



# Nichtlineare Regelungstechnik 2 \*

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl. Math. Klaus Röbenack

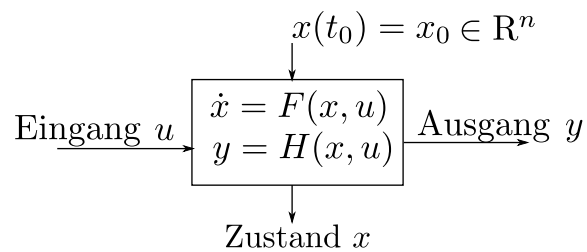
20. März 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Systembeschreibung, Einführungsbeispiele . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Lineare Algebra . . . . .	5
2.2	Felder und Ableitungen . . . . .	7
2.3	Vektorfelder und Flüße . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Differentialgeometrische Begriffe</b>	<b>13</b>
3.1	Differentialoperatoren . . . . .	13
3.1.1	Lie-Ableitung eines Skalarfeldes . . . . .	13
3.1.2	Koordinatenwechsel eines Vektorfeldes . . . . .	15
3.1.3	Lie-Ableitung eines Vektorfeldes . . . . .	16
3.1.4	Pull-Back und Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes . . . . .	18
3.2	Lie-Klammer und dynamische Systeme . . . . .	19
3.3	Distributionen und Kodistributionen . . . . .	21
3.4	Involutive Distributionen . . . . .	23
<b>4</b>	<b>übersprungen</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung</b>	<b>28</b>
5.1	Eingangs-Ausgangs-Linearisierung eingangsaffiner Systeme . . . . .	28
5.1.1	Relativer Grad und grundsätzliches Vorgehen . . . . .	28
5.1.2	Byrnes-Isidori Normalform . . . . .	29
5.1.3	Stabilisierung einer Ruhelage . . . . .	33
5.1.4	Stabilisierung in eine Ausgangstrajektorie . . . . .	35
5.2	Eingangs-Ausgangs-Linearisierung für allg. nichtlineare Systeme . . . . .	35
5.2.1	Relativer Grad und Eingangs-Ausgangs-Normalform . . . . .	35
5.2.2	Byrnes-Isidori-NF für nicht eingangsaffine Systeme . . . . .	40
5.3	Exakte Eingangs-Zustands-Linearisierung . . . . .	42
5.4	Relativer Grad und Flachheit im Eingrößenfall . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Beobachterentwurf</b>	<b>48</b>
6.1	Beobachtbarkeit . . . . .	48
6.2	High-Gain-Beobachter für autonome Systeme . . . . .	49
6.3	High-Gain-Beobachter für nichtautonome Systeme . . . . .	51
6.4	Exakte Linearisierung des Beobachtungsfehlers . . . . .	52

# 1 Einführung

Nichtlineare Zustandsraummodelle (Systeme gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung)



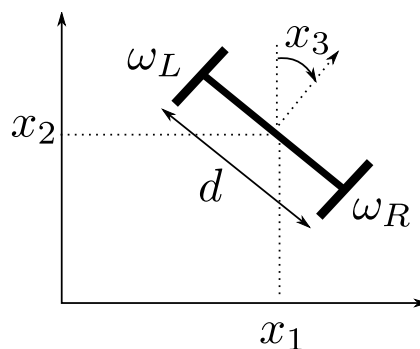
$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Beispiel für diese Systemklasse

- Starrkörpermodell
- Elektrische Netzwerke
- Chemische Reaktoren mit idealer Durchmischung

## 1.1 Systembeschreibung, Einführungsbeispiele

Beispiel. 1.1: Kinematisches Modell eines mobilen Roboters



Antrieb:  $\omega_L, \omega_R \dots$  Winkelgeschwindigkeit links, rechts Rad

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{r}{2}(\omega_L + \omega_R) \rightarrow \text{translatorischer Anteil} \\ u_2 &= \frac{r}{d}(\omega_L - \omega_R) \rightarrow \text{rotatorischer Anteil} \end{aligned}$$

$r \dots$  Radius der Räder

$d \dots$  Achsenlänge

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{transl. Bew}} \cdot u_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{rot. Bew}} \cdot u_2$$

Ausgang: Position in der Ebene

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2$$

### Beispiel. 1.2: Hochsteller (Boost Converter)

Spannung in Masche

$$L\dot{I} = E + \begin{cases} 0, & d = 1 \\ -u, & d = 0 \end{cases}$$

Ströme im Knoten

$$C\dot{U} = -\frac{U}{R} + \begin{cases} I, & d = 0 \\ 0, & d = 1 \end{cases}$$

Zustand

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ U \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-d)\frac{1}{L}x_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 &= (1-d)\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned}$$

Signalbereich für  $d$ :

$d \in [0, 1]$ : Ideales Schalten  $\Rightarrow$  linear, aber ereignisdiskret

$d \in [0, 1]$ : Mitteilung, PWM  $\Rightarrow$  zeitkontinuierlich, aber nichtlinear

## 2 Grundlagen

### 2.1 Lineare Algebra

- $n$ -dim, reeller Vektorraum<sup>1</sup>  $\mathbb{R}^n$  Elemente: Vektoren bzw. Spaltenvektoren

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden Basis des  $\mathbb{R}^n$  Standardbasis

- Jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  lässt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

- Lineare Hülle von  $r$  Vektoren  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$  ist die Menge aller Linearkombination:

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$$

Die lineare Hülle ist ein Untervektorraum<sup>2</sup> des  $\mathbb{R}^n$

- $m \times n$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Bild(image, range) einer Matrix  $A$ :

$$\begin{aligned} \text{im } A &= \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } y = Ax\} \\ &= \{(Ax) \in \mathbb{R}^m \mid \forall x \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>VR = Vektorraum

<sup>2</sup>UVR = Untervektorraum

A spaltenweise

$$A = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Linearkombination:

$$Ax = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Es gilt:  $\text{im} = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

- Kern (kernel, null space) der Matrix  $A$ :

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

- $\text{im} A$  ist UVR des  $\mathbb{R}^m$ ,  
Rang:  $\text{rang} A = \dim(\text{im} A)$

- $\ker A$  ist UVR des  $\mathbb{R}^n$

- Zerlegungen:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^m & = & \text{im} A \quad \oplus \quad \ker A^T \\ \mathbb{R}^n & = & \ker A \quad \oplus \quad \ker A^T \end{array}$$

- Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  wird mitunter synonym in lin. Abb. (lineare Operator) behandelt:

$$\begin{array}{lcl} A & : & x \rightarrow Ax \\ A & : & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

Notation:  $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

- Der Dualraum  $(\mathbb{R}^n)^*$  des  $\mathbb{R}^n$  besteht aus dem auf  $\mathbb{R}^n$  definierten linearen Funktionalen (Linearformen):  $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\underbrace{(\omega_1, \dots, \omega_n)}_{\omega \in \mathbb{R}^{n*}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x \in \mathbb{R}^n} = y \in \mathbb{R}$$

Darstellung durch Zeilenvektoren der Form  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , die man auch Kovektoren nimmt.

- der Dualraum ist selber ein n-dim. reeller VR. Standardbasis (Kanonische Basis)

$$\begin{array}{lcl} e_1^* & = & (1, 0, \dots, 0) \\ e_n^* & = & (0, \dots, 0, 1) \end{array}$$

Darstellung von  $\omega$ .

$$\omega = \omega_1 e_1^* + \dots + \omega_n e_n^*$$

- Inneres Produkt (Skalarprodukt)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle \omega, x \rangle &= \omega x \\ &= (\omega_1, \dots, \omega_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \\ \langle \omega, e_j \rangle &= \omega_j \\ \langle e_i^*, x \rangle &= x_i \end{aligned}$$

- Die Basis  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  ist die zu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  duale Basis, d.h.

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad ; 1 \leq i, j \leq n$$

mit dem Kroneckersymbol

$$\begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 2.2 Felder und Ableitungen

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

$h : M \rightarrow \mathbb{R}$  ... Skalarfeld  
 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ... Vektorfeld  
 $\omega : M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  ... Kovektorfeld  
 ... Differentialform  
 (~ 1. Grades)  
 (1. Form, Pfaffsche Form)

- Neben Darstellung eines Vektorfeldes als Spaltenvektor

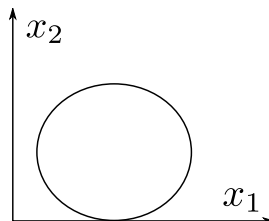
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

wird auch die Notation

$$f(x) = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

verwendet.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \text{ Kanonische Basis}$$



Zugehörige duale Basis:

$$\{dx_1, \dots, dx_n\}$$

Kovektorfeld  $\omega$  : Zeilenvektor

$$\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$$

oder

$$\omega(x) = (\omega_1(x)dx_1 + \dots + \omega_n(x)dx_n)$$

- Jacobimatrix, vektorielle Funktion

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$F'(x) = dF(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Gradient bzw. Differential eines Skalarfelds  $h$

$$h'(x) = dh(x) = \left( \frac{dh}{dx_1}, \dots, \frac{dh}{dx_n} \right) \in (\mathbb{R}^n)^*$$

Gradient ist ein Kovektorfeld (KVF) lässt sich ein KVF als Gradient eines Skalarfelds (SF) darstellen, so heißt es exakte Differential, exakte 1-Form, ... Das zugehörige SF heißt Potential.

- Hessematrix des Skalarfelds  $h$ :

$$h''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_n^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

### Lemma/Satz von Schwarz:

Das SF  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei im Pkt  $p \in M$  zweimal stetig diffbar, Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

### Pioncaresches Lemma:

Sei  $\omega : M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  ein stetig diffbares KVF und

$$U = B_r(p) = \{x \in M \mid \|x - p\| < r\}, r > 0.$$

Differentialform  $\omega$  ist auf  $U$  genau dann exakt, wenn

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in U \text{ und all } i, j = 1, \dots, n.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \underbrace{3x^2y^2 dx}_{\omega_1} + \underbrace{2x^3y dy}_{\omega_2} \\ &= (3x^2y^2, 2x^3y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^2 = 6x^2y \text{ exakt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} 2x^3y = 6x^2y \text{ exakt}$$

Potential:

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3y^2 \\ dh(x) &= (3x^2y^2, 2x^3y) \end{aligned}$$

Beweis:  $\Rightarrow \omega$  sei. d.h.  $\exists$  SF  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dh = \omega$  bzw.  $w_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$  Dann gilt.

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \stackrel{\text{Schwartz}}{=} \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

Sei  $x \in U$ . Die Verbindungsstrecke  $\{(1-t)p + tx \mid 0 \leq t \leq 1\}$  liegt ganz in  $U$ . O.E. sei  $p = 0$ . Ansatz:

$$h(x) = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x_i \right) dt \quad \forall x \in U \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_k} = w_k$$



## 2.3 Vektorfelder und Flüße

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,

$F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein zeitabhängige Vektorfeld (VF). Anfangswertaufgabe (AWA) mit Anfangszeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  und Anfangswert  $p \in M$  :

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x(t_0) = p \quad \text{AWA1}$$

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offene Intervall im  $t_0$ .

Eine diffbare Funktion.  $\phi : I \rightarrow M$  heißt Lokale Lösung von (AWA1) wenn

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= F(\phi(t), t) \quad \forall t \in I \\ \phi(t_0) &= p. \end{aligned}$$

Existenzsätze:

- 1. Reano: Sei  $F$  stetig. Dann existiert eine (lokale) Lösung der (AWA1), aber nicht unbedingt eindeutig.
- 2. Picard-Lindelöf:  $F$  geringe zusätzlich eine Lipschitz-Bed. in 1. Argument,  $\exists L \geq 0 : \|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L \cdot \|x - y\|$ , dann existiert eine lokale eindeutige Lösung von (AWA1).

Beweisidee zu 2: (AWA1) ist gleichwertig mit Integralgleichung

$$\underbrace{x_{k+1}}_{\text{Picard-Iteration mit } x_0(t) \equiv p} = \underbrace{p}_{=x(t_0)} + \int_{t_0}^t F(x_k(\tau), \tau) d\tau$$

Folgerung aus Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Sei  $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig diffbar. Dann genügt  $F$  auf jede kompakten Teilmenge  $K \subset M \times \mathbb{R}$  einer Lipschitz-Bed. mit der Lipschitz-Konstanten.

$$L := \max_{(x,t) \in K} \left\| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right\| < \infty$$

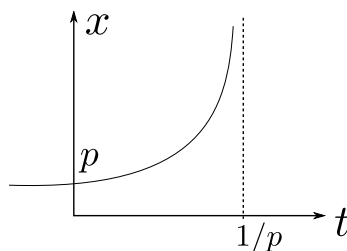
$\Rightarrow$  Lipschitz Bedingung ist lokal erfüllt.

**Beispiel:**  $F(x, t) = x^2$

$$\Rightarrow \dot{x} = x^2, \quad \underbrace{x(0)}_{=t_0} = p > 0$$

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{y^2} \Big|_p^x = d\tau \Big|_0^t \Rightarrow x(t) = \phi(t) = \frac{p}{1 - t_p}$$

Existenzintervall  $I = \{-\infty, \frac{1}{p}\}$



Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld, Dgl

$$\dot{x} = f(x)$$

## Satz(Folgerung von Picard-Lindelöf)

Das Vektorfeld  $f$  sei stetig diffbar. Für jedes  $p \in M$  existiert dann ein Intervall  $I_p$  um 0, eine offene Kugel  $U_p \subseteq M$  um  $p$  sowie eine stetig diffbare Abbildung  $\varphi : I_p \times U_p \rightarrow M$  mit

- 1. Lösung der Dgl:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) \equiv f(\varphi(t, x)), \quad \forall t \in I_p \forall x \in U_p$$

- 2. Verträglichkeit mit Anfangsbedingungen:

$$\varphi(0, x) = x, \quad \forall x \in U_p$$

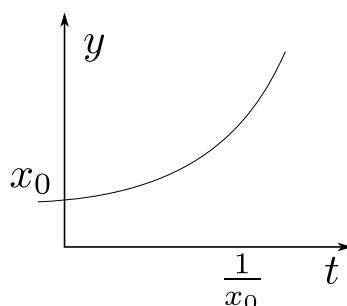
- 3. Eindeutigkeit: Jede andere Lösung, die 1. und 2. erfüllt, stimmt für kleine  $|t|$  mit  $\varphi$  überein.

## Bemerkung

- Die Abbildung  $\varphi$  heißt Fluss des VF  $f$  (bzw. der Dgl) und ist die allg. Lösung. Notation:  $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$
- Zu jedem Anfangswert  $p$  ex. ein maximales Existenzintervall  $I_p$ , überwelches die Lösung der Dgl. nicht mehr fortgesetzt werden kann.

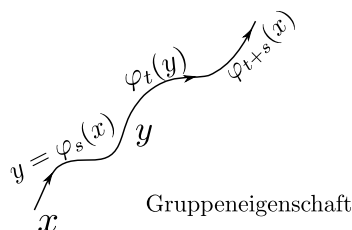
**Beispiel:**  $\dot{x} = x^2$ , Lösung:

$$\varphi_t(x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \quad \text{für } x_0 > 0 : I_{x_0} = (-\infty, \frac{1}{x_0})$$



- $|s|, |t|$  klein gilt:

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$



Spezialfall.  $s = -t$  :

$$\begin{aligned} \varphi_t(\varphi_{-t}(x)) &= \varphi_{t-t}(x) \\ &= \varphi_0(x) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_t^{-1}(x) = \varphi_{-t}(x)$$

- Ist  $f$   $r$ -mal stetig diffbar  
 $\Rightarrow \varphi$  ist  $r$ -mal stetig diffbar nach Zustand  
 $\varphi$  ist  $(r+1)$  mal stetig diffbar nach Zeit
- Ein Fluss, der auf  $\mathbb{R} \times M$  definiert ist, heißt globaler Fluss.

## Beispiel

- Konstantes VF  $f(x) = b \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\varphi_t(x) &= x + bt \\ \dot{\varphi}_t(x) &= b = f(\varphi_t(x))\end{aligned}$$

- Lineares VF  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

Matrixexponentialfunktion:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Gruppeneigenschaft:

$$\begin{aligned}\varphi_t(\varphi_s(x)) &= e^{At} e^{As} x \\ &= (I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \dots)(I + As + \frac{1}{2}A^2 s^2 + \dots)x \\ &= (I + (t+s)A + \underbrace{(\frac{1}{2}t^2 + ts + \frac{1}{2}s^2)}_{\frac{1}{2}(t+s)^2} A^2 + \dots)x \\ &= e^{A(t+s)} x = \varphi_{t+s}(x)\end{aligned}$$

## Reihenentwicklung des Flusses

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt  $\Rightarrow$  Fluss  $\varphi_t$  auch glatt

Reihensatz:

$$\begin{aligned}\varphi_t(x) &= v_0(x) + v_1(x)t + v_2(x)t^2 + O(t^3) \\ \text{VF } v_0, v_1, v_2 &: M \rightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Wegen  $\varphi_0(x) \equiv x \Rightarrow v_0(x) \equiv x$  bzw.  $v_0 = \text{id} = \text{Identische Abbildung}$

$\Rightarrow \varphi_t(x) = x + v_1(x)t + v_2(x)t^2 + O(t^3)$  Einerseits:

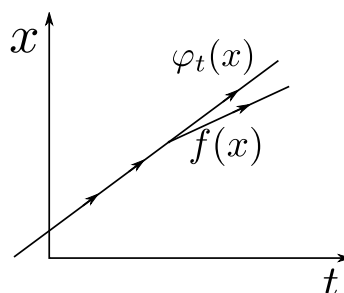
$$\begin{aligned}f(\varphi_t(x)) &= f(x + v_1(x)t + v_2(x)t^2 + O(t^3)) \\ &= f(x) + f'(x)v_1(x)t + \dots\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_t(x) &= v_1(x) + 2v_2(x)t + \dots \\ \Rightarrow v(x) &= f(x) \\ v_2(x) &= \frac{1}{2}f'(x)v_1(x)\end{aligned}$$

Damit

$$\varphi_t(x) = x + f(x)t + \frac{1}{2}f'(x)f(x)t^2 + O(t^3) \quad (2.3)$$



Daraus folgt:

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} = I + f'(x)t + \dots \quad (2.4)$$

$$\varphi_t(x) = x - \varphi(x)t + \frac{1}{2}f'(x)f(x)t^2 + \dots \quad (2.5)$$

### Lokale Invertierbarkeit von $\varphi_t$

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig diffbar,  $p \in M$

$\Rightarrow$  Fluss  $\varphi : I_p \times U_p \rightarrow M$  existiert und ist auch stetig diffbar.  $\varphi_t(x) = x$

$\Rightarrow$

$$\varphi'_0(x) = \frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x} = I$$

ist regulär

$\varphi'_t$  stetig  $\Rightarrow$  für kleine  $|t|$  ist auch  $\varphi'_t$  regulär

Satz über Umkehrfunktion:

Es ex. offene Umgebungen  $U \subset U_p$  von  $p$  und  $V$  von  $\varphi_t(p)$ , so dass  $\varphi_t|_U$  (eingeschränkt auf  $U$ ) bijektiv ist und eine Umkehrabb.  $\varphi_t^{-1} : V \rightarrow U$ , die stetig diffbar ist.

M.a.W.,:  $\varphi_t$  ist ein (lokale) Diffeomorphismus

### Satz:

Sei  $\varphi_t$  der Fluss von

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

mit stetig diffbarem VF  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\varphi'_t(p)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f'(\varphi_t(p)) \cdot x \\ x(0) &= I \end{aligned} \quad (2.6)$$

Gl.(2.6) heißt Variationsgl. von (2.2). Die Lösung von (2.6) heißt (normiert)

### Fundamentalmatrix

Beweis: Sei  $\bar{x}(t) := \varphi'_t(p)$ .

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_t(x) \Big|_{x=p} \\ \text{Schwarz} &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{\varphi}_t(x) \Big|_{x=p} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi_t(x)) \Big|_{x=p} \\ &= f'(\varphi_t(x)) \cdot \varphi'_t(x) \Big|_{x=p} \\ &= f'(\varphi_t(p)) \cdot \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Das ist die AWA (2.6).

Eindeutigkeit :  $x \equiv \bar{x}$ .

# 3 Differentialgeometrische Begriffe

## 3.1 Differentialoperatoren

### 3.1.1 Lie-Ableitung eines Skalarfeldes

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein VF glatt

$h : M \rightarrow \mathbb{R}$  ein SF glatt

$\varphi_t \dots$  Fluss von  $f$ ,

$\varphi_t(x) = x + f(x)t + O(t^2)$

Lie-Ableitung des Skalarfeldes  $h$  entlang des VF  $f$  im Punkt  $x \in M$  :

$$L_f h(x) := \frac{d}{dt} h(\varphi_t(x))|_{t=0}$$

Berechnung:

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \frac{d}{dt} h(\varphi_t(x))|_{t=0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\varphi_t(x)) - \overbrace{h(\varphi_0(x))}^x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x + f(x)t + \dots) - h(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(x) + h'(x)f(x)t + \dots - h(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (h'(x)f(x) + \dots) = h'(x)f(x) \\ &= \langle dh(x), f(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x). \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Gemischte Lie-Ableitungen: Sei  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein weiteres VF:

$$L_g \underbrace{L_f h(x)}_{\text{ist SF}} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} g(x)$$

- Mehrfache Lie-Ableitung:

$$\begin{aligned} L_f^{k+1} h(x) &= L_f(L_f^k h(x)) \\ &= \frac{\partial L_f^k h(x)}{\partial x} f(x) \\ L_f^\circ h(x) &= h(x) \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

Behauptung:

$$\begin{aligned}y^k(t) &= L_f^k h(\varphi_t(x)) \\ k=0: \quad y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y^{k+1}(t) &= \frac{d}{dt} y^{(k)}(t) \\ &= \frac{d}{dt} L_f^k h(\varphi_t(x)) \\ &= dL_f^k h(\varphi_t(x)) \cdot \dot{\varphi}_t(x) \\ &= dL_f^k h(\varphi_t(x)) \cdot f(\varphi_t(x)) \\ &= L_f^{k+1} h(\varphi_t(x))\end{aligned}$$

Sei  $x(0) = x_0$

$$\Rightarrow y^{(k+1)}(0) = L_f^{(k+1)} h(x)$$

Sind  $f, h$  analytisch  $\Rightarrow$  Taylorreihe

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x_0) \frac{t^k}{k!} \quad \text{Lie-Reihe}$$

Rechenregeln:

$$f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad VF$$

$$\text{glatt } \alpha, \beta : M \rightarrow \mathbb{R} \quad SF \text{ glatt}$$

$$\begin{aligned}L_{\alpha\beta}(x) &= \alpha(x) \cdot L_f \beta(x) \\ L_f(\alpha + \beta)(x) &= L_f \alpha(x) + L_f \beta(x) \\ *L_f(\alpha\beta)(x) &= \alpha(x) L_f \beta(x) + \beta(x) L_f \alpha(x) \\ L_{f+g} \alpha(x) &= L_f \alpha(x) + L_g \alpha(x)\end{aligned}$$

Beweis von (\*)

$$\begin{aligned}L_f(\alpha\beta)(x) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(x)\beta(x)) \right) \cdot f(x) \\ &= (\alpha(x)\beta'(x) + \beta(x)\alpha'(x)) \cdot f(x) \\ &= \alpha(x) \underbrace{(\beta'(x)f(x))}_{L_f \beta(x)} + \beta(x)(\alpha'(x)f(x))\end{aligned}$$

Ergänzung:

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^n \dots VF \quad h : M \rightarrow \mathbb{R}^p \dots \text{vektorrielle Abb.}$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(x) \end{pmatrix}$$

$$L_f h(x) := \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} dh_1(x) \\ \vdots \\ dh_p(x) \end{pmatrix} f(x)$$

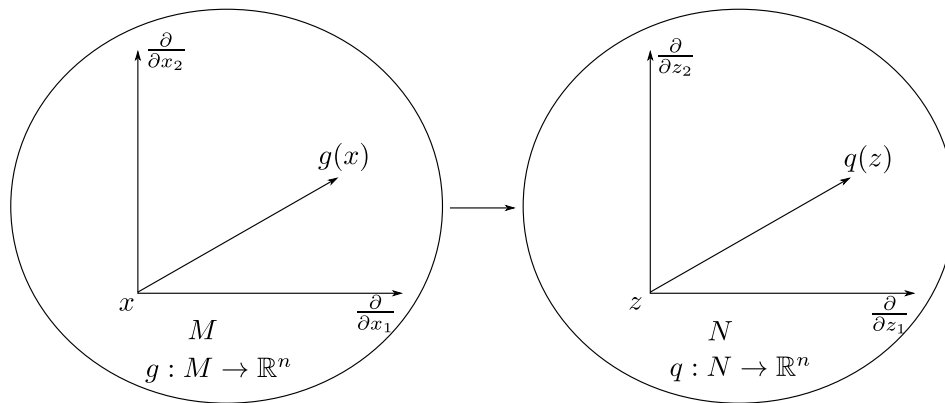
$$\begin{pmatrix} L_f(h_1(x)) \\ \vdots \\ L_f h_p(x) \end{pmatrix} \dots \text{vereinigte Notation für Lie-Ableitung}$$

etwas verpasst:

### 3.1.2 Koordinatenwechsel eines Vektorfeldes

Seien  $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,

$\psi : M \rightarrow N \dots$  Diffemorphismus



- Differential, Push-Forward wird durch Jacobimatrix beschrieben  $\psi_*(x) = \psi'(x)$
- Rücktransformation, Push-Back:

$$\begin{aligned} \psi^*(z) &:= \psi_*^{-1}(z) \\ &= (\psi^{-1})'(\underbrace{\psi(x)}_z) \\ &= (\psi'(x))^{-1} \end{aligned}$$

- Push-Forward:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{d}{dz} z = \frac{d}{dt} \psi(x) \\ &= \psi'(x) \dot{x} \\ &= \psi'(x) g(x) \\ &= \psi_* g(x)|_{x=\psi^{-1}(z)} \\ &= \underbrace{\psi_* g(\psi^{-1}(z))}_{q(z)} \end{aligned}$$

### Beispiel

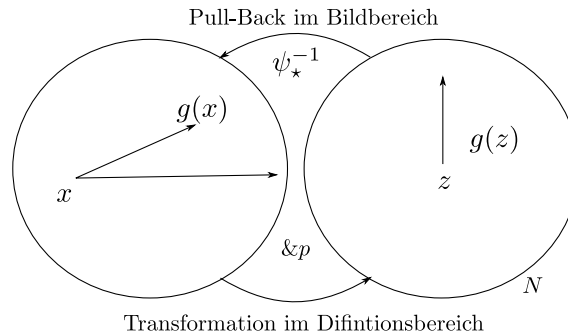
lin. VF:  $g(x) = Ax$

lin. Transf:  $z = Tx$

$\dot{z} = T\dot{x} = TAx = TAT^{-1}z$  Ähnlichkeitstrans.

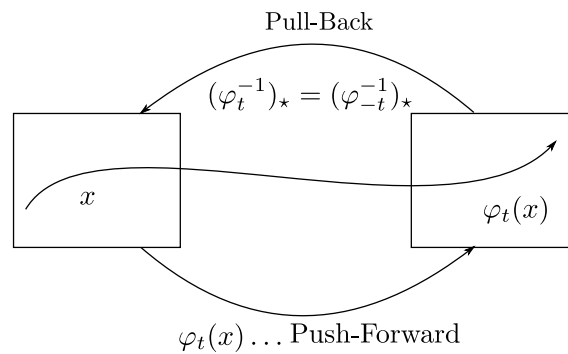
Rücktransform. und Pull-Back:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}\psi^{-1}(z) = (\psi'(z))^{-1}\dot{z} \\ &= (\psi'(z))^{-1}q(z) \\ &= \psi_*^{-1}q(\psi(x)) = \underbrace{\psi^*q(z)}_{g(x)}\end{aligned}$$



### 3.1.3 Lie-Ableitung eines Vektorfeldes

Spezialfall:  $\psi = \varphi_t$ , d.h. der Diffeomorphismus ist Fluss eines VF  $f$  zu Zeit  $t$



Reihenentwicklungen:

$$\psi_{t*}(x) = I + f'(x)t + O(t^2)$$

$$\psi_{t*}(x) = I - f'(x)t + O(t^2)$$

Lie - Ableitung bzw. Lie-Klammer eines VF  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  entlang  $f$  :

$$[f, g](x) = L_f g(x) := \frac{d}{dt} \underbrace{\varphi_{-t*} g(\varphi_t(x))}_{Ad_{t,f} g(x)} \Big|_{t=0}$$

Zeitinvarianter Operator für VF

$$\begin{aligned}Ad_{t,f} g(x) &= \varphi'_{-t}(z)g(z)|_{z=\varphi_t(x)} \\ &= (I - f'(z)t + O(t^2)) \cdot g(z)|_{z=x+f'(x)t+O(t^2)} \\ &= (I - f'(x)t + O(t^2)) \cdot \underbrace{g(x + f(x)t + O(t^2))}_{g(x) + g'(x)f(x)t + O(t^2)} \\ &= g(x) + \underbrace{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}_{[f,g](x)} t + O(t^2)\end{aligned}$$



## Beispiel

Lineares VF  $f(x) = Ax$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Konstan. VF  $g(x) = b \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} [f, g] &= \underbrace{g'}_{\equiv 0} f - f' g = -Ab = ad_f g \\ \Rightarrow [-f, g]_{\text{Def.}} &= ad_{-f} g = Ab \\ &\Rightarrow ad_{-f}^k g = A^k b \end{aligned}$$

Koordinatentransf: Sei  $\psi: M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\psi_*[f, g] = [\psi_* f, \psi_* g]$$

Weitere Rechenregeln:

$$\begin{array}{ll} f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n & \text{VF} \\ \alpha, \beta : M \rightarrow \mathbb{R} & \text{SF} \end{array}$$

$$\begin{aligned} L_{[f, g]} \alpha(x) &= L_f L_g \alpha(x) - L_g L_f \alpha(x) \\ [\alpha f, \beta g](x) &= \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) + \alpha(x) L_f \beta(x) \cdot g(x) - \beta(x) L_g \alpha(x) g(x) \end{aligned}$$

Beweis von (\*):

$$\begin{aligned} L_g L_f \alpha(x) &= dL_f \alpha(x) \cdot g(x) \\ &= (\alpha'(x) f'(x)) + f^T(x) \alpha''(x) g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_f L_g \alpha(x) &= (\alpha(x) g'(x) + g^T(x) \alpha''(x)) \cdot f(x) \tag{2} \\ (2) - (1) &= \alpha'(x) (g'(x) f(x) - f'(x) g(x)) \\ &= \alpha'(x) [f, g](x) = L_{[f, g]} \alpha(x) \end{aligned}$$

Interpretation : (+) ist Differeantialoperator 1. Ordnung

## Bemerkung

- Mehrfache Lie-Klammer entlang gleichem VF

$$\begin{aligned} ad_f^{k+1} g(x) &:= [f, ad_f^k g](x) \\ ad_f^0 g(x) &:= g(x) \\ \underbrace{[f, [f, \dots, [f, g] \dots]]}_{k \text{ mal}} &:= ad_f^k g(x) \end{aligned}$$

- Zwei lineare VF

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax \\ g(x) &= Bx, \quad AB \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ [f, g](x) &= (g' f - f' g)(x) \\ &= \underbrace{(BA - AB)}_{\text{Kommutator}}(x) \end{aligned}$$

## Beispiel

Mobiler Roboter

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(x) \text{ transl. Teil}} u_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x) \text{ rot. Teil}} u_2$$

$$[f, g] = \underbrace{g'f}_{O \in \mathbb{R}^{3 \times 3}} - f'g = -f'g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos x_3 \\ 0 & 0 & -\sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ -\sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 3.1.4 Pull-Back und Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes

$\psi \dots$  Diffeomorphismus

$\psi_* = \psi' \dots$  Push-Forward für ein Vektorfeld

$\omega \dots$  KVF

zu  $\psi_*$  gehörende duale oder adjungierte Abbildung  $\psi^*$  ist definiert durch

$$\langle \psi^* \omega, f \rangle = \langle \omega, \psi_* f \rangle \quad (*)$$

$\Rightarrow$  Pull-Back - Abb. des KVF  $\omega$

$$\underbrace{y^T}_{\text{Zeilenvektor}} \cdot \left( \underbrace{A}_{\text{Spaltenvektor}} x \right) = y^T \cdot A \cdot x = \underbrace{(A^T y)^T}_{\text{Zeile}} \cdot \underbrace{x}_{\text{Spalte}}$$

Spezialfall:  $\psi = \varphi_t$ , d.h. Diffeomorphismus ist Fluss des VF  $f$ .

$$\begin{aligned} \varphi_t^* \omega(x) &= \omega(x) \varphi_{t*} \\ &= \omega(x) (I + f'(x)t + O(t^2)) \end{aligned}$$

Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes  $\omega : \mathbb{M} \rightarrow (\mathbb{R})^*$  entlang  $f$ :

$$L_f \omega(x) = \left. \frac{d}{dt} \underbrace{\varphi_t^* \omega(\varphi_t(x))}_{=: Ad_{t,f} \omega(x)} \right|_{t=0}$$

Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} Ad_{t,f} \omega(x) &\stackrel{\text{Def}}{=} \varphi_t^* \omega(\varphi_t(x)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \omega(z) \varphi'_t(z) \Big|_{z=\varphi_t(x)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \omega(x + f(x)t + \dots) (I + f'(x)t + \dots) \\ &= \left( \omega(x) + f^T(x) \left( \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right)^T + \dots \right) (I + f'(x)t + \dots) \\ &= \omega(x) + \underbrace{\left( f^T(x) \left( \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right)^T + \omega(x) f'(x) \right)}_{L_f \omega(x)} t + \dots \end{aligned}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned} f, g \dots VF \\ \omega \dots KVF \\ \alpha \dots SF \end{aligned}$$

(a)  $L_f d\alpha = dL_f \alpha$

(b)

$$L_f \langle \omega, g \rangle (x) = \langle L_f \omega, g \rangle (x) + \langle \omega, [f, g] \rangle (x)$$

Beweis: a). 
$$\begin{aligned} dL_f \alpha(x) &= \frac{\partial}{\partial x} L_f \alpha(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\alpha'(x) f(x)) \\ &= (\alpha'(x) f'(x) + f^T(x) \alpha''(x)) \\ &= \alpha'(x) f'(x) + f^T(x) \left( \frac{\partial(\alpha'(x))^T}{\partial x} \right)^T \\ &= L_f \alpha(x) \end{aligned}$$

## 3.2 Lie-Klammer und dynamische Systeme

**Lemma:**

Seien  $\varphi^f, \varphi^g$  die Flüsse des VF  $f, g$ . Die Flüsse kommutieren genau dann, wenn die Lie-Klammer der Vektorfelder identisch Null ist.

$$\varphi_t^f \cdot \varphi_s^g = \varphi_s^g \cdot \varphi_t^f \iff [f, g] = 0$$

Beweis:  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi_s^g(\varphi_t^f(x)) &= \varphi_s^g(\overbrace{x + f(x)t + \dots}^z) \\ &= \underbrace{x + f(x)t}_z + \underbrace{g(x + f(x)t + \dots)s}_{g(z)s} + \dots \\ &= x + f(x)t + g(x)s + g'(x)f(x)st + \dots \\ \varphi_t^f(\varphi_s^g(x)) &= x + g(x)s + f(x)t + f'(x)g(x)ts + \dots \\ \text{Differenz:} \\ \varphi_s^g(\varphi_t^f(x)) - \varphi_t^f(\varphi_s^g(x)) &= \underbrace{(g'(x)f(x) - f'(x)g(x))}_{[f, g]} st + \dots \end{aligned}$$

Differenz ist 1t. Annahme die Nullfunktion

$\Rightarrow$  alle Koeff. einer Reihenentwicklung und identisch Null insbesondere  $[f, g] \equiv 0$ .

Anwendung auf lineare VF

$$f(x) = Ax$$

$$g(x) = Bx$$

$$e^{At} \cdot e^{Bs} = e^{Bs} \cdot e^{At} \iff [A, B] = 0 \text{ d.h. } BA - AB = 0$$

$$\iff AB = BA$$

System mit 2 Eingängen:

$$\dot{x} = f(x)u_1 + g(x)u_2$$

Zwischen den VF  $f, g$  wird mittels  $u_1, u_2$  nach folgenden Schema umgeschaltet

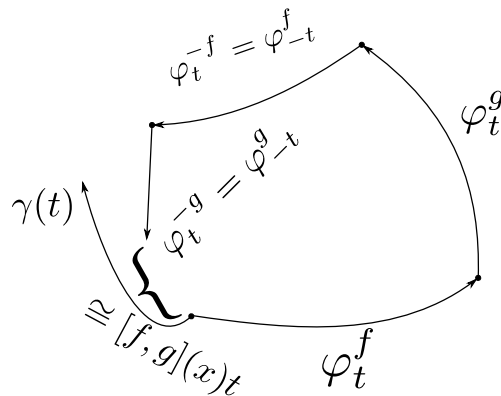
Schritt	$u_1$	$u_2$	$f_1 u_1 + g u_2$
1	1	0	f
2	0	1	g
3	-1	0	-f
4	0	-1	-g

Darstellung

$$\gamma(t) := \varphi_t^{-g} \cdot \varphi_t^{-f} \cdot \varphi_t^g \cdot \varphi_t^f(x)$$

Mit Reihenentwicklung der Flusses erfüllt man

$$\gamma(t) = x + \underbrace{(g'(x)f(x) - f'(x)g(x))}_{[f,g]} t^2 + \dots$$



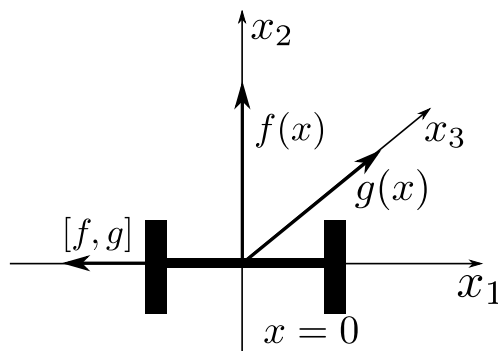
$$\begin{aligned} \gamma(\sqrt{t}) &= x + [f, g](x)t + \dots \\ &\approx \varphi_t^{[f,g]}(x) \end{aligned}$$

## Beispiel

Robotermodell

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f, g](x) = \begin{pmatrix} -\cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### Mittelung des Systems

$$\dot{x} = f(x) \cdot u_1(t) + g(x) \cdot u_2(t) \quad \text{mit } u_1(t) = \sqrt{\omega} \cdot \cos(\omega t) \\ u_2(t) = \sqrt{\omega} \cdot \sin(\omega t), \omega > 0$$

führt für  $\omega \rightarrow \infty$  auf  $\dot{x}^\infty = \frac{1}{2}[f, g](x^\infty)$

## 3.3 Distributionen und Kodistributionen

$M \in \mathbb{R}^n$  offen,  $f_1, \dots, f_r : M \rightarrow \mathbb{R}^n \dots$  glatte VF. in jedem Punkt  $x \in M$  spannen die VF einen UVR des  $\mathbb{R}^n$  auf  $\text{span}\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}$

Die Zuordnung

$$M \ni x \rightarrow \Delta(x) = \underbrace{\text{span}\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

heißt Distribution.

Glatte Distribution wird von glatten VF aufgespannt.

Punktweise Überlagerung von Operation auf UVR auf Distributionen.

- Summe:  $(\Delta_1 + \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x)$
- Durchschnitt:  $(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) \cap \Delta_2(x)$
- $f \in \Delta : \iff \forall x \in M : f(x) \in \Delta(x)$
- $\Delta_1 \leq \Delta_2 \iff \forall x \in M : \Delta_1(x) \leq \Delta_2(x)$

VF zu Matrix zusammenfassen:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x)) \\ \text{im} F(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_r(x)\} \\ = \Delta(x)$$

$\Delta$  heißt regulär (im Punkt  $x_0 \in M$ )

$\exists r \in \mathbb{N}_0 : \dim \Delta(x) = r$  für alle  $x$  aus Umgebung von  $x_0$

### Beispiel

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x)) \\ = \begin{pmatrix} \cos x_3 & -\sin x_3 \\ \sin x_3 & \cos x_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x)\} \\ = \text{im} F(x)$$

$$= \text{span}\{e_1, e_2\} = \text{im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Lemma 3.1:

$\Delta \dots$  glatte Distribution, regulär im Punkt  $x_0 \in M$  mit Dimension  $r$ .

Dann existiert Umgebung  $U \in M$  von  $x_0$  und  $r$  VF  $f_1, \dots, f_r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass für alle  $x \in U$  gilt.

1. Die Vektoren  $f_1(x), \dots, f_r(x)$  sind linear unabhängig.
2.  $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}$   
Jedes VF  $f \in \Delta$  kann auf  $U$  wie folgt dargestellt werden.

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) f_i(x)$$

mit glatten SF  $\alpha_1, \dots, \alpha_r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f_i \dots$  Basisvektorfelder

Berechnung der SF: Lineare Gleichung

$$\underbrace{(f_1(x), \dots, f_r(x))}_{F(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_r(x) \end{pmatrix}}_{\alpha(x)} = f(x)$$

$\omega_1, \dots, \omega_r : M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \dots$  KVF

Diese spannen im Dualraum  $(\mathbb{R}^n)^*$  eine Kodistribution auf

$$\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$$

Annihilator  $\Delta^\perp$  eine Distribution  $\Delta$  :

$$\Delta^\perp(x) = \{\omega_1 \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle \omega, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in \Delta(x)\}$$

Annihilator  $\Omega^\perp$  eine Kodistribution:  $\Omega^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v \rangle = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(x)\}$

### Beispiel

$$\Delta(x) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Delta^\perp(x) = \text{span}\{(0, 0, 1)\}$$

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$$

$$w(x) = \begin{pmatrix} \omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_r(x) \end{pmatrix}$$

- $\Delta^\perp(x)$  aufgespannt von KVF  $\omega$  mit  $\omega(x) \cdot F(x) = 0 \in (\mathbb{R}^r)^*$  (0)
- $\Omega^\perp(x)$  wird aufgespannt von VF  $v$  mit  $\omega(x) \cdot v(x) = 0 \in \mathbb{R}^x$   
letztes ist der Kern von  $\omega$  :

$$\Omega^\perp = \ker \omega(x)$$

- Transfonieren von (0) liefert  $\Delta^\perp(x) = (\ker F^T(x))^T$

Bemerkung: Seien  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  Distribution

- $\dim(\Delta) + \dim(\Delta^\perp) = n$
- $\Delta_1 \leq \Delta_2 \iff \Delta_1^\perp \geq \Delta_2^\perp$
- $(\Delta_1 \cap \Delta_2)^\perp = \Delta_1^\perp + \Delta_2^\perp$

### 3.4 Involutive Distributionen

#### Defintion:

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineare VF. Eine Distribution  $\Delta$  heißt invariant unter elem. VF  $f (f \rightarrow \text{invariant})$ , wenn  $\forall g \in \Delta: [f, g] \in \Delta$ . Eine Distribution ist involtiv, wenn sie für jedes der VF invariant ist.

#### Definition:

Eine Distribution  $\Delta$  heißt involtiv, wenn

$$\forall f, g \in \Delta : [f, g] \in \Delta \quad (A)$$

#### Lemma 3.2:

Sei  $\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_r\}$ ,  $\Delta$  genau dann involtiv, wenn

$$[f_i, g_j] \in \Delta \quad i \leq j, j \leq r \quad (B)$$

#### Beweis

$\Rightarrow$

$\Delta$  sei involtiv, d.h. (A) gilt für alle VF von  $\Delta$ . Dann gilt (A) auch für die VF  $f_1, \dots, f_r$ , d.h (B) ist erfüllt.

$\Leftarrow$

Es gilt (B). Für  $f, g \in \Delta$  gibt es SF  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  und  $\beta_1, \dots, \beta_r$  mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) f_i(x)$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^r \beta_i(x) \cdot f_i(x)$$

Rechenregeln für Lie-Klammer liefern.

$$[f, g] = \left[ \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^r \beta_j f_j \right]$$

$$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \{ \alpha_i \beta_j [f_i, \beta_j] + \alpha_i (L_{f_i} \beta_j) f_j - \beta_j (L_{f_j} \alpha) f_i \}$$

$$\Rightarrow [f, g] = \underbrace{\text{span}\{f_1, \dots, f_r\}}_{=\Delta} + \underbrace{\text{span}\{f_i, f_j; 1 \leq i, j \leq r\}}_{\leq \Delta \text{ wegen (B)}} = \Delta \text{ Also gilt (A)}$$

$$(\alpha(x) \cdot f(x))' = \alpha(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot \alpha'(x)$$

$$(\beta(x) \cdot g(x))' = \beta(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot \beta'(x)$$

$$\Rightarrow [\alpha f, \beta g] = (\beta g)' \alpha f - (\alpha f)' \beta g$$

$$= \beta g' \alpha f + g \beta' \alpha f - \alpha f' \beta g - f \alpha' \beta g$$

$$= \alpha \beta \underbrace{(g' f - f' g)}_{[f, g]} + \alpha \underbrace{\langle d\beta, f \rangle}_{L_f \beta} g - \beta \underbrace{\langle d\alpha, g \rangle}_{L_g \alpha} f$$

### Lemma 3.3:

Die Distribution  $\Delta$  sei involutiv und im Punkt  $x_0 \in M$  regulär ( $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , offen). Dann existiert eine Umgebung  $U \subseteq M$  von  $x_0$  und VF  $g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\Delta|_U = \text{span}\{g_1, \dots, g_r\} \quad \text{und} \quad \forall x \in U : [g_i, g_j] = 0 \text{ für } 1 \leq i, j \leq r$$

#### Beweis:

Sei  $r = \dim \Delta(x_0)$ . Dann  $\exists r$  linear unabhängige VF  $f_1, \dots, f_r$  die (lokal)  $\Delta$  aufspannen  $n \times r$ -Matrix

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$$

$\Rightarrow: \Delta = \text{im } F(x)$  und  $\text{rang } F(x) = r$

$\Rightarrow: \exists r \times r$  Teilmatrix  $B(x)$  von  $F(x)$ , die regulär ist. Ohne Einschränkung<sup>1</sup> setze sich  $B$  aus den  $r$  Zeilen zusammen.<sup>2</sup>

Rechtsmultiplikation mit  $B^{-1}$  möglich:  $\Rightarrow$  def. damit VF  $g_1, \dots, g_r$

$$F(x) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} B(x) \\ * \end{pmatrix} \cdot B^{-1}(x) = \begin{pmatrix} I_r \\ * \end{pmatrix} =: (g_1(x), \dots, g_r(x))$$

$$\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_r\} = \text{im } F = \text{im } (F \cdot B^{-1}) = \text{span}\{g_1, \dots, g_r\}$$

Zusätzlich ist  $\Delta$  involutiv, d.h. Es gilt SF  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  mit  $[g_i, g_j](x) = \alpha_1(x)g_1(x) + \dots + \underbrace{\alpha_r(x) \cdot g_r(x)}_{\text{Lemma 3.2}}$

Spezielle Form der VF  $g_i, g_j$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \star \end{pmatrix} = \alpha_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \star \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}$$

Vergleich der ersten  $r$  Zeilen

$$\Rightarrow \alpha_1 \equiv \dots \equiv \alpha_r \equiv 0$$

$$\Rightarrow [g_i, g_j] \equiv 0$$

Satz über die simultane Begründung von VF: Sei  $x_0 \in M$ . Für alle VF  $f_1, \dots, f_r : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  gelte.

1.  $f_1(x), \dots, f_r(x)$  und linear unabhängig
2.  $[f_i, f_j](x) = 0, \quad 1 \leq i \leq r \dots$  für alle  $x$  aus Umgebung von  $x_0$ . Dann existiert ein lokale Diffeomorphismus  $z = T(x)$  und  $T(x_0) = 0$ , so dass

$$= \frac{T_+ f_i(x)}{T'(x) f_i(x)} \Big|_{x=T^{-1}(z)} = \frac{\partial}{\partial z_i} = e_i, \quad 1 \leq i \leq r$$

für alle  $z$  aus einer Umgebung der Null.

#### Beweis:

Dann existiert  $n - r$  welche VF  $f_{r+1}, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (U \subseteq M, \text{ Umgebung von } x_0)$ . So dass  $f_1, \dots, f_n$  in  $U$  linearunabhängig sind.

<sup>1</sup>O.E = Ohne Einschränkung

<sup>2</sup>O.B.d.A = Ohne Beschränkung der Allgemein



## Abbildung $S$

$$x = S(z) := \varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_0)$$

Reihenentwicklung nach  $z$ :

$$x = x_0 + f_1(x_0)z_1 + \dots + f_n(x_0)z_n + O(\|z\|^2). \quad \varphi_t^f(x) = x + f(x)t + O(t^2)$$

Jacobi-Matrix:

$$S'(x) = \left( \underbrace{f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)}_{\text{linear unabhängig, } S'(0) \text{ regulär}} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Satz über Umkehrfunktion  $\rightarrow S$  ist ein (lokaler) Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung  $z = T(x)$ .

Wegen Bedingung 2 gilt für  $i = 1 \dots r$

$$\begin{aligned} S'(z) \underbrace{\frac{d}{dz_i}}_{e_i} &= \frac{\partial}{\partial z_i} S(z) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_i}^{f_i} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_{z_i}^{f_i} \circ \varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_0) \\ &= f_i \left( \varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_0) \right) \\ &= f_i(S(z)) = f_i(x)|_{x=S(z)} \end{aligned}$$

Damit

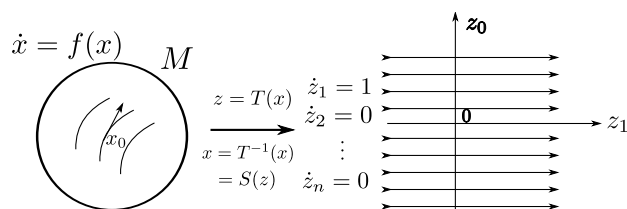
$$S'(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} = f_i(x)|_{x=S(z)} \xrightarrow[T \xleftarrow{S^{-1}}]{S=T^{-1}} \frac{\partial}{\partial z_i} = T'(x)f(x)|_{x=T^{-1}(z)}$$

Folgerung (Begründung von Nichtruhelagen)

Sei  $x_0 \in M : f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein VF mit  $f(x_0) \neq 0$  (keine Ruhelagen)

Dann existiert lokaler Diffeomorphismus  $z = T(x)$ .

$$T'(x)f(x)|_{x=T^{-1}(z)} = \frac{\partial}{\partial z_1} = e_i$$



## Definition:

Eine reguläre Distribution  $\Delta$  mit  $\dim \Delta = r$  heißt integrierbar, wenn es SF  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$  gibt, so dass  $\Delta^\perp = \text{span} \{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}\}$ .

## Satz von Frobenius:

Die Distribution  $\Delta$  sei im Punkt  $x_0$  regulär. Dann gilt  $\Delta$  ist involutiv  $\iff \Delta$  ist integrierbar.

### Beweis (lokal):

$\Delta$  regulär  $\Rightarrow \exists r$  linear unabhängige VF  $f_1, \dots, f_r$  mit  $\Delta = \text{span} \{f_1, \dots, f_r\}$

$\Rightarrow$  Sei  $\Delta$  involutiv  $\xRightarrow{\text{Lemma 3.3}}$  die VF können so gewählt werden, dass  $[f_i, f_j] = 0$  für  $1 \leq i, j \leq r$

### Begradigungssatz:

$\exists$  lokaler Diffeomorphismus

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

mit

$$T'(x)f_i(x)|_{x=T^{-1}(z)} = \frac{\partial}{\partial z_i} = e_i \text{ für } i = 1, \dots, r$$

wodurch VF  $f_1, \dots, f_r$  in Richtung der Einheitsvektoren  $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_r}$  ausgerichtet werden. Die Kovektoren  $dz_{r+1} = e_{r+1}^T, \dots, dz_n = e_n^T$  der dualen Basis.

Sind dann orthogonal:

$$\underbrace{\langle dz_j, \frac{\partial}{\partial z_i} \rangle}_{\substack{e_j^T \\ e_i}} = 0 \quad \begin{matrix} i=1, \dots, r \\ j=r+1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \langle dz_j, \frac{\partial}{\partial z_i} \rangle = \langle dz_j, T'(x)f_i(x) \rangle \\ &= \underbrace{\langle dz_j, T'(x), f_i(x) \rangle}_{e_j^T} = \langle dt_j(x), f_i(x) \rangle \end{aligned}$$

Die KVF  $dt_{r+1}, \dots, dt_n$  sind orthogonal zu den VF, die  $\Delta$  aufspannen, also sind sie im Annihilator.  $T$  ist Diffeomorphismus

$\Rightarrow T'(x)$  ist regulär

$\Rightarrow$  Zeilenvektoren  $dt_i$  sind linear unabhängig

$\lambda_k = t_{r+k}$  für  $k = 1, \dots, n - r$

$\iff 0 = \langle d\lambda_j, f_i(x) \rangle = 0$

$\iff \lambda^\perp = \text{span} \{d\lambda_1, \dots, d\lambda_r\}.$

### Definition:

Die kleinste involutive Distribution, die  $\Delta$  enthält, heißt involutive Abschluß von  $\Delta$ :  $\text{inv}(\Delta)$ .

## 4 übersprungen

# 5 Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung

## 5.1 Eingangs-Ausgangs-Linearisierung eingangsaffiner Systeme

### 5.1.1 Relativer Grad und grundsätzliches Vorgehen

Eingangsaffines System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) \cdot u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

mit

$$\begin{aligned}\text{VF} \quad & f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{SF} \quad & h : M \rightarrow \mathbb{R} \\ & M \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ offen}\end{aligned}$$

Zeitableitungen des Ausgangs:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \left. \frac{d}{dt} h(x(t)) \right|_{(5.1)} \\ &= h'(t) \cdot \dot{x} \\ &= h'(t) \cdot (f(x) + g(x) \cdot u) \\ &= L_f h(x) + L_g h(x) \cdot u\end{aligned}$$

Falls  $L_g h(x) \neq 0$  : STOP

Falls  $L_g h(x) \equiv 0$ ,

$\dot{y}$  hängt nicht explizit von  $u$  ab.

Zweite Zeitableitung des Ausgangs:

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} L_f h(x(t)) \\ &= dL_f h(x) \cdot \underbrace{(f(x) + g(x) \cdot u)}_{\dot{x}} \\ &= L_f^2 h(x) \cdot (L_g L_f h(x)) \cdot u\end{aligned}$$

### Definition 5.1:

System (5.1) hat im Punkt  $p \in M$  den **relativen Grad**  $r$ , wenn

1.  $L_g L_f^k h(x) = 0$  für  $k = 0, \dots, r-2$   
und alle  $x$  aus offener Umgebung von  $p$ .
2.  $L_g L_f^{r-1} h(p) \neq 0$ .

Interpretation: Relativer Grad ist niedrigste Ordnung einer Zeitableitung des Ausgangs von (5.1), die explizit vom Eingang  $u$  abhängt.

### Reglerentwurf (allg. Vorgehen)

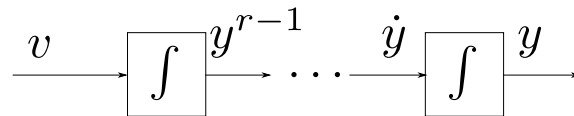
1. Linearisierung durch Rückführung:

$$y^k = L_f h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x)}_{\neq 0} \cdot u$$

$$\stackrel{!}{=} v \dots, \text{neue Eingang} \quad (5.2)$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1}} (-L_f^r h(x) + v) \quad (5.3)$$

Integratorkette:  $y^k = v$



2. Stabilisierung, Rückführung

$$v = - \sum_{i=0}^{r-1} a_i y^{(i)} \quad (5.4)$$

führt auf lineare Differentialgleichung.

$$y^{(r)} + a_r y^{(r-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0.$$

Rückführung in Originalkoord.:

$$y^{(k)} = L_f^k h(x) \text{ für } k = 0, \dots, r-1$$

$$u = - \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \sum_{k=0}^r a_k L_f^k h(x) \text{ mit } a_r := 1. \quad (5.5)$$

Unklar: Was passiert mit  $u - r$  Koord.?

### 5.1.2 Byrnes-Isidori Normalform

System (5.1) habe im Punkt  $p \in M$  den wohldefinierten relativen Grad  $r \leq n$ .

### Lemma 5.1:

In eine Umgebung von  $p$

$$\langle dL_f^i h, ad_{-f}^j g \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i+j < r-1 \\ L_g L_f^{r-1} h(x), & i+j = r-1 \end{cases} \quad (5.6)$$

### Begründung

$$r = 1: \quad i + j \leq r - 1 = 0 \rightarrow i = j = 0$$

$$\langle dL_f^\circ h, ad_{-f}^\circ h \rangle = \langle dh, g \rangle = L_g h$$

$$r = 2: \quad i + j = 1$$

$$i = 1, j = 0: \langle dL_f^1 h, ad_{-f}^\circ g \rangle = \langle dL_f h, g \rangle = L_g L_f h$$

$$i = 0, j = 1: \langle dL_f^\circ h, ad_{-f}^1 g \rangle = \langle dh, [-f, g] \rangle = \langle dh, -[f, g] \rangle$$

$$= -\langle dh, [f, g] \rangle = -L_{[f, g]} h = -\underbrace{(L_f L_g h - L_g L_f h)}_{\equiv 0 \text{ weil } i > 1} = L_g L_f h$$

### Lemma 5.2:

Die Kovektoren  $dh(p), dL_f h(p), \dots, dL_f^{r-1} h(p)$  und linear unabhängig.

### Beweis:

Wegen Lemma 5.1 gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} dh(p) \\ dL_f h(p) \\ \vdots \\ dL_f^{r-1} h(p) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{r \times n}} \cdot \underbrace{(g(p), ad_{-f} g(p), \dots, ad_{-f}^{r-1} g(p))}_{\in \mathbb{R}^{r \times n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & L_g L_f^{r-1} h(p) \\ \vdots & \vdots & \star & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & L_g L_f^{r-1} h(p) & \vdots & \\ \underbrace{L_g L_f^{r-1}}_{\neq 0} h(p) & \star & \dots & \star \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{r \times r}} \quad (5.1)$$

Rang =  $r$  weil  $L_g L_f^{r-1} h(p) \neq 0$

$\Rightarrow$  Kovektor  $dh(p), \dots, dL_f^{r-1} h(p)$  sind linear unabh.

$\Rightarrow$  Vektoren  $g(p), \dots, ad_{-f}^{r-1} h(p)$  sind linear unabh.

$$\begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (b, Ab, \dots, A^{r-1} b) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c^T A^{r-1} b \\ \vdots & & & \\ 0 & & \vdots & \\ c^T A^{r-1} b & \dots & \star & \end{pmatrix}$$

**Lemma 5.3:**

Wir setzen

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &:= h(x) \\ \phi_2(x) &:= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \phi_r(x) &:= L_f^{r-1} h(x)\end{aligned}$$

für  $r < n$  gibt es  $n - r$  weitere Funktionen  $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ , so dass

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

im Punkt  $p$  eine reguläre Jacobimatrix besetzt. Die zusätzliche Funktionen  $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$  können so gewählt werden, dass

$$L_g \phi_i(x) = d\phi_i(x) \cdot g(x) = 0, \quad i = r+1, \dots, n \quad (5.8)$$

für alle  $x$  aus einer Umgebung von  $p$ .

**Hinweis:**

(5.8) ist eine partielle Dgl.!

**Beweis:**

Es gilt  $g(p) \neq 0$ , weil rel. Grad wohldefiniert ist. Damit ist die Distribution  $\Delta = \text{span}[g]$  regulär, und weil 1.-dim. auch involutiv:  $[g, g] = g'g = g'g \equiv 0$ .

**Satz von Frobenius:**

Es existieren  $n - 1$  SF  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  mit

$$\text{span}[d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1}] = \Delta^\perp. \quad (5.9)$$

Wir wollen zeigen:  $\dim(\underbrace{\Delta^\perp}_{\dim \Delta^\perp = n-1} + \underbrace{\text{span}[dh, \dots, dL_f^{r-1}h]}_{\dim(\cdot)=r}) = n$  im Punkt  $p$ .

Gleichbedeutend

$$\Delta^\perp + \text{span}[dh, \dots, dL_f^{r-1}h] = (\mathbb{R}^n)^* \quad (*)$$

Orthogonales Komplement

$$\underbrace{\Delta^\perp}_{\text{span}[g]} \cap \text{span}[dh, \dots, dL_f^{r-1}h]^\perp = [0] \quad (**)$$

Angenommen, (\*\*) gilt nicht, d.h.

$$\underbrace{\Delta(p)}_{\text{span}[g(p)]} \cap \underbrace{\text{span}[dh, \dots, dL_f^{r-1}h]^\perp}_{\text{Annihilator}} \neq [0]$$

Dann muss  $g(p)$  zum Annihilator gehören. Das ist nicht der Fall.

$$\langle dL_f^{r-1}h(p), g(p) \rangle = L_g L_f^{r-1}h(p) \neq 0$$

Widerspruch: Damit gilt (\*\*) und damit (\*)

Wegen Lemma 5.1

$$\dim \text{span} [dh, \dots, dL_f^{r-1}h] = r,$$

andererseits wegen (\*):

$$\dim \text{span} [dh, \dots, dL_f^{r-1}h, d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1}] = 0$$

Von den SF  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  kann man  $n - r$  zu Ergänzung der Basis wählen, O.E.  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$  :

$$\dim \text{span} [\underbrace{dh, \dots, dL_f^{r-1}h}_r, \underbrace{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}}_{n-r}] = n$$

Folglich ist Jacobimatrix

$$\phi'(p) = \begin{pmatrix} dh(p) \\ dL_f^{r-1}h(p) \\ d\lambda_1(p) \\ d\lambda_{n-r}(p) \end{pmatrix}$$

regulär. Wegen (5.9) folgt (5.8)

### Satz 5.1:

Die in Lemma 5.3 definierte Abbildung  $\phi$  ist ein lokaler Diffeomorphismus, mit dem System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

in die Byrnes-Isidori-Normalform überführt wird:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= \alpha(z) + \beta(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r+1} &= q_1(z) \\ \dot{z}_n &= q_{n-r}(z) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

### Beweis:

Bei wohldefinierten relativen Grad  $r$  ist  $\phi'(p)$  regulär (Lemma 5.3)

$\Rightarrow z = \phi(x)$  ist lokaler Diffeomorphismus



- a) 1.TS:  $z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1}h(x)$ ,  $i = 1, \dots, r$   
Für  $i = 1, \dots, r-1$  gilt:

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \frac{d}{dt}\phi_i(x) = \phi'_i(x) \cdot \dot{x} \\ &= dL_f^{i-1}h(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\ &= L_f^i h(x) + \underbrace{L_g L_f^{i-1} h(x)}_{\equiv 0 \text{ weil } i < r} u \\ &= \phi_{i+1}(x) = z_{i+1}\end{aligned}$$

Für  $i = r$  gilt:

$$\begin{aligned}\dot{z}_r &= \frac{d}{dt}\phi_r(x) = \phi'_r(x) \cdot \dot{x} \\ &= dL_f^{r-1}h(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\ &= L_f^r h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x)}_{\neq 0} u\end{aligned}$$

T.S in (5.10):

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= L_f^r h(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ \beta(z) &= L_g L_f^{r-1} h(x)|_{x=\phi^{-1}(z)}\end{aligned}$$

- b) 2.TS :  $z_i = \phi_i(x)$ ,  $i = r+1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= \frac{d}{dt}\phi_i(x) = d\phi_i(x)\dot{x} = d\phi_i(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\ &= L_f \phi_i(x) + \underbrace{L_g \phi_i(x)}_{\equiv 0 \text{ wegen (5.8)}} \cdot u = L_f \phi_i(x) =: q_{i-r}(z)|_{z=\phi(x)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow q_i(z) = L_f \phi_{i+r}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)}.$$

Sei  $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow r \\ \leftarrow n-r \end{matrix}$  Komponenten Normalform (5.10):

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + b \cdot (\alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi, \eta)u) \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) \\ y &= c^T \xi\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c^T = (0, \dots, 1)$$

### 5.1.3 Stabilisierung einer Ruhelage

Im Punkt  $p \in M$  gelte:

$$\begin{aligned}f(p) &= 0 && \text{Ruhelage} \\ h(p) &= 0.\end{aligned}$$

Transformation  $\phi$  kann so gewählt werden, dass  $\phi(p) = 0$ . Für  $n = 0$  ist dann  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  ebenfalls eine Ruhelage.

- a) Linearisierende Rückführung für 1.TS:

$$u = \frac{1}{\beta(\xi, \eta)}(v - \alpha(\xi, \eta)) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}(v - L_f^r h(x))$$

liefert für (5.11) :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + b \cdot v && \text{lineares System} \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) && \text{interne Dynamik} \\ y &= c^T \xi\end{aligned}\tag{5.12}$$

- b) Stabilisierung des 1.TS: Zustandsrückführung

$$\begin{aligned}v &= k^T \xi, \quad k^T = (k_0, \dots, k_{r-1}) \\ \dot{\xi} &= (A - bk^T)\xi\end{aligned}$$

mit

$$A - bk^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & \\ -k_0 & -k_1 & \dots & -k_{r-2} & -k_{r-1} \end{pmatrix}$$

Frobenius-Regelmatrix mit charakteristischen Polynom

$$\det(sI - (A - bk^T)) = k_0 + k_1 s + \dots + k_{r-1} s^{r-1} + s^r\tag{5.13}$$

Originalkoordinaten:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= h(x), \xi_2 = L_f h(x), \dots, \xi_r = L_f^{r-1} h(x) \\ v &= -k^T \xi = -\sum_{i=1}^r r k_{i+1} \xi_i = -\sum_{i=0}^{r-1} k_i L_f^i h(x)\end{aligned}$$

Zustandsrückführung

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}(v - L_f^r h(x)) = -\frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \sum_{i=0}^r k_i L_f^i h(x) \quad \text{mit } k_r := 1\tag{5.14}$$

- c) Interne Dynamik 2.TS:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A - bk^T)\xi \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{5.15}$$

hat bei  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  ebenfalls eine Ruhelage. Stabilität des Gesamtsystems wird von 2.TS in (5.15) bestimmt. Autonomes System

$$\dot{\eta} = q(0, \eta)\tag{5.16}$$

Die Dynamik von (5.16) heisst **Nullodynamik (zero dynamics)**

$$\begin{aligned}\xi = 0 &\iff y = 0, \dot{y} = 0, \dots, y^{r-1} = 0 \\ &\iff y \equiv 0\end{aligned}$$

Das System heisst **minimalphasig**, wenn die Ruhelage  $\eta = 0$  von (5.16) asymptotisch stabil ist.

## Satz 5.2 (Stabilisierung einer Ruhelage):

System (5.1) habe in einer Ruhelage  $p \in M$  den rel. Grad  $r$ . Ausserdem sei das System minimalphasig und alle Wurzeln des char. Polynoms (5.13) liegen in der offenen linken Halbebene. Verwendet man die Zustandsrueckfuehrung (5.14), dann ist die Ruhelage  $p$  asymptotisch stabil

### 5.1.4 Stabilisierung in eine Ausgangstrajektorie

Ausgangsreferenztrajektorie

$$y_{\text{ref}} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \dots$$

$r$ -mal stetig diffbar.

**Bisher:**  $y \rightarrow 0$  mit  $u = \frac{1}{\beta(\xi, \eta)}(-\alpha(\xi, \eta) - k^T \xi)$

für  $t \rightarrow \infty$

**Jetzt:**  $y \rightarrow y_{\text{ref}}$  : Ansatz:  $u = \frac{1}{\beta(\xi, \eta)}(-\alpha(\xi, \eta) + y_{\text{ref}}^{(r)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} k_i(y_{\text{ref}}^{(i)} - \xi_{i+1}))$

1.TS

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\ \dot{\xi}_r &= y_{\text{ref}}^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} k_i(y_{\text{ref}}^{(i)}(t) - \xi_{i+1}) \\ y &= \xi_1\end{aligned}\tag{5.17}$$

Fehler zwischen System. und Regerezenzangang

$$\xi(t) := y(t) - y_{\text{ref}}(t)$$

Für die Normalform-Koord. gilt:

$$\xi_i = y^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, r$$

letzte Zeile des 1.TS:

$$y^{(r)} = y_{\text{ref}}^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-1} k_i \xi^{(i)}$$

$\iff$  lineare Dgl.

$$k_0 \xi + k_1 \dot{\xi} + \dots + k_{r-1} \xi^{(r-1)} + \xi^{(r)} = 0.$$

Rückführung (5.17) in  $x$ -Koord.

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \sum_{i=0}^r r_i (y_{\text{ref}}^{(i)}(t) - L_f^{i-1} h(x)) \quad \text{mit } r_r = 1$$

## 5.2 Eingangs-Ausgangs-Linearisierung für allg. nichtlineare Systeme

### 5.2.1 Relativer Grad und Eingangs-Ausgangs-Normalform

System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.20}$$

eingangsabhängiges

$$\text{VF } F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{SF } h : M \rightarrow \mathbb{R}, \text{ glatt}$$

$$M \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ offen}$$

### Definition 5.2:

System (5.20) hat im Punkt  $p \in M$  den (verallg.) relativen Grad  $r$ , falls

1.

$$\frac{\partial L_F^k h(x, u)}{\partial u} = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, r-1.$$

alle  $x$  aus Umgebung von  $p$  und alle  $u$ ,

2.

$$\frac{\partial L_F^r h(p, u)}{\partial u} \neq 0$$

Interpretation:

$$y = h(x)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \dot{x}$$

$$= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot F(x, u)$$

$$= L_F h(x, u)$$

$$\frac{\partial L_F h(x, u)}{\partial u} \begin{cases} \neq 0 & , r = 1 \\ \equiv 0 & \text{weiter diff.} \end{cases}$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} L_F h(x, u)$$

$$= \frac{\partial L_F h}{\partial x} \dot{x} + \underbrace{\frac{\partial L_F h}{\partial u}}_{\equiv 0 \text{ für } r > 1} \dot{u}$$

$$= dL_F h \cdot F(x, u)$$

$$= L_F^2 h(x, u) \equiv L_F^2 h(x)$$

$$y^{r-1} = L_F^{r-1} h(x, u) \equiv L_F^{r-1} h(x)$$

$$y^{(r)} = L_F^r h(x, u) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial L_F^r h(x, u)}{\partial u} \neq 0$$

### Kurzfassung:

$$r = \arg \min_R \left\{ \frac{\partial}{\partial u} L_F^R h(x, u) \neq 0 \right\}$$

### Lemma 5.4:

System (5.20) habe im Punkt  $p \in M$  den (verallg.) rel. Grad  $r$ . Dann sind die Kovektoren

$$dh(p), dL_F h(p), \dots, dL_F^{r-1} h(p)$$

linear abhängig.

**Beweis:**

Indirekt, Angenommen,  $dL_F^{r-1}h(p)$  wäre von den Kovektoren  $dh(p), \dots, dL_F^{r-2}h(p)$  linear abhängig, d.h. es gilt Konstanten  $c_R \in \mathbb{R}$  mit

$$dL_F^{r-1}h(p) \cdot F(p, u) = \sum_{k=0}^{r-2} C_k \cdot dL_F^k h(p) \cdot F(p, u)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} L_F^r h(p, u)}_{\neq 0} = \sum_{k=0}^{r-2} C_k \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} L_F^{k+1} h(p)}_{\equiv 0}$$

also doch linear unabhängig.

**Satz 5.3:**

System (5.20) habe im Punkt  $p \in M$  den rel. Grad  $r$ . Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus  $z = (\xi, \eta) = \phi(x)$ , der (5.20) in die **Eingangs-Ausgangs-Normalform** überführt:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\ \dot{\xi}_r &= \alpha(\xi, \eta, u) \text{ mit } \frac{\partial \alpha}{\partial u} \neq 0 \\ \dot{\eta}_1 &= q_1(\xi, \eta, u) \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_{n-r} &= q_{n-r}(\xi, \eta, u) \\ y &= \xi \end{aligned} \quad (5.21)$$

**Beweis:**

$\phi_i(x) = L_F^{i-1}h(x)$  für  $i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow d\phi_1, \dots, d\phi_r$  sind in  $p \in M$  Lemma 5.4 linear unabhängig.

$\Rightarrow$  Es gilt  $n - r$  weitere (glatte) Funktionen  $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ , so dass  $d\phi_1, \dots, d\phi_n$  in  $p \in M$  linear unabhängig, d.h. Jacobimatrix  $\phi'$  von

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

ist in  $p \in M$  regulär  $\Rightarrow \phi$  ist lokaler Diffeomorphismus

Neue Koord:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \phi_1(x), & \eta_1 &= \phi_{r+1}(x) \\ &\vdots & & \\ \xi_r &= \phi_r(x), & \eta_{n-1} &= \phi_n(x) \end{aligned}$$

d.h.  $(\xi, \eta) = \phi(x)$ .

## 1.TS:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \frac{d}{dt}\xi_i & i = 1, \dots, r \\ &= \frac{d}{dt}\phi_i(x) \\ &= \frac{d}{dt}L_F^{i-1}h(x) \\ &= dL_F^{i-1}h(x)F(x, u) \\ &= L_F^i h(x, u) \\ &= \begin{cases} \xi_{i+1} & \text{für } i = 1, \dots, r-1 \\ \alpha(\xi, \eta, u) & \text{für } i = r \end{cases}\end{aligned}$$

mit  $\alpha(\xi, \eta, u) = L_F^r h(\phi^{-1}(\xi, \eta), u)$ .

## 2.TS:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_j &= \frac{d}{dt}\eta_j, & j = 1, \dots, n-r \\ &= \frac{d}{dt}\phi_{r+j}(x) \\ &= d\phi_{r+j}(x) \cdot \dot{x} \\ &= d\phi_{r+j} \cdot F(x, u) \\ &= L_F \phi_{r+j}(x, u)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$q_j(\xi, \eta, u) = L_F \phi_{r+j}(\phi^{-1}(\xi, \eta), u).$$

## Folgerung:

$\alpha$  sei stetig diffbar. und  $\xi_0 \in \mathbb{R}^r, \eta_0 \in \mathbb{R}^{n-r}, u_0 \in \mathbb{R}$  und

$$v_0 := \alpha(\xi_0, \eta_0, u_0).$$

wegen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \neq 0$$

existiert eine stetig diffbare Abbildung  $\alpha^{-1}$  mit

$$\alpha(\xi, \eta, \alpha^{-1}(\xi, \eta, v)) = v$$

für alle  $\xi, \eta, v$  aus einer Umgebung von  $\xi_0, \eta_0, v_0$ .

$$v \stackrel{!}{=} \alpha(\xi, \eta, u) \iff u = \alpha^{-1}(\xi, \eta, v)$$

Resultierendes 1.TS:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
 \dot{\xi}_r &= v \\
 y &= \xi_1 \\
 \Leftrightarrow \dot{\xi} &= A\xi + \underbrace{b}_{=e_n} v \\
 y &= \underbrace{c^T}_{=e_1^T} \xi
 \end{aligned}$$

Zustandsrückführung zur Stabilisierung wie bei Byrnes-Isidori NF:

$$\begin{aligned}
 v &= -K^T \xi, \text{ mit } k = (k_0, \dots, k_{r-1})^T \\
 &= -\sum_{i=0}^{r-1} k_i L_F^i h(x)
 \end{aligned}$$

### Beispiel Schwebende Kugel im Magnetfeld:

Eingang: Strom  $I$

Ausgang: Position  $y = l - l_0$

Bewegungsgl:  $\ddot{l}m = mG - F$

Ansatz Kraft:  $F = h \frac{I^2}{l^2}$  Zustandsraummodell mit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ \dot{l} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ G - \frac{\rho}{m} \cdot \frac{I^2}{x_1^2} \end{pmatrix} =: F(x, I)$$

$$y = h(x) = l - l_0 = L_F^0 h(x)$$

$$\dot{y} = \dot{l} = \dot{x}_1 = x_2 = L_F^1 h(x)$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}_2 = G - \frac{\rho}{m} \cdot \frac{I^2}{x_1^2} = L_F^2 h(x, I) \quad r = 2$$

$$\stackrel{!}{=} v$$

Linearisierende Rückführung:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \frac{m}{\rho} x_1^2 (G - v) \\
 I &= \underbrace{\pm}_{\substack{\text{Vorzeichen} \\ \text{Strom egal}}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{\rho} x_1^2 (G - v)}}_{\substack{\text{im für } \geq 0 \text{ def.}}}
 \end{aligned}$$

Stabilisierung

$$v = -k_0 x_1 - k_1 x_2; \quad k_0, k_1 > 0$$

Stotodola-Bed.

Charakt. Polynom

$$s^2 + k_1 s + k_0$$

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{\frac{m}{\rho} x_1^2 (G + a_0 y + a_1 \dot{y})} \\
&= \sqrt{\frac{m}{\rho} l^2 (G + a_0 (l - l_0) + a_1 \dot{l})}
\end{aligned}$$

mit modifizierter Wurzelfkt. image1712

### 5.2.2 Byrnes-Isidori-NF für nicht eingangsaffine Systeme

Frage: Kann die Transformation  $z = (\xi, \eta) = \phi(x)$  von (5.20) in die E/A -NF (5.21) so gewählt werden, daß das 2.TS nicht explizit vom Eingang  $u$  abhängt?

#### Byrnes-Isidori-NF

nichtaffine Systeme:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= \alpha(\xi, \eta, u) \\
\dot{\eta}_1 &= q_1(\xi, \eta) \\
&\vdots \\
\dot{\eta}_{n-r} &= q_{n-r}(\xi, \eta) \\
y &= \xi_1
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Alternative Darstellung von (5.22)

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_r \frac{\partial}{\partial z_{r-1}} + \alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial z_r} \\
&+ q_1(z) \frac{\partial}{\partial z_{r+1}} + \cdots + q_{n-r} \frac{\partial}{\partial z_n}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

#### Nichtaffines System

<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= F(x, u) \\
y &= h(x)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

#### Byrnes-Isidori-NF

für nichtaffine Systeme:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= \alpha(\xi, \eta, u) = \frac{\partial \alpha(\xi, \eta, u)}{\partial u} \neq 0 \\
\dot{\eta}_1 &= q_1(\xi, \eta) \\
y &= \xi_1
\end{aligned} \tag{5.22}$$

---

<sup>1</sup>07.01.2015



Alternative Darstellung von (5.22) :

$$\dot{z} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + z_r \frac{\partial}{\partial z_{r-1}} + \alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial z_r} + q_1(z) \frac{\partial}{\partial z_{r+1}} + \dots + q_{n-r}(z) \frac{\partial}{\partial z_n} \quad (5.23)$$

- $n - 1$  eingangsunabhängige Vektorfeld VF
- genau 1 eingangsabhängige Skalarfeld SF

SISO-System (5.20) kann für große  $m$  immer folgendermaßen dargestellt werden:

$$\dot{x} = F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \varrho_i(x, u)$$

mit eingangsunabhängigen Skalarfeldern  $\varrho_1, \dots, \varrho_m$  und linear unabhängigen VF  $g_1, \dots, g_m$ .  
Transformation  $z = \phi(x)$  liefert

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= \frac{d}{dt} \phi_j(x) \\ &= d\phi_j(x) \cdot \dot{x} \\ &= d\phi_j(x) \cdot (f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \varrho_i(x, u)) \quad \text{für } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Damit der Eingang nur bei einem SF auftritt ( $Nr, R$ ), muss für alle  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{R\}$  gelten.

$$d\phi_j(x) \cdot (g_1(x), \dots, g_m(x)) \equiv (0, \dots, 0)$$

- sind  $m$  partielle Dgln. pro Komponente  $\phi_j$
- Satz von Frobenius:  $\exists$  höchstens  $n - m$  unabhängige Lösungen
- Für Invertierbarkeit sind  $n - 1$  SF  $\phi_j$  mit l.n. Gradienten notwendig  $\Rightarrow$  Es muß  $m = 1$  gelten.

#### Satz 5.4:

System (5.20) habe den rel. Grad  $r$ . Es ex. genau dann eine Zustandstransformation in die Byrnes-Isidori-NF (5.20), wenn das System (5.20) in die Form

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \varrho(x, u) \quad (5.24)$$

mit einem eingangabh. SF  $\varrho$  und  $g(x) \neq 0$  überführt werden kann.

Beweisskizze:  $\Rightarrow$  analog BI-NF für affine System (5.1), insb. ist  $\text{span}\{g\}$  involutiv.

$\Leftarrow$  Es gäbe die BI-NF (5.22). Rücktransformation von (5.23) liefert (5.24).

#### Bsp. (Rakete):

Zustand  $x = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})^T$ ,

Eingang  $u = \nu$  Antriebswinkel

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ -gR^2/x_1^2 + x_1 x_4^2 \\ x_4 \\ -2x_2 x_4 / x_1 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ F/m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g_1(x)} \cos u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fm_1/x_1 \end{pmatrix}}_{g_2(x)} \sin u$$

$\dim \text{span} \{g_1, g_2\} = 2$

$\Rightarrow$  System kann NICHT in BI-NF überführt werden.

### Alternative Herangehensweise:

Überführung des nichtaffinen Systems  $\dot{x} = F(x, u)$  durch Erweitern des Zustandes in ein eingangsauffin System.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u) \\ \dot{u} &= w\end{aligned}$$

image701

neuer Zustand  $\tilde{x} := \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$   
neuer Eingang  $\tilde{u} := w$ .

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\overbrace{x, u}^{\tilde{x}}) \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(\tilde{x}) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}$$

## 5.3 Exakte Eingangs-Zustands-Linearisierung

Bisher: System mit rel. Grad  $r \leq n \Rightarrow$

- $r$ -dim. lineares Teilsystem
- $(n - r)$ -dim. (in der Regel) nichtlineares TS

### Frage:

Wann kann ein System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5.1)$$

vollständig in ein lineares System überführt werden?

### Feststellung:

Das Problem der sog. **Eingangs-Zustands-Linearisierung** ist lösbar, wenn es eine Ausgangsabh.  $h$  (d.h. ein SF) gibt, für welches das System den rel. Grad  $n$  besitzt.

Ein solches System heißt **eingangs.-zustands-linearisierbar**.

Nach Def. 5.1 muß für  $r = n$  gelten:

$$\begin{aligned}L_g L_f^i h(x) &\equiv 0 && \text{für } 0 \leq i \leq n - 2 \\ L_g L_f^{n-1} h(p) &\neq 0\end{aligned} \quad (5.25)$$

### Lemma 5.1:

Für rel. Grad  $r$

$$\langle dL_f^j h, ad_{-f}^i g \rangle = \begin{cases} L_g L_f^{r-1} h & \text{für } i + j = r - 1 \\ 0 & \text{für } i + j < r - 1 \end{cases}$$

Für  $j = 0$ :

$$\underbrace{\langle dh, ad_{-f}^i g \rangle}_{\equiv L_{ad_{-f}^i g} h} = \begin{cases} L_g L_f^{r-1} h & \text{für } i = r - 1 \\ 0 & \text{für } i < r - 1 \end{cases}$$

Gleichwertige Formalisierung von Gl. (5.25) :

$$\begin{aligned} L_{ad_{-f}^i g} h(x) &\equiv 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq n-2 \\ L_{ad_{-f}^{n-1} g} h(p) &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Die ersten  $n-1$  Gln. von (5.26):

$$dh(x) \cdot (g(x), ad_{-f} g(x), \dots, ad_{-f}^{n-2} g(x)) \equiv (0, 0, \dots, 0) \quad (5.27)$$

partielle Dgl. 1.Ordnung in  $h$ .

**Distribution:**

$$\Delta_i(x) = \text{span}\{g(x), ad_{-f} g(x), \dots, ad_{-f}^{i-1} g(x)\}$$

**Satz 5.5:**

Wir betrachten System (5.1) in Punkt  $p \in M$ . Es existiert genau ein Ausgang mit rel. Grad  $n$ , wenn

a)  $\Delta_{n-1}$  involutiv ist und

b)  $\dim \Delta_n(p) = n$

**Beweis:**

$\Leftarrow$  Bedingungen a) und b) seien erfüllt.

Wegen (b) ist auch  $\Delta_{n-1}$  regulär mit  $\dim \Delta_{n-1} = n-1$ ,

Wegen (a) auch involutiv Satz von Frobenius:

Es ex. ein SF  $h$ , welches alle VF von  $\Delta_{n-1}$  annihiliert, d.h.

$$0 \equiv \langle dh, ad_{-f}^i g \rangle = L_{ad_{-f}^i g} h. \quad \text{für } i = 0, \dots, n-2 \quad (*)$$

Außerdem gilt

$$0 \neq \langle dh, ad_{-f}^{n-1} g \rangle(p) = L_{ad_{-f}^{n-1} g} h(p), \quad (**)$$

denn sonst würde  $dh$  Annihilator von  $n$  linear unabh. VF seinen zu Dimensionsformel

$$(\dim \Delta + \dim \Delta^\perp = n)$$

Lineares System:

$$\dot{x} = \underbrace{Ax}_{f(x)} + \underbrace{h}_{g(x) \dots \text{konst}} u$$

$$\begin{aligned} ad_{-f} g &= [-f, g] = -[f, g] \\ &= -(\underbrace{g'}_{\equiv 0} f - f' g) \\ &= f' \cdot g = Ab \end{aligned}$$

$$ad_{-f}^k g = A^k b$$

$$\Rightarrow \Delta_n = \text{span} \{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$$

$$\Rightarrow \Delta_n = \text{im} Q_s$$

Steuerbarkeitsmatrix (Kalman)

$$Q_s = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$$

Für ein lin. System existiert genau dann ein Ausgang mit rel. Grad  $n$  das System steuerbar ist. Bedingung b) bedeutet, dass die **Steuerbarkeits** bzw. **Erreichbarkeitsmatrix**

$$Q_s(x) = (g(x), \text{ad}_{-f}g(x), \dots, \text{ad}_{-f}^{n-1}g(x))$$

regulär ist.

**Folgerung:**

Für ein System mit  $n = 2$  ex. genau dann ein Ausgang mit rel. Grad  $r = n$ , wenn

$$Q_s = (g(x), \text{ad}_{-f}g(x))$$

regulär ist.

**Begründung:**

- $\dim \Delta_n = \text{im } Q_s = n$  weil regulär
- $\Delta_{n-1} = \text{span}\{g\}$  ist als 1.-dim Distribution involutiv ( $[g, g] \equiv 0$ )

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta(z)u \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\alpha(z) = L_f^n h(x)$$

$$\beta(z) = L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0.$$

Für rel. Grad  $r = n$  geht die Byrnes-Isidori-NF (5.10) in die **nichtlineare Regelungsnormalform (controller canonical form)** über:

**Satz 5.6:**

Für ein allg. nichtlineare System

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{5.29}$$

mit VF  $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , glatt,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sind folgende Aussagenäquivalent.

- System (5.29) ist eingangszustandslinearisierbar,
- Es existiert ein eingangsabh. SF  $\varrho$ , so daß (5.29) in die Form

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\varrho(x, u)$$

überführt werden kann, so daß System  $(f, g)$  eingangs-zustands linearisierbar ist.

(c) Das erweiterte System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(u, w) \\ \dot{u} = w\dot{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} F(x, u) \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(\tilde{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(\tilde{x})}\end{aligned}$$

ist eingangs-zustand

## 5.4 Relativer Grad und Flachheit im Eingrößenfall

Def.:

Das Eingrößensystem

$$\dot{x} = F(x, u)$$

heißt **(differentiell) flach**, falls ein SF  $\lambda : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so daß für

$$z_1 = \lambda(x) \quad \text{flacher Ausgang}$$

glatte Funktion  $\psi, \theta$  existiert, so daß

$$\begin{aligned}x &= \psi(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(n-1)}) \\ u &= \theta(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(n)}).\end{aligned}$$

**Satz 5.7:**

Ein System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{5.1}$$

ist genau dann flach, wenn es exakt eingangs-zustands-linearisierbar ist, d.h. wenn es ein SF

$$\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt, so daß das System den rel. Grad  $n$  besitzt.

Koordin. -Transformation kann direkt angegeben werden.

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ z_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ L_f \lambda(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \lambda(x) \end{pmatrix} = \phi(x)$$

Umkehrabb.

$$x = \psi(z)$$

Jakobimatrizen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \psi'(z)$$

sind regulär ( $\Rightarrow \phi, \psi$  sind Diffeomorphismen)

**Satz 5.8 (Hagemager, Zeitz, 2004):**

Wir betrachten System (5.1) mit 2 Ausgängen:

$$y = h(x) \dots \text{rel. Grad } r \text{ (Systemausgang)}$$

$$z_1 = \lambda(x) \dots \text{rel. Grad } n \text{ (flacher Ausgang)}$$

Dann kann der Systemausgang wie

$$y = \varrho(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(n-r)}).$$

**Beweis:**

Relativer Grad  $n$  von  $\lambda$  impliziert (Lemma 5.1/5.2):

$$\langle dL_f^j \lambda, ad_{-f}^i g \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i+j < n-1 \\ L_g L_f^{n-1} \lambda & i+j = n-1 \end{cases}$$

Also gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d\lambda \\ dL_f \lambda \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} \lambda \end{pmatrix}}_{\frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(x)} \cdot (g, ad_{-f} g, \dots, ad_{-f}^{n-1} g) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & L_g L_f^{n-1} \lambda \\ \vdots & & \star \\ 0 & & \star \\ L_g L_f^{n-1} \lambda & \star & \star \end{pmatrix}}_{\text{regulär}} \quad (*)$$

Inverse einer rechten unteren  $\Delta$ -Matrix ist eine linke obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \vdots & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Multiplikation von (\*) von links mit  $\frac{\partial x}{\partial z}$  und von rechts mit der Inversen aus (\*\*):

$$(g, ad_{-f} g, \dots, ad_{-f}^{n-1} g) \cdot \begin{pmatrix} \star & \dots & \star \\ \vdots & & \star \\ \star & & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial z} = \psi'(z)$$

Für gilt wegen Lemma 5.1:

$$\langle L_f^j h, \text{verpasst} \rangle$$

Damit

$$dh \cdot (g, ad_{-f} g, \dots, ad_{-f}^{n-1} g) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, \underbrace{\overset{\neq 0}{*}, \dots, 0}_{n-r+1})$$

d.h. die Ausgangsabb.  $h$  hängt nur von den ersten  $n-r+1$  Komponenten von  $z$  ab, d.h. von

$$z_1, z_2 = \dot{z}_1, \dots, z_{n-r+1} = z_1^{(n-r)}$$

Ergänzung zur Eingangs-Zustands-Linearisierung:

$$L_g h(x) = 0, L_{ad_{-f} g} h(x) = 0, \dots, L_{ad_{-f}^{n-2} g} h(x) = 0 \quad (I)$$

und

$$\underbrace{L_{ad_{-f}^{n-1}g}h(x)}_{=L_gL_f^{n-1}h(x)=\beta(z)\neq 0} \neq 0 \quad (II)$$

Bisher: Nutzung von Bed. (I), führt auf partielle Dgl. verpasst

Jetzt: Falls  $\beta$  bekannt, Festlegung  $1 \equiv \beta(z) = L_gL_f^{n-1}h(x)$  Bed (I) + (II) ( $n$  Dgl.):

$$\begin{aligned} dh(x) \cdot \underbrace{(g(x), ad_{-f}g(x), \dots, ad_{-f}^{n-1}g(x))}_{=Q_s(x), n \times n} &= e_n^T \\ \iff dh(x) &= e_n^T Q_s^{-1} \end{aligned}$$

$Q_s$  regulär

Vorgehen:

- Berechnung der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

$$w(x) = e_n^T Q_s^{-1}(x)$$

- –  $w$  geschlossen?  
– verpasst

# 6 Beobachterentwurf

## 6.1 Beobachtbarkeit

System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) & , x(0) &= x_0 \in M \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{6.1}$$

$M \subset \mathbb{R}^n$  offen,

$$\begin{aligned}VF : f : M &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \varphi \dots \text{Fluss} \\ SF : h : M &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Def. 6.1:**

Gegeben sei (6.1) und  $T > 0$ . Zwei Anfangszustände  $x_a, x_b \in \mathbb{R}, x_a \neq x_b$ , heissen **nichtunterscheidbar**, wenn  $\forall t \in [0, \tau] : h(\varphi_t(x_a)) = h(\varphi_t(x_b))$ .

<sup>1</sup> Andernfalls heißen die Zustände **unterscheidbar**, d.h. wenn  $\exists t \in [0, \tau] : h(\varphi_t(x_a)) \neq h(\varphi_t(x_b))$ .  
image2101

**Def.6.2:**

System (6.1) heißt **(global) beobachtbar**, wenn es in  $\mathbb{M}$  keine nichtunterscheidbaren Zustände gibt.

**Def.6.3:**

System (6.1) heißt **lokal beobachtbar** im Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ , wenn es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, die keine nichtunterscheidbaren Zustände enthält. System heißt **lokal beobachtbar**, wenn es für alle  $x_0 \in \mathbb{M}$  lokal beobachtbar ist.

**Motivation:**

Zwei analyt. Kurven stimmen überein, wenn alle Taylorkoeff. gleiche Potenz übereinstimmen, statt Taylorkoeff: Ableitungen.

Lie- Reihe:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x_0) \frac{t^k}{k!}$$

---

<sup>1</sup>21.01.2015



**Beobachtbarkeitsabbildung** für  $k \in \mathbb{N}$  :

$$q(x) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h(x) \end{pmatrix}$$

$q(x_a) \neq q(x_b) : x_a$  und  $x_b$  sind unterscheidbar.

Injektivität der Beobachtbarkeitsmatrix kann mit Satz über die Umkehrfunktion geprüft werden. Jakobimatrix

$$Q(x) = q'(x) = \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{k-1} h(x) \end{pmatrix}$$

heißt **Beobachtbarkeitsmatrix**.

Heinreichende Bedingung für lokale Beobachtbarkeit:

**Satz 6.1:**

Die Beobachtbarkeitsmatrix  $Q$  habe für ein  $k \in \mathbb{N}$  an der Stelle  $x_0$  den Rang  $n$ . Dann ist das System (6.1) im Punkt  $x_0$  lokal beobachtbar.

## 6.2 High-Gain-Beobachter für autonome Systeme

Die Beobachtbarkeitsmatrix sei für  $k = n$  regulär, Dann ist die Beobachtbarkeitsabbildung  $q$  ein (lokale) Diffeomorphismus

$$z = q(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}$$

der System (6.1) in die Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= \alpha(z) \quad \text{mit } \alpha(z) = L_f^n h(q^{-1}(z)) \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

überführt (**Beobachtbarkeits-NF, observability canonical form**).

Matrix-Darstellung:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\alpha(z) \\ y &= c^T z \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n, c^T = (1, 0, \dots, 0) = e_1^T.$$

Ansatz für Beobachter mit konstanter Beobachterverstärkung  $k \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A\hat{z} = b\alpha(\hat{z}) + k(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= c^T \hat{z}\end{aligned}$$

Beobachtungsfehler  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  genügt der Fehlergleichung

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}} &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\ &= Az + b\alpha(z) - A\hat{z} - b\alpha(\hat{z}) - k(\underbrace{c^T z}_y - \underbrace{c^T \hat{z}}_{\hat{y}}) \\ &= (A - Kc^T)\tilde{z} + b(\alpha(z) - \alpha(\hat{z}))\end{aligned}$$

Punkt  $\tilde{z} = 0$  ist eine Ruhelage der Fehlergleichung.

Stabilität:  $\alpha$  genüge einer Lipschitz-Bed. d.h.

$$\exists \gamma > 0 : |\alpha(z) - \alpha(\hat{z})| \leq \gamma \cdot |z - \hat{z}| = \gamma |\tilde{z}|.$$

Dann existiert eine Beobachterverstärkung  $K \in \mathbb{R}^n$ , so daß die Ruhelage  $\tilde{z} = 0$  der Fehlergleichung exponentiell stabil ist.

Lineare Teil: Mit

$$K = \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ \vdots \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

enthält man das char. Polynom.

$$\det(sI - (A - Kc^T)) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

Implementierung des Beobachters in Originalkoord.:

Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= \frac{d}{dt}\hat{z}(t) &= \frac{d}{dt}q(x(t)) \\ \dot{\hat{x}} &= Q^{-1}(\hat{x}) \cdot \dot{\hat{z}} &= \underbrace{q'(\hat{x}(t))}_{Q(\hat{x}(t))} \cdot \dot{\hat{x}}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \underbrace{Q^{-1}(\hat{x}) \cdot (A\hat{z} + b\alpha(\hat{z}) + k(y - \hat{y}))}_{f(\hat{x})} \\ &= f(\hat{x}) + \underbrace{Q^{-1}(\hat{x})k(y(t) - h(\hat{x}))}_{=: l(\hat{x})}\end{aligned}$$

... vom Schätz-bzw. Beobachterzustand abh. Verstärkung  $l : M \rightarrow \mathbb{R}^n(VF)$

Bsp:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(1 - x_2^2)\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= x_1 = h(x) \Rightarrow dh(x) = (1 \ x) \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 \\ &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2) \\ &= L_f h(x) \Rightarrow dL_f h(x) = (1 - 3x_1^2, -1) \end{aligned} \right\} Q(x) = \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Charakt. Polynom:  $s^2 + p_1 s + p_0$ ,  $p_0, p_1 > 0$

$$l(\hat{x}) = Q^{-1}(\hat{x}) \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}}_{k \in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1(1 - 3\hat{x}_1^2) - p_0 \end{pmatrix}$$

Beobachter:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\hat{x}_2 + \hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2) \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2(1 - \hat{x}_2^2) \end{pmatrix}}_{f(\hat{x})} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1(1 - 3\hat{x}_1^2) - p_0 \end{pmatrix} \cdot (y(t) - \hat{x}_1)$$

## 6.3 High-Gain-Beobachter für nichtautonome Systeme

System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned} \tag{6.2}$$

VF:  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$

SF:  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$

Beobachtbarkeit kann vom Eingangssignal abhängen.

Bsp:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

- a).  $n = 0$  : Ausgangskurve  $y(t) = e^{-t}$ ,  $x_1(0)$  hängt nur von  $x_1$  ab.  
 $\Rightarrow$  nicht beobachtbar!
- b).  $n \neq 0$ : System beobachtbar:

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\ x_2 &= y + \dot{y}\end{aligned}$$

**Satz 6.2:**

Bed. für lokale Beobachtbarkeit bei bel. Eingangssignal: System ist in folgende Form überführbar.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 + \beta_1(z_1)u \\
 \dot{z}_2 &= z_3 + \beta_2(z_1, z_2)u \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta_n(z_1, \dots, z_n)u \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Funktionale Abhängigkeit

$$\begin{aligned}
 &\beta_1(z_1) \\
 &\beta_2(z_1, z_2)
 \end{aligned}$$

Lineare Abhängigkeit

$$\begin{aligned}
 d\beta_1 &\in \text{span} \{dz_1\} \\
 d\beta_2 &\in \text{span} \{dz_1, dz_2\}
 \end{aligned}$$

Transf. von (6.2) durch Beobachtbarkeitsabb.

$$z = q(x), \quad z_i = L_f^{i-1}h(x), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= \frac{d}{dt}h(x) = dh\dot{x} = \underbrace{dh(f)}_{L_f h} + \underbrace{dh(gu)}_{L_g h \cdot u} \\
 \dot{z}_1 &= \frac{d}{dt}L_f h(x) = dL_f h \cdot \dot{x} = dL_f h \cdot (f + gu) \\
 &= \underbrace{L_f h}_{z_2} + \underbrace{L_f^2 h}_{z_3} + \underbrace{L_g L_f h}_{z} u
 \end{aligned}$$

Bed. für Form 6.3

$$dL_g L_f^i h \in \text{span} \{dh, dL_f h, \dots, dL_f^i h\} \quad i = 0, n-2$$

## 6.4 Exakte Linearisierung des Beobachtungsfehlers

System

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= F(x, u) \\
 y &= h(x)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Angenommen,  $\exists$  Koordinatentransformation

$$z = T(x), \quad x = S(z),$$

die System (6.4) in die **Beobachter-Normalform** überführt

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= Az + \alpha(y, u) \\
 y &= c^T z
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

- lineare Ausgang
- lineare Dynamik
- **nichtlineare Eingangs-Ausgangs-Aufschaltung**

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Das Paar  $(A, c^T)$  sei beobachtbar, Form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad c^T = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{Duale Brunovsky Form}$$

Ansatz für Beobachter:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \alpha(y, u) + k \overbrace{(y - \hat{y})}^{\text{Ausgangsfehler}} \\ \hat{y} &= c^T \hat{z} \\ \hat{x} &= S(\hat{z}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$k \in \mathbb{R}^n$  Konstante Beobacherverstärkung

Beobachtungsfehler  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  genügt der Fehlerdgl.:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\ &= Az + \alpha(y, u) - A\hat{z} - \alpha(y, u) - kc^T(z - \hat{z}) \\ &= (A - kc^T)\tilde{z} \quad \dots \text{ist exakt linear!} \end{aligned}$$

Systemmatrix

$$A - kc^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -p_{n-2} \\ 0 & & & \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Frobenius Begleitmatrix}} k = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Beobachter (6.6) ... **Normalform Beobachter** Beobachter (6.6) in  $x$ -Koord.:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \frac{x}{dt} S(\hat{z})|_{(6.6)} \\ &= S'(\hat{z})[A\hat{z} + \alpha(y, u) + k(y - \hat{y})] \\ &= S'(\hat{z})[A\hat{z} + \alpha(\hat{y}, u)] + S'(\hat{z})[\alpha(y, u) - \alpha(\hat{y}, u) + k(y - \hat{y})] \\ &= F(\hat{x}, u) + \underbrace{[T'(\hat{x})]^{-1} \cdot [\alpha(y, u) - \alpha(h(\hat{x}), u) - k(y - h(\hat{x}))]}_{=: R_\infty(\hat{x}, y, u)} \end{aligned}$$

$$z = T(x), \quad x = S(z)$$

$$z = T(S(z)) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$I = T'(x)S'(z)$$

$$\Rightarrow (T')^{-1} = S'$$

Schwierigkeit des Verfahrens:

Existenz bzw. Berechnung der Normalform bzw. der Koord-Transf.

Aufspaltung der rechten Seite von (6.4):

$$F(x, u) = f(x) + g(x, u) \quad (6.8)$$

mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= F(x, 0) \\ g(x, u) &:= F(x, u) - F(x, 0) \end{aligned}$$

### Satz 6.2:

Das System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \quad (6.9)$$

ist genau dann in einer Umgebung eines Punktes  $p \in M \subset \mathbb{R}^n$  durch eine Koord.-Transf.  $z = T(x)$  bzw.  $x = S(z)$  in die Beobachter-Normalform (6.5) überführbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} B1 : & \dim (dh(p), dL_f h(p), \dots, dL_f^{n-1} h(p)) = n, \\ B2 : & [ad_{-f}^i v, ad_{-f}^j v] \equiv 0 \text{ für } 0 \leq i, j \leq n-1, \\ B3 : & [g, ad_{-f}^i v] \equiv 0 \text{ für } 0 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

wobei das Vektorfeld  $v$  die eindeutige definierte Lösung von

$$L_v L_f^i h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, \dots, n-2 \\ 1 & \text{für } i = n-1 \end{cases}$$

### Beweis:

Wir zeigen: B1-B3 sind hinreichend

$$L_v L_f' h(x) = \langle dL_f' h, v \rangle(x)$$

Gl. (6.9) zeilenweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}}_{Q(x)} v(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \quad (6.10)$$

Wegen B1 sind die Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix  $Q$  linear unabhängig

- $Q$  ist in Umgebung von  $p$  invertierbar (regulär)
- 

$$v(x) = Q^{-1}(x)e_n \quad (6.11)$$

$v(x)$  ... Startvektor, letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix  
Aus (6.9) folgt (Lemma 5.1 (5.2)):

$$\begin{pmatrix} dh(p) \\ dL_f h(p) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(p) \end{pmatrix} \cdot (v(p), ad_{-f} v(p), \dots) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & * \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

- $n$  Vektoren  $v(p), ad_{-f} v(p), \dots, ad_{-f}^{n-1} v(p)$  sind linear
- $n$  VF  $v(x), ad_{-f}^{n-1} v(x)$  sind linear unabhängig

Zusammen mit B2

- Satz über simultane Begründung von VF: Es ex. (lokaler) Diffeomorphismus

$$z = T(x), x = S(z) \quad (6.13)$$

mit

$$T_* ad_{-f}^i v = \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} = e_{i+1}$$

bzw.

$$\begin{aligned} ad_{-f}^i v &= S_* \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} = S'(z) \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} \\ &= \frac{\partial S(z)}{\partial z_{i+1}} \end{aligned}$$

System in transformierten Koordn. :

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &= T_* f(x)|_{x=S(z)} \\ \bar{g}(z, u) &= T_* g(x, u)|_{x=S(z)} \\ \bar{h}(z) &= h(x)|_{x=S(z)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ausgangsabb  $\bar{h}$  :

$$\bar{h}(z) = h(S(z))$$

Wegen (6.13) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z_{i+1}} &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z_{i+1}} \\ &= dh(x) \cdot \frac{\partial S(z)}{\partial z_{i+1}} \\ &= dh(x) \cdot ad_{-f}^i v(x) \\ &= \langle dh, ad_{-f}^i v \rangle(x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0, \dots, n-2 \\ 1 & \text{für } i = n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

•

$$d\bar{h}(z) \equiv (0, \dots, 0, 1) = e_n^T = c^T$$

•

$$\bar{h}(z) = z_1 = c^T z.$$

Vektorfeld  $\bar{f}$ : Für  $i = 1, \dots, n-1$  gilt

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} = T_* ad_{-f}^i v \\ &= T_* [-f, ad_{-f}^{i-1} v] \\ &= [-T_* f, T_* ad_{-f}^{i-1} v] \\ &= [-f, \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_i}}_{e_i}], \quad \frac{\partial e_i}{\partial z} = 0 \\ &= \bar{f}' \cdot \frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_i} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Jacobimatrix hat Form

$$\bar{f}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

- Gl. (6.13) für  $i = 0, \dots, n-1$  zusammengefaßt:

$$S'(z) = \underbrace{(v, ad_{-f} v, \dots, ad_{-f}^{n-1} v)(x)}_{TT(x)}|_{x=S(z)}$$

System partieller Differentialgl. 1.Ordnung

Eine Lösung  $S$  von (PDE) ist die Koordinatentrafo.

**Bemerkung:**

- B1 ist Beobachtbarkeitsrangbedingung
- B2 nennt man Involutivitäts oder Integrabilitätsbedingung, ist für reale Systeme nicht erfüllt

**Beispiel:**

Rössler-System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= c + x_3(x_1 - b) \\ y &= \ln x_3, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Chaot. Verhalten für

$$\begin{aligned} a &= 0.55 \\ b &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$



Beobachtbarkeitsmatrix:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ dL_F^2 h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \\ 1 & 0 & -\frac{c}{x_3^2} \\ -\frac{c}{x_3} & -1 & \frac{cx_1x_3 - bcx_3 + 2c^2 - x_3^3}{x_3^3} \end{pmatrix}$$

Startvektor:

$$v = Q^{-1}e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jakobimatrix der Transformation:

$$S'(z) = (v, ad_{-f}v, ad_{-f}^2v)$$

$$\text{Konstante} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -a & 1 - a^2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{lin. VF}$$

Über die Flüße erhält man die Koordn. Trafo:

$$x = S(z) = \begin{pmatrix} z_2 + az_3 \\ -z_1 - az_2 + (1 - a^2)z_3 \\ \exp z_3 \end{pmatrix}$$

$$z = T(x) = \begin{pmatrix} -ax_1 - x_1 + \ln x_2 \\ x_1 - a \ln x_3 \\ \ln x_3 \end{pmatrix}$$