2.12

Note que P não possui linhas: para cada eixo, ou seja, para cada variável x_i, ou $x_i \geq 0$ ou $x_i \leq 0$, e, portanto, não existe $x \in P$, $d \in \mathbb{R}$ t.q.

$$x + \lambda d \in P, \forall \lambda.$$

Veja que se $x + \lambda d = (x_1 + \lambda d_1, \dots, x_n + \lambda d_n)$

$\Rightarrow$ $x_i + \lambda d_i \geq 0 \; \forall i$ ou $x_i + \lambda d_i \leq 0 \; \forall i$

(caso 1) $\forall \lambda$ (caso 2) $\forall \lambda$

Caso 1: suponha $d_i \neq 0$, veja que $x_i + \lambda d_i \geq 0 \ \forall \lambda$
$$\Leftrightarrow \lambda \geq \frac{-x_i}{d_i}$$

Tome $\lambda < \frac{-x_i}{d_i} \Rightarrow x + \lambda d \notin P$

~~Ou seja~~, ~~$x + \lambda d \notin P$~~ ou seja, $x_i + \lambda d_i \geq 0 \ \forall \lambda$
$$\Leftrightarrow d_i = 0$$

Caso 2: suponha $d_i \neq 0$, veja que
$x_i + \lambda d_i \leq 0 \ \forall \lambda \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{-x_i}{d_i}$ portanto $\forall \lambda > \frac{-x_i}{d_i}$

$$x_i + \lambda d_i > 0 \Rightarrow x + \lambda d \notin P$$

Ou seja, $x_i + \lambda d_i \leq 0 \ \forall \lambda \Leftrightarrow d_i = 0$

Portanto, em todo caso, ~~[illegible]~~ $x + \lambda d \in P \ \forall \lambda \Leftrightarrow d_i = 0 \ \forall i$
$$\Leftrightarrow d = 0$$
$$\Rightarrow x + \lambda d = x$$

Note, portanto que P não contém uma linha! Como P é não vazio (hipótese), segue pelo Teorema 2.6 que P possui pelo menos um ponto extremo, ou seja, P possui pelo menos uma solução viável básica.

2.13 (a) Lembre que x é s. viável básica de P ⟹ possui n restrições ativas L.I. e $x \in P$.

(b) Sejam $x_{B(i)}$ as m componentes positivas de x, x_j as n-m componentes nulas de x.

Veja que x possui n-m restrições ativas L.I. $x_j = 0$, portanto para que seja solução básica, o conjunto de restrições $Ax = b$ não pode determinar ~~menos~~ menos de m restrições L.I.

mas note que $Ax = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} + \sum A_j \cancel{x_j}^{0} = b$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} = b$

Suponha $A_{B(i)}$ L.D. Então há uma coluna $A_{B(k)}$ que pode ser escrita como combinação das outras $A_{B(i)}, i \neq k$, formando um conjunto $\bar{B}(i)$ de $m-1$ colunas tq.

$\Rightarrow \exists x^* \quad Ax^* = \sum_{i=1}^{m-1} A_{\bar{B}(i)} x^*_{\bar{B}(i)} = b$, de forma que

$x_i^* = 0 \quad \forall i \notin [B(1), \ldots, B(m-1)]$. Então x^* é solução degenerada de P. Absurdo! Portanto $A_{B(i)}$ são L.I.

Portanto $Ax = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} = b$ é unicamente determinado por m equações L.I. e, portanto, x é solução básica de P.

Como $x \in P$, x é solução viável básica de P.

data . .

S T Q Q S S D

(b) Se removermos a ~~[illegible]~~ restrição de não degenerescência, temos que o conjunto $A_{B(i)}$ de colunas de A pode não ser L. I. e, portanto, x pode ter menos de n restrições ativas L.I., não sendo solução viável básica de P.

Ou seja, é fácil construir um exemplo em que todas as soluções viáveis básicas de P são degeneradas e, portanto, que não haja solução viável básica com m componentes não nulas.