
  - C为锥⇔对于C中任意的点x， $\theta x \in \mathrm{C}, \theta \geq 0$
- 凸锥
  - 对于任意的两个点：x_1, x_2，凸锥是以下的形式：

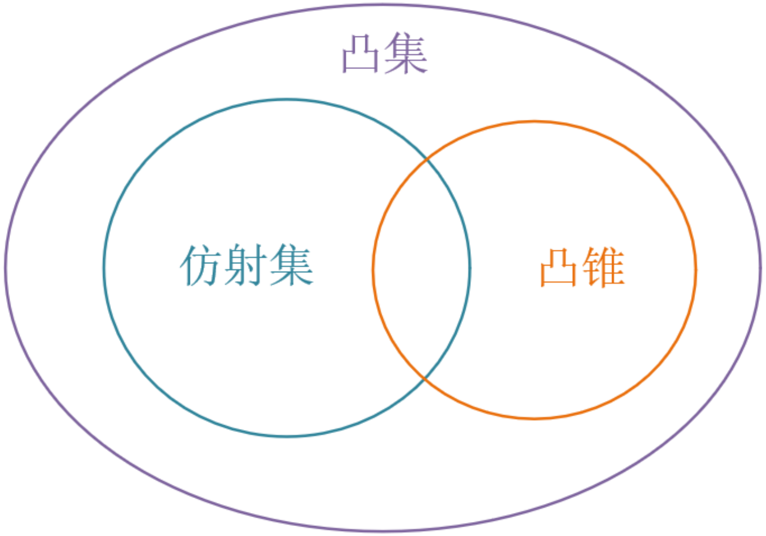
$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

  - 其中$\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$
- 思考
  - 原点是否一定在凸锥上?
  - 经过原点的射线
  - 经过原点的直线
  - 凸锥是凸集吗?



仿射集、凸集、凸锥

- 定义
  - 仿射集 $\theta_1 + \theta_2 = 1$
  - 凸集　$\theta_1 + \theta_2 = 1, \theta_i \geq 0$
  - 凸锥　$\theta_i \geq 0$
- 关系
  - 仿射集 vs 凸集
  - 凸锥 vs 凸集

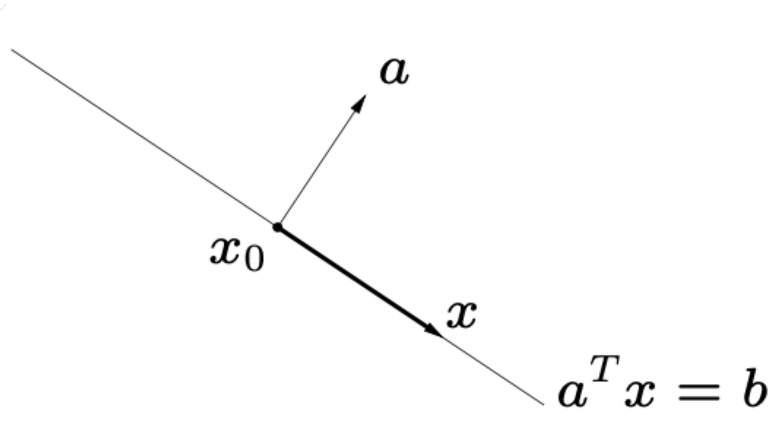


目录

- 内容
  - 仿射集、凸集、凸锥
  - **几种重要的凸集**
  - 保凸的运算

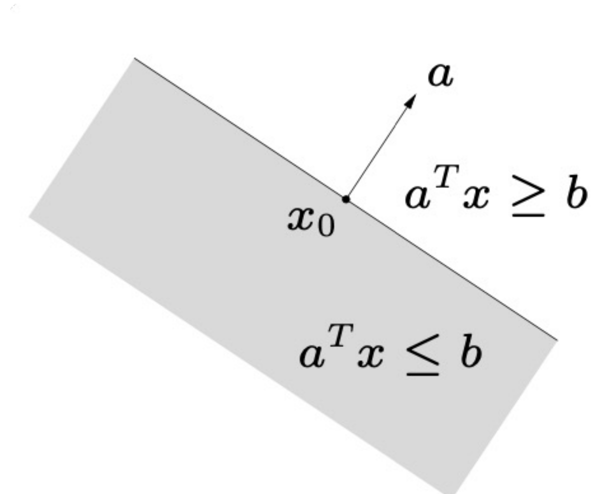
几种重要的凸集-超平面与半空间

- 超平面：满足以下条件的点的集合
  - $\{x|a^T\boldsymbol{x}=b\}(a\neq 0)$



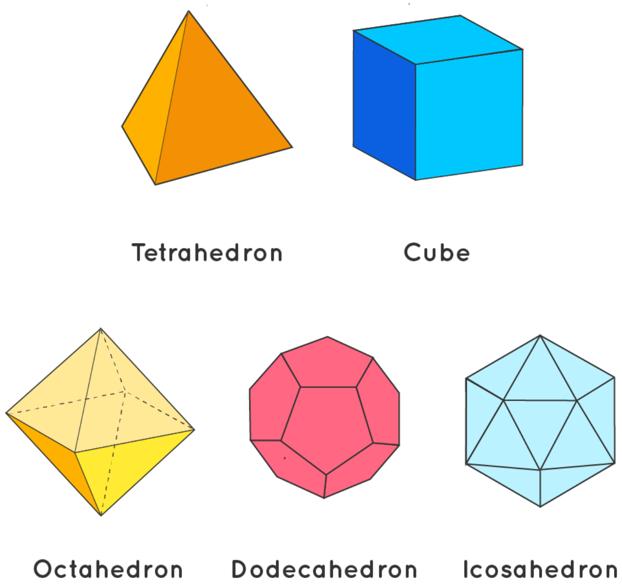
- 超平面是仿射的，也是凸的

- 半空间
  - $\{x|a^Tx\leq b\}(a\neq 0)$



几种重要的凸集-多面体

- 多面体（Polyhedron）
  - $\{x|Ax \leq b, Cx = d\}$
  - $A \in R^{m\times n}, C \in R^{p\times n}$
  - 多面体是有限个半空间和超平面的交集
  - 多面体是凸集（证明：作业）



预备知识

- 对称矩阵S^n

- 对称半正定矩阵S_+^n
  - 给定一个大小为 n×n 的实对称矩阵 A，若对于任意长度为 n 的非零向量 x，有 $x^TAx \geq 0$ 恒成立，则矩阵 A 是一个半正定矩阵

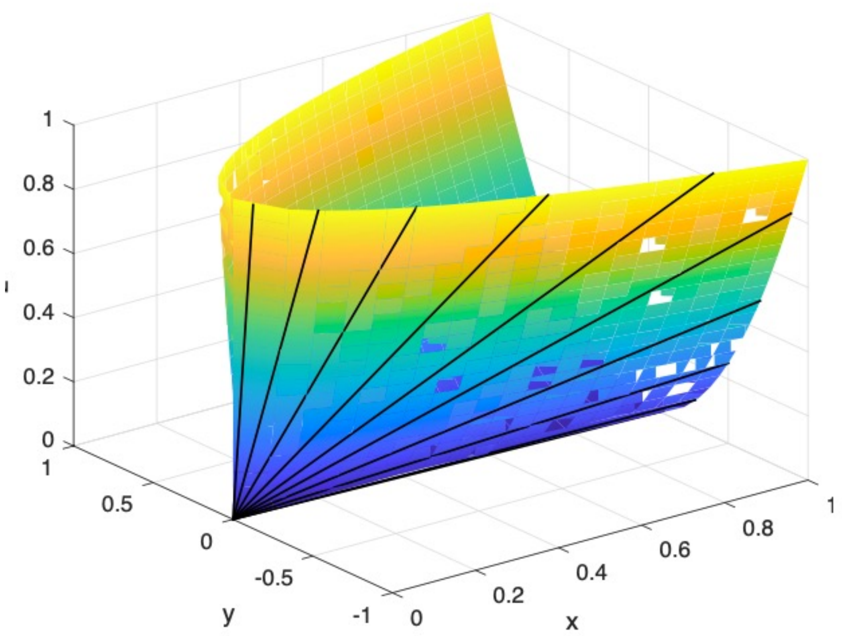
- 对称正定矩阵S_{++}^n

几种重要的凸集-对称半正定矩阵

- 对称半正定矩阵集合

$$\mathcal{S}_+^n = \{ X \in \mathcal{S}^n \,|\, X \succeq 0 \}$$

- 证明：对称半正定矩阵集合是凸锥



几种重要的凸集-球与椭球

- 球：满足以下条件的点的集合

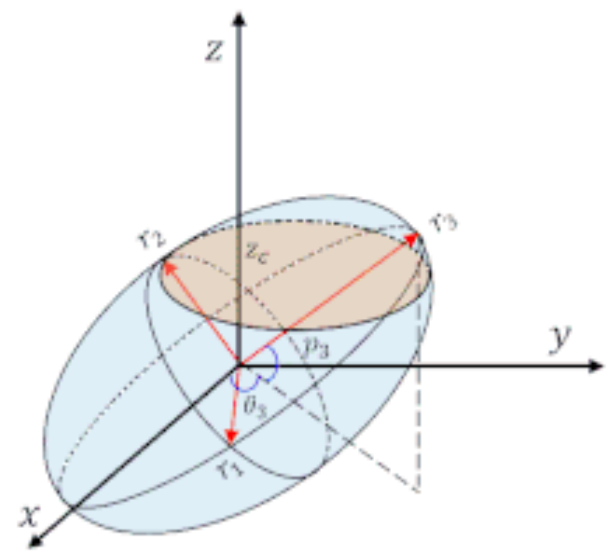
$$B(x_c, r) = \{ x \mid \|x - x_c\|_2 \leqslant r \} = \{ x_c + ru \mid \|u\|_2 \leqslant 1 \}$$

- 证明：球是凸集

- 椭球（ellipsoid）：

$$\{ x \mid (x - x_c)^{\mathrm{T}} P^{-1} (x - x_c) \leqslant 1 \}$$

$$P \in S^n_{++}$$



目录

- 内容
  - 仿射集、凸集、凸锥
  - 几种重要的凸集
  - **保凸的运算**

凸集证明

- 如何证明一个集合C为凸集
  - 1. 根据定义：集合C中任意两点所组成的线段仍然在该集合中

    $$x_1, x_2 \in \mathrm{C}, 0 \le \theta \le 1. \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in \mathrm{C}$$

  - 2.集合 C 可由简单的凸集(超平面、半空间、范数球等）经过保凸运算后得到

保凸运算1-交集

- 定理1：任意多个凸集的交集为凸集
- 证明:

保凸运算2-仿射变换

定理 2.4 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是仿射变换 $\big(f(x) = Ax + b$，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m\big)$, 则

(1) 凸集在 f 下的像是凸集：

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ 是凸集} \Longrightarrow f(S) \xlongequal{\text{def}} \{\, f(x) \,|\, x \in S \,\} \text{ 是凸集};$$

(2) 凸集在 f 下的原像是凸集：

$$C \subseteq \mathbb{R}^m \text{ 是凸集} \Longrightarrow f^{-1}(C) \xlongequal{\text{def}} \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \in C \,\} \text{ 是凸集}.$$

- 缩放、平移和投影变换都是仿射变换

作业

- QQ作业
  - 1. 根据定义证明多面体是凸集
  - 2.根据定义证明凸集的仿射变换是凸集（定理2.4（1））
  - 3. 判断以下集合是否是凸集、多面体，并给出证明
    - (1) $\{x \in R^n \mid \alpha \le a^T x \le \beta\}$
    - (2) $\{x \in R^n \mid a_1^T x \le b_1, a_2^T x \le b_2\}$.

谢谢！！

分离超平面定理

定理 2.5 (分离超平面定理 [4]定理 11.3)　如果 C 和 D 是不相交的两个凸集，则存在非零向量 a 和常数 b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x \leqslant b, \quad \forall x \in C, \quad \text{且 } a^{\mathrm{T}}x \geqslant b, \quad \forall x \in D,$$

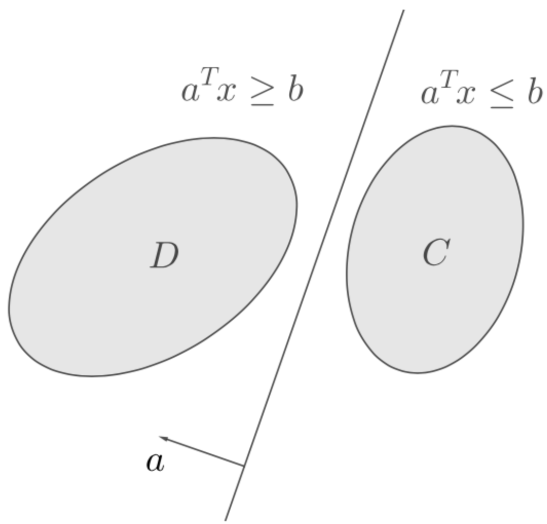


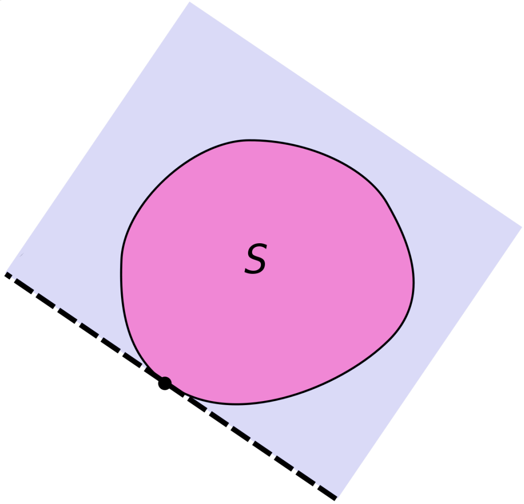
图 2.10　分离超平面

支撑超平面定理

定义 2.15 (支撑超平面) 给定集合 C 及其边界上一点 x_0，如果 $a \neq 0$ 满足 $a^{\mathrm{T}}x \leqslant a^{\mathrm{T}}x_0, \forall x \in C$，那么称集合

$$\{\, x \mid a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}x_0 \,\}$$

为 C 在边界点 x_0 处的支撑超平面.



点 x_0 和集合C也被该超平面分开。从几何上来说，超平面 $\{x|a^T x = a^T x_0\}$ 与集合C在点 x_0 处相切并且半空间 $\{x|a^T x \leq a^T x_0\}$包含C.

定理 2.7 (支撑超平面定理 [4][推论 11.6.1]) 如果 C 是凸集，则在 C 的任意边界点处都存在支撑超平面.