(2.4)

Podemos assumir que um poliedro na FORMA PADRÃO possui pelo menos um ponto extremo pois ele possui pelo menos um vértice, já que ele é limitado pela restrição que todo elemento x seja ≥ 0. No entanto, esse não é o caso para todos os poliedros, que podem não ser limitados. Tome por exemplo um semiespaço. Apesar de ser não-vazio, ele não é limitado, então não possui vértices, ou seja, não possui pontos extremos.

data

25

(a) Tome x ponto extremo de P. Então x também é vértice de P. (Teorema 2.3).
Ou seja, $\exists c$ t.q.

$$c'x < c'y \quad \forall y \in P, y \neq x$$

Tome $f(x) = Ax + b$, função afim de acordo com o enunciado. Suponha que $f(x) \in Q$ não é ponto extremo de Q. Então $f(x)$ também não é vértice de Q.

$$\Rightarrow \nexists d \text{ t.q. } d'f(x) < d'f(y), \forall y, y \neq x$$

$$\Rightarrow \forall d \; \exists y^{\neq x} \text{ t.q. } d'f(y) \leq d'f(x)$$

mas então $\forall d \; \exists y$ t.q. $d'(Ay+b) \leq d'(Ax+b)$

$$\Leftrightarrow d'Ay + d'b \leq d'Ax + d'b$$
$$\Leftrightarrow d'Ay \leq d'Ax \;, \forall d$$

Tome d tal que $d'A = c'$

Portanto $c'y \leq c'x$ para algum y.

Absurdo! Portanto x ponto extremo de P implica $f(x)$ ponto extremo de Q.

No entanto, tomando $g(x) = Bx + e$, podemos repetir o processo para demonstrar que x ponto extremo de $Q \Rightarrow x$ ponto extremo de P.

Veja que se há c t.q.

$c'x < c'y \quad \forall y \in Q, \, y \neq x$

e supomos que $g(x)$ não é ponto extremo de P, temos que

$\nexists d$ t.q. $d'g(x) < d'g(y), \, \forall g(y) \in P, \, g(y) \neq g(x)$

$\Rightarrow \forall d \; \exists \, g(y) \in P, \, g(y) \neq g(x)$ t.q.

$d'g(y) \leq d'g(x)$

$\Leftrightarrow \; d'(By+e) \leq d'(Bx+e)$
$\Leftrightarrow \; d'By + d'e \leq d'Bx + d'e$
$\Leftrightarrow \; d'By \leq d'Bx \quad , \forall d$

Tome ~~α~~ d t.q. $d^t B = c^t$

$\Rightarrow$ ~~d~~ $c^t y \leq c^t x$, para algum y.

Absurdo! Portanto x ponto extremo de Q implica $g(x)$ ponto extremo de P.

~~Os sinais, das duas~~

Dos dois resultados, podemos concluir que x é ponto extremo de P se e somente se $f(x)$ é ponto extremo de Q.

$\blacksquare$

data . .

(b) P e Q são isomorfos se e somente se existem ~~um~~ funções ~~afins~~ $f: P \to Q$ e $g: Q \to P$ t.q. $g(f(x)) = x \ \forall x \in P$ e $f(g(y)) = y \ \forall y \in Q$. funções afins.

Tome $f(x) = F_1 x + F_2(Ax - b)$

onde

$$F_1 = \begin{array}{c} \\ n \text{ linhas} \\ \\ k \text{ linhas} \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{n \text{ colunas}} \Bigg\} \ n+k \text{ linhas}$$

,

$$F_2 = \begin{array}{c} \\ n \text{ linhas} \\ \\ k \text{ linhas} \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}^{k \text{ colunas}} \Bigg\} \ n+k \text{ linhas}$$

Veja que se $z \in \mathbb{R}^k$ t.q. $\cancel{Ax - b = z}$

$$Ax - b = z$$

$$\Rightarrow f(x) = (x, Ax-b)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x, z)$$

Mas veja que se $x \in P \Rightarrow f(x) = (x, z) \in Q$.

Po.3 $(x, z) \in Q$

$\Leftrightarrow$ $Ax - z = b$, $x \geq 0$, $z \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $Ax - b = z$. De fato!

Agora tome $g(y) = G y$, onde

$$G = \text{N linhas}\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{N+K \text{ colunas}} \right.$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{N \text{ colunas}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{K \text{ colunas}}$$

Veja que se $y = (x, z)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^k$

$\Rightarrow$ $g(y) = g((x,z)) = x \in \mathbb{R}^n$

Note que se $y \in Q \Rightarrow g(y) \in P$, pois

$y = (x, z)$ t.q.

$$Ax - z = b \iff Ax = b + z, \quad x \geq 0, z \geq 0$$

$$\iff Ax \leq b$$

$$\Rightarrow x = g(y) = g(x, z) \in P$$

Agora veja que $g(f(x)) = g((x,z)) = x$,

$z \in \mathbb{R}^k$, $x \in P$, $(x,z) \in Q$

e $f(g(y)) = f(g((x,z))) = f(x) =$
$= (x,z) = y$.

$x \in P$, $z \in \mathbb{R}^k$

$y = (x,z) \in Q$

Portanto P e Q são isomorfos!