data . .

S T Q Q S S D

LS-OL [2.9 e 2.10]

2.9

(a) Sejam B_1, B_2 as bases que levam à mesma solução básica. Como são distintas, são formadas por uma lista distinta de colunas de A, linearmente independentes. Se x é a solução básica definida pela base B_1, então $x_i = 0$, para todo i fora dos índices definidos para a base B_1, mas como x também é solução básica definida por B_2, $x_j = 0$, para todo j fora dos índices da base B_2. Mas como B_1 e B_2 são distintas, definem ~~uma~~ listas distintas de índices, segue que x possui índices valendo 0 para algum índice das listas definidas por B_1 ou B_2. Ou seja, para B_1 ou B_2, algumas das variáveis básicas vale zero e x é, portanto, degenerada.

... x também é solução básica definida por B_2, $x_j = 0$, para todo j fora dos índices da base B_2. Mas como B_1 e B_2 são distintas, definem ~~...~~ listas distintas de índices, segue que x possui índices valendo 0 para algum índice das listas definidas por B_1 ou B_2. Ou seja, para B_1 ou B_2, alguma das variáveis básicas vale zero e x é, portanto, degenerada.

(b) Seja x a solução básica degenerada para uma base B_1. Portanto, para algum índice de B_1, a variável básica correspondente em x vale zero. ~~Suponha~~ Se podemos escolher uma base de índices B_2 tal que a variável básica valendo zero em x em B_1 seja não-básica, e que alguma das variáveis não-básicas de x em B_1 seja básica valendo zero em B_2, então teremos provado a afirmação.

Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, veja que as linhas de A são L.I.

Seja $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, formada pelas colunas L.I. 1 e 4 de A.

Veja que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é a solução básica definida por B_1, e que x é degenerada $\Rightarrow 3 \geq n - m = 4 - 2 = 2$ ~~...~~ variáveis de x valem zero.

No entanto, não é possível escolher uma outra lista de colunas L.I. de A, ou seja, não é possível formar uma base distinta ~~tal~~ para que x seja solução básica também. Ou seja, foi dado um contraexemplo para a afirmação.

(c) Pelo mesmo contraexemplo do item anterior, veja que não é possível escolher uma base de índices de colunas L.I. de A que não seja B_1, portanto não há bases adjacentes a B_1 e, portanto, não há soluções básicas adjacentes a x.

2.10

(b) Tome $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 5, x_2 \geq 0\}$

Se queremos minimizar x_1 sujeito a $x \in P$, note que há infinitas soluções ótimas, pois $\forall x_2 \geq 0$, $\begin{pmatrix} 5 \\ x_2 \end{pmatrix}$ é solução ótima. Veja, portanto, que o conjunto de soluções ótimas não é limitado!

(c) Tome $P = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \}$

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, queremos minimizar $c^t x$, sujeito a $x \in P$.

note que $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ é solução ótima, mas possui $2 = m+1$ variáveis positivas.

(S) (T) (Q) (Q) (S) (S) (D)

(d) Tome $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, ou seja, $x = (x_1, x_2, x_3) \in P$

$\iff x_1 = 0,\ x_2 + x_3 = 5$

Note que se tomarmos $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e quisermos

minimizar $c'x$ sujeito a $x \in P$, então há diversas soluções ótimas, em particular

$x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

no entanto, não há incontáveis soluções, pois $0 \leq x_2 \leq 5$, $0 \leq x_3 \leq 5$. Veja que se $x_2 > 5$, $x_2 + x_3 = 5 \iff x_3 < 0$, se $x_3 > 5$, $x_2 + x_3 = 5 \iff x_2 < 0$, em todo caso, $x \notin P$. Portanto, vemos que P é limitado, ou seja, não há infinitos elementos em P. Como o conjunto de soluções ótimas está contido em P, segue que não há infinitas soluções ótimas.

(e) Tome $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = b, x \geq 0\}$

$A = (1\ 0)$, $b = (5)$

ou seja, $x = (x_1, x_2) \in P$

$\Leftrightarrow x_1 = 5, \ x_2 \geq 0$

Se queremos minimizar x_1, note que há diversas soluções ótimas, a saber $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ldots$

No entanto, se buscarmos as soluções viáveis básicas de P, notamos que só é possível escolher uma base B de $m = 1$ coluna L.I. de A, e, portanto, só podemos definir uma solução viável básica de P, e, portanto, não é possível que existam duas soluções viáveis básicas de P que sejam soluções ótimas.

(f) Note que minimizar $\max\{c'x, d'x\}$ pode ser descrito como um problema de otimização linear, pois como $c'x$, $d'x$ são funções convexas, $\max\{c'x, d'x\}$ também é (Teorema 1.1). Assim sendo, se o problema possui pelo menos uma solução ótima, possui pelo menos uma solução viável básica que é solução ótima (Teorema 2.7). Como o problema está sujeito aos pontos de P, as soluções ótimas estão contidas em P, e também está seu ponto extremo.