3.17

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c' = (2,3,3,1,2)$$

Fase 1:

$$\begin{array}{llllllll} \min & x_6 + x_7 + x_8 \\ \text{suj. a} & x_1 + 3x_2 & & +4x_4 & +x_5 & +x_6 & & =2 \\ & x_1 + 2x_2 & & -3x_4 & +x_5 & & +x_7 & =2 \\ & -x_1 - 4x_2 & +3x_3 & & & & +x_8 & =1 \end{array}$$

$$x_1, \dots, x_8 \geq 0$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_B = (x_6, x_7, x_8) = b = (2,2,1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formamos o tableau:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-5	-1	-1	-3	-1	-2	0	0	0
x_6 =	2	1*	3	0	4	1	1	0	0
x_7 =	2	1	2	0	-3	1	0	1	0
x_8 =	1	-1	-4	3	0	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-3	0	2	-3	3	-1	1	0	0
x_1 =	2	1	3	0	4	1	1	0	0
x_7 =	0	0	-1	0	-7	0	-1	1	0
x_8 =	3	0	-1	3*	4	1	1	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	0	1	0	7	0	2	0	0
x_1 =	2	1	3	0	4	1	1	0	0
x_7 =	0	0	-1	0	-7	0	-1	1	0
x_3 =	1	0	-1/3	1	4/3	1/3	1/3	0	1/3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$x_1 =$	2	1	0	0	-17	1	-2	3	0
$x_2 =$	0	0	1	0	7	0	1	-1	0
$x_3 =$	1	0	0	1	11/3	1/3	2/3	-1/3	1/3

Agora podemos ~~[illegible]~~ remover as variáveis artificiais e montar o tableau do problema original

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	7	0	0	0	3	-5
$x_1 =$	2	1	0	0	-17	1 *
$x_2 =$	0	0	1	0	7	0
$x_3 =$	1	0	0	1	11/3	1/3

$c_B = (2, 3, 3)$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	+3	5	0	0	-82	0
$x_5 =$	2	1	0	0	-17	1
$x_2 =$	0	0	1	0	7*	0
$x_3 =$	1/3	-1/3	0	1	28/3	0

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	3	5	82/7	0	0	0
$x_5 =$	2	1	17/7	0	0	1
$x_4 =$	0	0	1/7	0	1	0
$x_3 =$	1/3	-1/3	4/3	1	0	0

Chegamos no custo ótimo = -3, com a solução ótima:

$$(0, 0, 1/3, 0, 2)$$

3.18.

(a) Note que quando há degeneração, uma das variáveis básicas vale zero. Caso a escolhamos para sair da base, o valor do custo permanecerá o mesmo. No entanto, o valor das variáveis básicas também, então não andaremos uma distância positiva na solução.

Portanto, quando escolhemos uma variável básica não-degenerada para sair da base, ~~...~~ é possível supor que:

- o valor do custo reduzido para a variável a entrar na base é negativo, não nulo
- a quantidade $\theta = \min_{\{i \mid u_i > 0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ é positiva.

Portanto, o custo ~~...~~ será atualizado (decrescerá) em $\theta \cdot \bar{c}_j$, ~~...~~ $\bar{c}_j$ sendo o custo reduzido da variável j que entrou na base.

Assim sendo, não há como andar uma quantidade θ positiva sem alterar o valor do custo.

(5) Pelo método do Tableau, vejo que a coluna associada a uma variável básica corresponde a uma ~~[illegible]~~ coluna da matriz identidade e, portanto, positivo ou nulo em cada variável. Supondo que escolhemos a i-ésima variável para entrar na base, e a j-ésima para sair. ~~[illegible]~~ Seja K a linha correspondente à variável básica a sair da base. Veja que o j-ésimo valor da linha K ~~[illegible]~~ vale 1, e que o ~~[illegible]~~

i-ésimo também é positivo. Além disso, o custo reduzido da i-ésima variável é negativo. Como ao final da iteração ele deve valer zero, iremos adicionar um múltiplo positivo da K-ésima ~~[illegible]~~ linha à 0-ésima linha.

Assim sendo, o custo reduzido da j-ésima variável será incrementado em um valor positivo multiplicado por 1, ou seja, será incrementado em um valor positivo. Assim sendo, a j-ésima variável terá um custo reduzido positivo na próxima ~~[illegible]~~ iteração do método, e não poderá entrar de volta na base.

(c) Vendo pelo método do tableau, uma variável $x_{B(k)}$ é proibida de sair da base se a k-ésima linha possui valores todos nulos/negativos ou se, em cada coluna, há i t.q. $u_i > 0$ e $\frac{x_{B(i)}}{u_i} < \frac{x_{B(k)}}{u(k)}$

Mas veja que é possível construir um contra-exemplo.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4 =$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5 =$	20	2*	1	2	0	1	0
$x_6 =$	20	2	2	1	0	0	1

Introduzimos x_1 na base.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	10	0	-7	-2	0	5	0
$x_4 =$	10	0	3/2	1	1	-1/2	0
$x_1 =$	10	1	1/2	1*	0	1/2	0
$x_6 =$	0	0	1	-1	0	-1	1

Note que podemos escolher x_1 para sair da base!

d) Suponha o problema:

$$\min \; x_2$$

suj. a

$$x_1 \geq 2,$$
$$x_1 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 10,$$
$$x_2 - x_1 \leq 10,$$
$$x_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ Passando para o formato padrão:

$$\min \; x_2$$

suj. a

$$x_1 - x_3 = 2,$$
$$x_1 + x_4 = 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 10,$$
$$x_2 - x_1 + x_6 = 10,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

temos $x^* = (2, 0, 0, 2, 8, 12)$,
$y^* = (4, 0, 2, 0, 6, 14)$
soluções viáveis básicas ótimas!

Note que cada uma possui $2 = n - m$ variáveis nulas, portanto se tratam de soluções básicas não-degeneradas, que definem as bases:

$$B_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B_y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

distintas! Portanto é possível que haja mais de uma base ótima não degenerada.

(e) Suponha o problema seguinte:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & x_2 & & & & & & & \\
\text{Suj. a} & x_1 & & + x_3 & - x_4 & & & & = 2, \\
 & x_1 & & + x_3 & & + x_5 & & & = 4, \\
 & x_1 & + x_2 & + x_3 & & & + x_6 & & = 10, \\
 & -x_1 & + x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 10, \\
 & x_1, \dots, x_7 \geq 0 & & & & & & &
\end{array}
$$

Note que $(1, 0, 1, 0, 2, 8, 12)$ é solução ótima, mas há $5 > m = 4$ variáveis positivas.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	0	0	1	0	0	0	0	0
x_1	$= 2$	1	0	1	-1	0	0	0
x_5	$= 2$	0	0	0	1	1	0	0
x_6	$= 8$	0	1	0	1	0	1	0
x_7	$= 12$	0	1	0	-1	0	0	1

S T Q Q S S D

3.19

(a) $\delta = -2, \eta = -1, \alpha = -4, \beta = 0, \gamma = 3$

(b) $\delta = -3, \eta = 2, \alpha = -5, \gamma = -10,$
$\beta = 0$

(c) $\delta = 3, \alpha = 4, \gamma = -2, \beta = 5, \eta = 2$