3.7

Seja c a função de custos do problema original, e A a matriz de restrições.

Note que d tem variáveis nulas correspondentes aos índices das variáveis não-básicas de x, e nulas para os índices das básicas.

Podemos dizer que x é uma solução ótima para o problema original se não existe uma direção viável que faça o valor da função de custos ser reduzido. Ou seja, se o valor mínimo da função de custos em qualquer direção viável seja zero.

Note que para $d \in \mathbb{R}^n$, se $Ad = 0$ então d é uma direção viável; veja que existe $\theta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$A(y + \theta d) = Ay + \theta \overset{0}{Ad} = Ay = b, \ \forall y \in P.$$

data . .

S T Q Q S S D

Veja que para d ser uma direção viável, $d_i \geq 0$ para todo i correspondente a uma variável não-básica. Suponha $d_i < 0$ para alguma variável não-básica. Então $x_i + \theta d_i = 0 + \theta d_i < 0 \quad \forall \theta > 0$, e d portanto não seria direção viável.

Assim sendo, o problema:

$$\begin{aligned} \min \ & c'd \\ \text{sujeito a} \ & Ad = 0 \\ & d_i \geq 0, \ i \in Z \end{aligned}$$

define, em essência, minimizar o custo das direções viáveis a partir do ponto x. Temos que se o custo mínimo é menor do que zero, então encontramos uma direção viável a partir de x que efetivamente reduz a função de custos e, portanto, x não é solução ótima. No entanto, se o custo mínimo é zero, então a direção que minimiza o custo da função original a partir do ponto x é a nula, ou seja, o ponto de menor custo é o ponto x, caracterizando a solução ótima, ou então achamos uma direção que determina uma semi-reta de pontos com custos mínimos à qual x faz parte. Neste caso, x integra o conjunto de soluções ótimas e, portanto, é solução ótima.

Assim sendo, concluímos que x é solução ótima do problema original se e somente se o custo mínimo do problema auxiliar é zero.

3.12. Adicionarei as variáveis de folga x_3 e x_4, obtendo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Temos a solução viável básica $(0,0,2,6)$.

(b)

		x_1	x_2	x_3	x_4
	0	-2	-1	0	0
$x_3 =$	2	1*	-1	1	0
$x_4 =$	6	1	1	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
	4	0	-3	2	0
$x_1 =$	2	1	-1	1	0
$x_4 =$	4	0	2*	-1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4
	10	0	0	1/2	3/2
$x_1 =$	4	1	0	1/2	1/2
$x_2 =$	2	0	1	-1/2	1/2

solução ótima!

data