第一章　线性规划

（Linear Programming）

线性规划是运筹学中最基本和有代表性的内容，其理论方法体系相对成熟完整，在实际中有广泛的应用。本章将介绍线性规划的问题与模型建立、模型的解的概念和求解原理、求解方法、线性规划的对偶理论和灵敏度分析、运输问题以及 0-1 规划。

1.1 模型与图解法

1.1.1 线性规划问题及其数学模型

1．线性规划的问题

在生产管理和经营活动中经常需要解决：如何合理地利用有限的资源，以得到最大的效益。

例 1.1 某工厂可生产甲、乙两种产品，需消耗煤、电、油三种资源。有关数据如表 1.1 所示：

表 1.1 例 1.1 的数据表

资源单耗 产品 资源	甲	乙	资源限量
煤（t）	9	4	360
电（kW•h）	4	5	200
油（t）	3	10	300
单位产品价格（万元）	7	12	

试拟订使总收入最大的生产方案。

2．线性规划的模型

通过线性规划求解该问题，需明确线性规划模型的三要素：

（1）决策变量：需决策的量，即待求的未知数；

本例中即甲、乙产品的计划产量，记为 x_1、x_2

（2）目标函数：需优化的量，即欲达的目标，用决策变量的表达式表示；

本例中即总收入，记为 z，则 $z=7x_1+12x_2$，为体现对其追求极大化，在 z 的前面冠以极大号 Max；

（3）约束条件：为实现优化目标需受到的限制，用决策变量的等式或不等式表示；

本例中即分别来自资源煤、电、油限量的约束，和产量非负的约束，表示为

$$s.t.\begin{cases}9x_1+4x_2\le 360\\4x_1+5x_2\le 200\\3x_1+10x_2\le 300\\x_1,x_2\ge 0\end{cases}\tag{1-1}$$

所以，该问题的最终模型为

$$
\begin{aligned}
&Max z = 7x_1 + 12x_2 \\
&s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-2}
$$

注：线性规划模型的一个基本特点：目标和约束均为变量的线性表达式。

如果模型中出现如 $x_1^2 + 2\ln x_2 - \dfrac{1}{x_3}$ 的非线性表达式，则属于非线性规划。

例 1.2 某市今年要兴建大量住宅,已知有三种住宅体系可以大量兴建，各体系资源用量及今年供应量见表 1.2：要求在充分利用各种资源条件下使建造住宅的总面积为最大(即求安排各住宅多少 m2)，求建造方案。

解：设今年计划修建砖混、壁板、大模住宅各为 x_1, x_2, x_3 m^2, z 为总面积，则本问题的数学模型为:

$$
\begin{aligned}
&Max z = x_1 + x_2 + x_3 \\
&s.t\begin{cases} 0.105x_1 + 0.135x_2 + 0.120x_3 \le 110000 \\ 0.012x_1 + 0.030x_2 + 0.025x_3 \le 20000 \\ 0.110x_1 + 0.190x_2 + 0.180x_3 \le 150000 \\ 0.210x_1 \le 147000 \\ 0.0045x_1 + 0.003x_2 + 0.0035x_3 \le 4000 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

注：前苏联的尼古拉也夫斯克城住宅兴建计划采用了上述模型，共用了 12 个变量，10 个约束条件。

表 1.2　例 1.2 的数据表

资源 / 住宅体系	造价 (元/m2)	钢材 (公斤/m2)	水泥 (公斤/m2)	砖 (块/m2)	人工 (工日/m2)
砖混住宅	105	12	110	210	4.5
壁板住宅	135	30	190	——	3.0
大模住宅	120	25	180	——	3.5
资源限量	110000 (千元	20000 (吨)	150000 (吨)	147000 (千块)	4000 (千工日)

练习 1.1 某畜牧厂每日要为牲畜购买饲料以使其获取 A、B、C、D 四种养分。市场上可选择的饲料有 M、N 两种。有关数据如表 1.3：

表 1.3　练习 1.1 的数据表

饲料	售价	每公斤含营养成分			
		A	B	C	D
M	10	0.1	0	0.1	0.2
N	4	0	0.1	0.2	0.1
牲畜每日每头需要量		0.4	0.6	2.0	1.7

试决定买 M 与 N 二种饲料各多少公斤而使支出的总费用为最少？

解：设购买 M、N 饲料各为 x_1、x_2，则线性规划模型为:

$$
\begin{aligned}
&Min\ z = 10x_1 + 4x_2 \\
&s.t.\begin{cases} 0.1x_1 + 0x_2 \ge 0.4 \\ 0x_1 + 0.1x_2 \ge 0.6 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 \ge 2.0 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \ge 1.7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1-4}
$$

3．线性规划模型的一般形式

以 MAX 型、≤约束为例

决策变量：$x_1, \cdots, x_n$

目标函数：$Maxz = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

约束条件：$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}$

模型一般式的矩阵形式

记 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T, C = (c_1, \cdots, c_n), A = (a_{ij})_{m\times n}, b = (b_1, \cdots, b_m)^T$

则模型可表示为

$$
\begin{aligned}
&Maxz = CX \\
&s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1-5}
$$

回顾例 1.1 的模型，其中 $X = (x_1, x_2)^T$ 表示决策变量的向量；$C = (7,12)$ 表示产品的价格向量；$b = (360,200,300)^T$ 表示资源限制向量；$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ 表示产品对资源的单耗系数矩阵。

一般地，式(1-5)中 X 称为决策变量向量，C 称为价格系数向量, A 称为技术系数矩阵,b 称为资源限制向量。

问题：为什么 A 称为技术系数矩阵？

1.1.2 线性规划模型的图解法

图解法是用画图的方式求解线性规划的一种方法。它虽然只能用于解二维（两个变量）的问题，但其主要作用并不在于求解，而是在于能够直观地说明线性规划解的一些重要性质。

1.图解法的步骤

（1）做约束的图形

先做非负约束的图形；再做资源约束的图形。其公共部分称为可行域。

以例 1.1 为例，其约束为

$$
s.t\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1-6}
$$

该约束中的每个不等式表示一个半平面，其公共部分即为可行域，如图 1.1 的阴影部分所示。

（2）做目标的图形

做目标函数的等值线 $7x_1+12x_2=k$（如图 1.1 的虚线所示），将其向增大方向平移，直至可行域的边界为止，这时其与可行域的“切”点 X*即最优解。

求解交出 X^*的二约束直线联立的方程 $\begin{cases}4x_1+5x_2=200\\3x_1+10x_2=300\end{cases}$ 可解得 $X^*=(20,24)^T$。将其代入目标函数求得相应的最优目标值 $z^*=428$。

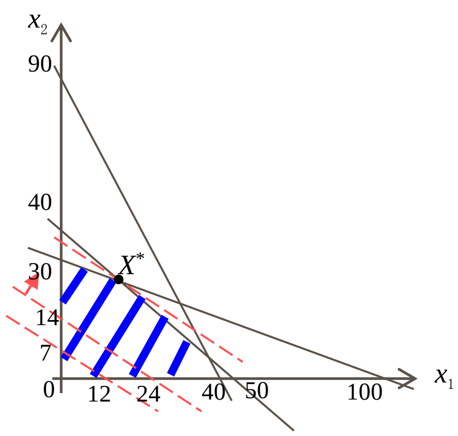

图 1.1　例 1.1 图解法示意图

练习 1.2 用图解法求解下面的线性规划。

$$
\begin{aligned}
&Minz=6x_1+4x_2\\
&s.t.\begin{cases}2x_1+x_2\geq 1\\3x_1+4x_2\geq 1.5\\x_1,x_2\geq 0\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-7}
$$

解：画图如图 1.2 所示，可求得

$X^*=(0.5,0)^T,z^*=3$

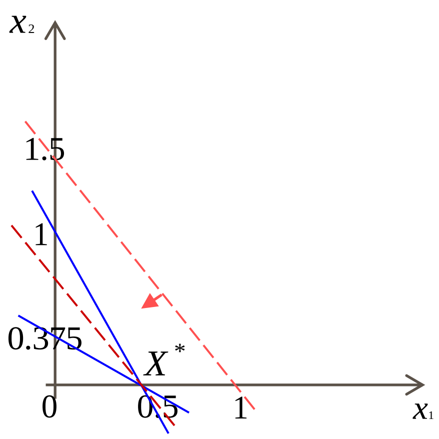

图 1.2　练习 1.2 的图解法示意图

2. 由图解法得到线性规划解的一些特性

（1）线性规划的约束集（即可行域）是一个凸多面体。

凸多面体是凸集的一种。所谓凸集是指：集中任两点的连线仍属此集。

例 1.3 试判断下面的图形是否凸集：

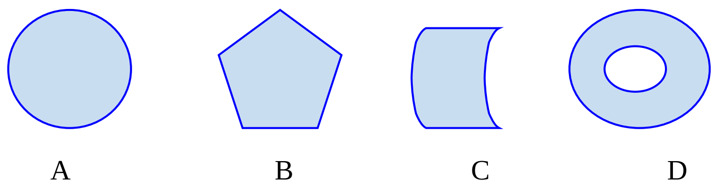

图 1.3 凸集的判断

解：A、B 是凸集，C、D 不是凸集。

凸集中的“极点”，又称顶点或角点，是指它属于凸集，但不能表示成集中某二点连线的内点。如多边形的顶点。

（2）线性规划的最优解（若存在的话）必能在可行域的角点获得。

因为，由图解法可知，只有当目标直线平移到边界时，才能使目标 z 达到最大限度的优化。

问题：本性质有何重要意义？

—— 它使得在可行域中寻优的工作由“无限”上升为“有限”，从而为线性规划的算法设计提供了重要基础。

（3）线性规划解的几种情形

线性规划一共有四种解的情况，如图 1.4 所示。

① 唯一最优解 ② 多重最优解 ③ 无解 ④ 无有限最优解（无界解）

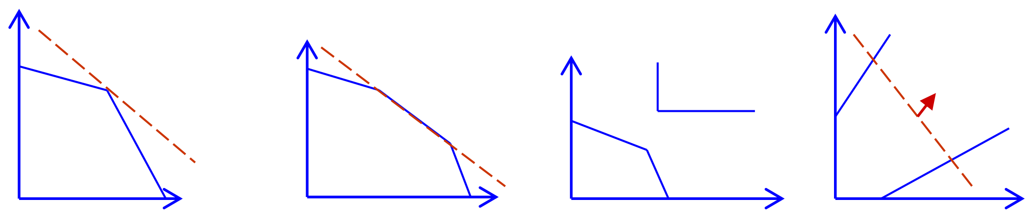

图 1.4 线性规划解的四种情形

1.1.3 线性规划应用举例

例 1.4 （下料问题） 某工厂要做 100 套钢架，每套用长为 2.9 m,2.1 m,1.5 m 的圆钢各一根。已知原料每根长 7.4 m，问：应如何下料，可使所用原料最省？

解： 共有 8 种下料方案，如表 1.4 所示。

表 1.4 下料方案表

方案	方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	方案 5	方案 6	方案 7	方案 8
2.9 m	2	1	1	1	0	0	0	0
2.1 m	0	2	1	0	3	2	1	0
1.5 m	1	0	1	3	0	2	3	4

合计	7.3	7..1	6.5	7.4	6.3	7.2	6.6.	6.0
剩余料头	0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 分别为上述 8 种方案下料的原材料根数，建立如下的 LP 模型：

$$
\begin{aligned}
& Min\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\
& s.t.\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\
2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 100 \\
x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 = 100 \\
x_i \geq 0 (i = 1,2,\cdots,8)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-8}
$$

1.2 单纯形法

单纯形法是求解线性规划的主要算法，1947 年由美国斯坦福大学教授丹捷格（G.B. Dantzig）提出。

尽管在其后的几十年中，又有一些算法问世，但单纯形法以其简单实用的特色始终保持着绝对的“市场”占有率。

1.2.1 单纯形法的预备知识

1.线性规划的标准型

用单纯形法求解线性规划的前提是先将模型化为标准型：

$$
\begin{aligned}
& Max z = CX \\
& s.t.\begin{cases}
AX = b \\
X \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-9}
$$

其中，$A_{m\times n}$的秩为m（$m \leq n$),$b \geq 0$。

标准型的特征：Max 型、等式约束、非负约束

问题：非标准形式如何化为标准

（1）Min 型化为 Max 型

$$\text{Min } z = CX \xrightarrow{\text{加负号}} Max\ z' = -CX$$

注意： Min 型化为 Max 型求解后，最优解不变，但最优值差负号。

（2）不等式约束化为等式约束

分析：以例 1.1 中煤的约束为例

$9x_1 + 4x_2 \leq 360$之所以“不等”是因为左右两边有一个差额，称为“松弛量”，若在左边加上这个松弛量，则化为等式。而这个松弛量也是变量，记为 x_3，则有 $9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360$。

x_3 称为松弛变量。问题：它的实际意义是什么？—— 煤资源的“剩余”。

练习 1.3 请将例 1.1 的约束化为标准型

$$Maxz = 7x_1 + 12x_2$$
$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1-10}$$

解：增加松弛变量 x_3, x_4, x_5, 则约束化为

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 & & = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 & + x_4 & = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 & & + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases} \tag{1-11}$$

易见，增加的松弛变量的系数恰构成一个单位阵 I。

一般地，记松弛变量的向量为 X_s，则

$$s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \longrightarrow s.t.\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \ge 0 \end{cases}$$

$$s.t.\begin{cases} AX \ge b \\ X \ge 0 \end{cases} \longrightarrow s.t.\begin{cases} AX - IX_s = b \\ X, X_s \ge 0 \end{cases}$$

问题：松弛变量在目标中的系数为何？—— 0。

（3）当模型中有某变量 x_k 没有非负要求，称为自由变量，则可令 $x_k = x_k' - x_k'', x_k', x_k'' \ge 0$，化为标准型。

2. 基本概念

（1）可行解与最优解

可行解：满足全体约束的解，记为X；

最优解：可行解中最优的，记为X^*,则对任可行 解X，有$CX \le CX^*$。

直观上，可行解是可行域中的点，是一个可行的方案； 最优解是可行域的角点，是一个最优的方案。

（2）基矩阵与基变量

基矩阵(简称基)：系数阵 A 中的 m 阶可逆子阵，记为 B；其余部分称为非基矩阵，记为 N。

基向量：基 B 中的列；其余称非基向量。

基变量：与基向量 P_j 对应的决策变量 x_j，记其组成的向量为 X_B；与非基向量对应的变量称非基变量，记其组成的向量为 X_N。

例 1.5 下面为某线性规划的约束

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 & + x_4 = 3 \\ x_1, \cdots, x_4 \ge 0 \end{cases} \tag{1-12}$$

请例举出其基矩阵和相应的基向量、基变量。

解：本例中，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A$中的2阶可逆子阵有

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其相应的基向量为$P_3, P_4$,基变量为$x_3, x_4$，$X_{B_1} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

$B_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$,其相应的基向量为$P_1,P_2$,基变量为$x_1,x_2$,$X_{B_2}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$。

问题：本例的 A 中一共有几个基？—— 6 个。

一般地，$m\times n$ 阶矩阵 A 中基的个数最多有多少个？—— C_n^m个。

（3）基本解与基本可行解

当A中的基B取定后，不妨设B表示A中的前m列，则可记$A=(B \quad N)$,相应地

$X=(X_B \quad X_N)^T$,约束中的$AX=b$可表示为$(B \quad N)\begin{pmatrix}X_B\\ X_N\end{pmatrix}=b$,即$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$,

当取$X_N=0$时，有$X_B=B^{-1}b$, $X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$.

称$AX=b$的解$X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$为线性规划的一个基本解；

可见：一个基本解是由一个基决定的。

注意：基本解仅是资源约束的解，并未要求其非负，因此其未必可行。

称非负的基本解为基本可行解（简称基可行解）。

例 1.6 在上例中$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3 \quad =1\\ 2x_1-x_2 \quad +x_4=3\\ x_1,\cdots,x_4\ge 0\end{cases}$，求相应于基 B_1 和 B_2 的基本解，它们是否基本可行解？

解： $B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B_1^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$,

相应于基B_1的基本解为$X=(0,0,1,3)^T$,是基本可行解。

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B_2^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}, B_2^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{5}\\ -\frac{1}{5}\end{bmatrix},$$

相应于基B_2的基本解为$X=(\frac{7}{5},-\frac{1}{5},0,0)^T$,不是基本可行解。

上二组概念间的联系：

系数阵 A 中可找出若干个基 B ，每个基 B 都对应于一个基本解，非负的基本解就是基本可行解。几种解之间的关系如图 1.5 所示。

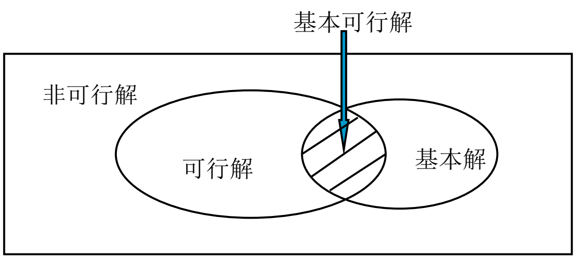

图 1.5 基本解、可行解和基本可行解的关系

问题：基本可行解是可行域中的哪些点？

3. 基本定理

（1）线性规划的可行域是一个凸多面体。

（2）线性规划的最优解（若存在的话）必能在可行域的角点获得。

（3）线性规划可行域的角点与基本可行解一一对应。

1.2.2 单纯形法的步骤

单纯形法是一种迭代的算法，它的思想是在可行域的角点——基本可行解中寻优。由于角点是有限个，因此，算法经有限步可终止。如图 1.6 所示。

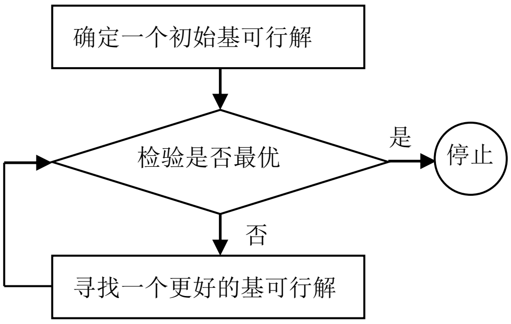

图 1.6　单纯形法步骤

1. 确定初始基可行解

由于基可行解是由一个可行基决定的，因此，确定初始基可行解 X0 相当于确定一个初始可行基 B0。

方法：若 A 中含 I，则 $B_0=I$；

若 A 中不含 I，则可用人工变量法构造一个 I。

问题：若 B_0=I，则 X_0=？—— $X_0=\begin{pmatrix} B_0^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\ge 0$,可行。

2. 最优性检验

问题：用什么检验？—— 目标。

$$\text{而目标} z=CX=(C_B \quad C_N)\begin{pmatrix} X_b \\ X_N \end{pmatrix}=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)+C_NX_N$$
$$=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N$$

记$\sigma=C_N-C_BB^{-1}N$，则当$\sigma\le 0$时，当前基可行解为最优。

方法：计算每个变量x_j的检验数$\sigma_j=c_j-C_BB^{-1}P_j$,

若$\sigma_j\le 0$,则当前解为最优；否则非最优。

问题：非最优的特征为何？——至少有某个检验数$\sigma_k>0$。

3. 寻找更好的基可行解（基变换）

由于基可行解与基对应，即寻找一个新的基可行解，相当于从上一个基 B_0 变换为下一个新的基 B1，因此，本步骤也称为基变换。

基变换的原则$\begin{cases} \text{改善：} z_1>z_0 \\ \text{可行：} B_1^{-1}b\ge 0 \end{cases}$　变换的方法：（$P_1,\cdots,P_l,\cdots,P_k,\cdots,P_n$）

进基

出基

进基——保证“改善”——令$\sigma_k > 0$对应的P_k进基；

出基——保证“可行”—— 由$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \geq 0$可决定出基。

方法：令$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j > 0\}$对应的$P_k$进基；

$$令\theta_l = \min_i = \left\{ \theta_i = \frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_k)_i} \middle| (B^{-1}P_k)_i > 0 \right\}对应的P_l出基。$$

θ_i称作检验比。以例 1.1 为例，可按上述单纯形法的步骤求出其最优解，其大致的过程如下。

（1）先将模型化为标准型

$$Max z = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

(2) 确定初始基可行解、检验

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B_0^{-1}b = (360,200,300)^T, X_0 = (0,0,360,200,300)^T;$$

计算检验数确定进基向量为P_2，再计算检验比确定出基向量为P_5；

（3）换基、计算下一个基可行解、再检验，直至最优

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 10 \end{pmatrix}, B_1^{-1}b = (240,50,30)^T, X_1 = (0,24,240,50,0)^T;$$

计算检验数确定进基向量为P_1，再计算检验比确定出基向量为P_4；

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}, B_2^{-1}b = (84,20,24)^T, X_2 = (20,24,84,0,0)^T;$$

计算检验数均非正，当前解为最优。

问题：当模型规模较大时，计算量很大。事实上，单纯形法的实现是在单纯形表上完成的。

练习 1.4 对于下面的线性规划

$$\min z = -x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1-13}$$

（1）用图解法求解；

（2）将模型化为标准型；

（3）用单纯形法步骤求出其最优解，并指出求解过程中每一个基可行解相当于可行域的哪一个角点。

1.2.3 单纯形表

单纯形表是基于单纯形法的步骤设计的计算格式，是单纯形法的具体实现。

回顾单纯形法步骤

$$B_0 \to X_0 = \begin{pmatrix} B_0^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \to \sigma_j = c_j - C_{B_0} B_{B_0}^{-1} P_j \to \theta_i = \min_i \frac{(B_0^{-1}b)_i}{(B_0^{-1}P_k)_i} \to B_1$$

由该过程可以看出，单纯形法需要计算 $B^{-1}b$ 和 $B^{-1}A$，因此，单纯形表的主题内容是 $B^{-1}(b \quad A)$，而相邻两个 B 只有一列不同，故相邻两个 B^{-1} 可以通过初等行变换求得。由此设计了基于初等行变换迭代计算的单纯形表。

单纯形表的主要结构如表 1.5 所示。：

表 1.5　单纯形表的结构

	C
	X
$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
	σ

问题：第一张表的 B^{-1}=？——单位阵 I。

检验数的公式是什么？——$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j$。

$B^{-1}P_j$在哪里？——$B^{-1}A$中的第j列。

例 1.7 用单纯形法求解例 1.1

$$\begin{aligned} & Max z = 7x_1 + 12x_2 \\ & s.t. \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1-14}$$

解： 增加松弛变量 x_3, x_4, x_5,将模型化为标准型：

$$\begin{aligned} & Max z = 7x_1 + 12x_2 \\ & s.t. \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1-15}$$

问题：标准模型的 A 中是否含 I? ——松弛变量系数恰好构成 I。

该问题的初表如表 1.6 所示。

表 1.6 单纯形计算表

C_B	X_B	$B^{-1}b$	7	12	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	360	9	4	1	0	0	90
0	x_4	200	4	5	0	1	0	40

0	x_5	300	3	[10]	0	0	1	30
	σ		7	12	0	0	0	

其中检验数$\sigma_1 = c_1 - C_B B^{-1} p_1 = 7-(0\,0\,0)\begin{pmatrix}9\\4\\3\end{pmatrix} = 7;\ \theta_3 = \dfrac{360}{4} = 90$

"[ ] "中表示进基列与出基行的交叉元，下一张表将实行以它为主元的初等行变换（称高斯消去）。方法是：先将主元消成 1，再用此 1 将其所在列的其余元消成 0。如此迭代下去，直至所有检验数小于或等于零，由此得到表 1.7。

表 1.7 单纯形迭代计算表

C_B	X_B	$B^{-1}b$	7	12	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	240	7.8	0	1	0	-0.4	30.8
0	x_4	50	[2.5]	0	0	1	-0.5	20
12	x_2	30	0.3	1	0	0	0.1	100
	σ		3.4	0	0	0	-1.2	
0	x_3	84	0	0	1	-3.12	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	σ		0	0	0	-1.36	-0.52	

$X^* = (20,24,84,0,0)^T, z^* = 428.$（请解释其实际意义）

练习 1.5 用单纯形法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned} &Mins = -x_1 + 2x_2 \\ &s.t.\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1-16}$$

解： 增加松弛变量 x_3, x_4,将模型化为标准型：

$$\begin{aligned} &Maxz = x_1 - 2x_2 \\ &s.t.\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1-17}$$

然后列出单纯形表，求解过程如表 1.8 所示。

表 1.8 单纯形计算表

C_B	X_B	$B^{-1}b$	1	-2	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	2	-1	1	1	0	-
0	x_4	6	[1]	2	0	1	6
	σ		1	-2	0	0	
0	x_3	8	0	3	1	1	

1	x_1	6	1	2	0	1	
	σ		0	-4	0	-1	

$X^* = (6,\quad 0,\quad 8,\quad 0)^T$，$s^* = -6$

注：1. 表上每一列的含义：$B^{-1}(b, A) = (B^{-1}b, B^{-1}P_1, \cdots, B^{-1}P_n)$

2. 每张表上 B^{-1} 的位置在哪？——对应于初表中 I 的位置。

$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$，$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

表 1.9 给出了例 1.7 的单纯形表的分析。

表 1.9 单纯形表分析

C_B	X_B	$B^{-1}b$	7	12	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	360	9	4	1	0	0	90
0	x_4	200	4	5	0	1	0	40
0	x_5	300	3	[10]	0	0	1	30
	σ		7	12	0	0	0	
0	x_3	240	7.8	0	1	0	-0.4	30.8
0	x_4	50	[2.5]	0	0	1	-0.5	20
12	x_2	30	0.3	1	0	0	0.1	100
	σ		3.4	0	0	0	-1.2	
0	x_3	84	0	0	1	-3.12	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	σ		0	0	0	-1.36	-0.52	

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & -0.4 \\ & 1 & -0.5 \\ & & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3.12 & 1.16 \\ & 0.4 & -0.2 \\ & -0.12 & 0.16 \end{bmatrix}$$

例 1.8 填表：

表 1.10 单纯形表分析举例

C_B	X_B	$B^{-1}b$	7	12	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	360	9	4	1	0	0	90
0	x_4	200	4	5	0	1	0	40
0	x_5	300	3	[10]	0	0	1	30
	σ		7	12	0	0	0	
				…				
0	x_3	84	0	0	1	-3.12	1.16	
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2	
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.16	
	σ		0	0	0	-1.36	-0.52	

解： $B^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & -3.12 & 1.16\\ 0 & 0.4 & -0.2\\ 0 & -0.12 & 0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}360\\200\\300\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}84\\20\\24\end{bmatrix}$, $B^{-1}P_2=\begin{bmatrix}1 & -3.12 & 1.16\\ 0 & 0.4 & -0.2\\ 0 & -0.12 & 0.16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

练习 1.6 用单纯形法求解下面的线性规划

$$\begin{aligned}&Max z=2.5x_1+x_2\\ &s.t.\begin{cases}3x_1+5x_2\ \le 15\\ 5x_1+2x_2\le 10\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}\end{aligned} \tag{1-18}$$

解： 增加松弛变量 x_3,x_4,将模型化为标准型：

$$\begin{aligned}&Max z=2.5x_1+x_2\\ &s.t.\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3\qquad =15\\ 5x_1+2x_2\qquad +x_4=10\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ \ge 0\end{cases}\end{aligned} \tag{1-19}$$

计算过程如表 1.11 所示。

表 1.11　单纯形表练习

C_B	X_B	$B^{-1}b$	2.5	1	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	15	3	5	1	0	5
0	x_4	10	[5]	2	0	1	2
	σ_j		2.5	2	0	0	
0	x_3	9	0	3.8	1	-0.6	
2.5	x_1	2	1	0.4	0	0.2	
	σ_j		0	0	0	-0.5	

$B_0^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$,

$B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -0.6\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}$

$X^*=(2,\quad 0,\quad 9,\quad 0)^T$， $z^*=5$

问题：本题的单纯形终表检验数有何特点？

—— 非基变量 x_2 的检验数等于零。

注：（1）解的几种情况在单纯形表上的体现（Max 型）：

- 唯一最优解：终表非基变量检验数均小于零；
- 多重最优解：终表非基变量检验数中有等于零的；
- 无界解：任意表有正检验数相应的系数列均非正。

（2） Min 型单纯形表与 Max 型的区别仅在于：检验数反号，即

- 令负检验数中最小的对应的变量进基；

- 当检验数均大于等于零时为最优。

1．3 对偶问题与灵敏度分析

1.3.1 对偶问题及其模型

1.对偶问题

例 1.9 回顾例 1.1

$$
\begin{aligned}
&Max z = 7x_1 + 12x_2 \\
&s.t.\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 300 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-20}
$$

这时有另一家厂商提出要购买其煤、电、油全部资源，并希望花费尽量少。试建立购买者的线性规划模型。

解：设其购买三种资源的价格分别为 y_1, y_2, y_3，总花费为 w，则

$$
\begin{aligned}
&Min w = 360y_1 + 200y_2 + 300y_3 \\
&s.t.\begin{cases} 9y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 7 \\ 4y_1 + 5y_2 + 10y_3 \ge 12 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-21}
$$

例 1.9 称为例 1.1 的对偶问题，记为（D），例 1.1 称为例 1.9 的原问题,记为（P）。

2．对偶模型的一般式

以例 1.9 为例，原问题为

$$
(P)\quad \begin{aligned} &\max z = CX \\ &s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \end{aligned}
\tag{1-22}
$$

记 $Y = (y_1, y_2, y_3)$，则对偶问题为

$$
(D)\quad \begin{aligned} &\min w = Yb \\ &s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \end{aligned}
\tag{1-23}
$$

这是最常见的对偶模型形式，称为对称式对偶模型。二者间具有十分对称的对应关系，如表 1.12 所示。

表 1.12 原问题与对偶问题的对应关系（一）

原问题（P）	对偶问题（D）
目标 max 型	目标 min 型
有 n 个变量（非负）	有 n 个约束（大于等于）
有 m 个约束（小于等于）	有 m 个变量（非负）
价格系数	资源向量
资源向量	价格系数
技术系数矩阵	技术系数矩阵的转置

此外，还有一种情形，如表 1.13 所示。

表 1.13 原问题与对偶问题的对应关系（二）

原问题（P）	对偶问题（D）
第 j 个变量为自由变量	第 j 个约束为等式约束
第 i 个约束为等式约束	第 i 个变量为自由变量

例 1. 10 写出下面线性规划的对偶规划模型：

$$Maxz = 2x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \le 50 \\ -x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 \ge 0 \end{cases} \tag{1-24}$$

解：设对偶变量为 y_1, y_2, y_3，对偶目标为 w，则

$$\min w = 3y_1 + 5y_2 + y_3$$
$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 2 \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 = 3 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1-25}$$

1.3.2 对偶的性质

考虑 (P) $\quad \max z = CX \quad s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$ $\qquad (D)$ $\quad \min z = Yb \quad s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$

1．对称性 (P) 与 (D) 互为对偶。

2．弱的对偶性 设 X，Y 分别为（P），（D）的可行解，则 $CX \le Yb$。

证：由（P），（D）的约束可得 $C\ X \ \le YAX \le Yb$

几何意义：CX $\qquad$ Yb

3．解的最优性 若 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 分别是（P）与（D）的可行解，且 $C\bar{X} = \bar{Y}b$，则

$X^* = \bar{X}, Y^* = \bar{Y}$。

证：对任何可行解 X，由弱对称性，$CX \le \bar{Y}b = C\bar{X}$，故 $\bar{X} = X^*$。同理，$\bar{Y} = Y^*$。

例 1.11 设线性规划问题 1 为 $\begin{array}{l} Max\ z_1 = CX \\ s.t.\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \end{array}$，$Y^*$ 是其对偶问题的最优解：

又设线性规划问题 2 为 $\begin{array}{l} Max\ z_2 = CX \\ s.t.\begin{cases} AX \le b + k \\ X \ge 0 \end{cases} \end{array}$，其中 k 是已知常向量。

求证：$Maxz_2 \le Maxz_1 + Y^* k$ 。

证：问题 1 和问题 2 的对偶问题分别是

$$\text{(I)}\quad Min\ w_1 = Yb \qquad\qquad \text{(II)}\quad Min\ w_2 = Yb + k$$
$$s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t.\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

（I）与（II）的约束条件相同，故（I）的最优解Y^*是（II）的可行解。

由弱的对称性，$Maxz_2 \le Y^* b + Y^* k$，而由解的最优性，$Y^* b = Maxz_1$，得证。

4. 对偶定理　　若(P)有最优解，则(D)也有最优解，且最优值相同。

证：对(P)增加松弛变量Xs，化为

$$Max\ z = CX$$
$$s.t.\begin{cases} AX + IX_s = b \\ X, X_s \ge 0 \end{cases} \tag{1-26}$$

设其最优基为 *B*，终表如表 1.14 所示。

表 1.14 式(1-26)的终表

		C	0
		X	X_s
C_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$	$B^{-1}A$
		$C - C_B B^{-1} A$	$0 - C_B B^{-1} A$

其检验数为$\begin{cases} \sigma = C - C_B B^{-1} A \le 0 \\ \sigma_s = 0 - C_B B^{-1} I \le 0 \end{cases}$

取$\bar{Y} = C_B B^{-1}$，则$\bar{Y}$满足$\begin{cases} \bar{Y}A \ge C \\ \bar{Y} \ge 0 \end{cases}$，即$\bar{Y}$是（D）的可行解，且$\bar{Y}b = C_B B^{-1} b = z^*$

由性质 3，$\bar{Y} = Y^*$。

问题：

(1) 由性质 4 可知，对偶问题最优解的表达式 Y^* =?　—— CB^{-1}

(2) 求 *Y**是否有必要重新求解（D）? —— 不必。可以从原问题（P）的单纯形终表获得。

例如，在前面的练习 1.6 已知，

$$Max\ z = 2.5x_1 + x_2$$
$$s.t.\begin{cases}3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases} \tag{1-27}$$

的终表如表所示。

表 1.15 练习 1.6 的终表

0	x_3	9	0	$\frac{19}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$
2.5	x_1	2	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
			0	0	0	-0.5

请指出其对偶问题的最优解和最优值。

$$X^* = (2,\quad 0,\quad 9,\quad 0)^T,\ z^* = 5,\ Y^* = (0, 0.5),\ w^* = 5$$

5. 互补松弛定理　若 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 分别是 (P)、(D) 的可行解，则 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 是 (P)、(D) 最优解的充要条件是 $\overline{YX}_s = \bar{Y}_s\bar{X} = 0$。

证：将 (P)、(D) 的约束化为等式：$AX + IX_s = b$，$AX + IX_s = b$，

$\Rightarrow$ 因为 $\bar{X}$、$\bar{Y}$ 是最优解，所以 $C\bar{X} = \bar{Y}b$, 即 $(\bar{Y}A - \bar{Y}_s I)\bar{X} = \bar{Y}(A\bar{X} + I\bar{X}_s)$，而 $\overline{YX}_s, \bar{Y}_s\bar{X} \ge 0$，故只有 $\overline{YX}_s = \bar{Y}_s\bar{X} = 0$。

$\Leftarrow$（自证）。

直观上

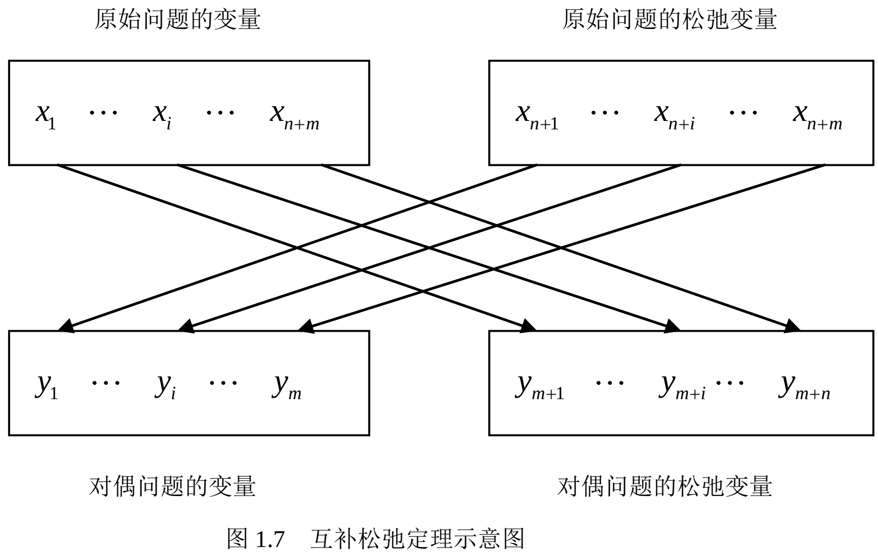

图 1.7　互补松弛定理示意图

$x_j y_{m+j}=0$，$y_i x_{n+i}=0$ $\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,\cdots)$

在一对变量中，其中一个大于 0，另一个一定等于 0。

6. 对偶问题的经济解释

（1）对偶最优解的经济解释——资源的影子价格（Shadow Price）

$C_B B^{-1}$：对偶问题的最优解——买主的最低出价；

原问题资源的影子价格——当该资源增加 1 单位时引起的总收入的增量；

——卖主的内控价格。

例 1.12 例 1.1（煤电油例）的单纯形终表如表 1.16 所示：

表 1.16 煤电油例的单纯形终表

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.1
$z^*=428$			0	0	0	-1.36	-0.52

1）请指出资源煤电油的影子价格，并解释其经济意义。

2）由单纯形终表还可得到哪些有用的信息？

解：1）煤、电、油的影子价格分别是 0、1.36、0.52；其经济意义是当煤、电、油分别增加 1 单位时可使总收入分别增加 0 、1.36、0.52。

2）由单纯形终表还可得到：原问题的最优生产计划、最大收入、资源剩余，对偶问题的最低购买价格、最少的购买费用等。

（2）对偶约束的经济解释——产品的机会成本（Opportunity Cost）

$$
\begin{array}{llcccccccc}
max & z= & c_1x_1 & +c_2x_2 & \cdots & +c_jx_j & \cdots & +c_nx_n & \\
s.t. & & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1j}x_j & \cdots & +a_{1n}x_n & \le b_1 \\
 & & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2j}x_j & \cdots & +a_{2n}x_n & \le b_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mj}x_j & \cdots & +a_{mn}x_n & \le b_m \\
 & & x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n & \ge 0
\end{array}
\qquad (1\text{-}28)
$$

机会成本 $a_{1j}y_1+a_{2j}y_2+\cdots+a_{ij}y_i+\cdots+a_{mj}y_m$ 表示减少一件产品所节省的资源可以增加的利润

（3）对偶松弛变量的经济解释——产品的差额成本（Reduced Cost）

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
\min & w= & b_1y_1 & +b_2y_2 & \cdots & +b_my_m & & & & & \\
s.t. & & a_{11}y_1 & +a_{21}y_2 & \cdots & +a_{m1}y_m & -y_{m+1} & & & & =c_1 \\
 & & a_{12}y_1 & +a_{22}y_2 & \cdots & +a_{m2}y_m & & -y_{m+2} & & & =c_2 \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\
 & & a_{1n}y_1 & +a_{2n}y_2 & \cdots & +a_{mn}y_m & & & & -y_{m+n} & =c_n \\
 & & y_1 & y_2 & \cdots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+n} & \ge 0
\end{array}
\qquad (1\text{-}29)
$$

$y_{m+j}=(y_1a_{1j}+y_2a_{2j}+\cdots+y_ma_{mj})-c_j=Y^Ta_j-c_j$

差额成本=机会成本 － 利润

（4）互补松弛关系的经济解释

$$
\begin{aligned}
&y_i x_{n+i}=0\begin{cases} y_i>0\Rightarrow x_{n+i}=0 \\ x_{n+i}>0\Rightarrow y_i=0 \end{cases} \\
&x_j y_{m+j}=0\begin{cases} x_j>0\Rightarrow y_{m+j}=0 \\ y_{m+j}>0\Rightarrow x_j=0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1-30}
$$

在利润最大化的生产计划中

1）影子价格大于 0 的资源没有剩余；

2）有剩余的资源影子价格等于 0；

3）安排生产的产品机会成本等于利润；

4）机会成本大于利润的产品不安排生产。

1.3.3 灵敏度分析

讨论模型的系数或变量发生小的变化时对解的影响（如它们在何范围内变化时可使原最优解或最优基不变？）

我们主要讨论 C、b 和变量结构变化时对解的影响。

对解怎样影响？—— 影响解的 - 最优性 $\sigma\le 0$

- 可行性 $B^{-1}b\ge 0$

1．b 变化时的分析

设第 r 种资源 b_r 变为 $b_r+\Delta b_r$，因为它只影响可行性，故只要变化后的 $\bar{b}$ 使得 $B^{-1}\bar{b}\ge 0$，则原最优基 B 不变。

只要由 $B^{-1}\bar{b}=B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r+\Delta b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\ge 0$ 解出 Δb_r 的范围即可。

2. C 变化时的分析

价格 c_j 变为 $c_j+\Delta c_j$ 时，只影响最优性，但要分两种情况讨论。

（1） c_j 是非基变量 x_j 的价格系数

因只检验自己的检验数，为 $\bar{\sigma}_j=c_j+\Delta c_j-C_B B^{-1}P_j$，故只要 $\bar{\sigma}_j\le 0$ 即可。

只需由 $\bar{\sigma}_j\le 0$ 解得 Δc_j 的范围。

（2）c_j 是基变量 x_j 的价格系数

这时要影响所有的检验数，$\bar{\sigma}_i=c_i-(c_1 \quad \cdots \quad c_i+\Delta c_i \quad \cdots \quad c_m)B^{-1}P$，应有所有的 $\bar{\sigma}_j\le 0$ 解得公共的 Δc_j。

3. 增加新变量时的分析

主要讨论增加新变量 x_{n+1} 是否有利。经济意义是第 n+1 种新产品是否应当投产，数学意义是 x_{n+1} 是否应进基。

方法：

计算 x_{n+1} 的检验数 $\sigma_{n+1}=c_{n+1}-C_B B^{-1}P_{n+1}$，

若 $\sigma_{n+1}>0$，则增加 x_{n+1}，即投产有利；

若 $\sigma_{n+1}\le 0$，则不增加 x_{n+1}，即投产无利。

经济意义：$\sigma_{n+1}=c_{n+1}-C_B B^{-1}P_{n+1}$

例 1.13 在例 1（煤电油例）中，其单纯形终表如表 1.17 所示：

表 1.17 煤电油例的单纯形终表

0	x_3	84	0	0	1	-0.32	1.16
7	x_1	20	1	0	0	0.4	-0.2
12	x_2	24	0	1	0	-0.12	0.1
$z^*=428$			0	0	0	-1.36	-0.52

（1）电的影子价格是多少？使最优基仍适用的电的变化范围为何？

（2）若有人愿以每度 1 元的价格向该厂供应 25 度电，是否值得接受？

（3）甲产品的价格在何范围内变化时，现最优解不变？

（4）若现又考虑一新产品丙，其资源单耗为 10，2，5，售价为 6.5，问该产品是否可投产？

解：（1）电的影子价格是 1.36。

由 $B^{-1}\begin{pmatrix}360\\200+\Delta b_2\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\20\\24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3.12\\0.4\\-0.12\end{pmatrix}\Delta b_2\ge 0$ 解得

$-50\le\Delta b_2\le 26.92$，即使原最优基 B 仍适用的范围。

（2）值得。

因 25 在 B 的适用范围内（即影子价格适用），且 1.36-1.00>0。

（3）甲产品的价格 c_1 是基变量的价格系数。

由 $\bar{\sigma}_4=0-\begin{pmatrix}0 & 7+\Delta c_1 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3.12\\0.4\\-0.12\end{pmatrix}=-2.8-0.4\Delta c_1+1.44\le 0$ 得 $\Delta c_1\ge -3.4$,

由 $\bar{\sigma}_5=0-\begin{pmatrix}0 & 7+\Delta c_1 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.16\\-0.2\\0.16\end{pmatrix}=1.4+0.2\Delta c_1-1.92\le 0$ 得 $\Delta c_1\le 2.6$,

故使 X^* 不变的 c_1 的变化范围为：$-3.4 \le \Delta c_1 \le 2.6$。

（4）因为 $\sigma_{丙} = 6.5 - \begin{pmatrix} 0 & 1.36 & 0.52 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 6.5 - 5.32 > 0$

故丙产品可以投产

首先将线性规划与经济问题联系起来的是 T.G.Koopman（库普曼）

和 L.V.Kamtorovich（康脱罗维奇），二人因此而共同分享了 1975 年的第 7 届诺贝尔经济学奖。

求解线性规划的计算机软件举例——LINDO、EXCEL

LINDO 可以从下面的网址下载：WWW.Lindo.com

LINDO 由美国芝加哥大学开发，可求解线性规划和线性整数规划等。其可按自然格式输入模型，使用方便。

输入例　：MAX　2X+3Y

```
? ST
? 4X+9Y<9
? 7X+6Y<13
? END
: GO
DO   RANGE (SENSITIVITY)   ANALYSIS?
? Y
```

可用 HELP 命令得到帮助。

计算结果说明：

REDUCED　COST　　为使该变量进基，其价格系数至少应增加的数值；

SLACK　OR　SUPLUS　　松弛或剩余变量；

DUAL　PRICES　　影子价格;

ALLOWABLE　INCREASE　　灵敏度分析中可使最优基不 变的系数可增量之上界；

ALLOWABLE　DECREASE　　灵敏度分析中可使最优基不变的系数可减量之上界：

使用 EXCEL 求解线性规划

-进入 EXCEL 后先在表格的第一列输入变量、约束和目标的名称，在后面某一列对应位置输入约束和目标的表达式(前加等号提示符)；

-然后在工具中调用规划求解，按提示操作。

（可参看关于使用 EXCEL 的书，如谢国锋等，《EXCEL2000 中文版入门与提高》，清华大学出版社，1999）

1．4 运输问题

在经济建设中，经常碰到物资调拨中的运输问题。例如 煤、钢材、粮食、木材等物资，在全国都有若干生产基地，分别将这些物资调到各消费基地去，应如何制定调运方案，使总的运输费用最少？

1.4.1 运输问题的一般提法

1. 产销平衡问题

已知：m 各产地 A_1,……，A_m，产量分别为：$a_1, \cdots, a_m$，

n 个销售地 $\mathrm{B}_1, \ldots\ldots, \mathrm{B}_\mathrm{n}$，销量分别是：$b_1, \ldots\ldots, b_\mathrm{n}$，

产销平衡，即 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$，由 $\mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_j$ 的运价为 c_{ij}。

问：应如何调运使总运费最省？即求 $\mathrm{A}_i \to \mathrm{B}_j$ 的运量 x_{ij}，使运费可达极小化。

2. 产销不平衡问题

此时分为两种情形来考虑：

供不应求：即产量小于销量时有 $\sum_{1}^{m} a_i < \sum_{1}^{n} b_j$；

供过于求：即产量大于销量时有 $\sum_{1}^{m} a_i < \sum_{1}^{n} b_j$

这两种形式都可以转化为 $\sum a_i = \sum b_j$ 的形式来求解

1.4.2 运输问题的模型

产销平衡问题模型

$$\boldsymbol{MinZ = \sum_{1}^{m} a_{ij} \sum_{1}^{n} x_{ij}}$$

$$Min\ z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1, \cdots, n \\ x_{ij} \geq 0 & \end{cases} \tag{1-31}$$

将约束方程式展开可得

$$\begin{cases} x_{11} + \cdots + x_{1n} & & & = a_1 \\ & x_{21} + \cdots + x_{2n} & & = a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & x_{m1} + \cdots + x_{mn} & = a_m \\ x_{11} + & x_{21} + \cdots & x_{m1} & = b_1 \\ \quad x_{12} + & x_{22} + \cdots & x_{m2} & = b_2 \\ \quad \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \quad\quad x_{1n} + & x_{2n} + \cdots & x_{mn} & = b_n \end{cases} \tag{1-32}$$

约束方程式中共 $m \times n$ 个变量，$m + n$ 个约束，上述模型是一个线性规划问题。但是其结构很特殊，特点如下：

1. 变量多（$m \times n$ 个），但结构简单。

$$
技术系数矩阵 A=\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & 1 & & & \cdots & 1 & & \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & 1 & & & 1 & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

2. $m+n$ 个约束中有一个是多余的（因为其间含有一个平衡关系式 $\sum a_i = \sum b_j$ ），所以，R(A)= $m+n-1$，即解的 $m \times n$ 个变量中基变量为 $m+n-1$ 个。

1.4.3 运输问题的解法

运输问题仍然是线性规划问题，可以用线性规划法中的单纯形法来解决。

但是：（一）运输问题所涉及的变量多，造成单纯形表太大；（二）若把技术系数矩阵 A 中的 0 迭代成非 0，会使问题更加复杂。

以上两个原因使得我们不得不利用运输问题的特点设计出它的特殊解法——表上作业法。

表上作业法，实质上还是单纯形法。其步骤如下：

（1） 确定一个初始可行调运方案。可以通过最小元素法、西北角法、Vogel 法来完成；

（2） 检验当前可行方案是否最优，常用的方法有闭回路法和位势法，用这两种方法计算出检验数，从而判别方案是否最优；

（3）方案调整，从当前方案出发寻找更好方案，常采用闭回路法。

1. 运输问题的常用解法

最小元素法（确定初始方案）→闭回路法（检验当前方案）→闭回路法（方案调整）以下面例题说明这种方法的具体步骤：

例 1.14 某食品公司下设 3 个加工厂 A_1，A_2，A_3，和 4 个门市部 B_1，B_2，B_3，B_4。各加工厂每天的产量、各门市部每天的销售量以及从各加工厂到各门市部的运价如表 1.18 和 1.18 所示。问：该公司应如何调运，在满足各门市部销售需要的情况下，使得运费支出为最少？

表 1.18　产销平衡表　　　　单位：吨

门市部 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1					7
A_2					4
A_3					9
销量	3	6	5	6	20

表 1.19 单位运价表　　单位：元/吨

门市部 / 加工厂	B_1	B_2	B_3	B_4

A_1	3	11	3	10
A_2	1	9	2	8
A_3	7	4	10	5

解：（1）确定初始方案

(最小元素法基本思想：就近供应，即从单位运价表上最小的运价开始确定产销关系，以此类推，直到给出初始方案为止)

①从运价表上找出最小运价 $C_{21}=1$， A_2 先保证供应 B_1，$X_{21}=3$，划去运价表上 B_1 列；

②再从运价表上其余元素中找到最小的运价 $C_{23}=2$,加工厂 A_2 应供给 B_3,$X_{23}=1$，划去 A_2 行；

③再从运价表上其余元素中找到最小的运价 $C_{13}=3$,所以 A_1 先保证供应 B_3,B_3 尚缺 4 单位，因此 $X_{13}=4$，划去 B_3 列。

以此类推，得到一初始方案，如表 1.20 所示：

$X_{21}=3$，$X_{32}=6$，$X_{13}=4$，$X_{23}=1$，$X_{14}=3$，$X_{34}=3$（有数格）

$X_{11}=X_{31}=X_{12}=X_{22}=X_{33}=X_{24}=0$（空格）

表 1.20 运输问题初始方案

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1			4	3
A_2	3		1	
A_3		6		3

注：（ⅰ）有数格是基变量，共 $m+n-1$=3+4-1=6 个。空格是非基变量，共划去 $m+n=7$ 条线；

（ⅱ）如果填上一个运量之后能同时划去两条线（一行与一列），就须在所划去的该行或该列填一个 0，此 0 格当有数个对待。

初始方案运费 $Z_0=3\times1+6\times4+4\times3+1\times2+3\times10+3\times5=86$(元)

（2） 检验（闭回路法:计算空格的检验数）

①找出任意空格的闭回路—除此空格外，其余顶点均为有数格。如可找

（ A_1B_1）→（A_1B_3） →（A_2B_3）→（A_2B_1）；

②计算出空格的检验数—等于闭回路上由此空格起奇数顶点运价与偶数顶点运价的代数和。如 $\sigma_{11}=c_{11}-c_{13}+c_{13}-c_{21}=3-3+2-1$;

③计算出此空格的检验数 σ_{ij}，若 $\sigma_{ij}\geq0$，则该方案为最优方案，否则转 3；

注：检验数的经济意义，以 σ_{11} 为例，空格表示原方案中 $X_{11}=0$，即 $A_1\to B_1$ 的运输量为 0。若试着运 1 单位，则这样所引起的总费用的变化恰是 σ_{11}，可见检验数 σ_{ij} 的意义是:$A_i\to B_j$ 增运 1 单位所引起的总费用的增量。$\sigma_{ij}>0$，说明若增运一单位，在总运输量不变情况下，总运费会增加。此时不应在 $A_i\to B_j$ 上增运。

（3）调整

从σ_{ij}为最小负值的空格出发，对其闭回路上的奇数顶点运量增加 θ，偶数顶点的运量减少 θ(这才能保证新的平衡)，其中 θ为该空格闭回路中偶数顶点的最小值。

$\because \sigma_{24} < 0$，

$\therefore$ 从（A_2 B_4）出发其闭回路上 θ=1，调整后得到一个新方案（如表 1.21 所示），运量为 θ=1 的（A_2B_3）变空格，得到新方案后再转(2)。

表 1.21 运输问题新方案

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1			5	2
A_2	3			1
A_3		6		3

经再计算新方案的检验数全部大于 0。所以，该新方案为最优方案，可计算得总运费为 85 元。

注：若闭回路的偶数顶点中同时有两个格以上运量为 θ，则调整后其中一个变空格，其余填 0。（保证基变量个数不变）

2. 运输问题的其它解法简介

（1）确定初始方案的方法之二—西北角法

仍以例 1.14 为例(如表)，其原则是每次均考虑西北角位置，初始方案的运费为

$$3\times3+4\times\ 11+2\times9+2\times2+3\times10+6\times5=135>86$$

表 1.22 西北角法求初始方案

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3 [3]	4 [11]	[3]	[10]	7
A_2	[1]	2 [9]	2 [2]	[8]	4
A_3	[7]	[4]	3 [10]	6 [5]	9
销量	3	6	5	6	20

显然，由于它仅考虑地理位置而不考虑运价，其效果不如用最小元素法好。

（2）确定初始方案的方法之三——伏格尔法（Vogel 法）

①求各行各列运价最小与次小之差额，选其中最大的行或列中最小运价进行供应；

②如果某一行或某一列按照这种方法已被供应满，则划去该行或该列，在剩下的行列中重复这种方法，即得最优方案。

表 1.23 伏格尔法求初始方案

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	[3]	[11]	5 [3]	2 [10]	0.7
A_2	3 [1]	[9]	1 [2]	[8]	1.6
A_3	[7]	6 [4]	3 [10]	3 [5]	2

销量	2	5	1	3.2	
求	3	6	5	6	

如上图，一步即可得最优解。

（3） 求空格检验数的方法之二—位势法

原理：设有运输问题

$$Min\ Z=\sum\sum c_{ij}x_{ij}$$
$$(p)\begin{cases}\sum_j x_{ij}=a_i\\ \sum_i x_{ij}=b_j\\ x_{ij}\ge 0\end{cases}$$
的对偶问题为
$$Max\ W=\sum a_iu_i+\sum b_jv_j$$
$$(d)\begin{cases}u_i+v_j\le c_{ij}(mn\text{个约束})\\ u_i,v_j\text{为自由变量}\end{cases}$$

对(d)加松弛变量σ_{ij}，则$u_i+v_j+\sigma_{ij}=c_{ij}$ (*)

问题：σ_{ij}与原问题有什么关系？

由对偶性质，σ_{ij}是原问题结构变量x_{ij}的检验数$C-C_BB^{-1}A$(自证)。

当x_{ij}是基时，σ_{ij}=0，此时有$u_i+v_j=c_{ij}$，由此求u_i和v_j，再代回（*）式求非基变量的σ_{ij}（空格检验数）。

仍以例 1.14 为例：对偶变量表面上是 7 个，实际上只有 6 个。∴有一个是自由变量。作法如下表，结果与闭回路法一样，但比闭回路法简单，尤其当变量多的时候，用位势法比较好。

表 1.24 位势法求初始方案

	B_1	B_2	B_3	B_4	μ_i
A_1	3 1	11 2	3 4	10 3	1
A_2	1 3	9 1	2 1	8 -1	0
A_3	7 10	4 6	10 12	5 3	-4
v_j	1	8	2	9	

位势法步骤：

①由有数格 u_i+v_j 求得 u_i 和 v_j （先令 $u_1=0$），原有数格（基变量）的检验数 $\sigma_{ij}=0$；

②空格 $\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$；

③由此可得检验数表。

当找出 $\sigma_{ij}<0$ 的格后，调整方法仍用闭回路法。

3. 产销不平衡的运输问题

（1） 产大于销的情况

$$Min\ Z = CX \qquad\qquad\qquad Min\ Z = CX$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \\ \sum_{i} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{添加松弛变量 } x_{in+1}} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i} x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

$x_{i,n+1}$ 的定义：由 A_i 向 B_{n+1} 的运量，而 B_{n+1} 并不存在，相当于增加了一个虚设的销地—A_i 自己的仓库里，自己往自己的地方运，运费 $c_{i,n+1}$ 显然为 0。实际上 $x_{i,n+1}$ 即为剩余量。

表 1.25 产大于销的产销量表

	$B_1 \ \cdots \ B_n \ \ B_{n+1}$	
A_1 $\vdots$ A_m		a_1 $\vdots$ a_m
	$b_1 \ \cdots \ b_n \ \ b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$	

表 1.26 产大于销的单位运价表

	B_1	$\cdots$	B_n	B_{n+1}
A_1	C_{11}	$\cdots$	C_{1n}	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	$\cdots$	C_{mn}	0

（2）销大于产的情况

$$Min\ Z = CX \qquad\qquad\qquad Min\ Z = CX$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \\ \sum x_{ij} = a_i \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{添加松弛变量 } x_{m+1j}} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j \\ \sum x_{ij} = a_i \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

同理，此时 x_{m+1j} 的意义为销售短缺的量，同样，A_{m+1} 不存在，c_{m+1j} 为 0。

表 1.27 销大于产的产销量表

	$B_1 \quad \cdots \quad B_n$	
A_1 $\vdots$ A_m A_{m+1}		a_1 $\vdots$ a_m $a_{m+1}=\sum b_j-\sum a_i$
	$b_1 \quad \cdots \quad b_n$	

表 1.28 销大于产的单位运价表

	$B_1 \quad \cdots \quad B_n$
A_1	$C_{11} \quad \cdots \quad C_{1n}$
$\vdots$	$\vdots \qquad\qquad \vdots$
A_m	$C_{m1} \quad \cdots \quad C_{mn}$
A_{m+1}	$0 \quad \cdots \quad 0$

1．5 线性 0-1 规划简介

本节主要介绍线性 0-1 规划的模型建立。

1.5.1 0-1 规划简介

整数规划——变量只能取整数的规划问题。

当变量只能取 0 或 1 两个值， 称 0-1 规划。

整数规划分类：

纯整数规划——全部变量为整数。

混合整数规划——部分变量为整数。

1.5.2 0-1 规划模型建立。

1．投资场所选址问题

例 1.15 计划在东、西、南三个区开设若干商业网点，拟在 A_1，…，A_7 7 个地点中选择。规定：东区在 A_1，A_2，A_3 中至多选 2 个，西区在 A_4，A_5 中至少选 1 个，南区在 A_6，A_7 中至少选 1 个。已知在 A_i 建点需投资 b_i，可获利 c_i，现共有资金为 B。问应如何布局可使总利润最大？

分析：决策变量 $x_1,\cdots,x_7$ 分别表示地址 $A_1,\cdots,A_7$ 的选择变量，即 $x_i=\begin{cases}1 & 选中A_i\\ 0 & 不选A_i\end{cases}$ ，则 A_i 的利润为 $c_i x_i$ ，需投资 $b_i x_i$ 。

“东区在 A_1，A_2，A_3 中至多选 2 个”怎样表示？ $x_1+x_2+x_3\le 2$

解：设 $x_i=\begin{cases}1 & 选中A_i\\0 & 不选A_i\end{cases}$，则模型为

$$Max z=\sum_{i=1}^{7}c_i x_i$$
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7}b_i x_i\le B\\ x_1+x_2+x_3\le 2\\ x_4+x_5\ge 1\\ x_6+x_7\ge 1\\ x_1,\cdots,x_7是0-1变量\end{cases} \tag{1-33}$$

2．固定费用问题

例 1.16 某工厂为生产某种产品，有 3 种不同的生产方式可供选择。设第 j 种生产方式的固定成本为 k_j，可变成本为 c_j 。若不考虑其他约束，请建立使总成本最小的规划模型。

分析：设采用第 j 种生产方式时的产量为 x_j，则是用第 j 种方式时的成本为

$\begin{cases}k_j+c_j x_j & x_j>0\\0 & x_j=0\end{cases}$，若设 $y_j=\begin{cases}1, & x_j>0,即采用第j种生产方式时\\0, & x_j=0,即不采用第j种生产方式时\end{cases}$，则总费用为

$z=(k_1y_1+c_1x_1)+(k_2y_2+c_2x_2)+(k_3y_3+c_3x_3)$，

初步建立模型为

$$Min z=(k_1y_1+c_1x_1)+(k_2y_2+c_2x_2)+(k_3y_3+c_3x_3)$$
$$\begin{cases}x_j\ge 0\\ y_j=0或1\end{cases}$$

问题：不能保证当 $x_j>0$ 时，必有 $y_j=1$，怎样解决？

——加约束：$x_j\le M_j y_j$，M_j 为 x_j 的上界，则

模型：

$$Min z=(k_1y_1+c_1x_1)+(k_2y_2+c_2x_2)+(k_3y_3+c_3x_3)$$
$$\begin{cases}x_j\ge 0\\ x_j\le M_j y_j\\ y_j=0或1\end{cases}$$

3．背包问题

问题描述

已知：一个背包最大容量为 b 公斤；有 m 件物品供选择，每件物品重 a_i 公斤，价值为 c_i（i=1,…,m）。

问题：携带哪些物品可使总价值最大？

一般模型

令 $x_i=\begin{cases}1,携带第j件物品\\0,不携带第j件物品\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&Max \quad z=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\
&st\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le b \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 1.17 一个徒步旅行者要在背包中选择一些最有价值的物品携带。他最多能带 115kg 的物品，现有 5 件物品，分别重 54、35、57、46、19kg，其价值依次为 7、5、9、6、3。问携带哪些物品可使总价值最大？

解：模型为：

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 3x_5 \\
&st\begin{cases} 54x_1 + 35x_2 + 57x_3 + 46x_4 + 19x_5 \le 115 \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \ (i = 1, \cdots, 5) \end{cases}
\end{aligned}
$$