4.19

(a) Seja $p'A = (K_1, K_2, \dots, K_j, \dots, K_n)$, $x \in P$
onde que $K_i \geq 0, \forall i \neq j$ e $K_j > 0$

Temos $p'b = 0$, mas como $x \in P \Rightarrow b = Ax$

$\Rightarrow p'(Ax) = 0 \Rightarrow (p'A)x = 0$

$\Rightarrow K_1 x_1 + K_2 x_2 + \dots + K_j x_j + \dots + K_n x_n = 0$
mas veja que $x_i \geq 0 \ \forall i$, $\Rightarrow K_i x_i \geq 0 \ \forall i \neq j$

suponha $x_j > 0$, mas $K_j > 0$
$\Rightarrow K_j x_j > 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i \neq j} K_i x_i}_{\geq 0} + \underbrace{K_j x_j}_{> 0} > 0$

$\Rightarrow p'b > 0$. Absurdo!

portanto $x_j = 0$, ou seja, x_j é uma variável nula.

(b) Tome p t.q. $p'A \geq 0' \Rightarrow p'A_j \geq 0, \forall i$

$p'b = 0 \Leftrightarrow p'Ax = 0$

$\Leftrightarrow \sum p'A_i x_i = 0$

$\Leftrightarrow p'A_1 x_1 + \dots + p'A_j x_j + \dots + p'A_N x_N = 0$

como $p'A_i \geq 0 \ \forall i$ e $x_i \geq 0 \ \forall i$, a igualdade acima só vale se,

$$p'A_i x_i = 0 \ \forall i$$

Precisamos definir $p'A$ de forma que a igualdade valha, ou seja:

$$\begin{cases} p'A_i \geq 0, & \forall i \text{ t.q. } x_i = 0 \\ p'A_i = 0, & \forall i \text{ t.q. } x_i \neq 0 \end{cases}$$

em particular, $x_j = 0 \Rightarrow p'A_j \geq 0$ e podemos assumir que $p'A_j > 0$

ⓒ Suponha que nenhuma variável de $x \in P$ seja nula.
Tome $p=0$, $\Rightarrow p'A \geq 0'$, $p'b=0$ e

$$x + A'p = x > 0$$

~~Seja~~ Suponha que há variáveis nulas em x.

Seja x_j uma variável nula.
Então (b) $\exists\, p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $p'A \geq 0'$, $p'b=0$
e $p'A_j > 0$

Temos $p'b = p'Ax = 0 \Rightarrow \sum_i p'A_i x_i = 0$
mas como $p'A_i \geq 0$ e $x_i \geq 0$ $\forall i$,
$\Rightarrow p'A_i x_i = 0 \; \forall i$
suponha $x_i \neq 0$, então $p'A_i = 0$, e $x_i + p'A_i > 0$
suponha $x_i = 0$. Se x_i é uma variável nula, então (b)
existe $q \in \mathbb{R}^m$ t.q. $q'A \geq 0$, $q'b = 0$ e $q'A_j > 0$
Seja $v = p+q$
note que $v'A = (p+q)'A = p'A + q'A \geq 0$
$v'b = (p+q)'b = p'b + q'b = 0$
ou seja, podemos trocar p por v
e continuar valendo que $p'A_i x_i = 0$, mas também
que $x_i + p'A_i > 0$
Mas se x não é uma variável nula, então
existe $y \in P$ t.q. $y_i > 0$

Podemos definir $z = \lambda x + (1-\lambda) y$, $\lambda \in [0,1]$ uma combinação convexa de x e y.

Note que $z \in P$, e, portanto, $p'b$ continua valendo.

Além disso, $\forall i$ t.q. $x_i > 0 \Rightarrow z_i > 0 \Rightarrow z_i + A'p > 0$

$\forall i$ t.q. $x_i = 0$ e $z_i > 0$

$\Rightarrow z_i + A'p > 0$

Podemos então trocar x por p, e teremos:

$$p'A_i x_i = 0 \ ; \text{ pois } p'Ax = p'b = 0,$$

$$\text{e } p'A_i + x_i > 0$$

Ou seja, podemos escolher $p \in \mathbb{R}^m$ e $x \in P$ tal que

$p'A \geq 0$, $p'b = 0$, $p'A_i + x_i > 0 \ \forall i$

mas veja que queremos $x + A'p > 0$

$$\iff x + A'p = x + \sum A_i' p$$

$$= x + \sum p'A_i = x + p'A > 0$$

$$\iff x_i + p'A_i > 0 \ \forall i$$

~~Portanto, se escolhemos p e x como descrito, mostramos~~

Ou seja, caso haja ou não mínimos nulos, podemos escolher $p \in \mathbb{R}^m$ e $x \in P$ tal que

$p'A \geq 0$, $p'b = 0$ e $x + A'p > 0$. ∎

4.22

Temos que a base é viável no dual e, portanto, todos os custos reduzidos são não-negativos.
Queremos fazer uma mudança de base que faça $x_{B(i)} \geq 0$.
Note que se a j-ésima entrada da linha i vale zero, então j já está na base.
Mas suponha que vale $h_j > 0$. Note que inserir j na base é uma operação que aumenta o valor da função objetivo (pois o custo reduzido é positivo ou não altera (se for de custo reduzido nulo). No entanto, inserir j na base, isto é, aplicar operações elementares nas linhas do tableau com combinações da linha i, vai manter o valor do $x_{B(i)}$ negativo pois transformar a coluna j no vetor canônico e, exigirá apenas dividir a ~~linha~~ linha i por $h_j > 0$, mantendo o sinal de todas as entradas da linha. ~~[illegible]~~,
Além disso, para manter a viabilidade dual da solução, escolhemos j da forma que $\frac{\bar{c}_j}{h_j} = \min \frac{\bar{c}_i}{k_i}$, ou seja,

da forma que os custos reduzidos se mantenham não negativos. Podemos repetir o processo infinitamente e permanecer em soluções viáveis duais. Ou seja, o custo dual cresce infinitamente, e o custo ótimo vale $+\infty$ (máximo)