华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：应用高等工程数学　　课程类别　☑公共课 ☐专业课　　考核形式　☐开卷 ☑闭卷

学生类别＿＿＿＿＿　考试日期 2023-12-08　学生所在院系＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿　任课教师＿＿＿＿＿

一、　选择题（本题共 6 小题，每题 3 分，满分 18 分，每小题四个选项中**只有一个正确**）

1. 设T为n维线性空间V上的线性变换。则下面哪个条件**不是**T可逆的充分必要条件？

   A. 存在V上的线性变换S，使得$S\cdot T=T\cdot S=I$（恒等变换）

   B. T有n个线性无关的特征向量

   C. T在V的一组基下的矩阵表示可逆

   D. T的所有特征值之积不为 0

2. 设A为n阶方阵，则下面哪个条件下A**不一定**可对角化？

   A. A的特征多项式无重根

   B. A的最小多项式无重根

   C. A为实对称

   D. $A^3=0$

3. 设$A=\begin{bmatrix} a & 5 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.用 Gauss-Seidel 方法求解线性方程组$Ax=b, a$取下面哪个值时收敛？

   A. $a=5$

   B. $a=0$

   C. $a=-1$

D. $a = 1$

4. 求解初值问题$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$的方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)$$

对于$f(x,y) = \lambda y$，以上方法的稳定性区域为（$\lambda < 0$）

A. $|1 + \lambda h + \lambda^2 h^2| < 1$

B. $\left|1 + \frac{\lambda h}{2} + \lambda^2 h^2\right| < 1$

C. $\left|1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right| < 1$

D. $\left|1 + \frac{\lambda h}{2} + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right| < 1$

5. 若$X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$为来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的独立样本，设$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$和$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$分别为样本均值和样本方差。则以下结论**不正确**的是

A. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

B. $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

C. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

D. $\frac{(X_1 - \bar{X})}{\sqrt{S^2}} \sim t(n-1)$

6. 设一批零件的加工误差服从均值为 0，方差σ^2未知的正态分布。从中抽取n个样品，加工误差为$X_1, \dots, X_n$。设样本均值和样本方差分别为$\bar{X}, S^2$。则下面哪个统计量**不是**σ^2的无偏估计？

A. S^2

B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

C. $\bar{X}^2$

D. X_1^2

二、 填空题（本题共 6 小题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 若给定 $f(0)=0, f(0.5)=-0.25, f'(0.5)=-1.75, f(1)=3$，求 $f(x)$的三次 Hermite 插值多项式________________。

2. 矩阵$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 7\end{bmatrix}$的一个满秩分解为________________。

3. 矩阵$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$的 2-条件数为________________。

4. 求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{2}{3}f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(\frac{\sqrt{2}}{2})$的代数精度为____________。

5. $\cos x$在$[0,\pi]$上的一次最佳平方逼近多项式为________________。

6. 总体服从参数λ的指数分布，密度函数为$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$。设有容量为$n$的样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$，则参数$\lambda$的极大似然估计为________________。

三、 解答题（本题共 6 小题，满分 64 分）

1. （10 分）已知 3 维线性空间V上的线性变换T在V的一组基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

设

$$\begin{cases}\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2\\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3\\ \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3\end{cases}.$$

a. 证明$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$是$V$的一组基。

b. 求T在$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$下的矩阵表示。

2. （12分）设矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a. 求A的 Jordan 标准型；

b. 计算矩阵函数e^{At}。

3. （10分）已知数据$(x_i, y_i), i = 0,1,2,3$如下表所示

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	1	1	2

试用二次多项式$p(x) = ax^2 + bx + c$ 最小二乘拟合这些数据，并计算平方误差: $\sum_{i=0}^{3}(p(x_i) - y_i)^2$.

4. （10分）分别用二点 Gauss-Legendre 求积公式和 Gauss-Chebyshev 求积公式计算积分

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}\, dx$$

5. （10分）考虑方程$\sqrt{x} - \cos\frac{x}{2} = 0$.

a. 证明该方程在$(0, \frac{\pi}{2})$上有实根；

b. 分析迭代格式$x_{n+1} = \left(\cos\frac{x_n}{2}\right)^2, n = 0,1,2, \ldots$的收敛性，其中$x_0$为$(0, \frac{\pi}{2})$上的任意一点。

6. （12 分）已知 23 级男生入学时的体能测试得分服从正态分布 $N(\mu_0,\sigma_0^2)$，其中$\mu_0=60,\sigma_0^2=225$。经过一学期的锻炼后，抽取 100 名男生进行测验，得到样本均值$\bar{X}=64$，样本方差 S^2 =256。依然假设得分服从正态分布。试问：

a. 在显著性水平 0.05 下，男生的体测得分的均值有否**增加**？

b. 在显著性水平 0.05 下，男生的体测得分的方差有否**改变**？

（附可能用到的上侧分位点）

表 1：正态分布上侧分位点z_α

α	0.05	0.025
	1.6449	1.9600

表 2：t 分布上侧分位点$t_\alpha(n)$

n \ α	0.05	0.025
99	1.6604	1.9842
100	1.6602	1.9840

表 3：χ^2分布上侧分位点$\chi_\alpha^2(n)$

n \ α	0.975	0.95	0.05	0.025
99	73.3611	77.0463	123.2252	128.4220
100	74.2219	77.9295	124.3421	129.5612