TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik Institut für Regelungs - und Steuerungstheorie

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl. Math. Klaus Röbenack

Nichtlineare Regelungstechnik 2 *

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl. Math. Klaus Röbenack

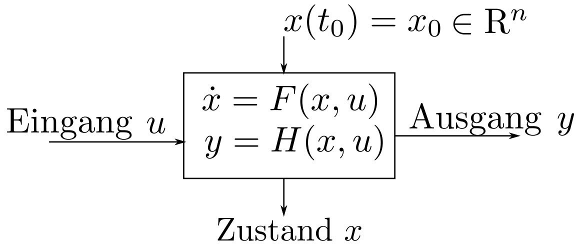
21. Oktober 2015

*Mitschrift von Bolor Khuu

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Nichtlineare Zustandsraummodelle (Systeme gewohnliche Differentialgleichung 1. Ordnung)



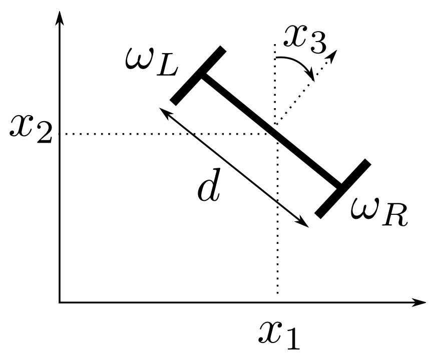
$$F : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^n$$
$$F : \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^p$$

Beispiel für diese Systemklasse

- Starrkörpermodell
- Elektrische Netzwerke
- Chemische Reaktoren mit idealer Durchmischung

1.1 Systembeschreibung, Einführungsbeispiele

Beispiel. 1.1: Kinematisches Modell eines mobilen Roboters



Antrieb: $\omega_L, \omega_R \ldots$ Winkelgeschwindigkeit links, rechts Rad

$$\begin{array}{rcccc} u_1 & = & \frac{r}{2}(\omega_L + \omega_R) & \rightarrow & \text{translatorischer Anteil} \\ u_2 & = & \frac{r}{d}(\omega_L - \omega_R) & \rightarrow & \text{rotatorischer Anteil} \end{array}$$

$r \ldots$ Radius der Räder
$d \ldots$ Achsenlänge

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{transl.Bew}} \cdot u_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{rot.Bew}} \cdot u_2$$

Ausgang: Position in der Ebene

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2$$

Beispiel. 1.2: Hochsteller (Boost Converter)

Spannung in Masche

$$L\dot{I} = E + \begin{cases} 0, & d = 1 \\ -u, & d = 0 \end{cases}$$

Ströme im Knoten

$$C\dot{U} = -\frac{U}{R} + \begin{cases} I, & d = 0 \\ 0, & d = 1 \end{cases}$$

Zustand

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\frac{I}{U})$$

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -(1-d)\frac{1}{L}x_2 + \frac{E}{L} \\ \dot{x}_2 & = & (1-d)\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{array}$$

Signalbereich für d:
$d \in [0, 1]$: Ideales Schalten $\Rightarrow$ linear, aber ereignisdiskret
$d \in [0, 1]$: Mitteilung, PWM $\Rightarrow$ zeitkontinieurlich, aber nichtlinear

2 Grundlagen

2.1 Lineare Algebra

- $n-$dim , reeller Vektorraum[1] R^n Elemente: Vektoren bzw. Spaltenvektoren

$$x \in \mathrm{R}^n, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  bilden Basis des R^n Standartbasis

- Jeder Vektor $x \in \mathrm{R}^n$ läßt sich eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellen

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

- Lineare Hütte von r Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in \mathrm{R}^n$ ist die Menge aller Linearkombination:

$$\text{span}\{v_1, \ldots, v_r\} = \{\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_r v_r | \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathrm{R}\}$$

  Die lineare Hütte ist ein Untervektorraum [2] des R^n

- $m \times n$ -Matrix $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Bild(image,range) einer Matrix A:

$$\begin{aligned} \text{im}A &= \{y \in \mathrm{R}^m : \exists \times \in \mathrm{R}^n \quad \text{mit} \quad y = Ax\} \\ &= \{(Ax) \in \mathrm{R}^m | \forall \times \in \mathrm{R}^n\} \end{aligned}$$

[1] VR = Vektorraum

[2] UVR = Untervektorraum

A spaltenweise

$$\begin{aligned} A =& (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{R}^{m\times n} \\ & (v_1, \ldots, v_m) \in \mathrm{R}^{m\times m} \end{aligned}$$

Linearkombination:

$$Ax = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

Es gilt: im $=$ span$\{v_1, \ldots, v_n\}$

- Kern (kernel, null space) der Matrix A:

$$\text{ker}A = \{x \in \mathrm{R}^n | Ax = 0\}$$

- im$A$ ist UVR des R^m,
  Rang: rang$A$ = dim(im$A$)
- ker$A$ ist UVR des R^n
- Zerlegungen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{R}^m & = & \text{im}A & \overset{\text{direkte Summe}}{\oplus} & \text{ker}A^T \\ \mathrm{R}^n & = & \text{ker}A & \oplus & \text{ker}A^T \end{array}$$

- Die Matrix $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ wird mit unter synonym in lin. Abb. (lineare Operator) behandelt:

$$\begin{array}{ccc} A & : & x \to Ax \\ A & : & \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m \end{array}$$

  Notation: $A \in L(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^m)$

- Der Dualraum $(\mathrm{R}^n)^*$ des R^n besteht aus dem auf R^n definierten linearen Funktionalen (Linearformen):$(\mathrm{R}^n)^* = L(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$

$$\underbrace{(\omega_1, \ldots, \omega_n)}_{\omega\in\mathrm{R}^{n*}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x\in\mathrm{R}^n} = y \in \mathrm{R}$$

  Darstellung durch Zeilenvektoren der Form $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, die man auch Kovektoren nimmt.

- der Dualraum ist selber ein n-dim. reeller VR. Standartbasis (Kanonische Basis)

$$\begin{array}{ccc} e_1^* & = & (1, 0, \ldots, 0) \\ e_1^* & = & (0, \ldots, 0, 1) \end{array}$$

  Darstellung von ω.

$$\omega = \omega_1 e_1^* + \cdots + \omega_n e_n^*$$

- Inneres Produkt (Skalarprodukt)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathrm{R}^n)^* \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$$

  mit

$$\begin{aligned} \langle \omega, x \rangle &= \omega x \\ &= (\omega_1, \ldots, \omega_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i x_i \end{aligned}$$

$$\langle \omega, e_j \rangle = \omega_j$$
$$\langle e_i^*, x \rangle = x_i$$

- Die Basis $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ ist die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ duale Basis, d.h.

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij} \qquad ; 1 \leq i, j \geq n$$

mit dem Kroneckersymbol

$$\begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.2 Felder und Ableitungen

Sei $M \in \mathrm{R}^n$ offen.

$$\begin{array}{ll} h : M \to \mathrm{R} & \dots \text{Skalarfeld} \\ f : M \to \mathrm{R}^n & \dots \text{Vektorfeld} \\ \omega : M \to (\mathrm{R}^n)^* & \dots \text{Kovektorfeld} \\ & \dots \text{Differentialform} \\ & \quad (\sim 1. \text{ Grades}) \\ & \quad (1. \text{ Form, Pfaffsche Form}) \end{array}$$

- Neben Darstellung eines Vektorfeldes als Spaltenvektor

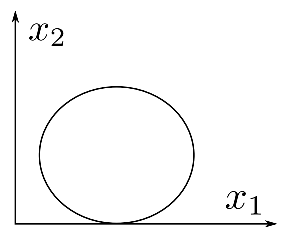
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

wird auch die Notation

$$f(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

verwendet.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \text{Kanonische Basis}$$



Zugehörige duale Basis:

$$\{dx_1, \dots, dx_n\}$$

Kovektorfeld ω : Zeilenvektor

$$\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))$$

oder

$$\omega(x) = (\omega_1(x)dx_1 + \dots + \omega_n(x)dx_n)$$

- Jacobimatrix, vektorielle Funktion

$$F : M \to \mathrm{R}^m$$

$$F'(x) = dF(x) \quad = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{m \times n}$$

- Gradient bzw. Differential eines Skalarfelds h

$$h'(x) = dh(x) = \left(\frac{dh}{dx_1}, \ldots, \frac{dh}{dx_n}\right) \in (\mathrm{R}^n)^*$$

Gradient ist ein Kovektorfeld (KVF) läßt sich ein KVF als Gradient eines Skalarfelds (SF) darstellen, so heißt es exakte Differential, exakte 1-Form, ... Das zugehörige SF heißt Potential.

- Hessematrix des Skalarfelds h:

$$h^{''}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots \vdots & \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n \partial x_n^2} \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{n \times m}$$

Lemma/Satz von Schwarz:

Das SF $h : M \to \mathrm{R}$ sei im Pkt $p \in M$ zweimal stetig diffbar, Dann gilt:

$$\frac{\partial^2 h}{dx_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \text{ für } i, j = i, j = 1, \ldots, n.$$

Pioncaresches Lemma:

Sei $\omega : M \to (\mathrm{R}^n)^*$ ein stetig diffbares KVF und

$$U = B_r(p) = \{x \in M| \quad \|x - p < r\| \quad \}, r > 0.$$

Diffentialform ω ist auf U genau dann exakt, wenn

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(x) \qquad \forall x \in U \text{ und all } i, j = 1, \ldots, n.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \underbrace{3x^2y^2}_{\omega_1} dx + \underbrace{2x^3y}_{\omega_2} dy \\ &= (3x^2y^2, \quad 2x^3y) \\ \frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^2 &= 6x^2y \text{ exakt} \\ \frac{\partial}{\partial x} 2x^3y &= 6x^2y \text{ exakt} \end{aligned}$$

Potential:

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3y^2 \\ dh(x) &= (3x^2y^2, \quad 2x^3y) \end{aligned}$$

Beweis: $\Rightarrow$ ω sei. d.h. $\exists$ SF $h : U \to \mathrm{R}$ mit $dh = \omega$ bzw. $w_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$ Dann gilt.

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \underset{\text{Schwartz}}{=} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Sei $x \in U$. Die Verbindungsstrecke $\{(1-t)p + tx | 0 \leq t \leq 1\}$ liegt ganz in U . O.E. sei $p = 0$. Ansatz:

$$h(x) = \int_0^1 (\sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i)dt \qquad \forall x \in U \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_k} = \omega_k$$

2.3 Vektorfelder und Flüße

Sei $M \subseteq \mathrm{R}^n$ offen,
$F : M \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ ein zeitabhängige Vektorfeld (VF). Anfangswertsaufgabe (AWA) mit Anfangszeitpunkt $t_0 \in \mathrm{R}$ und Anfangswert $p \in M$:

$$\dot{x} = F(x,t), \quad x(t_0) = p \quad \text{AWA1}$$

Sei $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$ ein offene Intervall im t_0.
Eine diffbare Funktion. $\phi : .\mathrm{I} \to M$ heißt Lokale Lösung von (AWA1) wenn

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= F(\phi(t),t) \quad \forall t \in \mathrm{I} \\ \phi(t_0) &= p. \end{aligned}$$

Existenzsätze:

- 1. Reano: Sei F stetig. Dann existiert eine (lokale) Lösung der (AWA1), aber nicht unbedingt eindeutig.
- 2. Picard-Lindelöff: F geringe zusätzlich eine Lipschitz-Bed. in 1.Argument, $\exists L \geq 0 : \|F(x,t) - F(y,t)\| \leq L \cdot \quad \|x-y\|$, dann existiert eine lokale eindeutige Lösung von (AWA1).

Beweisidee zu 2: (AWA1) ist gleichwertig mit Integralgleichung

$$\underbrace{x_{k+1}}_{\text{Picard-Iteration mit } x_0(t) \equiv p} = \underbrace{p}_{=x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} F(x_k(\tau),\tau)d\tau$$

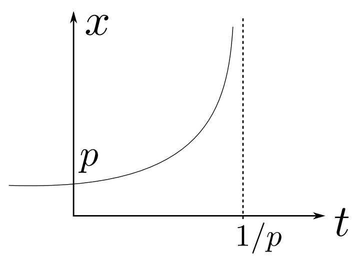
Folgerung aus Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Sei $F : M \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ stetig diffbar. Dann genügt F auf jede kompakten Teilmenge $K \subset M \times \mathrm{R}$ einer Litpschitz-Bed. mit der Lipschitz-Konstanten.

$$L := \max_{(x,t)\in K} \|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\| < \infty$$

$\Rightarrow$ Lipschitz Bedingung ist lokal erfüllt.
Beispiel: $F(x,t) = x^2$
$\Rightarrow \dot{x} = x^2, \quad x\underbrace{(0)}_{=t_0} = p > 0$

$$\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{y^2}|_p^x = d\tau|_0^t \Rightarrow x(t) = \phi(t) = \frac{p}{1-t_p}$$

Existenzintervall $I = \{-\infty, \frac{1}{p}\}$



Sei $M \subseteq \mathrm{R}^n$ offen, $f, : M \to \mathrm{R}^n$ ein Vektorfeld, Dgl

$$\dot{x} = f(x)$$

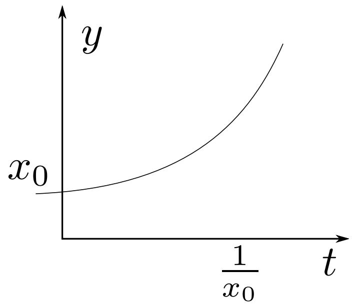
Satz(Folgerung von Picard-Lindelöff)

Das Vektorfeld f sei stetig diffbar.Für jedes $p \in M$ existiert dann ein Intervall I_p um 0, eine offene Kugel $U_p \subseteq M$ um p sowie eine stetig diffbare Abbildung $\varphi : I_p \times U_p \to M$ mit

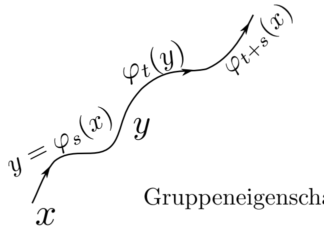
- 1. Lösung der Dgl:
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) \equiv f(\dot{\varphi}(t,x)), \quad \forall t \in I_p \forall x \in U_p$$
- 2. Verträglichkeit mit Anfangsbedingungen:
$$\varphi(0,x) = x, \quad \forall x \in U_p$$
- 3. Eindeutigkeit: Jede andere Lösung , die 1. und 2. erfüllt, stimmt für kleine $|t|$ mit φ überein.

Bemerkung

- Die Abbildung φ heißt Fluss des VF f (bzw. der Dgl) und ist die allg. Lösung. Notation: $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$
- Zu jedem Anfangswert p ex. ein maximales Existemintervall I_p, überwelches die Lösung der Dgl. nicht mehr fortgesetzt werden kann.
Beispiel: $\dot{x} = x^2$, Lösung:
$$\varphi_t(x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \qquad \text{für} x_0 > 0 : I_{x_0} = (-\infty, \frac{1}{x_0})$$



- $|s|, |t|$klein gilt:
$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$$



Gruppeneigenschaft

Spezialfall. $s = -t$:
$$\begin{aligned} \varphi_t(\varphi_{-t}(x)) &= \varphi_{t-t}(x) \\ &= \varphi_0(x) \\ &= x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_t^{-1}(x) = \varphi_{-t}(x)$

- Ist f r-mal stetig diffbar
  $\Rightarrow \varphi$ ist r-mal stetig diffbar nach zustand
  φ ist $(r+1)$ mal stetig diffbar nach zeit
- Ein Fluss, der auf $\mathrm{R} \times M$ definiert ist, heißt globaler Fluss.

Beispiel

- Konstantes VF $f(x) = b \in \mathrm{R}^n$

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_t(x) & = & x & + & bt \\ \dot{\varphi}_t(x) & = & b & = & f(\varphi_t(x)) \end{array}$$

- Lineares VF $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ mit

Matrixexponentialfunktion:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Gruppeneigenschaft:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_t(\varphi_s(x)) & = & e^{At} e^{As} x \\ & = & (I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \dots)(I + As + \frac{1}{2}A^2 s^2 + \dots)x \\ & = & (I + (t+s)A + \underbrace{(\frac{1}{2}t^2 + ts + \frac{1}{2}s^2)}_{\frac{1}{2}(t+s)^2} A^2 + \dots)x \\ & = & e^{A(t+s)}x = \varphi_{t+s}(x) \end{array}$$

Reihenentwicklung des Flusses

$f : M \to \mathrm{R}^n$ glatt $\Rightarrow$ Fluss φ_t auch glatt
Reihensatz:

$$\varphi_t(x) = v_0(x) + v_1(x)t + v_2(x)t^2 + O(t^3)$$
$$\text{VF} \quad v_0, v_1, v_2 : M \to \mathrm{R}^n$$

Wegen $\varphi_0(x) \equiv x \Rightarrow v_0(x) \equiv x$ bzw. $v_0 = \mathrm{id}$ = Identische Abbildung
$\Rightarrow \varphi_t(x) = x + v_1(x)t + v_2(x)t^2 + O(t^3)$ Einerseits:

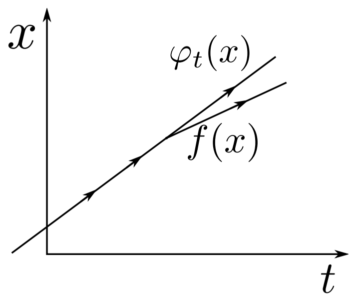
$$\begin{array}{rcl} f(\varphi_t(x)) & = & f(x + v_1(x)t + v_2(x)t^2 + O(t^3)) \\ & = & f(x) + f'(x)v_1(x)t + \dots \end{array}$$

Anderseits:

$$\begin{array}{rrcl} & \dot{\varphi}_t(x) & = & v_1(x) + 2v_2(x)t + \dots \\ \Rightarrow & v(x) & = & f(x) \\ & v_2(x) & = & \frac{1}{2}f'(x)v_1(x) \end{array}$$

Damit

$$\varphi_t(x) = x + f(x)t + \frac{1}{2}f'(x)f(x)t^2 + O(t^3) \tag{2.3}$$



Daraus folgt:

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} = I + f'(x)t + \ldots \tag{2.4}$$

$$\varphi_t(x) = x - \varphi(x)t + \frac{1}{2} f'(x)f(x)t^2 + \ldots \tag{2.5}$$

Lokale Invertierbarkeit von φ_t

$f : M \to \mathrm{R}^n$ stetig diffbar, $p \in M$
$\Rightarrow$ Fluss $\varphi : I_p \times U_p \to M$ existiert und ist auch stetig diffbar. $\varphi_t(x) = x$
$\Rightarrow$

$$\varphi_0'(x) = \frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x} = I$$

ist regulär
φ_t' stetig $\Rightarrow$ für kleine $|t|$ ist auch φ_t' regulär
Satz über Umkehrfunktion:
Es ex. offene Umgebungen $U \subset U_p$ von p und V von $\varphi_t(p)$, so dass $\varphi_t|_u$ (eingeschränkt auf U) bijektiv ist und eine Umkehrabb. $\varphi_t^{-1} : V \to U$, die stetig diffbar ist.
M.a.W,: φ_t ist ein (lokale) Diffeomorphismus

Satz:

Sei φ_t der Fluss von

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

mit stetig diffbarem VF $f : M \to \mathrm{R}^n$. Dann ist $\varphi_t'(p)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f'(\varphi_t(p)) \cdot x \\ & x(0) = I & \end{array} \tag{2.6}$$

Gl.(2.6) heißt Variationsgl. von (2.2). Die Lösung von (2.6) heißt (normiert)

Fundamentalmatrix

Beweis: Sei $\bar{x}(t) := \varphi_t'(p)$.

$$\begin{array}{rcl} \dot{\bar{x}}(t) & = & \frac{\partial}{\partial t}\bar{x}(t) \\ & = & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)|_{x=p} \\ \text{Schwarz} & = & \frac{\partial}{\partial x}\dot{\varphi}_t(x)|_{x=p} \\ & = & \frac{\partial}{\partial x} f(\varphi_t(x))|_{x=p} \\ & = & f'(\varphi_t(x)) \cdot \varphi_t'(x)|_{x=p} \\ & = & f'(\varphi_t(p)) \cdot \bar{x}(t). \end{array}$$

Das ist die AWA (2.6).
Eindeutigkeit : $x \equiv \bar{x}$.

3 Differentialgeometrische Begriffe

3.1 Differentialoperatoren

3.1.1 Lie-Ableitung eines Skalarfeldes

Sei $M \subseteq \mathrm{R}$ offen
$f : M \to \mathrm{R}^n$ ein VF glatt
$h : M \to \mathrm{R}$ ein SF glatt
$\varphi_t \ldots$ Fluss von f,
$\varphi_t(x) = x + f(x)t + \mathrm{O}(t^2)$
Lie-Ableitung des Skalarfeldes h entlang des VF f im Punkt $x \in M$:

$$L_f h(x) := \frac{d}{dt} h(\varphi_t(x))|_{t=0}$$

Berechnung:

$$\begin{aligned}
L_f h(x) &= \tfrac{d}{dt} h(\varphi_t(x))|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{h(\varphi_t(x)) - h\overbrace{\varphi_0(x)}^{x}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{h(x+f(x)t+\ldots) - h(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{h(x)+h'(x)f(x)t+\cdots-h(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} (h'(x)f(x) + \ldots) = h'(x)f(x) \\
&= \langle dh(x), f(x)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x).
\end{aligned}$$

Bemekrung:

- Gemischte Lie-Ableitungen: Sei $g : M \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres VF:

$$L_g \underbrace{L_f h(x)}_{\text{ist SF}} = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x} gx$$

- Mehrfache Lie-Ableitung:

$$\begin{aligned}
L_f^{k+1} h(x) &= L_f(L_f^k h(x)) \\
&= \tfrac{\partial L_f^\lambda h(x)}{\partial x} f(x)
\end{aligned}$$

$$L_f^\circ h(x) = h(x)$$

Sei

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) &=& f(x(t)) \\ y(t) &=& h(x(t)) \end{array}$$

Behauptung:

$$y^k(t) = L_f^k h(\varphi_t(x))$$

$$k = 0: \quad y(t) = h(x(t))$$

$$\begin{array}{rcl} y^{k+1}(t) &=& \frac{d}{dt} y^{(k)}(t) \\ &=& \frac{d}{dt} L_f^k h(\varphi_t(x)) \\ &=& dL_f^k h(\varphi_t(x)) \cdot \dot{\varphi}_t(x) \\ &=& dL_f^k h(\varphi_t(x)) \cdot f(\varphi_t(x)) \\ &=& L_f^{k+1} h(\varphi_t(x)) \end{array}$$

Sei $x(0) = x_0$

$$\Rightarrow y^{(k+1)}(0) = L_f^{(k+1)} h(x)$$

Sind f, h analytisch $\Rightarrow$ Taylorreihe

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x_0) \frac{t^k}{k!} \qquad \text{Lie-Reihe}$$

Rechenregeln:
$f, g : M \to \mathbb{R}^n \quad VF$
glatt $\alpha, \beta : M \to \mathbb{R} \quad SF$ glatt

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta}\beta(x) &= \alpha(x) \cdot L_f \beta(x) \\ L_f(\alpha + \beta)(x) &= L_f \alpha(x) + L_f \beta(x) \\ *L_f(\alpha\beta)(x) &= \alpha(x) L_f \beta(x) + \beta(x) L_f \alpha(x) \\ L_{f+g}\alpha(x) &= L_f \alpha(x) + L_g \alpha(x) \end{aligned}$$

Beweis von $(*)$

$$\begin{aligned} L_f(\alpha\beta)(x) &= (\frac{\partial}{\partial x}(\alpha(x)\beta(x))) \cdot f(x) \\ &= (\alpha(x)\beta'(x) + \beta(x)\alpha'(x)) \cdot f(x) \\ &= \alpha(x) \underbrace{(\beta'(x) f(x))}_{L_f \beta(x)} + \beta(x)(\alpha'(x)\beta(x)) \end{aligned}$$

Ergänzung:
$f : M \to \mathbb{R}^n \ldots VF \ h : M \to \mathbb{R}^p \ldots$ vektorrielle Abb.

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(x) \end{pmatrix}$$

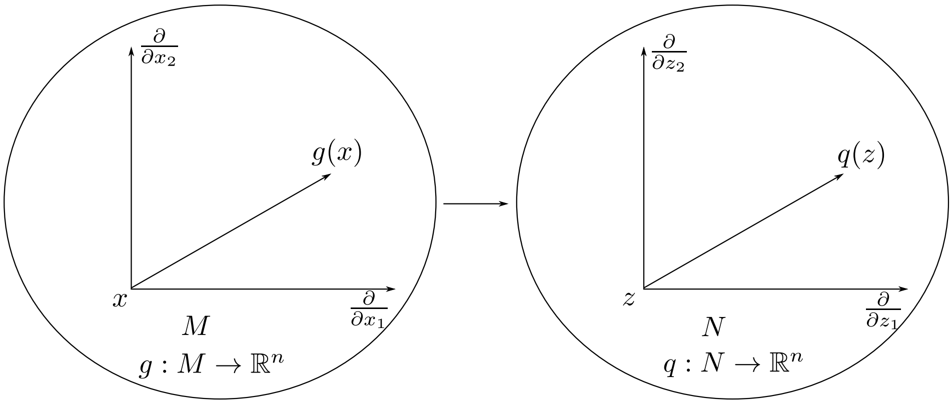
$$L_f h(x) := \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) = \begin{pmatrix} dh_1(x) \\ \vdots \\ dh_p(x) \end{pmatrix} f(x)$$

$$\begin{pmatrix} L_f(h_1(x)) \\ \vdots \\ L_f h_p(x) \end{pmatrix} \ldots \text{ vereinigte Notation für Lie-Ableitung}$$

etwas verpasst:

3.1.2 Koordinateenwechsel eines Vektorfeldes

Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,
$\psi : M \to N \ldots$ Diffemorphismus



- Differential, Push-Forward wird durch Jacobimatrix beschrieben $\psi_*(x) = \psi'(x)$
- Rücktransportmation, Push-Back:

$$\begin{aligned} \psi^*(z) :&= \psi_*^{-1}(z) \\ &= (\psi^{-1})'(\underbrace{\psi(x)}_{z}) \\ &= (\psi'(x))^{-1} \end{aligned}$$

- Push-Forward:

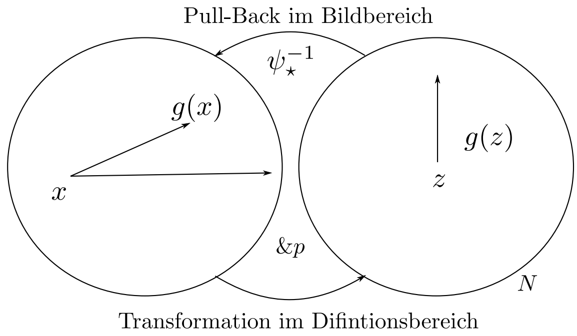
$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{d}{dz} z = \frac{d}{dt}\psi(x) \\ &= \psi'(x)\dot{x} \\ &= \psi'(x) g(x) \\ &= \psi_* g(x)|_{x=\psi^{-1}(z)} \\ &= \underbrace{\psi_* g(\psi^{-1}(z))}_{q(z)} \end{aligned}$$

Beispiel

lin. VF: $g(x) = Ax$
lin. Transf: $z = Tx$
$\dot{z} = T\dot{x} = TAx = TAT^{-1}z$ Ähnlichkeitstrans.

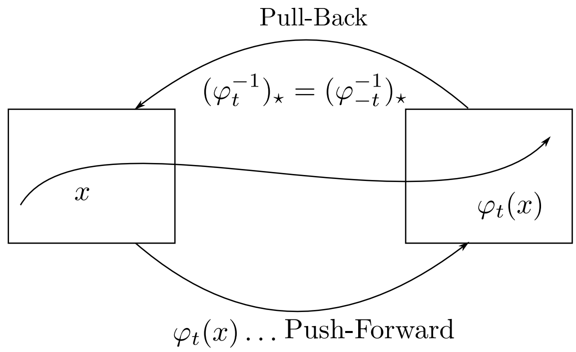
Rücktransform. und Pull-Back:

$$\begin{aligned}\dot{x} = \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}\psi^{-1}(z) &= (\psi'(z))^{-1}\dot{z} \\ &= (\psi'(z))^{-1}q(z) \\ &= \psi_*^{-1}q(\psi(x)) = \underbrace{\psi^* q(z)}_{g(x)}\end{aligned}$$



3.1.3 Lie-Ableitung eines Vektorfeldes

Spezialfall: $\psi = \varphi_t$, d.h. der Diffeomorphismus ist Fluss eines VF f zu Zeit t



Reihenentwicklungen:

$$\psi_{t*}(x) = I + f'(x)t + O(t^2)$$
$$\psi_{t*}(x) = I - f'(x) + O(t^2)$$

Lie - Ableitung bzw. Lie-Klammer eines VF $g : M \to \mathbb{R}^n$ entlang f :

$$[f,g](x) = L_f g(x) := \frac{d}{dt}\underbrace{\varphi_{-t*}g(\varphi_t(x))}_{Ad_{t,f}g(x)}|_{t=0}$$

Zeitinvarinater Operator für VF

$$\begin{aligned}Ad_{t,f}g(x) &= \varphi'_{-t}(z)g(z)|_{z=\varphi_t(x)} \\ &= (I - f'(z)t + O(t^2)) \cdot g(z)|_{z=x+f'(x)t+O(t^2)} \\ &= (I - f'(x)t + O(t^2)) \cdot \underbrace{g(x + f(x)t + O(t^2))}_{g(x)+g'(x)f(x)t+O(t^2)} \\ &= g(x) + \underbrace{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}_{[f,g](x)}t + O(t^2)\end{aligned}$$

Beispiel

Lineares VF $f(x) = Ax, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Konstan. VF $g(x) = b \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
[f,g] = \underbrace{g'}_{\equiv 0} f - f'g = -Ab = ad_f g \\
\Rightarrow [-f,g]_{\text{Def.}} = ad_{-f}g = Ab \\
\Rightarrow ad_{-f}^k g = A^k b
\end{aligned}
$$

Koordninationtransf: Sei $\psi.M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\psi_*[f,g] = [\psi_* f, \psi_* g]$$

Weitere Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
f,g : M \to \mathbb{R}^n \qquad & \text{VF} \\
\alpha,\beta : M \to \mathbb{R} \qquad & \text{SF}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{[f,g]}\alpha(x) &= L_f L_g \alpha(x) - L_g L_f \alpha(x) \\
[\alpha f, \beta g](x) &= \alpha(x)\beta(x)[f,g](x) + \alpha(x) L_f \beta(x) \cdot g(x) - \beta(x) L_g \alpha(x) g(x)
\end{aligned}
$$

Beweis von $(*)$:

$$
\begin{aligned}
L_g L_f \alpha(x) &= dL_f\alpha(x) \cdot g(x) \\
&= (\alpha'(x) f'(x)) + f^T(x)\alpha''(x) g(x) && (1) \\
\Rightarrow L_f L_g \alpha(x) &= (\alpha(x) g'(x) + g^T(x)\alpha''(x)) \cdot f(x) && (2) \\
(2) - (1) &= \alpha'(x)(g'(x)f(x) - f'(x)g(x)) \\
&= \alpha'(x)[f,g](x) = L_{[f,g]}\alpha(x)
\end{aligned}
$$

Interpretation : (+) ist Differeantialoperator 1. Ordnung

Bemerkung

- Mehrfache Lie-Klammer entlang gleichem VF

$$
\begin{aligned}
ad_f^{k+1} g(x) &:= [f, ad_f^k g](x) \\
ad_f^0 g(x) &:= g(x) \\
\underbrace{[f,[f,\dots,[f,g]\dots]]}_{\text{k mal}} &:= ad_f^h g(x)
\end{aligned}
$$

- Zwei lineare VF

$$
\begin{aligned}
f(x) &= A\,x \\
g(x) &= B\,x, \qquad AB \in \mathbb{R}^{n\times 1} \\
[f,g](x) &= (g'f - f'g)(x) \\
&= \underbrace{(BA - AB)}_{\text{Kommutator}}(x)
\end{aligned}
$$

Beispiel

Mobiler Roboter

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\sin x_3\\ \cos x_3\\ 0\end{pmatrix}}_{f(x) \text{ transl. Teil}} u_1 + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{g(x) \text{ rot. Teil}} u_2$$

$$[f,g] = \underbrace{g'f}_{O\in\mathbb{R}^{3\times 3}} - f'g = -f'g = \begin{pmatrix}0 & 0 & \cos x_3\\ 0 & 0 & -\sin x_3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos x_3\\ -\sin x_3\\ 0\end{pmatrix}$$

3.1.4 Pull-Back und Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes

$\psi \ldots$ Diffeomorphismus
$\psi_* = \psi' \ldots$ Push-Forward für ein Vektorfeld
$\omega \ldots$ KVF
zu ψ_* gehörende duale oder adjungierte Abbildung ψ^* ist definiert durch

$$< \psi^* \omega f >=< \omega, \psi, f > \tag{*}$$

$\Rightarrow$ Pull-Back - Abb. des KVF ω

$$\underbrace{y^T}_{\text{Zeilenvektor}} \cdot (\underbrace{A}_{\text{Spaltenvektor}} x) = y^T \cdot A \cdot x = (\underbrace{A^T y}_{\text{Zeile}})^T \cdot \underbrace{x}_{\text{Spalte}}$$

Spezialfall: $\psi = \varphi_t$, d.h. Diffeomorphismus ist Fluss des VF f.

$$\begin{aligned}\varphi_t^* \omega(x) &\underset{*}{=} \omega(x)\varphi_{t*}\\ &= \omega(x)(I + f'(x)t + O(t^2))\end{aligned}$$

Lie-Ableitung eines Kovektorfeldes $\omega : \mathbb{M} \to (\mathbb{R})^*$ entlang f:

$$L_f \omega(x) = \frac{d}{dt} \underbrace{\varphi_t^* \omega(\varphi_t(x))}_{=:Ad_{t,f}\omega(x)} \Big|_{t=0}$$

Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned}Ad_{t,f}\omega(x) &\underset{\text{Def}}{=} \varphi_t^* \omega(\varphi_t(x))\\ &\underset{(*)}{=} \omega(z)\varphi_t'(z)\Big|_{z=\varphi_t(x)}\\ &\underset{(*)}{=} \omega\left(x + f(x)t + \ldots\right)\left(I + f'(x)t + \ldots\right)\\ &= \left(\omega(x) + f^T(x)\left(\frac{\partial \omega^T}{\partial x}\right)^T + \ldots\right)\left(I + f'(x)t + \ldots\right)\\ &= \omega(x) + \underbrace{\left(f^T(x)\left(\frac{\partial \omega^T}{\partial x}\right)^T + \omega(x) f'(x)\right)}_{L_f\omega(x)} t + \ldots\end{aligned}$$

Rechenregeln

$$\begin{aligned}f, g &\ldots VF\\ \omega &\ldots KVF\\ \alpha &\ldots SF\end{aligned}$$

(a) $L_f d\alpha = dL_f\alpha$

(b)

$$L_f < \omega, g > (x) =< L_f\omega, g > (x)+ < \omega, [f,g] > (x)$$

$$\begin{aligned}
\text{Beweis: a). } dL_f\alpha(x) &= \frac{\partial}{\partial x} L_f\alpha(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(x)f(x)) \\
&= (\alpha'(x)f'(x) + f^T(x)\alpha''(x)) \\
&= \alpha'(x)f'(x) + f^T(x)\left(\frac{\partial(\alpha'(x))^T}{\partial x}\right)^T \\
&= L_f\alpha(x)
\end{aligned}$$

3.2 Lie-Klammer und dynamische Systeme

Lemma:

Seien φ^f, φ^g die Fläche des VF f, g. Die Flüße kommutieren genau dann, wenn die Lie-Klammer der Vektorfeldes identisch Null ist.

$$\varphi_t^f \cdot \varphi_s^g = \varphi_s^g \cdot \varphi_t^f \iff [f,g] = 0$$

Beweis: $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\varphi_s^g(\varphi_t^f(x)) &= \varphi_s^g \overbrace{(x + f(x)t + \dots)}^{z} \\
&= \underbrace{x + f(x)}_{z} t + \underbrace{g(x + f(x)t + \dots)}_{g(z)s} s + \dots \\
&= x + f(x)t + g(x)s + g'(x)f(x)st + \dots \\
\varphi_t^f(\varphi_s^g(x)) &= x + g(x)s + f(x)t + f'(x)g(x)ts + \dots \\
&\text{Differenz:} \\
\varphi_s^g(\varphi_t^f(x)) - \varphi_t^f(\varphi_s^g(x)) &= \underbrace{(g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}_{[f,g]} st + \dots)
\end{aligned}$$

Differenz ist 1t. Annahme die Nullfunktion
$\Rightarrow$ alle Koeff. einer Reihenentwicklung und identisch Null insbesondere $[f,g] \equiv 0$.
Anwendung auf lineare VF

$$\begin{aligned}
f(x) &= A\,x \\
g(x) &= B\,x
\end{aligned}$$

$e^{At} \cdot e^{Bs} = e^{Bs} \cdot e^{At} \iff [A,B] = 0$ d.h. $BA - BA = 0$
$\iff AB = BA$
System mit 2 Eingängen:

$$\dot{x} = f(x)u_1 + g(x)u_2$$

Zwischen den VF f, g wird mittels u_1, u_2 nach folgenden Schema umgeschaltet

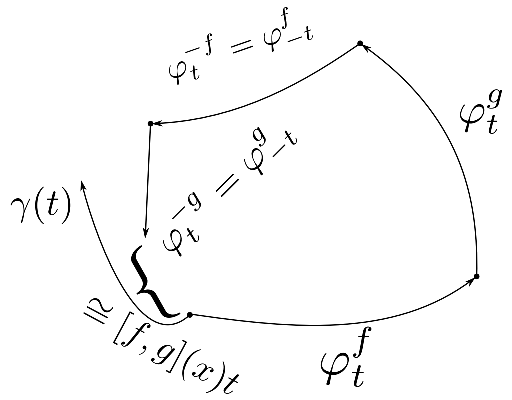
Schritt	u_1	u_2	$f_1u_1 + gu_2$
1	1	0	f
2	0	1	g
3	-1	0	-f
4	0	-1	-g

Darstellung

$$\gamma(t) := \varphi_t^{-g} \cdot \varphi_t^{-f} \cdot \varphi_t^{g} \cdot \varphi_t^{f}(x)$$

Mit Reihenentwicklung der Flusses erfüllt man

$$\gamma(t) = x + \underbrace{(g'(x)f(x) - f'(x)g(x))}_{[f,g]} t^2 + \dots$$



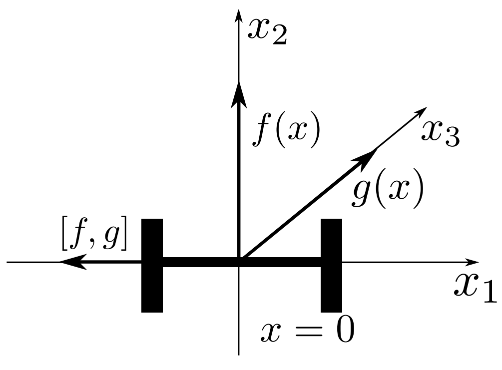
$$\gamma(\sqrt{t}) = x + [f,g](x)t + \dots$$
$$\approx \varphi_t^{[f,g]}(x)$$

Beispiel

Robotermodell

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f,g](x) = \begin{pmatrix} -\cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Mittelung des Systems

$$\dot{x} = f(x) \cdot u_1(t) + g(x) \cdot u_2(t) \qquad \text{mit } u_1(t) = \sqrt{\omega} \cdot \cos(\omega t)$$
$$u_2(t) = \sqrt{\omega} \cdot \sin(\omega t), \omega > 0$$

führt für $\omega \to \infty$ auf $\dot{x}^\infty = \frac{1}{2}[f, g](x^\infty)$

3.3 Distributionen und Kodistributionen

$M \in \mathrm{R}^n$ offen, $f_1, \ldots, f_r : M \to \mathbb{R}^n \ldots$ glatte VF. in jedem Punkt $x \in M$ spannen die VF einen UVR des $\mathbb{R}^n$ auf span$\{f_1(x), \ldots, f_r(x)\}$
Die Zuordnung

$$M \ni x \to \Delta(x) = \underbrace{\mathrm{span}\{f_1(x), \ldots, f_r(x)\}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

heißt Distribution.
Glatte Distribution wird von glatten VF aufgespannt.
Punktweise Überlagerung von Operation auf UVR auf Distributionen.

- Summe: $(\Delta_1 + \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x)$
- Durchschnitt: $(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) \cap \Delta_2(x)$
- $f \in \Delta :\iff \forall x \in M : f(x) \in \Delta(x)$
- $\Delta_1 \leq \Delta_2 \iff \forall x \in M : \Delta_1(x) \leq \Delta_2(x)$

VF zu Matrix zusammenfassen:

$$\begin{aligned} F(x) &= (f_1(x), \ldots, f_r(x)) \\ \mathrm{im} F(x) &= \mathrm{span}\{f_1(x), \ldots, f_r(x)\} \\ &= \Delta(x) \end{aligned}$$

Δ heißt regulär (im Punkt $x_0 \in M$)
$\exists r \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{dim}\Delta(x) = r$ für alle x aus Umgebung von x_0

Beispiel

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= (f_1(x), f_2(x)) \\ &= \begin{pmatrix} \cos x_3 & -\sin x_3 \\ \sin x_3 & \cos x_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Delta(x) &= \mathrm{span}\{f_1(x), f_2(x)\} \\ &= \mathrm{im} F(x) \\ &= \mathrm{span}\{e_1, e_2\} = \mathrm{im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemma 3.1:

$\Delta \dots$ glatte Distribution, regulär im Punkt $x_0 \in M$ mit Dimension r.
Dann existiert Umgebung $U \in M$ von x_0 und r VF $f_1, \dots, f_r : U \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in U$ gilt.

1. Die Vektoren $f_1(x), \dots, f_r(x)$ sind linear unabhängig.
2. $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_r(x)\}$
   Jedes VF $f \in \Delta$ kann auf U wie folgt dargestellt werden.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) f_i(x)$$

   mit glatten SF $\alpha_1, \dots, \alpha_r : U \to \mathbb{R}^n$
   $f_i \dots$ Basisvektorfelder

Berechnung der SF: Lineare Gleichung

$$\underbrace{(f_1(x), \dots, f_r(x))}_{F(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_r(x) \end{pmatrix}}_{\alpha(x)} = f(x)$$

$\omega_1, \dots, \omega_r : M \to (\mathbb{R}^n)^* \dots$ KVF
Diese spannen im Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ eine Kodistribution auf

$$\Omega = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$$

Annihilator $\Delta^\perp$ eine Distribution Δ :

$$\Delta^\perp(x) = \{\omega_1 \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle \omega, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in \Delta(x)\}$$

Annihilator $\Omega^\perp$ eine Kodistribution: $\Omega^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, v \rangle = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(x)\}$

Beispiel

$$\Delta(x) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{x_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \Delta^\perp(x) &= \text{span}\{(0,0,1)\} \\ F(x) &= (f_1(x), \dots, f_r(x)) \\ w(x) &= \begin{pmatrix} \omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_r(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\Delta^\perp(x)$ aufgespannt von KVF ω mit $\omega(x) \cdot F(x) = 0 \in (\mathbb{R}^r)^*$ $\qquad (0)$
- $\Omega^\perp(x)$ wird aufgespannt von VF v mit $\omega(x) \cdot v(x) = 0 \in \mathbb{R}^x$
  letztes ist der Kern von ω :

$$\Omega^\perp = \ker \omega(x)$$

- Transfonieren von (0) liefert $\Delta^\perp(x) = (\ker F^T(x))^T$

Bemerkung: Seien $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ Distribution

- $\dim(\Delta) + \dim(\Delta^\perp) = n$
- $\Delta_1 \leq \Delta_2 \iff \Delta_1^\perp \geq \Delta_2^\perp$
- $(\Delta_1 \cap \Delta_2)^\perp = \Delta_1^\perp + \Delta_2^\perp$

3.4 Involitive Distributionen

Defintion:

Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ lineare VF. Eine Distribution Δ heißt invariant unter elem. VF $f(f \to$ invariant), wenn $\forall g \in \Delta$: $[f,g] \in \Delta$. Eine Distribution ist involitiv, wenn sie für jedes der VF invariant ist.

Definition:

Eine Distribution Δ heißt involitiv, wenn

$$\forall f,g \in \Delta : [f,g] \in \Delta \tag{A}$$

Lemma 3.2:

Sei $\Delta = \text{span}\{f_1,\dots,f_r\}$, $\quad$ Δ genau dann involitiv, wenn

$$[f_i, g_j] \in \Delta f \quad i \leq j, j \leq r \tag{B}$$

Beweis

$\Rightarrow$

Δ sei involitiv, d.h. (A) gilt für alle VF von Δ. Dann gilt (A) auch für die VF $f_1,\dots,f_r$, d.h (B) ist erfüllt.

$\Leftarrow$

Es gilt (B). Für $f,g \in \Delta$ gibt es SF $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ und $\beta_1,\dots,\beta_r$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) f_i(x) \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{r} \beta_i(x) \cdot f_i(x) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Lie-Klammer liefern.

$$\begin{aligned} [f,g] &= \left[\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{r} \beta_j f_j\right] \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \left\{\alpha_i\beta_j[f_i,\beta_j] + \alpha_i(L_{f_i}\beta_j)f_j - \beta_j(L_{f_j}\alpha)f_i\right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow [f,g] = \underbrace{\text{span}\{f_1,\dots,f_r\}}_{=\Delta} + \underbrace{\text{span}\{f_i,f_j]; 1 \leq i,j \leq r\}}_{\leq \Delta \text{ wegen } (B)} = \Delta$ Also gilt (A)

$$\begin{aligned} (\alpha(x)\cdot f(x))' &= \alpha(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot\alpha'(x) \\ (\beta(x)\cdot g(x))' &= \beta(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot\beta'(x) \\ \Rightarrow [\alpha f, \beta g] &= (\beta g)'\alpha f - (\alpha f)'\beta g \\ &= \beta g'\alpha f + g\beta'\alpha f - \alpha f'\beta g - f\alpha'\beta g \\ &= \alpha\beta\underbrace{(g'f - f'g)}_{[f,g]} + \alpha\underbrace{\langle d\beta, f\rangle}_{L_f\beta} g - \beta\underbrace{\langle d\alpha, g\rangle}_{L_g\alpha} f \end{aligned}$$

Lemma 3.3:

Die Distribution Δ sei involitiv und im Punkt $x_0 \in M$ regulär ($M \leq \mathbb{R}^n,$ offen). Dann existiert eine Umgebung $U \leq M$ von x_0 und VF $g_1, \ldots, g_r: \quad U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\Delta|_n = \text{span}\{g_1, \ldots, g_r\} \qquad \text{und } \forall x \in U : [g_i, g_j] = 0 \text{ für } 1 \leq i, j \leq r$$

Beweis:

Sei $r = \dim \Delta(x_0)$. Dann $\exists r$ linear unabhängige VF $f_1, \ldots, f_r$ die (lokeal) Δ aufspannen $n \times r$-Matrix

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x))$$

$\Rightarrow$: $\Delta = \text{im } F(x)$ und rang $F(x) = r$
$\Rightarrow$: $\exists r \times r$ Teilmatrix $B(x)$ von $F(x)$, die regulär ist. Ohne Einschränkung[1] setze sich B aus den r Zeilen zusammen. [2]
Rechtsmultiplikation mit B^{-1} möglich: $\Rightarrow$ def. damit VF $g_1, \ldots, g_r$

$$F(x) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} B(x) \\ \hline * \end{pmatrix} \cdot B^{-1}(x) = \begin{pmatrix} I_r \\ \hline * \end{pmatrix} =: (g_1(x), \ldots, g_r(x))$$
$$\Delta = \text{span}\{f_1, \ldots, f_r\} = \text{im } F = \text{im } (F \cdot B^{-1}) = \text{span } \{g_1, \ldots, g_r\}$$

Zusätzlich ist Δ involutiv, d.h. Es gilt SF $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ mit $[g_i, g_j](x) = \alpha_1(x) g_1(x) + \cdots + \underbrace{\alpha_r(x) \cdot g_r(x)}_{\text{Lemma 3.2}}$

Spezielle Form der VF g_i, g_j :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \star \end{pmatrix} = \alpha_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \star \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_r(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}$$

Vergleich der ersten r Zeilen

$$\Rightarrow \qquad \alpha_1 \equiv \cdots \equiv \alpha_r \equiv 0$$
$$\Rightarrow \qquad [g_i, g_j] \equiv 0$$

Satz über die simultane Begründung von VF: Sei $x_0 \in M$. Für alle VF $f_1, \ldots, f_r : M \to \mathbb{R}^n$ gelte.

1. $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ und linear unabhängig
2. $[f_i, f_j](x) = 0, \quad 1 \leq i \leq r \ldots$ für alle x aus Umgebung von x_0. Dann existiert ein lokale Diffeomorphismus $z = T(x)$ und $T(x_0) = 0$, so dass

$$= \left. \frac{T_+ f_i(x)}{T'(x) f_i(x)} \right|_{x = T^{-1}(z)} = \frac{\partial}{\partial z_i} = e_i, \qquad 1 \leq i \leq r$$

   für alle z aus einer Umgebung der Null.

Beweis:

Dann existiert $n - r$ welche VF $f_{r+1}, \ldots, f_n: \quad U \to \mathbb{R}^n \qquad (U \leq M,$ Umgebung von x_0). So dass $f_1, \ldots, f_n$ in U linearunabhängig sind.

[1] O.E =Ohne Einschränkung
[2] O.B.d.A = Ohne Beschränkung der Allgemein

Abbildung S

$x = S(z) := \varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_0)$
Reihenentwicklung nach z:

$$x = x_0 + f_1(x_0)z_1 + \dots + f_n(x_0)z_n + O(\|z\|)^2. \qquad \varphi_t^f(x) = x + f(x)t + O(t^2)$$

Jacobi-Matrix:

$$S'(x) = \left(\underbrace{f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)}_{\text{linear unabhängig, } S'(0) regulr} \right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Satz über Umkehrfunktion $\rightarrow S$ ist ein (lokaler) Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $z = T(x)$.
Wegen Bedingung 2 gilt für $i = 1 \dots r$

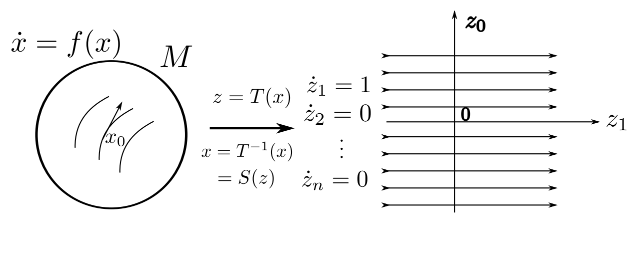
$$\begin{aligned}
S'(z) \underbrace{\frac{d}{dz_i}}_{e_i} &= \frac{\partial}{\partial z_i} S(z) \\
&= \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_i}^{f_i} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_n) \\
&= \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_{z_i}^{f_i} \circ \varphi_{z_1}^{f_i} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_0) \\
&= f_i \left(\varphi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \varphi_{z_n}^{f_n}(x_0) \right) \\
&= f_i \left(S(z) \right) = f_i(x)|_{x=S(z)}
\end{aligned}$$

Damit

$$S'(z) = \frac{\partial}{\partial z_i} = f_i(x)|_{x=S(z)} \overset{\substack{S=T^{-1} \\ T=S^{-1}}}{\iff} \frac{\partial}{\partial z_i} = T'(x)f(x)\big|_{x=T^{-1}(z)}$$

Folgerung (Begradigung von Nichtruhelagen)
Sei $x_0 \in M : f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein VF mit $f(x_0) \neq 0$ (keine Ruhelagen)
Dann existiert lokaler Diffeomorphismus $z = T(x)$.

$$T'(x)f(x)|_{x=T^{-1}(z)} = \frac{\partial}{\partial z_1} = e_i$$



Definition:

Eine reguläre Distribution Δ mit dim $\Delta = r$ heißt integrierbar, wenn es SF $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ gibt, so dass $\Delta^\perp =$ span $\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}\}$.

Satz von Frobenius:

Die Distribution Δ sei im Punkt x_0 regulär. Dann gilt Δ ist involutiv $\iff$ Δ ist integrierbar.

Beweis (lokal):

Δ regulär $\Rightarrow \exists r$ linear unabhängige VF $f_1, \dots, f_r$ mit $\Delta =$ span $\{f_1, \dots, f_r\}$
$\Rightarrow$ Sei Δ involutiv $\underset{\text{Lemma 3.3}}{\Rightarrow}$ die VF können so gewählt werden, dass $[f_i, f_j] = 0$ für $1 \leq i, j \leq r_i$

Begradigungssatz:

$\exists$ lokaler Diffeomorphismus

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

mit

$$T'(x) f_i(x)|_{x=T^{-1}(z)} = \frac{\partial}{\partial z_i} = e_i \text{ für } i = 1, \dots, r$$

wodurch VF $f_1, \dots, f_r$ in Richtung der Einheitsvektoren $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_r}$ ausgerichtet werden. Die Kovektoren $dz_{r+1} = e_{r+1}^T, \dots, dz_n = e_n^T$ der dualen Basis.
Sind dann orthogonal:

$$\langle \underbrace{dz_j}_{e_j^T}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_i}}_{e_i} \rangle = 0 \qquad \substack{i=1,\dots,r \\ j=r+1,\dots,n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \langle dz_j, \frac{\partial}{\partial z_i} \rangle = \langle dz_j, T'(x) f_i(x) \rangle \\ &= \langle \underbrace{dz_j}_{e_j^T} T'(x), f_i(x) \rangle = \langle dt_j(x), f_i(x) \rangle \end{aligned}$$

Die KVF $dt_{r+1}, \dots, dt_n$ sind orthogonal zu den VF, die Δ aufspannen, also sind sie im Annihilator.
T ist Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} &\Rightarrow T'(x) \text{ ist regulär} \\ &\Rightarrow \text{ Zeilenvektoren } dt_i \text{ sind linear unabhängig} \end{aligned}$$

$\lambda_k = t_{r+k}$ für $k = 1, \dots, n-r$
$\iff$ $0 = \langle d\lambda_j, f_i(x) \rangle = 0$
$\iff$ $\lambda^\perp =$ span $\{d\lambda_1, \dots, d\lambda_r\}$.

Definition:

Die kleinste involutive Distribution , die Δ enthält, heißt involutive Abschluß von Δ : inv(Δ) .

4 übersprungen

5 Reglerentwurf mittels exakter Linearisierung

5.1 Eingangs-Ausgangs-Linearisierung eingangsaffiner Systeme

5.1.1 Relativer Grad und grundsätzliches Vorgehen

Eingangsaffines System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) \cdot u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit

$$\begin{aligned} \text{VF} \quad f, g &: M \to \mathbb{R}^n \\ \text{SF} \quad h &: M \to \mathbb{R} \\ M \leq \mathbb{R}^n&, \text{ offen} \end{aligned}$$

Zeitableitungen des Ausgangs:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{d}{dt} h(x(t)) \Big|_{(5.1)} \\ &= h'(t) \cdot \dot{x} \\ &= h'(t) \cdot (f(x) + g(x) \cdot u) \\ &= L_f h(x) + L_g h(x) \cdot u \end{aligned}$$

Falls $L_g h(x) \neq 0$: STOP
Falls $L_g h(x) \equiv 0$,
$\dot{y}$ hängt nicht explizit von u ab.
Zweite Zeitableitung des Ausgangs:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} L_f h(x(t)) \\ &= dL_f h(x) \cdot \underbrace{(f(x) + g(x) \cdot u)}_{\dot{x}} \\ &= L_f^2 h(x) \cdot (L_g L_f h(x)) \cdot u \end{aligned}$$

Definition 5.1:

System (5.1) hat im Punkt $p \in M$ den **relativen Grad** r, wenn

1. $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad$ für $k = 0, \dots, r-2$
   und alle x aus offener Umgebung von p.

2. $L_g L_f^{r-1} h(p) \neq 0$.

Interpretation: Relativer Grad ist niedrigste Ordnung einer Zeitableitung des Ausgangs von (5.1), die explizit vom Eingang u abhängt.

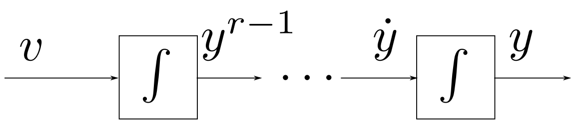
Reglerentwurf (allg. Vorgehen)

1. Linearisierung durch Rückführung:

$$y^k = L_f h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x) \cdot u}_{\neq 0}$$
$$\overset{!}{=} v \dots, \text{neue Eingang} \tag{5.2}$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1}} (-L_f^r h(x) + v) \tag{5.3}$$

Integratorkette: $y^k = v$



2. Stabilisierung, Rückführung

$$v = -\sum_{i=0}^{r-1} a_i y^{(i)} \tag{5.4}$$

führt auf lineare Differentialgleichung.

$$y^{(r)} + a_r y^{(r-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0.$$

Rückführung in Originalkoord.:

$$y^{(k)} = L_f^k h(x) \text{ für } k = 0, \dots, r-1$$
$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \sum_{k=0}^{r} a_k L_f^k h(x) \text{ mit } a_r := 1. \tag{5.5}$$

Unklar: Was passiert mit $u - r$ Koord.?

5.1.2 Byrnes-Isidori Normalform

System (5.1) habe im Punkt $p \in M$ den wohldefinierten relativen Grad $r \leq n$.

Lemma 5.1:

In eine Umgebung von p

$$\langle dL_f^i h, ad_{-f}^j g\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i+j<r-1 \\ L_g L_f^{r-1} h(x), & i+j=r-1 \end{cases} \tag{5.6}$$

Begründung

$$\begin{aligned}
r=1: \quad & i+j \leq r-1 = 0 \to i=j=0 \\
& \langle dL_f^\circ h, ad_{-f}^\circ h\rangle = \langle dh, g\rangle = L_g h \\
r=2: \quad & i+j=1 \\
& \quad i=1, j=0: \langle dL_f^1 h, ad_{-f}^\circ g\rangle = \langle dL_f h, g\rangle = L_g L_f h \\
& \quad i=0, j=1: \langle dL_f^\circ h, ad_{-f}^1 g\rangle = \langle dh, [-f,g]\rangle = \langle dh, -[f,g]\rangle \\
& \qquad\qquad = -\langle dh, [f,g]\rangle = -L_{[f,g]}h = -\underbrace{(L_f L_g h - L_g L_f h)}_{\equiv 0 \text{ weil } i>1} = L_g L_f h
\end{aligned}$$

Lemma 5.2:

Die Kovektoren $dh(p), dL_f h(p), \ldots, dL_f^{r-1} h(p)$ und linear unabhängig.

Beweis:

Wegen Lemma 5.1 gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} dh(p) \\ dL_f h(p) \\ \vdots \\ dL_f^{r-1} h(p) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{r\times n}} \cdot \underbrace{\Big(g(p), ad_{-f} g(p), \ldots, ad_{-f}^{r-1} g(p)\Big)}_{\in \mathbb{R}^{r\times n}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & L_g L_f^{r-1} h(p) \\ \vdots & \vdots & \star & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & L_g L_f^{r-1} h(p) & \vdots & \\ \underbrace{L_g}_{\neq 0} L_f^{r-1} h(p) & \star & \ldots & \star \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{r\times r}} \tag{5.1}$$

Rang $= r$ weil $L_g L_f^{r-1} h(p) \neq 0$

$\Rightarrow$ Kovektor $dh(p), \ldots, dL_f^{r-1} h(p)$ sind linear unabh.

$\Rightarrow$ Vektoren $g(p), \ldots, ad_{-f}^{r-1} h(p)$ sind linear unabh.

$$\begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \left(b, Ab, \ldots, A^{r-1} b\right) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & c^T A^{r-1} b \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \vdots \\ c^T A^{r-1} b & \ldots & & \star \end{pmatrix}$$

Lemma 5.3:

Wir setzen

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &:= h(x)\\ \phi_2(x) &:= L_f h(x)\\ &\vdots\\ \phi_r(x) &:= L_f^{r-1} h(x)\end{aligned}$$

für $r < n$ gibt es $n - r$ weitere Funktionen $\phi_{r+1}, \ldots, \phi_n$, so dass

$$\phi(x) = \begin{pmatrix}\phi_1(x)\\ \vdots\\ \phi_n(x)\end{pmatrix} \tag{5.7}$$

im Punkt p eine reguläre Jacobimatrix besetzt. Die zusätzliche Funktionen $\phi_{r+1}, \ldots, \phi_n$ können so gewählt werden, dass

$$L_g\phi_i(x) = d\phi_i(x) \cdot g(x) = 0, \qquad i = r+1, \ldots, n \tag{5.8}$$

für alle x aus einer Umgebung von p.

Hinweis:

(5.8) ist eine partielle Dgl.!

Beweis:

Es gilt $g(p) \neq 0$,weil rel. Grad wohldefininiert ist. Damit ist die Distribution $\Delta = \text{span}[g]$ regulär , und weil $1.-$dim. auch involutiv: $[g, g] = g'g = g'g \equiv 0$.

Satz von Frobenius:

Es existieren $n - 1$ SF $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ mit

$$\text{span}[d\lambda_1, \ldots, d\lambda_{n-1}] = \Delta^\perp. \tag{5.9}$$

Wir wollen zeigen: dim($\underbrace{\Delta^\perp}_{dim\Delta^\perp = n-1}$ +span[$\underbrace{dh}_{dim(\cdot)=r}$ $, \ldots, dL_f^{r-1}h]) = n$ im Punkt p.

Gleichbedeutend

$$\Delta^\perp + \text{span}\ [dh, \ldots, dL_f^{r-1}h] = (\mathbb{R}^n)^\star \tag{*}$$

Orthogonales Komplement

$$\underbrace{\Delta}_{\text{span }[g]} \cap \text{span}[dh, \ldots, dL_f^{r-1}h]^\perp = [0] \tag{**}$$

Angenommen, $(**)$ gilt nicht, d.h.

$$\underbrace{\Delta(p)}_{\text{span}[g(p)]} \cap \underbrace{\text{span}[dh, \ldots, dL_f h^{r-1}]^\perp}_{\text{Annihilator}} \neq [0]$$

Dann muss $g(p)$ zum Annihilator gehören. Das ist nicht der Fall.

$$\langle dL_f^{r-1}h(p), g(p)\rangle = L_g L_f^{r-1}h(p) \neq 0$$

Widerspruch: Damit gilt $(**)$ und damit $(*)$
Wegen Lemma 5.1

$$\text{dim span } [dh, \dots, dL_f^{r-1}h] = r,$$

anderseits wegen $(*)$:

$$\text{dim span } [dh, \dots, dL_f^{r-1}, d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-1}] = 0$$

Von den SF $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ kann man $n-r$ zu Ergänzung der Basis wählen, O.E. $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$:

$$\text{dim span}[\underbrace{dh, \dots, dL_f^{r-1}h}_{r}, \underbrace{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-r}}_{n-r}] = n$$

Folglich ist Jacobimatrix

$$\phi'(p) = \begin{pmatrix} dh(p) \\ dL_f^{r-1}h(p) \\ d\lambda_1(p) \\ d\lambda_{n-r}(p) \end{pmatrix}$$

regulär. Wegen (5.9) folgt (5.8)

Satz 5.1:

Die in Lemma 5.3 definierte Abbildung ϕ ist ein lokaler Diffeomorphismus, mit dem System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

in die Byrnes-Isidori-Normalform überführt wird:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r \\ \dot{z}_r &= \alpha(z) + \beta(z)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r+1} &= q_1(z) \\ \dot{z}_n &= q_{n-r}(z) \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Beweis:

Bei wohldefinierten relativen Grad r ist $\phi'(p)$ regulär (Lemma 5.3)
$\Rightarrow z = \phi(x)$ ist lokaler Diffeomorphismus

- a) 1.TS: $z_i = \phi_i(x) = L_f^{i-1}h(x), \quad i = 1, \dots, r$
  Für $i = 1, \dots, r-1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i = \frac{d}{dt}\phi_i(x) &= \phi_i'(x) \cdot \dot{x} \\
&= dL_f^{i-1}h(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\
&= L_f^i h(x) + \underbrace{L_g L_f^{i-1}h(x)}_{\equiv 0 \text{ weil } i<r} u \\
&= \phi_{i+1}(x) = z_{i+1}
\end{aligned}$$

  Für $i = r$ gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_r = \frac{d}{dt}\phi_r(x) &= \phi_r'(x) \cdot \dot{x} \\
&= dL_f^{r-1}h(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\
&= L_f^r h(x) + \underbrace{L_g L_f^{r-1}h(x)}_{\neq 0} u
\end{aligned}$$

  T.S in (5.10):

$$\begin{aligned}
\alpha(z) &= L_f^r h(x)|_{x=\phi^{-1}(z)} \\
\beta(z) &= L_g L_f^{r-1}h(x)|_{x=\phi^{-1}(z)}
\end{aligned}$$

- b) 2.TS : $z_i = \phi_i(x), \quad i = r+1, \dots, n.$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_i = \frac{d}{dt}\phi_i(x) = d\phi_i(x)\dot{x} &= d\phi_i(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \\
&= L_f\phi_i(x) + \underbrace{L_g\phi_i(x)}_{\equiv 0 \text{ wegen (5.8)}} \cdot u = L_f\phi_i(x) =: q_{i-r}(z)|_{z=\phi(x)}
\end{aligned}$$

  $\Rightarrow q_i(z) = L_f\phi_{i+r}(x)|_{x=\phi^{-1}(z)}$.

  Sei $z = \binom{\xi}{\eta}\begin{matrix}\leftarrow & r \\ \leftarrow & n-r\end{matrix}$ Komponenten Normalform (5.10):

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= A\xi + b \cdot (\alpha(\xi,\eta) + \beta(\xi,\eta)u) \\
\dot{\eta} &= q(\xi,\eta) \\
y &= c^T\xi
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$c^T = (0, \dots, 1)$$

5.1.3 Stabilisierung einer Ruhelage

Im Punkt $p \in M$ gelte:

$$\begin{aligned}
f(p) &= 0 \qquad \text{Ruhelage} \\
h(p) &= 0.
\end{aligned}$$

Transformation ϕ kann so gewählt werden, dass $\phi(p) = 0$.Für $n = 0$ ist dann $(\xi, \eta) = (0, 0)$ ebenfalls eine Ruhelage.

- a) Linearisierende Rückführung für 1.TS:

$$u = \frac{1}{\beta(\xi,\eta)}(v - \alpha(\xi,\eta)) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}(v - L_f^r h(x))$$

liefert für (5.11) :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + b \cdot v \quad \text{lineares System} \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) \quad \text{interne Dynamik} \\ y &= c^T \xi \end{aligned} \tag{5.12}$$

- b) Stabilisierung des 1.TS: Zustandsrückführung

$$\begin{aligned} v &= k^T \xi, \quad k^T = (k_0, \dots, k_{r-1}) \\ \dot{\xi} &= (A - bk^T)\xi \end{aligned}$$

mit

$$A - bk^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & \\ -k_0 & -k_1 & \dots & -k_{r-2} & -k_{r-1} \end{pmatrix}$$

Frobenius-Regelmatrix mit charakteristischen Polynom

$$\det(sI - (A - bk^T)) = k_0 + k_1 s + \dots + k_{r-1} s^{r-1} + s^r \tag{5.13}$$

Originalkoordinaten:

$$\begin{aligned} \xi_1 = h(x), \xi_2 = L_f h(x), \dots, \xi_r = L_f^{r-1} h(x) \\ v = -k^T \xi = -\sum_{i=1}^{r} r k_{i+1} \xi_i = -\sum_{i=0}^{r-1} k_i L_f^i h(x) \end{aligned}$$

Zustandrückführung

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}(v - L_f^r h(x)) = -\frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \sum_{i=0}^{r} k_i L_f^i h(x) \quad \text{mit } k_r := 1 \tag{5.14}$$

- c) Interne Dynamik 2.TS:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A - bk^T)\xi \\ \dot{\eta} &= q(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{5.15}$$

hat bei $(\xi,\eta) = (0,0)$ ebenfalls eine Ruhelage. Stabilität des Gesamtsystems wird von 2.TS in (5.15) bestimmt. Autonomes System

$$\dot{\eta} = q(0,\eta) \tag{5.16}$$

Die Dynamik von (5.16) heisst **Nulldynamik (zero dynamics)**

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\iff y = 0, \dot{y} = 0, \dots, y^{r-1} = 0 \\ &\iff y \equiv 0 \end{aligned}$$

Das System heisst **minimalphasig**, wenn die Ruhelage $\eta = 0$ von (5.16) asymptotisch stabil ist.

Satz 5.2 (Stabiliseriung einer Ruhelage):

System (5.1) habe in einer Ruhelage $p \in M$ den rel. Grad r. Ausserdem sei das System minimalphasig und alle Wurzeln des char. Polynoms (5.13) liegen in der offenen linken Halbebene. Verwendet man die Zustandsrueckfuehrung (5.14), dann ist die Ruhelage p asymptotisch stabil

5.1.4 Stabilisierung in eine Ausgangstrajektorie

Ausgangsreferenztrajektorie

$$y_{\mathsf{ref}} : [0, \infty) \to \mathbb{R} \dots$$

r -mal stetig diffbar.
Bisher: $y \to 0$ mit $u = \frac{1}{\beta(\xi,\eta)}(-\alpha(\xi, \eta) - k^T \xi)$
für $t \to \infty$
Jetzt: $y \to y_{\mathsf{ref}}$: Ansatz: $u = \frac{1}{\beta(\xi,\eta)}(-\alpha(\xi, \eta) + y_{\mathsf{ref}}^{(r)}(t) + \sum\limits_{i=0}^{r-1} k_i(y_{\mathsf{ref}}^{(i)} - \xi_{i+1}))$
1.TS

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= y_{\mathsf{ref}}^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{r-1} k_i(y_{\mathsf{ref}}^{(i)}(t) - \xi_{i+1}) \\
y &= \xi_1
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Fehler zwischen System. und Regerenzausgang

$$\xi(t) := y(t) - y_{\mathsf{ref}}(t)$$

Für die Normalform-Koord. gilt:

$$\xi_i = y^{(i-1)}, \quad i = 1, \dots, r$$

letzte Zeile des 1.TS:

$$y^{(r)} = y_{\mathsf{ref}}^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-1} k_i \xi^{(i)}$$

$\Longleftrightarrow$ lineare Dgl.

$$k_0 \xi + k_1 \dot{\xi} + \cdots + k_{r-1} \xi^{(r-1)} + \xi^{(r)} = 0.$$

Rückführung (5.17) in $x-$Koord.

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \sum_{i=0}^{r} r_i(y_{\mathsf{ref}}^{(i)}(t) - L_f^{i-1} h(x)) \quad \text{mit } r_r = 1$$

5.2 Eingangs-Ausgangs-Linearisierung für allg. nichtlineare Systeme

5.2.1 Relativer Grad und Eingangs-Ausgangs-Normalform

System

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= F(x, u) \\
y &= h(x)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

eingangsabhängiges

$$\begin{aligned} \text{VF } F &: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ \text{SF } h &: M \to \mathbb{R}, \text{ glatt} \\ M &\leq \mathbb{R}^n, \quad \text{offen} \end{aligned}$$

Definition 5.2:

System (5.20) hat im Punkt $p \in M$ den (verallg.) relativen Grad r, falls

1.
$$\frac{\partial L_F^k h(x,u)}{\partial u} = 0 \quad \text{für } R = 0, \dots, r-1.$$
   alle x aus Umgebung von p und alle u,
2.
$$\frac{\partial L_f^r h(p,u)}{\partial u} \neq 0$$

Interpretation:

$$\begin{aligned} y &= h(x) \\ \dot{y} &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot \dot{x} \\ &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \cdot F(x,u) \\ &= L_F h(x,u) \\ &\frac{\partial L_F h(x,u)}{\partial u} \begin{cases} \neq 0 & , r = 1 \\ \equiv 0 & \text{weiter diff.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{d}{dt} L_F h(x,u) \\ &= \frac{\partial L_F^h}{\partial x} \dot{x} + \underbrace{\frac{\partial L_F^h}{\partial u}}_{\equiv 0 \text{ für } r>1} \dot{u} \\ &= dL_F h \cdot F(x,u) \\ &= L_F^2 h(x,u) \equiv L_F^2 h(x) \\ y^{r-1} &= L_F^{r-1} h(x,u) \equiv L_F^{r-1} h(x) \\ y^{(r)} &= L_F^r h(x,u) \quad \text{mit } \frac{\partial L_F^r h(x,u)}{\partial u} \neq 0 \end{aligned}$$

Kurzfassung:

$$r = \arg\min_R \{ \frac{\partial}{\partial u} L_F^R h(x,u) \neq 0 \}$$

Lemma 5.4:

System (5.20) habe im Punkt $p \in M$ den (verallg.) rel. Grad r. Dann sind die Kovektoren

$$dh(p), dL_F h(p), \dots, dL_F^{r-1} h(p)$$

linear abhängig.

Beweis:

Indirekt, Angenommen, $dL_F^{r-1}h(p)$ wäre von den Kovektoren $dh(p), \ldots, dL_F^{r-2}h(p)$ linear abhängig, d.h. es gilt Konstanten $c_R \in \mathbb{R}$ mit

$$dL_F^{r-1}h(p) \cdot F(p,u) = \sum_{k=0}^{r-2} C_k \cdot dL_F^k h(p) \cdot F(p,u)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} L_F^r h(p,u)}_{\neq 0} = \sum_{k=0}^{r-2} C_k \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} L_F^{k+1} h(p)}_{\equiv 0}$$

also doch linear unabhängig.

Satz 5.3:

System (5.20) habe im Punkt $p \in M$ den rel. Grad r. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus $z = (\xi, \eta) = \phi(x)$, der (5.20) in die **Eingangs-Ausgangs-Normalform** überführt:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= \alpha(\xi, \eta, u) \text{ mit } \frac{\partial \alpha}{\partial u} \neq 0 \\
\dot{\eta}_1 &= q_1(\xi, \eta, u) \\
&\vdots \\
\dot{\eta}_{n-r} &= q_{n-r}(\xi, \eta, u) \\
y &= \xi
\end{aligned} \qquad (5.21)$$

Beweis:

$\phi_i(x) = L_F^{i-1}h(x)$ für $i = 1, \ldots, r$
$\Rightarrow \quad d\phi_1, \ldots, d\phi_r$ sind in $p \in M$ Lemma 5.4 linear unabhängig.
$\Rightarrow$ Es gilt $n - r$ weitere (glatte) Funktionen $\phi_{r+1}, \ldots, \phi_r$,so dass $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ in $p \in M$ linear unabhängig , d.h. Jacobimatrix ϕ' von

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

ist in $p \in M$ regulär $\Rightarrow \quad \phi$ ist lokaler Diffeomorphismus
Neue Koord:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \phi_1(x), \quad \eta_1 = \phi_{r+1}(x) \\
&\vdots \\
\xi_r &= \phi_r(x), \quad \eta_{n-1} = \phi_n(x)
\end{aligned}$$

d.h. $(\xi, \eta) = \phi(x)$.

1.TS:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_i &= \frac{d}{dt}\xi_i \qquad i = 1, \dots, r \\
&= \frac{d}{dt}\phi_i(x) \\
&= \frac{d}{dt}L_F^{i-1}h(x) \\
&= dL_F^{i-1}h(x)F(x,u) \\
&= L_F^i h(x,u) \\
&= \begin{cases} \xi_{i+1} & \text{für } i = 1, \dots, r-1 \\ \alpha(\xi,\eta,u) & \text{für } i = r \end{cases}
\end{aligned}
$$

mit $\alpha(\xi,\eta,u) = L_F^r h(\phi^{-1}(\xi,\eta),u)$.

2.TS:

$$
\begin{aligned}
\dot{\eta}_j &= \frac{d}{dt}\eta_j, \quad j = 1, \dots, n-r \\
&= \frac{d}{dt}\phi_{r+j}(x) \\
&= d\phi_{r+j}(x) \cdot \dot{x} \\
&= d\phi_{r+j} \cdot F(x,u) \\
&= L_F\phi_{r+j}(x,u)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$q_j(\xi,\eta,u) = L_F\phi_{r+j}(\phi^{-1}(\xi,\eta,),u).$$

Folgerung:

α sei stetig diffbar. und $\xi_0 \in \mathbb{R}^r, \eta_0 \in \mathbb{R}^{n-r}, u_0 \in \mathbb{R}$ und

$$v_0 := \alpha(\xi_0,\eta_0,u_0).$$

wegen

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} \neq 0$$

existiert eine stetig diffbare Abbuldung α^{-1} mit

$$\alpha(\xi,\eta,\alpha^{-1}(\xi,\eta,v)) = v$$

für alle $\xi, \eta v$ aus eine Umgebung von ξ_0, η_0, v_0.

$$v \overset{!}{=} \alpha(\xi,\eta,u) \iff u = \alpha^{-1}(\xi,\eta,v)$$

Resultierendes 1.TS:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= v \\
y &= \xi_1 \\
\iff \dot{\xi} &= A\xi + \underbrace{b}_{=e_n} v \\
y &= \underbrace{c^T}_{=e_1^T} \xi
\end{aligned}$$

Zustandsrückführung zur Stabilisierung wie bei Byrnes-Isidori NF:

$$\begin{aligned}
v &= -K^T\xi, \text{ mit } k = (k_0, \dots, k_{r-1})^T \\
&= -\sum_{i=0}^{r-1} k_i L_F^i h(x)
\end{aligned}$$

Beispiel Schwebende Kugel im Magnetfeld:

Eingang: Strom I
Ausgang: Position $y = l - l_0$
Bewegungsgl: $\ddot{l}\,m = mG - F$
Ansatz Kraft: $F = h\frac{I^2}{l^2}$ Zustandsraummodell mit $x = \binom{x_1}{x_2} = \binom{l}{\dot{l}}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ G - \frac{\rho}{m} \cdot \frac{I^2}{x_1^2} \end{pmatrix} =: F(x, I)$$

$$\begin{aligned}
y &= h(x) = l - l_0 = L_F^0 h(x) \\
\dot{y} &= \dot{l} = \dot{x}_1 = x_2 = L_F^1 h(x) \\
\ddot{y} &= \dot{x}_2 = G - \frac{\rho}{m} \cdot \frac{I^2}{x_1^2} = L_F^2 h(x, I) \qquad r = 2 \\
&\overset{!}{=} v
\end{aligned}$$

Linearisierende Rückführung:

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{m}{\rho} x_1^2 (G - v) \\
I &= \underbrace{\pm}_{\substack{\text{Vorzeichen} \\ \text{Strom egal}}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{\rho} x_1^2 (G - v)}}_{\text{im für } \geq 0 \text{ def.}}
\end{aligned}$$

Stabilisierung

$$v = -k_0 x_1 - k_1 x_2; \qquad \underset{\text{Stotodola-Bed.}}{k_0, k_1 > 0}$$

Charakt. Polynom

$$s^2 + k_1 s + k_0$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sqrt{\frac{m}{\rho} x_1^2 (G + a_0 y + a_1 \dot{y})} \\
&= \sqrt{\frac{m}{\rho} l^2 (G + a_0 (l - l_0) + a_1 \dot{l})}
\end{aligned}
$$

mit modifizierter Wurzelfkt. image1712

5.2.2 Byrnes-Isidori-NF für nicht eingangsaffine Systeme

Frage: Kann die Transformation $z = (\xi, \eta) = \phi(x)$ von (5.20) in die E/A -NF (5.21) so gewählt werden, daß das 2.TS nicht explizit vom Eingang u abhängt?

Byrnes-Isidori-NF

nichtaffine Systeme:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= \alpha(\xi, \eta, u) \\
\dot{\eta}_1 &= q_1(\xi, \eta) \\
&\vdots \\
\dot{\eta}_{n-r} &= q_{n-r}(\xi, \eta) \\
y &= \xi_1
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Alternative Darstellung von (5.22)

$$
\begin{aligned}
\dot{z} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_r \frac{\partial}{\partial z_{r-1}} + \alpha(z, u) \frac{\partial}{\partial z_r} \\
+ q_1(z) \frac{\partial}{\partial z_{r+1}} + \cdots + q_{n-r} \frac{\partial}{\partial z_n}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Nichtaffines System

[1]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= F(x, u) \\
y &= h(x)
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Byrnes-Isidori-NF

für nichtaffine Systeme:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
\dot{\xi}_r &= \alpha(\xi, \eta, u) = \frac{\partial \alpha(\xi, \eta, u)}{\partial u} \neq 0 \\
\dot{\eta}_1 &= q_1(\xi, \eta) \\
y &= \xi_1
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

[1] 07.01.2015

Alternative Darstellung von (5.22) :

$$\dot{z} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_r \frac{\partial}{\partial z_{r-1}} + \alpha(z,u) \frac{\partial}{\partial z_r} + q_1(z) \frac{\partial}{\partial z_{r+1}} + \cdots + q_{n-r} \frac{\partial}{\partial z_n} \tag{5.23}$$

- $n-1$ eingangsunabhängige Vektorfeld VF
- genau 1 eingangsabhängige Skalarfeld SF

SISO-System (5.20) kann für große m immer folgendermaßen dargestellt werden:

$$\dot{x} = F(x,u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) \varrho_i(x,u)$$

mit eingangsunabhängigen Skalarfeldern $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ und linear unhängigen VF $g_1, \ldots, g_m$.
Transformation $z = \phi(x)$ liefert

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= \frac{d}{dt} \phi_j(x) \\ &= d\phi_j(x) \cdot \dot{x} \\ &= d\phi_j(x) \cdot (f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) \varrho(x,u)) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Damit der Eingang nur bei einem SF auftritt (Nr, R), muss für alle $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{R\}$ gelten.

$$d\phi_j(x) \cdot (g_1(x), \ldots, g_m(x)) \equiv (0, \ldots, 0)$$

- sind m partielle Dgln. pro Komponente ϕ_j
- Satz von Frobenius: $\exists$ höchstens $n-m$ unabhängige Lösungen
- Für Invertierbarkeit sind $n-1$ SF ϕ_j mit l.n. Gradienten notwendig $\Rightarrow$ Es muß $m = 1$ gelten.

Satz 5.4:

System (5.20) habe den rel. Grad r. Es ex. genau dann eine Zustandstransformation in die Byrnes-Isidori-NF (5.20), wenn das System (5.20) in die Form

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \varrho(x,u) \tag{5.24}$$

mit einem eingangabh. SF ϱ und $g(x) \neq 0$ überführt werden kann.
Beweisskizze: $\Rightarrow$ analog BI-NF für affine System (5.1), insb. ist span$\{g\}$ involutiv.
$\Leftarrow$ Es gäbe die BI-NF (5.22). Rücktransformation von (5.23) liefert (5.24).

Bsp. (Rakete):

Zustand $x = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})^T$,
Eingang $n = \nu$ Antriebswinkel

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ -gR^2/x_1^2 + x_1 x_4^2 \\ x_4 \\ -2x_2x_4/x_1 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ F/m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{g_1(x)} \cos u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fm_1/x_1 \end{pmatrix}}_{g_2(x)} \sin u$$

dim span $\{g_1, g_2\} = 2$
$\Rightarrow$ System kann NICHT in BI-NF überführt werden.

Alternative Herangehensweise:

Überführung des nichtaffinen Systems $\dot{x} = F(x,u)$ durch Erweitern des Zustandes in ein eingangsaffinen System.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,u)\\ \dot{u} &= w\end{aligned}$$

image701
neuer Zustand $\tilde{x} := \binom{x}{u}$
neuer Eingang $\tilde{u} := w$.

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F(\overbrace{x,u}^{\tilde{x}})\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F(\tilde{x})\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\tilde{w}$$

5.3 Exakte Eingangs-Zustands-Linearisierung

Bisher: System mit rel. Grad $r \leq n \Rightarrow$

- r-dim. lineares Teilsystem
- $(n-r)-$dim. (in der Regel) nichtlineares TS

Frage:

Wann kann ein System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{5.1}$$

vollständig in ein lineares System überführt werden?

Festellung:

Das Problem der sog. **Eingangs-Zustands-Linearisierung** ist lösbar, wenn es eine Ausgangsabh. h (d.h. ein SF) gibt, für welches das System den rel. Grad n besitzt.
Ein solches System heißt **eingangs.-zustands-linearisierbar**.
Nach Def. 5.1 muß für $r = n$ gelten:

$$\begin{aligned}L_g L_f^i h(x) &\equiv 0 \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n-2\\ &\qquad L_g L_f^{n-1} h(p) \neq 0\end{aligned} \tag{5.25}$$

Lemma 5.1:

Für rel. Grad r

$$\langle dL_f^j h, ad_{-f}^i g\rangle = \begin{cases} L_g L_f^{r-1} h & \text{für } i+j = r-1\\ 0 & \text{für } i+j < r-1\end{cases}$$

Für $j = 0$:

$$\underbrace{\langle dh, ad_{-f}^i g\rangle}_{\equiv L_{ad_{-f}^i g} h} = \begin{cases} L_g L_f^{r-1} h & \text{für } i = r-1\\ 0 & \text{für } i < r-1\end{cases}$$

Gleichwertige Formalisierung von Gl. (5.25) :

$$
\begin{aligned}
L_{ad^i_{-f}g}h(x) \equiv 0 \quad & \text{für } 0 \leq i \leq n-2 \\
L_{ad^{n-1}_{-f}g}h(p) \neq 0 &
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Die ersten $n-1$ Gln. von (5.26):

$$
dh(x) \cdot (g(x), ad_{-f}g(x), \ldots, ad^{n-2}_{-f}g(x)) \equiv (0, 0, \ldots, 0) \tag{5.27}
$$

partielle Dgl. 1.Ordnung in h.

Distribution:

$$
\Delta_i(x) = \text{span}\{g(x), ad_{-f}g(x), \ldots, ad^{i-1}_{-f}g(x)\}
$$

Satz 5.5:

Wir betrachten System (5.1) in Punkt $p \in M$. Es existiert genau ein Ausgang mit rel. Grad n, wenn

a) Δ_{n-1} involutiv ist und

b) dim$\Delta_n(p) = n$

Beweis:

$\Leftarrow$ Bedingungen $a)$ und $b)$ seinen erfüllt.
Wegen (b) ist auch Δ_{n-1} regulär mit dim$\Delta_{n-1} = n-1$,
Wegen (a) auch involutiv Satz von Frobenius:
Es ex. ein SF h, welches alle VF von Δ_{n-1} annihiliert, d.h.

$$
0 \equiv \langle dh, ad^i_{-f}g \rangle = L_{ad^i_{-f}g}h. \text{ für } i = 0, \ldots, n-2 \tag{*}
$$

Außerdem gilt

$$
0 \neq \langle dh, ad^{n-1}_{-f} \rangle(p) = L_{ad^{n-1}_{-f}g}h(p), \tag{**}
$$

denn sonst würde dh Annihilator von n linear unabh. VF seinen zu Dimensionsformel

$$
(\text{dim}\Delta + \text{dim}\Delta^\perp = n)
$$

Lineares System:

$$
\dot{x} = \underbrace{Ax}_{f(x)} + \underbrace{h}_{g(x)\ldots\text{konst}} u
$$

$$
\begin{aligned}
ad_{-f}g = [-f, g] &= -[f, g] \\
&= -(\underbrace{g'}_{\equiv 0} f - f'g) \\
&= f' \cdot g = Ab
\end{aligned}
$$

$$
ad^k_{-f}g = A^k b
$$

$$\Rightarrow \Delta_n = \text{span } \{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$$
$$\Rightarrow \Delta_n = \text{im} Q_s$$

Steuerbarkeitsmatrix (Kalman)

$$Q_s = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$$

Für ein lin. System existiert genau dann ein Ausgang mit rel. Grad n das System steuerbar ist. Bedingung b) bedeutet, dass die **Steuerbarkeits** bzw. **Erreichbarkeitsmatrix**

$$Q_s(x) = (g(x), ad_{-f}g(x), \dots, ad_{-f}^{n-1}g(x))$$

regulär ist.

Folgerung:

Für ein System mit $n = 2$ ex. genau dann ein Ausgang mit rel. Grad $r = n$, wenn

$$Q_s = (g(x), ad_{-f}g(x))$$

regulär ist.

Begründung:

- $\dim \Delta_n = \text{im } Q_s = n$ weil regulär
- $\Delta_{n-1} = \text{span}\{g\}$ ist als 1.-dim Distribution involutiv ($[g, g] \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta(z)u \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\alpha(z) = L_f^n h(x)$$
$$\beta(z) = L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0.$$

Für rel. Grad $r = n$ geht die Byrnes-Isidori-NF (5.10) in die **nichtlineare Regelungsnormalform (controller canonical form)** über:

Satz 5.6:

Für ein allg. nichtlineare System

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{5.29}$$

mit VF $F : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, glatt, $M \leq \mathbb{R}^n$ offen sind folgende Aussagenäquivalent.

(a) System (5.29) ist eingangszustandslinearisierbar,

(b) Es existiert ein eingangsabh. SF ϱ, so daß (5.29) in die Form

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\varrho(x, u)$$

überführt werden kann, so daß System (f, g) eingangs-zustands linearisierbar ist.

(c) Das erweiterte Sytem

$$\dot{x} = F(u, w)$$
$$\dot{u} = w\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F(x,u) \\ 0 \end{pmatrix}}_{f(\tilde{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(\tilde{x})}$$

ist eingangs-zustand

5.4 Relativer Grad und Flachheit im Eingrößenfall

Def.:

Das Eingrößensystem

$$\dot{x} = F(x, u)$$

heißt **(differentiell) flach**, falls ein SF $\lambda : M \leq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, so daß für

$$z_1 = \lambda(x) \qquad \text{flacher Ausgang}$$

glatte Funktion ψ, θ existiert, so daß

$$x = \psi(z_1, \dot{z}_1, \ldots, z_1^{(n-1)})$$
$$u = \theta(z_1, \dot{z}_1, \ldots, z_1^{(n)}).$$

Satz 5.7:

Ein System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{5.1}$$

ist genau dann flach, wenn es exakt eingangs-zustands-linearisierbar ist, d.h. wenn es ein SF

$$\lambda : M \to \mathbb{R}$$

gibt, so daß das System den rel. Grad n besitzt.
Koordin. -Transformation kann direkt angegeben werden.

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ z_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ L_f\lambda(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\lambda(x) \end{pmatrix} = \phi(x)$$

Umkehrabb.

$$x = \psi(z)$$

Jakobimatrizen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(x) \quad \text{bzw. } \frac{\partial x}{\partial z} = \psi'(z)$$

sind regulär ($\Rightarrow \phi, \psi$ sind Diffeomorphisinen)

Satz 5.8 (Hagenmager, Zeitz, 2004):

Wir betrachten System (5.1) mit 2 Ausgängen:

$$\begin{aligned} y &= h(x)\dots \text{ rel. Grad } r \text{ (Systemausgang)} \\ z_1 &= \lambda(x)\dots \text{ rel. Grad } n \text{ (flacher Ausgang)} \end{aligned}$$

Dann kann der Systemausgang wie

$$y = \varrho(z_1, \dot{z}_1, \dots, z_1^{(n-r)}).$$

Beweis:

Relativer Grad n von λ impliziert (Lemma 5.1/5.2):

$$\langle dL_f^j\lambda, ad_{-f}^i g\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i+j < n-1 \\ L_gL_f^{n-1}\lambda & i+j = n-1 \end{cases}$$

Also gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d\lambda \\ dL_f\lambda \\ \vdots \\ dL_f^{n-1}\lambda \end{pmatrix}}_{\frac{\partial z}{\partial x}=\phi'(x)} \cdot (g, ad_{-f}g, \dots, ad_{-f}^{n-1}g) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & L_gL_f^{n-1}\lambda \\ \vdots & & \star \\ 0 & & \\ L_gL_f^{n-1}\lambda & \star & \star \end{pmatrix}}_{\text{regulär}} \qquad (*)$$

Inverse einer rechten unteren $\Delta-$Matrix ist eine linke obere Dreieckmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \star \\ & \vdots \\ \star & \star \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Multiplikation von $(*)$ von links mit $\frac{\partial x}{\partial z}$ und von rechts mit der Inversen aus $(**)$:

$$(g, ad_{-f}g, \dots, ad_{-f}^{n-1}g) \cdot \begin{pmatrix} \star & \dots & \star \\ \vdots & & \\ \star & & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial z} = \psi'(z)$$

Für gilt wegen Lemma 5.1:

$$\langle L_f^j h\text{verpasst}$$

Damit

$$dh \cdot (g, ad_{-f}g, \dots, ad_{-f}^{n-1}g) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, \underbrace{\overbrace{*}^{\neq 0}, \dots, 0}_{n-r+1})$$

d.h. die Asugangsabb. h hängt nur von den ersten $n-r+1$ Komponenten von z ab, d.h. von

$$z_1, z_2 = \dot{z}_1, \dots, z_{n-r+1} = z_1^{(n-r)}$$

Ergänzung zur Eingangs-Zustands-Linearisierung:

$$L_g h(x) = 0, L_{ad_{-f}g}h(x) = 0, \dots, L_{ad_{-f}^{n-2}g}h(x) = 0 \qquad \text{(I)}$$

und

$$\underbrace{L_{ad_{-f}^{n-1}g}h(x)}_{=L_gL_f^{n-1}h(x)=\beta(z)\neq 0} \quad \neq 0 \tag{II}$$

Bisher: Nutzung von Bed. (I), führt auf partielle Dgl. verpasst
Jetzt: Falls β bekannt, Festlegung $1 \equiv \beta(z) = L_gL_f^{n-1}h(x)$ Bed $(I) + (II)$ (n Dgl.):

$$dh(x) \cdot \underbrace{(g(x), ad_{-f}g(x), \ldots, ad_{-f}^{n-1}g(x))}_{=Q_s(x), n\times n} = e_n^T$$
$$\iff dh(x) = e_n^T Q_s^{-1}$$

Q_s regulär
Vorgehen:

- Berechnung der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

$$w(x) = e_n^T Q_s^{-1}(x)$$

-
  - w geschlossen?
  - verpasst

6 Beobachterentwurf

6.1 Beobachtbarkeit

System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \qquad , x(0) = x_0 \in M \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$$\begin{aligned} VF : &f : M \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi \ldots \text{ Fluss} \\ SF : &h : M \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Def. 6.1:

Gegeben sei (6.1) und $T > 0$. Zwei Anfangszustände $x_a, x_b \in \mathbb{R}, x_a \neq x_b$, heissen **nichtunterscheidbar**, wenn $\forall t \in [0, \tau] : h(\varphi_t(x_a)) = h(\varphi_t(x_b))$.
[1] Andernfalls heißen die Zustände **unterscheidbar**, d.h. wenn $\exists t \in [0, \tau] : h(\varphi_t(x_a)) \neq h(\varphi_t(x_b))$.
image2101

Def.6.2:

System (6.1) heißt **(global) beobachtbar**, wenn es in $\mathbb{M}$ keine nichtunterscheidbaren Zustände gibt.

Def.6.3:

System (6.1) heißt **lokal beobachtbar** im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, die keine nichtunterscheidbaren Zustände enthält. System heißt **lokal boebachtbar,** wenn es für alle $x_0 \in \mathbb{M}$ lokal beobachtbar ist.

Motivation:

Zwei analyt. Kurven stimmen überein, wenn alle Taylorkoeff. gleiche Potenz übereinstimmen, statt Taylorkoeff: Ableitungen.
Lie- Reihe:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_f^k h(x_0) \frac{t^k}{k!}$$

[1] 21.01.2015

Beobachtbarkeitsabbildung für $k \in \mathbb{N}$:

$$q(x) = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h(x) \end{pmatrix}$$

$q(x_a) \neq q(x_b)$: x_a und x_b sind unterscheidbar.
Injektivität der Beobachtbarkeitsmatrix kann mit Satz über die Unkehrfunktion geprüft werden. Jakobimatrix

$$Q(x) = q'(x) = \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{k-1} h(x) \end{pmatrix}$$

heißt **Beobachtbarkeitsmatrix.**
Heinreichende Bedingung für lokale Beobachtbarkeit:

Satz 6.1:

Die Beobachtbarkeitsmatrix Q habe für ein $k \in \mathbb{N}$ an der Stelle x_0 den Rang n. Dann ist das System (6.1) im Punkt x_0 lokal beobachtbar.

6.2 High-Gain-Beobachter für autonome Systeme

Die Beobachtbarkeitsmatrix sei für $k = n$ regulär, Dann ist die Beobachtbarkeitsabbildung q ein (lokale) Diffeomorphismus

$$z = q(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}$$

der System (6.1) in die Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= \alpha(z) \quad \text{mit } \alpha(z) = L_f^n h(q^{-1}(z)) \\ y &= z_1 \end{aligned}$$

überführt **(Beobachtbarkeits-NF, observability canonical form)**.
Matrix-Darstellung:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\alpha(z) \\ y &= c^T \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n, c^T = (1, 0, \dots, 0) = e_1^T.$$

Ansatz für Beobachter mit konstanter Beobachterverstärkung $k \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} = b\alpha(\hat{z}) + k(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= c^T\hat{z} \end{aligned}$$

Beobachtungsfehler $\tilde{z} = z - \hat{z}$ genügt der Fehlergleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\ &= Az + b\alpha(z) - A\hat{z} - b\alpha(\hat{z}) - k(\overbrace{y}^{c^T z} - \overbrace{\hat{y}}^{c^T\hat{z}}) \\ &= (A - Kc^T)\tilde{z} + b(\alpha(z) - \alpha(\hat{z})) \end{aligned}$$

Punkt $\tilde{z} = 0$ ist eine Ruhelage der Fehlergleichung.
Stabilität: α genüge einer Lipschitz-Bed. d.h.

$$\exists\gamma > 0 : |\alpha(z) - \alpha(\hat{z})| \leq \gamma \cdot |z - \hat{z}| = \gamma|\tilde{z}|.$$

Dann existiert eine Beobachterverstärkung $K \in \mathbb{R}^n$, so daß die Ruhelage $\tilde{z} = 0$ der Fehlergleichung exponentiell stabil ist.
Lineare Teil: Mit

$$K = \begin{matrix} p_{n-1} \\ \vdots \\ p_0 \end{matrix} \in \mathbb{R}^n$$

enthält man das char. Polynom.

$$\det(sI - (A - Kc^T)) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0$$

Implementierung des Beobachters in Originalkoord.:
Kettenregel

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \frac{d}{dt}\hat{z}(t) & &= \frac{d}{dt}q(x(t)) \\ \dot{\hat{x}} &= Q^{-1}(\hat{x}) \cdot \dot{\hat{z}} & &= \underbrace{q'(\hat{x}(t))}_{Q(\hat{x}(t))} \cdot \dot{\hat{x}}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{Q^{-1}(\hat{x}) \cdot (A\hat{z} + b\alpha(\hat{z})}_{f(\hat{x})} + k(y - \hat{y})) \\ &= f(\hat{x}) + \underbrace{Q^{-1}(\hat{x})k}_{=:l(\hat{x})}(y(t) - h(\hat{x})) \end{aligned}$$

... vom Schätz-bzw. Beobachterzustand abh. Verstärkung $l : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^n (VF)$

Bsp:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_2^2)$$

$$\left.\begin{array}{rcc} y & = & x_1 = h(x) \Rightarrow dh(x) = (1\,x) \\ \dot{y} & = & \dot{x}_1 \\ & = & -x_2 + x_1(1 - x_1)^2 \\ & = & L_f h(x) \Rightarrow \quad dL_f h(x) = (1 - 3x_1^2, -1) \end{array}\right\} Q(x) = \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Charakt. Polynom: $s^2 + p_1 s + p_0, \qquad p_0, p_1 > 0$

$$l(\hat{x}) = Q^{-1}(\hat{x}) \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}}_{k \in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1(1 - 3\hat{x}_1^2) - p_0 \end{pmatrix}$$

Beobachter:

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\hat{x}_2 + \hat{x}_1(1 - \hat{x}_1^2) \\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2(1 - \hat{x}_2^2) \end{pmatrix}}_{f(\hat{x})} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1(1 - 3\hat{x}_1^2) - p_0 \end{pmatrix} \cdot (y(t) - \hat{x}_1)$$

6.3 High-Gain-Beobachter für nichtautonome Systeme

System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.2}$$

VF: $f, g : \mathrm{M} \to \mathbb{R}^n$
SF: $h\ : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$
Beobachtbarkeit kann vom Eingangssingal abhängen.

Bsp:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 u$$
$$\dot{x}_2 = x_2$$
$$y = x_1$$

- a). $n = 0$: Ausgangskurve $y(t) = e^{-t}, \qquad x_1(0)$ hängt nur von x_1 ab.
  $\Rightarrow$nicht beobachtbar!
- b). $n \neq 0$: System beobachtbar:

$$x_1 = y$$
$$x_2 = y + \dot{y}$$

Satz 6.2:

Bed. für lokale Beobachtbarkeit bei bel. Eingangssignal: System ist in folgende Form überführbar.

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 + \beta_1(z_1)u \\
\dot{z}_2 &= z_3 + \beta_2(z_1, z_2)u \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta_n(z_1, \dots, z_n)u \\
y &= z_1
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Funktionale Abhängigkeit

$$
\begin{aligned}
\beta_1(z_1) \\
\beta_2(z_1, z_2)
\end{aligned}
$$

Lineare Abhängigkeit

$$
\begin{aligned}
d\beta_1 &\in \text{span } \{dz_1\} \\
d\beta_2 &\in \text{span } \{dz_1, dz_2\}
\end{aligned}
$$

Transf. von (6.2) durch Beobachtbarkeitsabb.

$$z = q(x), \quad z_i = L_f^{i-1}h(x), \quad i = 1, \dots n$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dot{z}_1 & = & \frac{d}{dt}h(x) & = & dh\dot{x} & = & dh(f+gu) \\
 & & & & & = & \underbrace{L_f h}_{z_2} + \underbrace{L_g h}_{\beta_1} \cdot u \\
\dot{z}_1 & = & \frac{d}{dt}L_f h(x) & = & dL_f h \cdot \dot{x} & = & dL_f h \cdot (f+gu) \\
 & & & & & = & \underbrace{L_f h}_{z_2} + \underbrace{L_f^2 h}_{z_3} + \underbrace{L_g L_f h}_{z}\, u
\end{array}
$$

Bed. für Form 6.3

$$dL_g L_f^i h \in \text{span } \{dh, dL_f h, \dots, dL_f^i h\} \quad i = 0, n-2$$

6.4 Exakte Linearisierung des Beobachtungsfehlers

System

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= F(x, u) \\
y &= h(x)
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Angenommen, $\exists$ Koordinatentransformation

$$z = T(x), \quad x = S(z),$$

die System (6.4) in die **Beobachter-Normalform** überführt

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + \alpha(y, u) \\
y &= c^T z
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

- lineare Ausgang
- lineare Dynamik
- **nichtlineare Eingangs-Ausgangs-Aufschaltung**

$$\alpha : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$$

Das Paar (A, c^T) sei beobachtbar, Form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c^T = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{Duale } \textbf{Brunovsky Form}$$

Ansatz für Beobachter:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \alpha(y,u) + k \overbrace{(y - \hat{y})}^{\text{Ausgangsfehler}} \\ \hat{y} &= c^T \hat{z} \\ \hat{x} &= S(\hat{z}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

$k \in \mathrm{R}^n$ Konstante Beobachterverstärkung
Beobachtungsfehler $\tilde{z} = z - \hat{z}$ genügt der Fehlerdgl.:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \dot{z} - \dot{\hat{z}} \\ &= Az + \alpha(y,u) - A\hat{z} - \alpha(y,u) - kc^T(z - \hat{z}) \\ &= (A - kc^T)\tilde{z} \qquad \dots \text{ ist } \textbf{exakt} \text{ linear!} \end{aligned}$$

Systemmatrix

$$A - kc^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -p_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -p_{n-2} \\ 0 & & & \\ 0 & \dots & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Frobenius Begleitmatrix}} k = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Beobachter (6.6) ... **Normalform Beobachter** Beobachter (6.6) in x-Koord.:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \frac{x}{dt} S(\hat{z})|_{(6.6)} \\ &= S'(\hat{z})[A\hat{z} + \alpha(y,u) + k(y - \hat{y})] \\ &= S'(\hat{z})[A\hat{z} + \alpha(\hat{y},u)] + S'(\hat{z})[\alpha(y,u) - \alpha(\hat{y},u) + k(y - \hat{y})] \\ &= F(\hat{x},u) + \underbrace{[T'(\hat{x})]^{-1} \cdot [\alpha(y,u) - \alpha(h(\hat{x}),u) - k(y - h(\hat{x}))]}_{=:R_\infty(\hat{x},y,u)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= T(x), \quad x = S(z) \\ z &= T(S(z)) \qquad |\frac{d}{dt} \\ I &= T'(x)S'(z) \\ \Rightarrow &= (T')^{-1} = S' \end{aligned}$$

Schwierigkeit des Verfahrens:
Existenz bzw. Berechnung der Normalform bzw. der Koord-Transf.
Aufspaltung der rechten Seite von (6.4):

$$F(x,u) = f(x) + g(x,u) \tag{6.8}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x) &:= F(x,0) \\ g(x,u) &:= F(x,u) - F(x,0) \end{aligned}$$

Satz 6.2:

Das System

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \tag{6.9}$$

ist genau dann in einer Umgebung eines Punktes $p \in \mathrm{M} \subset \mathrm{R}^n$ durch eine Koord.-Transf. $z = T(x)$ bzw. $x = S(z)$ in die Beobachter-Normalform (6.5) überführbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} &B1 : \text{dim } (dh(p), dL_f h(p), \ldots, dL_f^{n-1} h(p)) = n, \\ &B2 : [ad_{-f}^i v, ad_{-f}^j v] \equiv 0 \text{ für } 0 \leq i, j \leq n-1, \\ &B3 : [g, ad_{-f}^i v] \equiv 0 \text{ für } 0 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

wobei das Vektorfeld v die eindeutige definierte Lösung von

$$L_v L_f^i h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i = 0, \ldots, n-2 \\ 1 & \text{für} \qquad i = n-1 \end{cases}$$

Beweis:

Wir zeigen: B1-B3 sind hinreichend

$$L_v L_f^{'} h(x) = \langle dL_f^i h, v \rangle (x)$$

Gl. (6.9) zeilenweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix}}_{Q(x)} v(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \tag{6.10}$$

Wegen B1 sind die Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix Q linear unabhängig

- Q ist in Umgebung von p invertierbar (regulär)
- $$v(x) = Q^{-1}(x) e_n \tag{6.11}$$

$v(x)\dots$ Startvektor, letzte Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix
Aus (6.9) folgt (Lemma 5.1 (5.2)):

$$\begin{pmatrix} dh(p) \\ dL_f h(p) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(p) \end{pmatrix} \cdot (v(p), ad_{-f}v(p), \dots) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & * \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

- n Vektoren $v(p), ad_{-f}v(p), \dots, ad_{-f}^{n-1}v(p)$ sind linear
- n VF $v(x), ad_{-f}^{n-1}v(x)$ sind linear unabhängig

Zusammen mit B2

- Satz über simultane Begradingung von VF: Es ex. (lokaler) Diffeomorphismus

$$z = T(x), x = S(z) \tag{6.13}$$

mit

$$T_* ad_{-f}^i v = \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} = e_{i+1}$$

bzw.

$$\begin{aligned} ad_{-f}^i v = S_* \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} &= S'(z) \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} \\ &= \frac{\partial S(z)}{\partial z_{i+1}} \end{aligned}$$

System in transformatieren Koordn. :

$$\begin{aligned} \bar{f}(z) &= T_* f(x)|_{x=S(z)} \\ \bar{g}(z,u) &= T_* g(x,u)|_{x=S(z)} \\ \bar{h}(z) &= h(x)|_{x=S(z)} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Ausgangsabb $\bar{h}$:

$$\bar{h}(z) = h(S(z))$$

Wegen (6.13) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z_{i+1}} &= \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z_{i+1}} \\ &= dh(x) \cdot \frac{\partial S(z)}{\partial z_{i+1}} \\ &= dh(x) \cdot ad_{-f}^i v(x) \\ &= \langle dh, ad_{-f}^i v \rangle (x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i = 0, \dots, n-2 \\ 1 & \text{für} \quad i = n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

- $$d\bar{h}(z) \equiv (0, \dots, 0, 1) = e_n^T = c^T$$

- $$\bar{h}(z) = z_1 = c^T z.$$

Vektorfeld $\bar{f}$: Für $i = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\begin{aligned}
e_{i+1} = \frac{\partial}{\partial z_{i+1}} &= T_* ad^i_{-f} v \\
&= T_*[-f, ad^{i-1}_{-f} v] \\
&= [-T_* f, T_* ad^{i-1}_{-f} v] \\
&= [-f, \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_i}}_{e_i}], \qquad \frac{\partial e_i}{\partial z} = 0 \\
&= \bar{f}' \cdot \frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_i}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Jacobimatrix hat Form

$$\bar{f}'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

- Gl. (6.13) für $i = 0, \dots, n-1$ zusammengefaßt:

  $$S'(z) = \underbrace{(v, ad_{-f} v, \dots, ad^{n-1}_{-f} v)}_{TT(x)}(x)|_{x=S(z)}$$

  System partieller Differentialgl. 1.Ordnung
  Eine Lösung S von (PDE) ist die Koordinatentrafo.

Bemerkung:

- B1 ist Beobachtbarkeitsrangbedingung
- B2 nennt man Involutivitäts oder Integrabilitätsbedinung, ist für reale Systeme nicht erfüllt

Beispiel:

Rössler-System

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_1 + a x_2 \\
\dot{x}_3 &= c + x_3(x_1 - b) \\
y &= ln x_3, \quad x > 0
\end{aligned}$$

Chaot. Verhalten für

$$\begin{aligned}
a &= 0.55 \\
b &= 4 \\
c &= 2
\end{aligned}$$

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$Q(x) = \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ dL_F^2 h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \\ 1 & 0 & -\frac{c}{x_3^2} \\ -\frac{c}{x_3} & -1 & \frac{cx_1x_3 - bcx_3 + 2c^2 - x_3^3}{x_3^3} \end{pmatrix}$$

Startbektor:

$$v = Q^{-1} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jakobimatrix der Transformation:

$$S'(z) = (v, ad_{-f}v, ad_{-f}^2 v)$$

$$\text{Konstante} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -a & 1 - a^2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{lin. VF}$$

Über die Flüße erhält man die Koordn. Trafo:

$$x = S(z) = \begin{pmatrix} z_2 + az_3 \\ -z_1 - az_2 + (1 - a^2)z_3 \\ expz_3 \end{pmatrix}$$

$$z = T(z) = \begin{pmatrix} -ax_1 - x_1 + lnx_2 \\ x_1 - alnx_3 \\ lnx_3 \end{pmatrix}$$