

# Nichtlineare Regelungstechnik 1 –SS 14

Dr.-Ing. J. Winkler

Mitschrift

Bolor Khuu

16. September 2014

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe und Eigenschaften nichtlinearer Systeme</b>	<b>3</b>
1.1	Nichtlineare Übertragungsglieder . . . . .	3
1.2	Typische Phänomene in nichtlinearen Systeme . . . . .	4
1.2.1	Linearer Fall (Errinerung) . . . . .	4
1.2.2	Nichtlinearer Fall . . . . .	4
1.3	Lipschitz-Bedingung und Stetigkeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Analyse nichtlinearer Systeme 2. Ordnung in der Phasenebene bzw, Nähe ihrer Ruhelagen, Phasenportraits</b>	<b>6</b>
2.1	Einführung-Motivation . . . . .	6
2.2	Qualitatives Verhalten linearer System . . . . .	7
2.3	Qualatatives Verhalten nichtlinearer Systeme in der Nähe ihrer Ruhelage . . . . .	8
2.4	Konstruktion des gesamten Phasenportraits . . . . .	10
2.5	Existenz von Dauerschwingung, bzw. Grenzzyklen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Methode der harmonische Balance</b>	<b>11</b>
3.1	Einführungsbeispiel . . . . .	12
3.2	Grundlagen der Methoden . . . . .	12
3.2.1	Vorraußetzung . . . . .	12
3.2.2	Beschreibungsfunktion . . . . .	13
3.2.3	Gleichung der harmonischen Balance . . . . .	14
3.3	Berechnung der Beschreibungsfunktion . . . . .	14
3.4	Lösung der Gleichung der harmonischen Balance . . . . .	14
3.5	Stabilität von Dauerschwingungen . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Stabilität nach Ljapunov</b>	<b>15</b>
4.1	Stabilitätsbegriff . . . . .	15
4.2	Direkte (zweite) Methode von Ljapunov . . . . .	17
4.2.1	Einführungsbeispiel . . . . .	17
4.2.2	Positiv Definite Funktionen . . . . .	18
4.2.3	Stabilitätskriterium . . . . .	19
4.3	Invarianzprinzip (Satz von La Salle) . . . . .	20
4.4	Variable Gradientenmethode . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Intergrator-Backstepping</b>	<b>22</b>
5.1	Einführungsbeispiel . . . . .	22
5.2	Verallgemeinerung . . . . .	23

<b>6</b>	<b>Sliding-Mode-Control</b>	<b>25</b>
6.1	Einführungsbeispiel . . . . .	25
6.2	Verallgemeinerung . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Feedbacklinearisierung</b>	<b>28</b>
7.1	Fehlt etwas . . . . .	28
7.1.1	fehlt etwas . . . . .	28
7.1.2	Relativer Grad . . . . .	29
7.1.3	Verallgemeinerter Entwurf . . . . .	29

# 1 Grundbegriffe und Eigenschaften nichtlinearer Systeme

## 1.1 Nichtlineare Übertragungsglieder

Anordnung, die aus einem Eingangssignal  $u(t)$  ein Ausgangssignal  $y(t)$  erzeugt.  
 $y(t)$  mit Operator  $\varphi$ .  $y(t) = \varphi(t)$

- **Beispiel:**

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad \varphi \rightarrow \text{Ausführungs der Integration}$$

$$\varphi(u + u^*) = \varphi(u) + \varphi(u^*).$$

$$\varphi(c \cdot u) = c \cdot \varphi(u).$$

$$\varphi(c \cdot u + c^* \cdot u^*) = c \cdot \varphi(u) + c^* \cdot \varphi(u^*).$$

- **Beispiel 1:**

$$\begin{aligned} y &= \varphi(\underline{u}) & \underline{u} &\in \mathbb{R}^2 \\ &= u_1 \cdot u_2 & y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u} + \underline{u}^*) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} u_1+u_1^* \\ u_2+u_2^* \end{pmatrix}\right) & \underline{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & & = (u_1 + u_1^*) \cdot (u_2 + u_2^*) & = \\ \underbrace{u_1 \cdot u_2}_{\varphi(u)} + \underbrace{u_1^* \cdot u_2^*}_{\varphi(u^*)} + u_1 \cdot u_2^* + u_1^* u_2 & \rightarrow \text{nicht linear} \end{aligned}$$

- **Beispiel 2:**

$$y = m \cdot u + b =: f(u). \quad u, y, m, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \varphi(u + u^*) &= m(u + u^*) + b. \\ &= mu + b + mu^* \\ &= \varphi(u) + \underbrace{mu^*}_{\text{nicht linear} \rightarrow \text{affin in } u} \end{aligned}$$

- **Errinerung:** Ein Übertragungsglied heißt zeitinvariant wenn für dieses das Verschiebungsprinzip gilt.

$$y(t) = \varphi(u(t)) \quad u \quad \text{-in } t_0 \text{ nach rechts schieben}$$

$$\rightarrow \varphi(u(t - t_0)) = y(t - t_0) \rightarrow y \text{ auch um } t_0 \text{ nach verschob.}$$

- **Folgerung:** Da das Überlagerungsprinzip bei nicht linearen Systemen nicht gilt, läßt nicht der Zusammenhang zwischen den Ein und Ausgangsgrößen nicht durch ein Faltungsintegral darstellen.

- **Folge:**

- keine komplexen Übertragungsfunktionen
- kein Frequenzgang
- kein Laplace-Transformation.

→ Hilfsmittel der komplexen Funktionentheorie nicht anwendbar!!

→ keine allgemein gültige Theorie → Behandlung bestimmbar Systemklassen.

→ Systemtheoretische Eigenschaften, die für einen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  entwickelt wurden, gelten nicht notwendigerweise für den vollständigen  $\mathbb{R}^n$  lokale und globale Eigenschaften fallen nicht zusammen.

## 1.2 Typische Phänomene in nichtlinearen Systeme

### 1.2.1 Linearer Fall (Errinerung)

lineares System

$$\dot{x} = A \cdot x, \quad x(0) = x_0 \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.3)$$

**Ruhelagen:** Lösung von  $A \cdot x = 0$ .

- wenn  $A$  regulär ( $\det A \neq 0$ ) dann gibt es genau eine Ruhelage  $x_e$  mit  $A \cdot x_e = 0$  und  $x(t_0) = x_e \rightarrow x(t) = x_e \quad \forall t > t_0$
- wenn  $A$  singulär ( $\det A = 0$ ) dann gibt es unendlich viele Ruhelagen.
- Die Lösung des Anfangswertproblems (1.3) lautet mit der Transitionsmatrix  $\varphi(t) = e^{A \cdot t} = \underline{I} + A \cdot t + \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot t^2$  wie folgt  $x(t) = \phi(t) \cdot x_0$   
Damit gilt:  
 $a_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} \leq \|x(t)\| \leq a_2 \cdot e^{\alpha_2 t} \quad \text{mit } a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0.$
- Die Ruhelage  $x_e$  ist asymptotisch stabil. Wenn alle Eigenwerte von  $A$  einen negativen Realteil haben und unabhängig von den Anfangsbedingungen.
- wenn

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad x(0) = x_0 \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, u \in \mathbb{R}^m \quad (1.4)$$

Asymptotisch Stabilität von  $\dot{x} = A \cdot x$  impliziert BIBO -Stabilität von (1.4)

- sinusförmiges Eingangssignal  $\rightarrow$  sinusförmiges Ausgangssignal

### 1.2.2 Nichtlinearer Fall

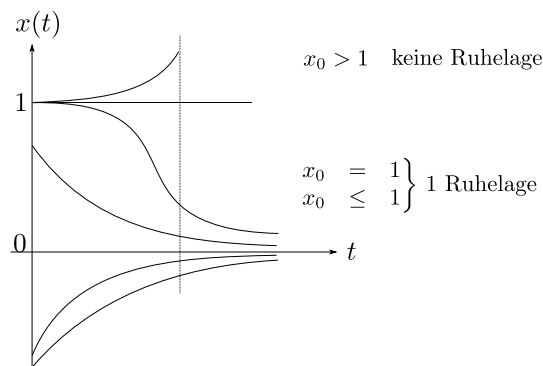
#### (A) Mehrfache Ruhelage (Gleichgewichtspunkte).

Nichtlinearer System, keine, eine, mehrere, unendliche viele Ruhelagen die auch abhängig von den Anfangsbedingungen sein können.

**Ruhelagen:**  $x_e : x(0) = x_e \rightarrow x(t) = x_e \quad \forall t > 0.$

- **Beispiel:**  $\dot{x} = -x + x^2 \quad x(0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}$

Lösung:  $x(t) = \frac{x_0 \cdot e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 \cdot e^{-t}}$



#### (B) Endliche Fluchtzeit

Die Trajektorie eines nichtlinearen Systems kann in endlicher Zeit gegen  $\infty$  oder in die Ruhelage laufen.

- **Beispiel:** siehe **A.** mit  $x_0 > 1$   
 $\dot{x} = -\sqrt{x} \quad x_0 > 0.$

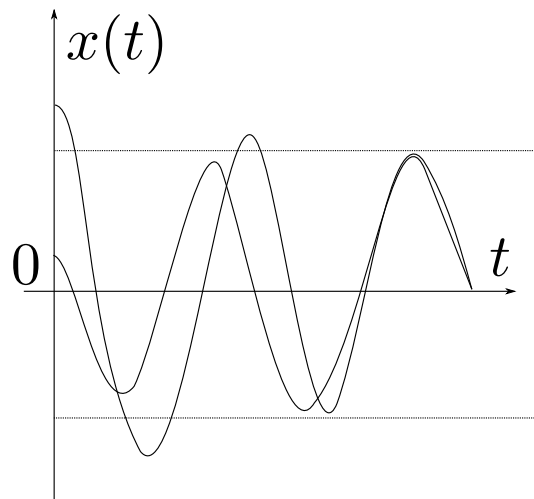
$$x(t) = \begin{cases} (\sqrt{x_0} - \frac{t}{2})^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \cdot \sqrt{x_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Ruhelage:**  $x_e = 0$  in endlicher Zeit wird die Ruhelage aus jedem beliebig möglichen Anfangszustand erreicht.

### (C) Grenzzyklen

Anfangswert unabhängige Dauerschwingungen konstante Amplitude und  $T$ -Periodendauer ohne äußere Anregung.

- **Beispiel:**  
 van der Pol-Gleichung  
 $m\ddot{x} + 2c \cdot (x^2 - 1) \cdot \dot{x} + kx = 0, \quad m, c, k > 0.$   
 (Feder Masse System mit positiv abhängige Dämpfung  $2c \cdot (x^2 - 1)$ )  
 $\rightarrow x \gg 1$  Positive Dämpfung, Energieverlust konvergierendes Verhalten.  
 $\rightarrow x \ll 1$  Negative Dämpfung, divergierendes Verhalten.  
 weder unbegrenztes Wachstum, nach Konvergenz gegen 0.



## 1.3 Lipschitz-Bedingung und Stetigkeit

- **Satz:** Sind die Funktionen  $f(x, t)$  aus (1.7) und  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$  auf der Menge  $B \times [t_0, t_0 + \delta]$  mit  $B \in \mathbb{R}^n$  stetig dann erfüllt  $f(x, t)$  lokal Lipschitz-Bedingung (1.8)
  - $f(x, t)$  nicht stetig differenzierbar  $\rightarrow f(x, t)$  kann durchaus Lipschitz-Stetig sein.
- **Satz:** Globale Existenz und Eindeutigkeit
  - Ausgangspunkt:  
 $f(x, t)$  aus (1.7) ist stückweise stetig in  $t$ , global Lipschitz  $\forall t \in [t_0, t_0 + \tau] \Rightarrow$  (1.7) hat eine Lösung im Zeitintervall  $[t_0, t_0 + \delta]$   
 Sind  $f(x, t)$  und  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$  auf  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_0 + \tau]$  stetig, dann ist  $f(x, t)$  global Lipschitz, wenn  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  auf  $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_0 + \tau]$  gleichmässig beschränkt ist.
  - Gleichmässig beschränkt:  
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  ist gleichmässig beschränkt, wenn gilt. Zu jeder positiv finiten Konstante  $a$  existiert ein  $\beta(a)$  mit unabhängig von  $t_0$ !

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), t_0) \right\| \leq a \Rightarrow \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), t) \right\| \leq \beta(a) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau], x \in \mathbb{R}^n$$

– **Beispiel:**

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1 x_2 \end{aligned} \right\} f(x) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -2 + x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \quad f(x) \text{ ist nicht stetig diffe-}$$

renzierbar,  $\Rightarrow$  **lokal Lipschitz**

gleichmässig beschränkt?

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -2 + x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \max \{ |-1 + x_2|, |x_2| + |1 - x_1| \}$$

$\Rightarrow$  nicht gleichmässig beschränkt, nicht global Lipschitz.

– **Beispiel:**

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1 \cdot x_2 \end{aligned} \right\} f(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{aligned} f(x) &\rightarrow \text{stetig differenzierbar} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &\rightarrow \text{nicht global Lipschitz} \end{aligned} \right\} f \text{ ist lokal Lipschitz}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\{ |-1 + x_2| + |x_1|, |x_2| + |1 - x_1| \right\}$$

## 2 Analyse nichtlinearer Systeme 2. Ordnung in der Phasenebene bzw, Nähe ihrer Ruhelagen, Phasenportraits

### 2.1 Einführung-Motivation

System der Form

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad x_1(0) = x_{10} \quad (2.1a)$$

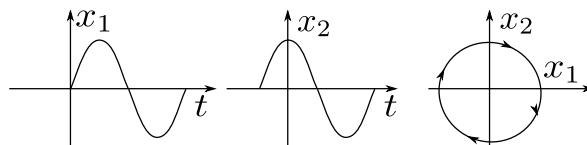
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad x_2(0) = x_{20} \quad (2.1b)$$

mit  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  Phasenebene  $x_1 - x_2$ -Ebene

Lösung von (2.1) liefert  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$  anschaulich darstellbar in der Ebene! Rechte Seite von (2.1) Tangentenvektor an der jeweiligen Lösungskurve. Jedem Punkt ist eindeutig ein Vektor  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$  zugeordnet.

*Ziel:* Konstruktion von Phasenportraits

- Menge von Anfangswerten in der  $x_1 - x_2$ -Ebene
- Trajektorien berechnen  $\hat{=}$  Lösung von 2.1
- Familie von Trajektorien = Phasenprotrait, Zeitinformation geht verloren



## 2.2 Qualitatives Verhalten linearer System

linearisiertes System (2.1) um die Ruhelage  $x_{1e}, x_{2e}$

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} \text{ mit } A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{\text{Jakobi-Matrix}} \bigg|_{x_{1e}, x_{2e}} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{1e} \\ x_2 - x_{2e} \end{pmatrix}$$

$A$  lässt sich in Jordan Normalform transformieren. (RT2)

$$z = T \cdot x \quad \rightarrow \quad \dot{z} = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot z = J \cdot z$$

$A$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$ . Dann gibt's 4 Fälle

- **A).**  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  2 Verschiedene reelle Eigenwerte
- **B).**  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  1 Doppelter Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$
- **C).**  $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  1 konjugiert komplexe Eigenwertpaar  $\lambda = a \pm jb$
- **D).** Spezialfall: mindestens 1 Eigenwert ist 0 Fall A). Beide Eigenwerte reell,  $A$  ist diagonalähnlich  $\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z$   $z(0) = \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{pmatrix}$

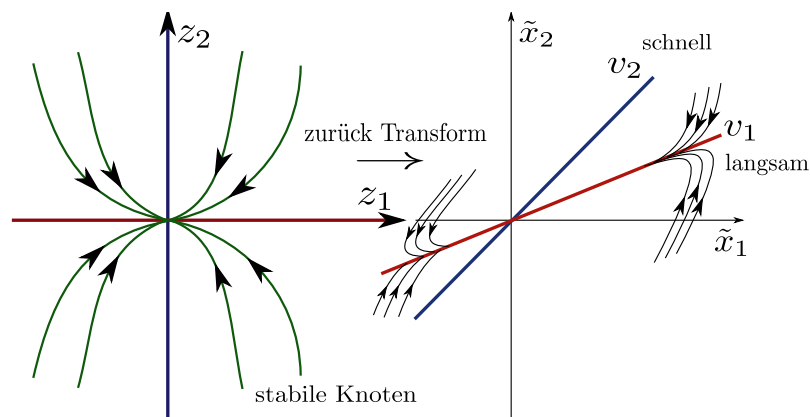
$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t} \\ \dot{z}_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (2.2)$$

Eliminieren von  $t$ :  $\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{z_1}{z_{10}} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{z_2}{z_{20}}$

$$z_2 = \frac{z_{20}}{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{z_1}{z_{10}}}} z_1^{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \quad (2.3)$$

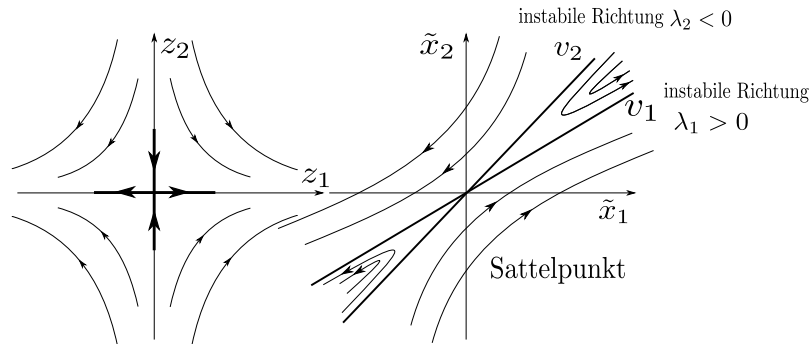
$$\text{Steigung: } \frac{dz_2}{dz_1} = \frac{z_{20}}{z_{10}^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1} \quad (2.4)$$

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  ( $\lambda_2 =$  schnell,  $\lambda_1 =$  langsam)
- $|z_1| \rightarrow 0 \quad \left| \frac{dz_1}{dz_2} \right| \rightarrow 0$
- $|z_1| \rightarrow \infty \quad \left| \frac{dz_1}{dz_2} \right| \rightarrow \infty$

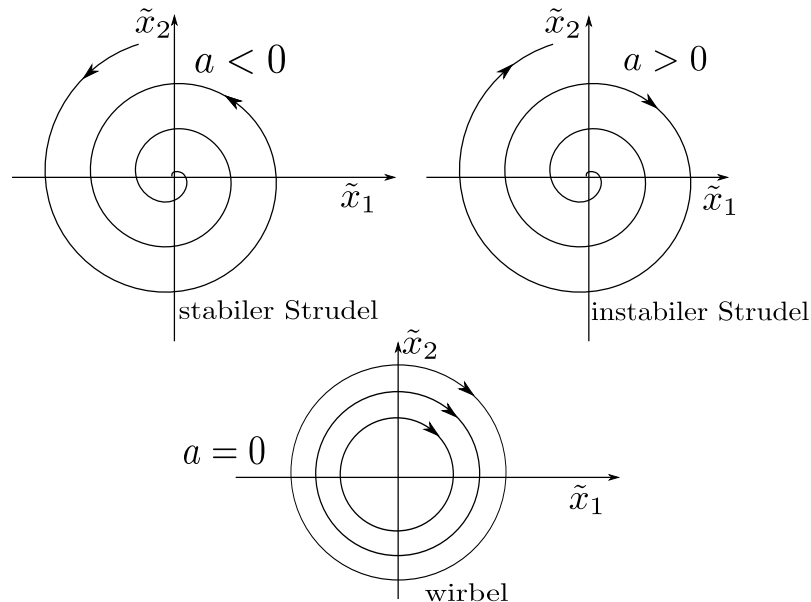


$v_i$  die durch den zum Eigenwert  $\lambda_i$  gehörigen Eigenvektor definierte Richtung

- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  instabile Knoten  
wie stabile Knoten, nur Pfeile andersum
- $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$   $\left. \begin{array}{l} z_1(t) = z_{10} \cdot e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty \\ z_2(t) = z_{20} \cdot e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ für } t \rightarrow \infty$



- konjugiert komplexer Fall  $\lambda = a \pm jb$



## 2.3 Qualitatives Verhalten nichtlinearer Systeme in der Nähe ihrer Ruhelage

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad x_1(0) = x_{10} \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad x_2(0) = x_{20} \quad (2.6)$$

Taylor-Reihen-Entwicklung um Ruhelage  $(x_{1e}, x_{2e})$

$$\dot{x}_i = \underbrace{f_i(x_{1e}, x_{2e})}_{=0} + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{(x_{1e}, x_{2e})} (x_1 - x_{1e}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{(x_{1e}, x_{2e})} (x_2 - x_{2e}) + \text{T.h.O}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \bigg|_{(x_{1e}, x_{2e})} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_i = x_i - x_{ie} \quad (2.7)$$

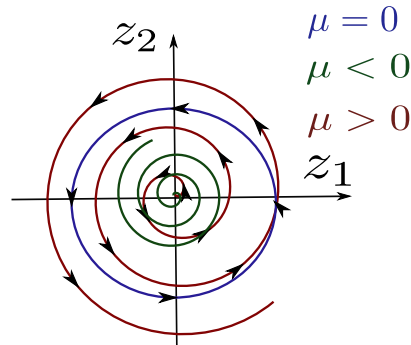
### • Satz von Hartmann-Grobmann

Wenn die 2.6 gehörige Jakobi-Matrix keine Eigenwerte mit verschwindenden Realteil hat, so existiert ein Homöomorphismus in der Umgebung  $U$  um die Ruhelage zwischen den Trajektorien des nichtlinearen Systems  $\dot{x} = A \cdot \tilde{x} \quad h: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  Ruhelagen, deren Jacobi-Matrix Eigenwerte mit nicht verschwindend Realteil haben heißen



hyperbolisch. Jordan-Form im Falle eines Wirbels (nicht hyperbolische RL).

$$J = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \mu = 0 \rightarrow \text{Wirbel} \\ \mu < 0 \rightarrow \text{stabiler Strudel} \end{cases}$$



- Beispiel:

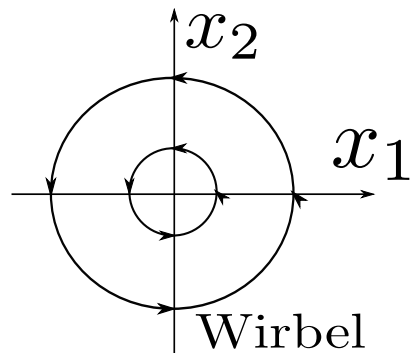
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ruhelagen  $x_{1e} = 0, x_{2e} = 0$

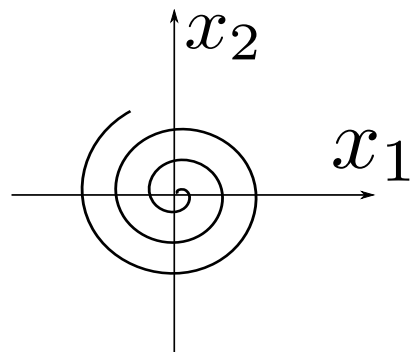
$$\text{Jakobi-Matrix} = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\mu(3x_1^2 - x_2^2) & -(1 + 2\mu x_1 x_2) \\ 1 - 2\mu x_1 x_2 & -\mu(x_1^2 + 3x_2^2) \end{pmatrix}$$

Auswertung in Ursprung (Ruhelage).

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenwert: } \det \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s^2 + 1 = 0 \quad s_{1,2} = \pm j$$

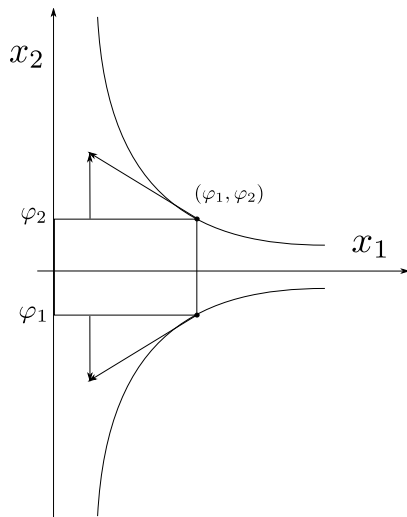


- Beispiel Nichtlineares System:  $\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.8) \text{ in } (r, \varphi) : \begin{aligned} \dot{r} &= -\mu r^3 \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \dot{\mu} &> 0 \\ \dot{\mu} &< 0 \end{aligned} \right| \quad \begin{aligned} r &\rightarrow 0 \\ r &\rightarrow \infty \end{aligned}$   
 $t \rightarrow \infty$



## 2.4 Konstruktion des gesamten Phasenportraits

- **A** Ruhelagen bestimmen
- **B** Linearisierung von (2.1) um Ruhelagen, Bestimmung des Typs der Ruhelagen
- **C** Untersuchung auf Symmetrien Symmetrie zur  $x_1$ -Achse



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(\varphi_1, \varphi_2) &= f_2(\varphi_1, \varphi_2) \\ f_1(\varphi_1, \varphi_2) &= f_2(\varphi_1, \varphi_2)\end{aligned}$$

Es muss gelten

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_1 \\ \varphi_2 &= -\varphi_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) &= f_1(\varphi_1, -\varphi_2) = f_1(\varphi_1, \varphi_2) \\ f_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) &= f_2(\varphi_1, -\varphi_2) = -f_2(\varphi_1, \varphi_2)\end{aligned}$$

- **D** Bestimmung von bestimmten Isoklinen (Punkte gleicher Steigung  $\frac{dx_2}{dx_1}$ )  
z.B:  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = 0$  (Fluß parallel  $x_1$ -Achse)  $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$
- **E** Prüfen, ob es Trajektorien gibt, die ausgewiesenen Mengen genügen, z.B. Trajektorien, für die gilt:  $h(x_1, x_2) = 0$  mit ausgewiesenen Fkt.  $h : x_2 = \tanh(x_1)$  Prüfung, Wenn es Trajektorien gibt die  $h(x_1, x_2)$  genügen, so muß die Richtungsableitung von  $h$  entlang  $f$  immer 0 sein!.

$$\text{— Also: } \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2)^T$$

— Bsp:

$$\dot{x}_1 = 2x_2^2 - 2x_2 \quad h(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2 + 1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad x_1 = x_2^2 - 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} f(x) = (1 \quad -2x_2) \begin{pmatrix} 2x_2^2 - 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 2x_2^3 - 2x_2 - 2x_1x_2 = 2x_2^3 - 2x_2 - 2x_2^3 + 2x_2 = 0$$

## 2.5 Existenz von Dauerschwingung, bzw. Grenzzyklen

[Bilder]

- Grenzzyklus: -Isolierte geschlossene Kurve  
3 Typen:

1. stabile Grenzzyklus

2. instabile

3.  $\left. \begin{array}{l} \text{innenstabile} \\ \text{aussein instabile} \\ \text{semistabile} \end{array} \right\}$  aber auch umgekehrt.

$$\int f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = \iint \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0 \text{ kein Vorzeichenwechsel}$$

- Beispiel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g(x_2) + 4x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= h(x_1) + 4x_1^2x_2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 4x_2^2 + 4x_1^2 > 0 \quad \forall (x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow \text{kein Grenzzzyklus}$$

- **Satz:** Index-Theorem

Sei  $N$  die Anzahl von Knoten, wirbeln und Strudeln, die von einem Grenzzzyklus (GZ) umschlossen werden und  $S$  die Anzahl der Sattelpunkte dann gilt wenn ein GZ existiert, dann  $N = S + 1$

- **Satz:** Poincare-Bendixson

Wenn die Trajektorie  $T$  eines Systems vom Typ(2.1) in einer endl. Umgebung  $\Omega$  verbleibt, dann ist folgendes wahr:

- a  $T$  geht gegen eine Ruhelage
- b  $T$  geht gegen einen asymptot. stabilen GZ
- c  $T$  ist ein Grenzzzyklus

- **Satz:** Bendixson

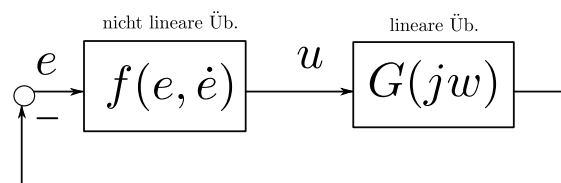
Für ein System vom Typ(2.1) existiert kein GZ in einer Umgebung  $\Omega$ , wenn in dieser Umgebung  $\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2}$  nicht verschwinden und Vorzeichen nicht ändern.

- Beweis:  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$   
 $f_2(x_1, x_2)dx_1 - f_1(x_1, x_2)dx_2 = 0$  Sei  $L$  geschl. Kurve eines GZ.  
 $\int_L (f_2dx_1 - f_1dx_2) = 0$  Stokescher Integralsatz.  
 $\int_\alpha (f_2dx_2 - f_1dx_1) = 0 \iint (\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2}) = 0$  damit kein GZ, auf Ausdruck nicht 0 sein, wenn nicht =0, dann keine VZ wechsel, damit kein GZ

### 3 Methode der harmonische Balance

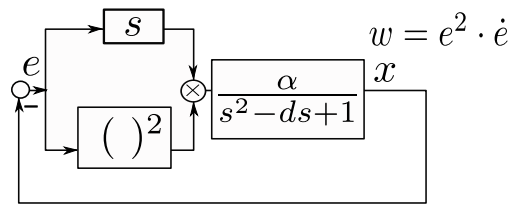
(auch. Methode der Beschreibungs-Funktionen)

- Idee: Frequenzbereichsmethoden aus linearer Theorie zur (näherungsweisen) Beschreibung bestimmter nichtlinearer Systeme verwenden.
- Ziel: Vorhersage von Dauerschwingungen (DS), Amplitude, Periodendauer
- Konzept: Fourierreihenentwicklung periodischer Zeitvorgänge ein System jeignente Vernachlässigungen führen zur. sog. Beschreibungsfunktion, die einfache Analyse ermöglicht.
- Bezug: Nichtlinearer Standardregelkreis



dann geeignete Ausdruck ersetzen, so daß Beschreibung im Frequenzbereich möglich

### 3.1 Einführungsbeispiel



Annahme Dauerschwingungen vorhanden  $\rightarrow$

$$e(t) = A \cdot \sin(wt)$$

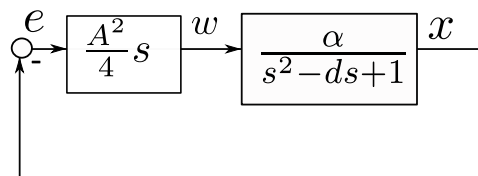
$$\dot{e}(t) = A \cdot w \cdot \cos(wt)$$

$$w(t) = A^3 w \sin^2(wt) \cos(wt) = A^3 w (1 - \cos^2(wt)) \cos(wt) = \frac{A^3 w}{4} ( \underbrace{\cos(wt)}_{\text{Grundschwingung}} - \underbrace{\cos(3wt)}_{\text{Oberschwingung}} )$$

Tiefpaßcharakter des lin. Übertragungsglied unterdrückt die Oberschwingung  
mithin:

$$w \approx \frac{A^3}{4} w \cos(wt) = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} (A \sin(wt)) = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} e(t)$$

Bildbereich :  $\frac{W(s)}{E(s)} = \frac{A^2}{4} s$  Übertragungsverhalten des neuen Blocks, somit



$$w = \underbrace{\left( \frac{A^2}{4} jw \right)}_{N(A,w)} (-x), \quad e(t) = A \sin(wt)$$

$$\Leftrightarrow e = -G(-jw)w = -G(jw)N(A,w)e \Rightarrow (1 + G(jw)N(A,w))e = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + G(jw)N(A,w) = 0 \rightarrow 1 + \left( \frac{A^2}{4} jw \right) \left( \frac{\alpha}{(jw)^2 - \alpha jw + 1} \right) = 0$$

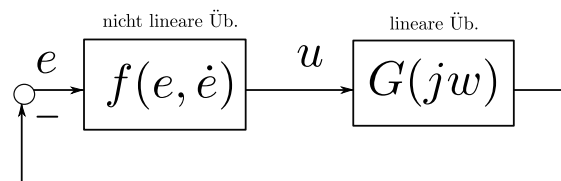
Dauerschwingung mit Amplitude  $A = 2$  und  $w = 1$

### 3.2 Grundlagen der Methoden

*Annahme:* es existiert eine Dauerschwingung im nichtlinearen Standardregelkreis.

#### 3.2.1 Vorraußetzung

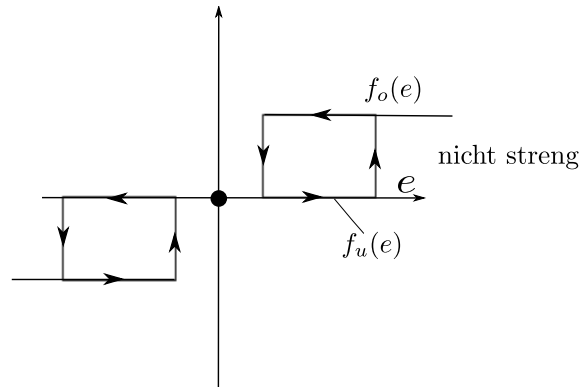
1. Lineares System



- **L1**  $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} e^{-T_t s}$   $T_t > 0$ ,  $G(0) > 0$ ,  $N(s), Z(s) \in \mathbb{R}[s]$
- **L2** Pole von  $Z(s)/N(s)$  liegen links der  $j$ -Achse, 1 einfacher Pol in  $s = 0$  erlaubt
- **L3**  $G(jw)$  hat genügend Tiefpaßcharakter  $\text{grad} Z \leq \text{grad} N - 2$

## 2. Nichtlineares System

- **N1**  $f(-e, -\dot{e}) = -f(e, \dot{e})$   
 → eindeutige Kennlinie  $\Rightarrow$  ungerade Fkt.  
 → Hysterese  $\Rightarrow$  Spiegelung am Ursprung
- **N2**  $f(e)$  bzw.  $f_u(e), f_o(e)$  sind *monoton steigend*!



## 3. Die Frequenz der Dauerschwingung liegt

- **Z1** im Bereich der Knickfrequenzen des linearen Teilsystems

### 3.2.2 Beschreibungsfunktion

Es gilt:  $u(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(nwt) + b_n \cos(nwt))$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) d(wt), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(nwt) d(wt), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(nwt) d(wt) \quad (3.1)$$

wegen  $b_0 = 0$  wenn (L3) und (Z1) erfüllt, dann können Oberschwingungen vernachlässigt werden, damit

$$u(t) = a_1 \sin(wt) + b_1 \cos(wt) = M \sin(wt + \varphi), \quad \text{mit } M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

$$U = M e^{j(wt + \varphi)} = (a_1 + j b_1) e^{j wt} e(t) = A \sin(wt) \Rightarrow E = A e^{j wt}$$

$$\text{Beschreibungsfunktion } N(A, w) = \frac{U}{E} = \frac{a_1 + j b_1 e^{j wt}}{A e^{j wt}}$$

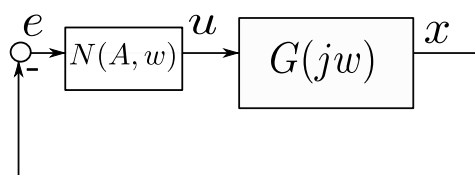
$$\underbrace{N(A, w) = \frac{a_1 + j b_1}{A}}_{\text{Beschreibungsfunktion}}$$

$A$  : Amplitude der Dauerschwingung

$B$  : Kreisfrequenz

$a_1, b_1$  aus (3.1)

**Hinweis:** Wenn  $f$  keine DGL in  $e, \dot{e}$  ist, so hängt  $N$  nur von  $A$  ab.



### 3.2.3 Gleichung der harmonischen Balance

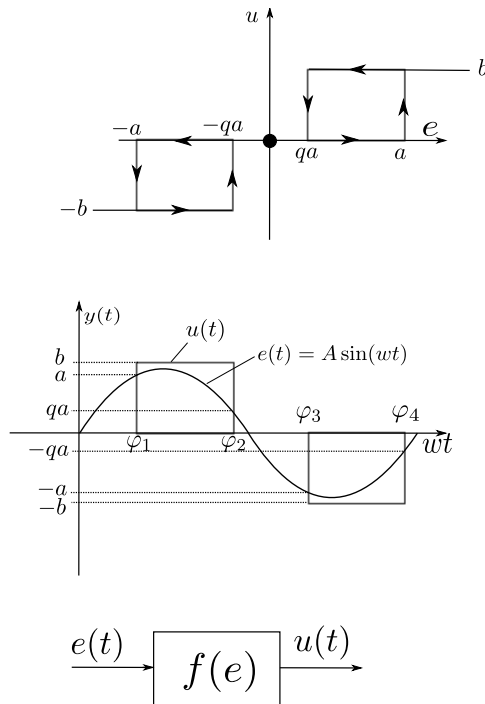
Im Schwingungsgleichgewicht gilt nach \*  $G(jw) \cdot U = -E$  mit  $U = N(A, w)E$

$$\Rightarrow (G(jw)N(A, w) + 1)E = 0$$

$$\Rightarrow G(jw)N(A, w) + 1 = 0$$

Gleichung der harm. Balance komplexe Gleichung in den Variablen  $A, w$  Lösung liefert,  $A, w$  der möglichen Dauerschwingung.

### 3.3 Berechnung der Beschreibungsfunktion



Es gilt:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin(wt) d(wt)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_2} u(t) \sin(wt) d(wt)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} b \sin(wt) d(wt) = \frac{2b}{\pi} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

$$\text{analog: } b_1 = \frac{2b}{\pi} [\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)]$$

Bestimmung  $\varphi_1, \varphi_2$ ,  $A \sin \varphi_1 = a \leftrightarrow \varphi_1 = \arcsin \frac{a}{A}$

$$\cos \varphi_1 = +\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}$$

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

$$A \sin \varphi_2 = qa > \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \varphi_2 = -\sqrt{1 - \left(\frac{qa}{A}\right)^2}$$

mithin:

$$a_1 = \frac{2b}{\pi} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{qa}{A}\right)^2} \right)$$

$$b_1 = \frac{2b}{\pi} \left( \frac{qa}{A} - \frac{a}{A} \right) = \frac{2ba}{\pi A} (q - 1)$$

$$N(A) = \frac{a_1 + jb_1}{A}$$

Dreipunktglied mit Hysterese

Spezialfälle

- $q = 1$  Dreipunktglied ohne Hysterese

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \quad A > a$$

- $q = 1, a = 0 \Rightarrow$  Zweipunktglied ohne Hysterese

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} \quad A > 0$$

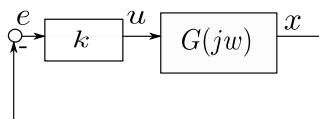
- $q = -1$  Zweipunktglied mit Hysterese

$$N(A) = \frac{4b}{\pi A} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2}$$

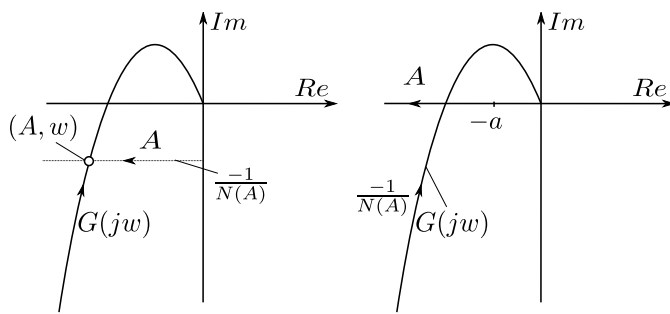
Allgemein: wenn keine Hysterese, dann Imaginäranteil ( $b_1$ ) Null!

### 3.4 Lösung der Gleichung der harmonischen Balance

### 3.5 Stabilität von Dauerschwingungen



$$k : N(A)$$



$$G(jw) + N(A, w) + 1 = 0$$

analytisch:

$$N(A, w) = -\frac{1}{G(jw)} \Rightarrow \operatorname{Re}(N(A, w)) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{G(jw)}\right)$$

$$\operatorname{Re}(N(A, w)) = \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{G(jw)}\right)$$

graphisch in der komplexen Zahlenebene

$$G(jw) = -\frac{1}{N(A, w)}$$

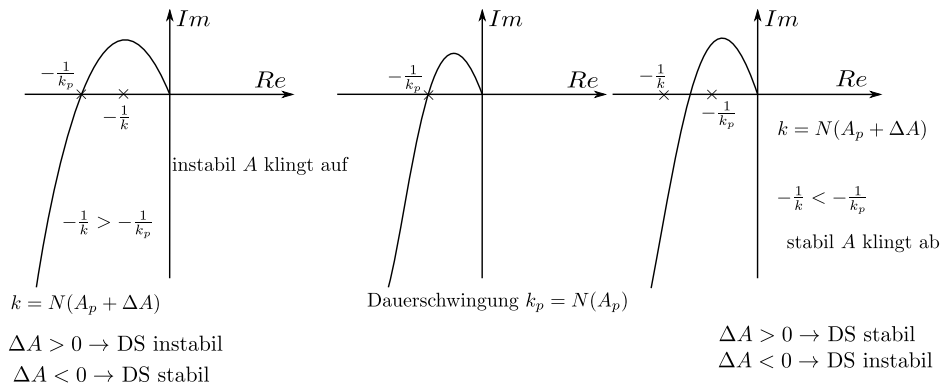
negative inverse Beschreibungsfunktion

Dauerschwingungen?

$$\operatorname{Im}(G(jw_0)) = 0$$

$$\operatorname{Re}(G(jw_0)) < -a$$

- $A = A_p \rightarrow$  Dauerschwingung  $\rightarrow \begin{aligned} N(A_p) &= K_p \\ G(jw) &= -\frac{1}{K_p} \end{aligned}$   
 $A = A_p + \Delta A$  keine Dauerschwingung mehr  
 $K = N(A_p + \Delta A)$



## 4 Stabilität nach Ljapunov

bisher behandelt:

- Systeme 2. Ordnung
- Verhalten von Systemen höherer Ordnung schwer zu beurteilen
- Linearisierung von Ruhelagen Aussagen in Umgebung

Ljapunov-Theorie:

- Untersuchung der Stabilität von Ruhelagen, ohne die Trajektorie (Lösung) zu kennen
  1. indirekte Methode (Linearisierung)
  2. direkte Methode

### 4.1 Stabilitätsbegriff

Wir betrachten autonomes System der Form:

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ Anfangswert}$$

$\phi_t(x) \dots$  Fluss von (4.1)), d.h. allgemeine Lösung

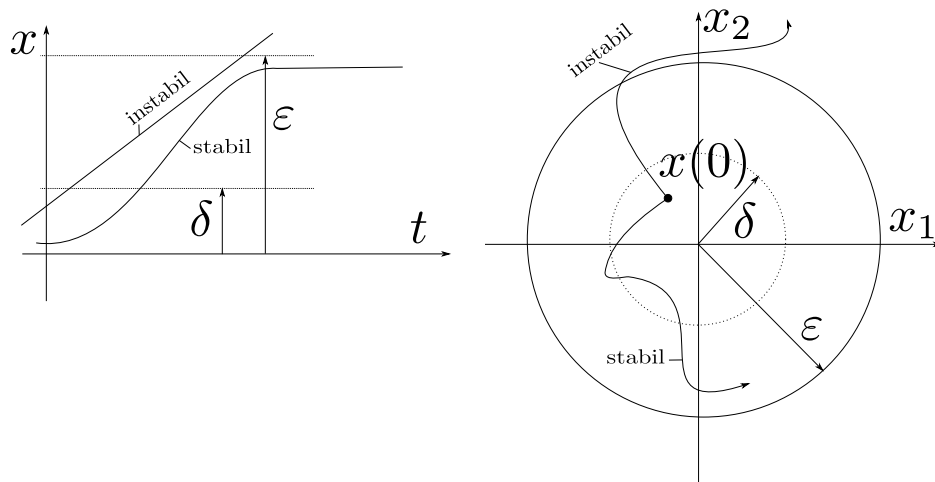
Ruhelage  $x^e \in \mathbb{R}^n \quad \dot{x} = 0 \stackrel{(4.1)}{\Leftrightarrow} f(x^e) = 0 \Leftrightarrow \phi_t(x^e) = x^e$

Annahme (ohne Einschränkung):  $x^e = 0$

(wenn  $x^e \neq 0$ , : Koordinatentransformation  $\tilde{x} = x - x^e \Rightarrow \tilde{x}^e = 0$ )

- **Definition 4.1:** Die Ruhelage  $x^e = 0$  von (4.1)) heisst stabil (im Sinne von Ljapunov), wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|\phi_t(x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$



- Anschaulich: Wenn die Trajektorie  $\phi_t(x_0)$  die Umgebung mit dem Radius  $\varepsilon$  nicht verlassen soll, so muss man nahe genug an der Ruhelage  $x^0 = 0$  starten, nämlich in einer Umgebung mit Radius  $\delta$ .
- Bemerkung: Instabilität heisst hier nicht, dass die Trajektorie über alle Grenzen wächst,
- Stabilität heisst hier nicht, dass die Trajektorie gegen einem Punkt konvergiert bzw. einläuft.

- **Definition 4.2:** Die Ruhelage  $x^0 = 0$  von (4.1)) heisst, attraktiv/anziehend, wenn es eine Zahl  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

- **Definition 4.3:** Ist die Ruhelage  $x^e = 0$  von 4.1 stabil und anziehend, dann nennt man sie *asymptotisch stabil*.

- Hinweis: Eine anziehende Ruhelage muss nicht notwendigerweise stabil i.s. *Ljapunov* sein.

Problem bei Definition 4.3: Keine Zeitaussage wie schnell konvergiert das?

- **Definition 4.4:** Die Ruhelage  $x^e = 0$  von (4.1)) heisst *exponentiell stabil*, wenn gilt

$$\exists \alpha, \lambda > 0, \quad \forall t \geq 0 : \underbrace{\|\phi_t(x_0)\|}_{x(t)} \leq \alpha \underbrace{\|x_0\|}_{x(0)} e^{-\lambda t}$$

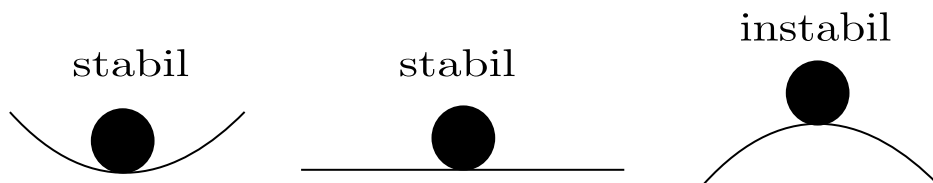
in einer Umgebung  $B$  im den Ursprung.



- Anschaulich: Trajektorie konvergiert mindestens so schnell gegen Ursprung wie eine Exponentialfunktion
- Es gilt: Exponentialstabilität  $\Leftrightarrow$  Asymptotischstabilität
- Beispiel:  $\dot{x} = -(1 + \sin^2(x))x$   
 $\Rightarrow x(t) = x(0) \cdot \exp\left(\underbrace{\int_0^t (1 + \sin^2(x(\tau))) d\tau}_{\geq 1}\right)$   
 $\Rightarrow |x(t)| \leq x(0)e^{-t}$   
 $\Rightarrow x^e = 0$  ist exponentiellstabil  
 Bisher nur lokale Aussagen

• **Definition 4.5:** Wenn die Eigenschaften der asympt./exp.Stabilität eine Ruhelage für alle Anfangsbedingungen (= auf ganz  $\mathbb{R}$ ) gilt, so heisst die Ruhelage *global asympt./exp stabil*.

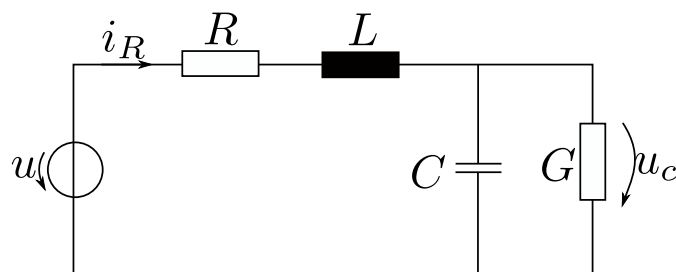
- Hinweis:
  1. linear: lokal = global
  2. nichtlinear: global eher selten
  3. asympt. : nur, wenn es genau 1 Ruhelage gibt



## 4.2 Direkte (zweite) Methode von Ljapunov

- Ziel:  
Stabilitätsaussage, ohne Trajektorie (Lösung) zu kennen.
- Grundidee:
  - Wenn Gesamtenergie eines mechan. elektr. chem. kontinuierlich abnimmt, dann muss das System zur Ruhelage kommen
  - Gesamtenergie: Skalar

### 4.2.1 Einführungsbeispiel



$$\begin{aligned}
 u_c &= u - R \cdot i_R - L \frac{di_R}{dt} & G(u_c) &> 0 \\
 i_R &= G u_c + C \frac{du_c}{dt} & R(i_R) &> 0 \\
 \dot{u}_c &= \frac{1}{C}(-G u_c + i_R) & C(u_c) &> 0 \\
 \dot{i}_R &= \frac{1}{L}(-u_c - R i_R + U) & L(i_R) &> 0
 \end{aligned}$$

Kurzschluss :  $U = 0$

Energie:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i_R^2 \\
 \dot{V} &= C u_c \cdot \dot{u}_c + L i_R \dot{i}_R \\
 &= u_c (-G u_c + i_R) + i_R (-U_L - R i_R) \\
 &= -G u_c^2 + i_R u_c - i_R u_c - R i_R^2 \\
 &= -G u_c^2 - R i_R^2 < 0 \text{ für } (u_c, i_R) \neq (0, 0)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Energie wird kontinuierlich abgebaut!

Verallgemeinerung: Ljapunov-Methode

#### 4.2.2 Positiv Definite Funktionen

- **Definition 4.5:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Umgeb. von 0.

Eine Funktion  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *lokal positiv definit* wenn

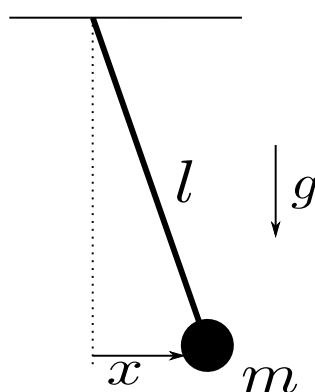
1.  $V(x)$  ist stetig differenzierbar
2.  $V(0)$
3.  $V(x) > 0$  für alle  $x \in D \setminus \{0\}$  gilt zusätzlich  $D = \mathbb{R}^n$  und  $\exists d > 0$  und  $\inf_{\|x\| > d} V(x) > 0$ , dann heisst  $V$  *positiv definit*  $\|x\| > d$   
Genügt  $V$  in 3. lediglich der Bed.

3'  $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\}$  dann heisst  $V$  *(lokal) positiv semidefinit*

$V(x)$  heisst (lokal) negativ (semi-) definit, wenn  $-V(x)$  (lokal) positiv (semi) definit!

- Beispiel:

- $V(x)$  aus Abschnitt 4.2.1 ist positiv definit
- mechanische Energie eines Fadenpendels



Bewegungsgleichung

$$m l^2 \ddot{x} + m g l \sin(x) = 0$$

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{x}^2 + m g l (1 - \cos(x)) \text{ positiv definit}$$

- kinetische Energie des Fadenpendels:

$$V^*(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{x}^2 \geq 0$$

nur positiv semidefinit:  $V(x, \dot{x}) = 0$  für  $\dot{x} = 0, x \neq 0$

- $V(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2$  positiv semidefinit

- $V(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3^2$  nicht positiv semidefinit  $\Rightarrow$  nicht pos. definit

### 4.2.3 Stabilitätskriterium

- Satz 4.1: Sei  $x^e = 0$  eine Ruhelage von (4.1) und  $D \in \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung von 0. Existiert eine Funktion  $D \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass

- $V(x)$  ist auf  $D$  positiv definit
- $\dot{V}(x)$  ist auf  $D$  negativ semidefinit

dann ist  $x^e = 0$  lokal stabil

ist  $\dot{V}(x)$  auf  $D$  sogar negativ definit, dann ist  $x^e$  lokal asymptotisch stabil.

Zu dem Fall heisst  $V$  Ljapunov Funktion

- Hinweis:  $\dot{V}(x) = \mathbb{L}_f V(x)$  ist Lie-Ableitung von  $V$  entlang des Vektorfeldes  $f$
- Vorgehen: Konstruiere zu einem System (4.1) eine Funktion  $V(x)$  und zeige, dass es sich um eine Ljapunov-Funktion handelt.
- Achtung: Kriterium ist nur hinreichend (wenn  $V(x)$  keine Ljapunov-Funktion, dann folgt daraus nicht, dass  $x_e = 0$  instabil!)

- Beispiel:  $\dot{x} = -g(x)$

\*  $g(x)$  lokal Lipschitz auf  $(-a, a)$

\*  $g(0) = 0$  und  $xg(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \wedge x \in (-a, a)$

$V(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi \rightarrow$  positiv definit

$\dot{V}(x) = \mathbb{L}_g V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} (-g(x)) = -g^2(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \rightarrow$  negativ definit  
 $x_e = 0$  lokal asymptotisch stabil.

\* Beispiel:  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a \sin(x_1) - bx_2 \end{pmatrix} \quad a, b > 0$

Fadenpendel mit Reibung,  $a = \frac{g}{l}$ ,  $b$ : Reibung

Ljapunov-Funktion Kandidat

$V(x) = a(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2 \rightarrow$  positiv definit

$\dot{V}(x) = a \sin(x_1) \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = ax_2 \sin(x_1) - ax_2 \sin(x_1) - bx_2^2$

$\dot{V}(x) = -bx_2^2$  negativ semidefinit  $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \wedge x_1 \in \mathbb{R}$  img2 negativ semidefinit (nur Stabilität nachgewiesen!)

- **Definition:** Sei  $x_e = 0$  eine asymptotisch stabile Ruhelage von (4.1). Man nennt die Menge  $B = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0\}$  den Einzugsbereich von  $x_e$  img3  
Ist  $B = \mathbb{R}^n$ , so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil

- **Definition:** Eine Menge  $M \in \mathbb{R}^n$  heisst positiv invariante Menge des Systems  $\dot{x} = f(x)$ , wenn das Bild der Menge  $M$  unter dem Fluss  $\phi_t$  die Menge  $M$  selbst ist, d.h.

$$\phi_t(M) = M \quad \forall t > 0$$

img4 alles, was in  $M$  startet, (oder in  $M$  hineinläuft), verbleibt in  $M$

- **Satz 4.2:** Sei  $x_e = 0$  eine Ruhelage von (4.1). Existiert eine Funktion  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- $V(x)$  positiv definit (global)
- $\dot{V}(x)$  negativ definit (global)
- $V(x)$  radial unbeschränkt  $\rightarrow \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$   
Dann ist  $x_e = 0$  global asymptotisch stabil.

- **Satz 4.3:** Sei  $x_e = 0$  Ruhelage des Systems (4.1) und  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  wenn

- $V(x_e) = 0$
- $V(x) > 0$  für  $\|x\|$  klein
- $\dot{V}(x)$  lokal positiv definit ist dann ist  $x_e$  instabil

### 4.3 Invarianzprinzip (Satz von La Salle)

- Problem: Direkte Methode von Ljapunov weist häufig nur Stabilität, aber keine asymptotische Stabilität nach (wenn  $\dot{V}(x)$  nur negativ semidefinit)
- **Satz 4.4:** für ein System des Typs (4.1) sei eine Funktion  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben
  - Für ein  $l > 0$  ist  $\Omega_e = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq l\}$  kompakt (abgeschlossen/beschränkt)
  - $\forall x \in \Omega_e$  gilt  $\dot{V}(x) \leq 0$
  - $R = \{x \in \Omega_e | \dot{V}(x) = 0\}$
  - grösste positiv invariante Menge  $M$  in  $R$  bestimmen  
 $\Rightarrow$  dann strebt für  $t \rightarrow \infty$  jede Trajektorie, die in  $\Omega_e$  startet, gegen  $M$   
 wenn  $M = x_e$  dann ist  $x_e$  lokal asymptotisch stabil

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{a}$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1) - bx_2 \tag{b}$$

$$R = \{x \in \Omega_e | x_2 = 0\} \tag{1}$$

$$x_2 \equiv 0 \xRightarrow{(a)} \dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$$

$$(b) \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow M = (0, 0) = x_e \quad x_e = 0 \text{ lokal asymptotisch stabil}$$

### 4.4 Variable Gradientenmethode

- Ziel: Systematische Konstruktion einer Ljapunov-Funktion.
- Beispiel:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{((4.3) Ruhelage } x_e = (0, 0))$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3 \tag{2}$$

Vorgabe eines Gradienten für skalare Funktion  $V(x)$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(\underline{x})x_1 + V_{12}(\underline{x})x_2 \\ V_{21}(\underline{x})x_1 + V_{22}(\underline{x})x_2 \end{pmatrix} \quad \text{Integrabilitätsbedingungen müssen erfüllt}$$

sein

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i \neq j$$

- Erinnerung: Ist  $\left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T$  ein Gradient von  $V(\underline{x})$  so ist das Integral über  $\left(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}}\right)^T$  wegunabhängig

Für (4.3) lauten Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (V_{11}(\underline{x})x_1 + V_{12}(\underline{x})x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (V_{21}(\underline{x})x_1 + V_{22}(\underline{x})x_2)$$

$$\frac{V_{11}(\underline{x})}{\partial x_2} x_1 = \underbrace{\frac{\partial V_{12}(\underline{x})}{\partial x_2}}_{=0} x_2 + V_{12}(\underline{x}) = \underbrace{\frac{\partial V_{21}(\underline{x})}{\partial x_1}}_{=0} x_1 + V_{21}(\underline{x}) + \frac{\partial V_{22}(\underline{x})}{\partial x_1} x_2$$

- Wahl:  $\left. \begin{matrix} V_{12}(\underline{x}) &= & V_{21}(\underline{x}) = b \\ V_{11}(\underline{x}) &= & a(x_1) \\ V_{22}(\underline{x}) &= & c(x_2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} a(x_1)x_1 + bx_2 \\ bx_1 + c(x_2)x_2 \end{pmatrix}$

Festlegung von  $a(x_1), c(x_2)$  und  $b$ , so dass  $\dot{V}$  negativ definit

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -bx_1^4 + (b - c(x_2))x_2^2 + \underbrace{(a(x_1) - b - c(x_2)x_1^2)x_1x_2}_{term0}$$

muss negativ definit sein!

$$\begin{aligned} a(x_1) &= b + c(x_2)x_1^2 \\ c(x_2) &= d \end{aligned} \quad \text{damit } term0 = 0$$

- liefert:  $\dot{V} = -bx_1^4 + \underbrace{(b - d)x_2^2}_{term1}$

- Wahl:  $d > b \rightarrow$  damit  $term1 < 0$  negativ definit

Bestimmung von V Integration von  $(\frac{\partial V}{\partial \underline{x}})^T$  über  $x_1, x_2$  da wegunabhängig

$$V(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}(\xi, 0) d\xi + \int_0^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, \xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{d}{4}x_1^2 + \frac{b}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + \frac{d}{2}x_2^2 \text{ muss positiv definit sein!} \\ &= \frac{b}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - \frac{b}{2}x_2^2 + \frac{d}{2}x_2^2 \\ &= \frac{d}{2}(x_1 + x_2)^2 + (\frac{d}{2} - \frac{b}{2})x_2^2 \end{aligned}$$

positiv definit für  $b > 0$  und  $d > b$

## B: Regelung nichtlinearer Systeme

### B.1: Stabilisierungsprobleme

- Asymptotische Stabilisierung  
Nichtlinearer System:  $\dot{x} = f(x, u, t)$   
Regelgesetz finden  $u = g(\cdot, t)$  so dass wenn  $x_0 \in \Omega$ ,  $\phi_t(x_0) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$   
 $u = g(x, t) \rightarrow$  statisches Regelgesetz  $\dot{u} = g(u, x, \dot{x}, t) \rightarrow$  dynamisches Regelgesetz  
wenn  $\phi_t(x_0) \rightarrow x_d$  gewünscht, dann Transformation  $x^* = x - x_d$
- Folgeregelungsproblem  
System:  $\dot{x} = f(x, u, t) \quad y = h(x)$   
Solltrajektorie für  $y : y_d(t)$   
Regelgesetz  $u = g(\cdot, t)$ , so dass, wenn  $x_0 \in \Omega \quad y(t) - y_d(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  und  $x$  beschränkt.

### B.2: Einführungbeispiel

System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bx^3 + u & a, b > 0 \\ y &= x & x, u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Regelgesetz 1 Wunsch  $u$  so dass geschlossene Kreis folgender Dynamik genügt

$$\dot{x} = -kx \quad k > 0$$

Wahl:

$$\begin{aligned} u &= -ax + bx^3 - kx & \text{Reglerparameter: } k \\ u &= -(k + a)x + bx^3 & k > 0 \end{aligned}$$

Regelgesetz kompensiert auch den Term  $-bx^3$ .

Sinnvoll? Nein, denn  $-bx^3$  ist eine nichtlineare Dämpfung, die dafür sorgt dass  $x$  stets beschränkt ist, auch wenn  $ax$  für Instabilität sorgt.

Folgendes Regelgesetz 2 reicht

$$u = -(k+a)x \rightarrow \dot{x} = -kx - bx^3 \quad x=0 \text{ asymptotisch stabil}$$

	+Vorteil	-Nachteil
Regelgesetz 1	exponentielle Stabilisierung	Implementierungsaufwand
Regelgesetz 2	Einfachheit	nur asymptotisch Stabilisierung

### B.3: Vorsteuerung

In nichtlinearer Regelungsaufgaben ist die Vorsteuerung häufig wichtig

- liefert Information für Überführungsaufgaben
- kompensiert bekannte Störungen  
Bild1. Regler kompensiert nur Fehler in der Steuerung und Störungen Bild2

## 5 Intergrator-Backstepping

### 5.1 Einführungsbeispiel

System:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \quad (5.3a)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (5.3b)$$

- Schritt 1: Stabilisierung des 1. Teilsystems  
 $\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \underbrace{x_2}_{=\alpha(x_1)} \rightarrow$  Betrachtung als neuer Eingang mit dem Regelgesetz  $x_2 = \alpha(x_1)$

$$\rightarrow \dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + \alpha(x_1) \quad (5.4)$$

sinnvolle Wahl (vergl. Abschnitt B.2)

$$\alpha(x_1) = -x_1^2 - k_1 x_1 \quad k_1 > 0$$

Damit Dynamik geschlossenen Kreises des 1. Teilsystems:  $\dot{x}_1 = -x_1^3 - k_1 x_1$

Stabil?

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \text{ positiv definit radial unbeschränkt}$$

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$$

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = -x_1^4 - k_1 x_1^2 \text{ negativ definit}$$

ja global asymptotisch stabil

- Schritt 2: Fehler in  $\alpha(x_1)$   
 $\rightarrow x_2$  muss sich so verhalten, wie durch  $\alpha(x_1)$  gefordert. Real ergibt sich jedoch Fehler:

$$\begin{aligned} z_2 &:= x_2 - \alpha(x_1) \\ &= x_2 + x_1^2 + k_1 x_1 \end{aligned}$$

$z_2$  muss gegen Null gehen, damit  $x_2 = \alpha(x_1)$  erfüllt und somit auch  $x_1 \rightarrow 0$  geht. Also wird Differentialgleichung für  $z_2$  benötigt

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 + 2x_1\dot{x}_1 + k_1\dot{x}_1 \\ &= \underbrace{\dot{x}_2}_{5.3b} + (2x_1 + k_1) \underbrace{\dot{x}_1}_{5.3a} \\ &= u + (2x_1 + k_1)(x_1^2 - x_1^3 + \overbrace{z_2 + \alpha(x_1)}^{=x_2})\end{aligned}$$

System in neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + z_2 - \underbrace{x_1^2 - k_1x_1}_{\alpha(x_1)} \\ \dot{x}_1 &= -x_1^3 - k_1x_1 + z_2\end{aligned}\tag{5.5a}$$

$$\dot{z}_2 = u + (2x_1 + k_1)(-x_1^3 - k_1x_1 + z_2)\tag{5.5b}$$

- Schritt 3: Wie  $u$  wählen, damit  $z_2 \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}V_2(x_1, z_2) &= V_1(x_1) + \frac{1}{2}z_2^2 \\ \dot{V}_2(x_1, z_2) &= x_1\dot{x}_1 + z_2\dot{z}_2 = \underbrace{-x_1^4 - k_1x_1^2 + x_1z_2 + z_2(u + (2x_1 + k_1)(-x_1^3 - k_1x_1 + z_2))}_{\rightarrow \text{muss negativ definit sein} \rightarrow u!}\end{aligned}$$

$\dot{V}_2$  ist zum Beispiel wie folgt negativ definit

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_1, z_2) &= -x_1^4 - k_1x_1^2 - \underbrace{k_2z_2^2}_{u \text{ so wählen, dass das gilt}} \quad k_1, k_2 > 0 \\ u &= -k_2z_2 - (2x_1 + k_1)(-x_1^3 - k_1x_1 + z_2) - x_1 \\ &\rightarrow \text{Regelgesetz mit } z_2 = x_2 + x_1^2 + k_1x_1 \text{ und Parameter } k_1, k_2 > 0\end{aligned}$$

## 5.2 Verallgemeinerung

Systemklasse

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_1 &= \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ \underline{x}_1 &\in \mathbb{R}^n \\ x_2 &\in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

- Schritt 1: Stabilisierung 1. Teilsystem  $x_2 = \alpha(\underline{x}_1)$  *fiktives Regelgesetz*  
 $\dot{\underline{x}}_1 = \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)\alpha(\underline{x}_1)$   
 Ruhelage  $\underline{x}_1 = 0$  ist zu stabilisieren  $\Rightarrow \alpha(\underline{x}_1)$  entsprechend wählen.  
 Ljapunov-Funktion  $V(\underline{x}_1)$  positiv definit  
 üblicherweise:

$$\begin{aligned}V(\underline{x}_1) &= \frac{1}{2}x_{11}^2 + \dots + \frac{1}{2}x_{1n}^2 \\ \dot{V}(\underline{x}_1) &= \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1} V(\underline{x}_1)(\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)\alpha(\underline{x}_1))\end{aligned}$$

$\alpha(\underline{x}_1)$  so, dass gilt  $\dot{V}(\underline{x}_1) \leq W(\underline{x}_1) \leq 0$

- Schritt 2: Fehler zwischen  $x_2$  und  $\alpha(\underline{x}_1)$   
 Fehler:  $z_2 = x_2 - \alpha(\underline{x}_1) \rightarrow$  neue Koordinate  
 alte Koordinaten.  $(\underline{x}_1, x_2)$   
 neue Koordinaten.  $(\underline{x}_1, z_2)$   
 Stabilisieren :

$$\begin{aligned}\underline{x}_1 &= 0 \\ z_2 &= 0\end{aligned}$$

siehe oben damit Fehler zwischen  $x_2$  und  $\alpha(\underline{x}_1) = 0$   
 System in neuen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_1 &= \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1)) \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\alpha}(\underline{x}_1) \\ &= u - \frac{\partial \alpha(\underline{x}_1)}{\partial \underline{x}_1} (\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1)))\end{aligned}$$

- Schritt 3: Wahl von  $u$  so, dass auch  $z_2 = 0$  asymptotisch stabil.  
 $V_2(\underline{x}_1, z_2) = V_1(\underline{x}_1) + \frac{1}{2}z_2^2$  positiv definit, radial unbeschränkt

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(\underline{x}_1, z_2) &= \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1} \dot{\underline{x}}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1} (\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1))) + z_2 \left( u - \frac{\partial \alpha(\underline{x}_1)}{\partial \underline{x}_1} (\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1))) \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1} (\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)\alpha(\underline{x}_1))}_{\leq W_1(\underline{x}_1) \text{ negativ definit}} + \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial \underline{x}_1} \underline{g}(\underline{x}_1) z_2 + z_2 \left( u - \frac{\partial \alpha(\underline{x}_1)}{\partial \underline{x}_1} (\underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)(z_2 + \alpha(\underline{x}_1))) \right)}_{\text{negativ definit machen über Wahl von } u}\end{aligned}$$

$u \rightarrow$  so, dass  $\dot{V}_2$  negativ definit  
 fehlt etwas hier

Anmerkungen:

a) Systeme des Typs

$$\begin{aligned}\underline{x}_1 &\in \mathbb{R}^n \\ x_2, u &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_1 &= \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(\underline{x}_1, x_2) + \underline{g}_2(\underline{x}_1, x_2)u\end{aligned}$$

Wahl eines neuen Eingangs  $u^*$  mit  $u^* = \frac{1}{g_2(\underline{x}_1, x_2)}(u - f_2(\underline{x}_1, x_2))$   
 führt auf

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_1 &= \underline{f}(\underline{x}_1) + \underline{g}(\underline{x}_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= u^*\end{aligned}$$



b) Systeme in *strict feedback form*

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= f_0(\underline{x})x_1 & x &\in \mathbb{R}^n \\ \dot{x}_1 &= f_1(\underline{x}, x_1) + g_1(\underline{x}, x_1)x_2 & x, u &\in \mathbb{R} \\ &\vdots & i &= 1, \dots, k \\ \dot{x}_k &= f_k(\underline{x}, x_1, \dots, x_k) + g_k(\underline{x}, x_1, \dots, x_k)u\end{aligned}$$

Backsteppingschnitte mehrfach von oben nach unten wiederholen.

Einführungsbeispiel:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1^2 - x_1^3 + x_2 & a \text{ ist unbestimmt} \\ \dot{x}_2 &= u & 0 < a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \text{ Normalwert für Entwurf } a_0\end{aligned}$$

1. Fiktiver Eingang:  $x_2 = \alpha(x_1)$

$$\begin{aligned}V_1(x_1) &= \frac{1}{2}x_1^2 \\ \dot{V}_1 &= x_1(ax_1^2 - x_1^3 + \alpha(x_1)) \\ &= -x_1^4 + ax_1^3 + x_1\alpha(x_1)\end{aligned}$$

Wahl:  $\alpha(x_1) = -a_0x_1^2 - k_1x_1$

dann

$$\dot{V}_1 = -x_1^4 - k_1x_1^2 + \underbrace{(a - a_0)x_1^3}_{\text{kann negativ Definitheit von } \dot{V} \text{ zerstören}} \quad \text{kann } k_1 \text{ so gewählt werden, dass}$$

$\dot{V}_1$  negativ definit?

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= -x_1^4 + (a - a_0)x_1^3 - k_1x_1^2 \\ &= -x_1^2(x_1^2 - (a - a_0)x_1 + k_1) \\ &= -x_1^2\left(x_1^2 - (a - a_0)x_1 + \frac{(a - a_0)^2}{4} - \frac{(a - a_0)^2}{4} + k_1\right) \\ &= -x_1^2\left(\left(x_1 - \frac{a - a_0}{2}\right)^2 + k_1 - \frac{(a - a_0)^2}{4}\right)\end{aligned}$$

fehlt einiges

## 6 Sliding-Mode-Control

Gleitregime-Regelung!

Grundidee: Es ist einfacher ein System erster Ordnung zu regeln, als ein System  $n$  ter Ordnung  $n > 1$

- Problem  $n$ -ter Ordnung in Problem 1. Ordnung überführen.  
Vorgehen: System auf Gleitfläche bringen und entlang dieser in die Ruhelage überführen.  
Im1.

### 6.1 Einführungsbeispiel

System:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{6.1a}$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \tag{6.1b}$$

$$g(x) > 0$$

Ruhelage:  $\underline{x}_e = (0, 0)$

Ruhelage von  $x_1 : 0$  stabil, wenn gelten würde

$$\dot{x}_1 = -ax_1 \quad a > 0$$

Wie Realisierung?

Definition einer Gleitfläche

$$s = x_2 + ax_1 \tag{6.2}$$

Dann gilt mit (6.1a)

$$\dot{x}_1 = x_2 = s - ax_1$$

Wenn sichergestellt wird, dass  $s = 0$ , dann gilt tatsächlich  $\dot{x}_1 = -ax_1$

$\Rightarrow x_1 \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , da  $s = 0$  gilt auch wegen (6.2).  $x_2 \rightarrow 0$  für  $x_1 \rightarrow 0$

Wie stellt man sicher, dass  $s = 0$ ?

Es gilt:

$$\begin{aligned} s &= x_2 + ax_1 \\ \dot{s} &= \dot{x}_2 + ax_1 - f(x) + g(x)u + ax_2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Es soll gelten:  $s = 0$ , also Stabilität von  $s = 0$  mit (6.3) untersuchen.

Direkte Methode von Ljapunov

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}s^2 \\ \dot{V} &= s\dot{s} = s(f(x) + g(x)u + ax_2) < 0 \quad \forall \quad s \neq 0 \end{aligned}$$

$$f(x) + g(x)u + ax_2 \begin{cases} < 0 & \text{für } s > 0 \\ > 0 & \text{für } s < 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

$$u \begin{cases} < -\frac{f(x)+ax_2}{g(x)} & \text{für } s > 0 \\ > -\frac{f(x)+ax_2}{g(x)} & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

$$u = -\frac{f(x) + ax_2}{g(x)} - K \operatorname{sgn}(s) \quad K > 0 \tag{6.4}$$

$$\text{mit } s = ax_1 + x_2$$

## 6.2 Verallgemeinerung

Systemklasse:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(\underline{x}) + g(\underline{x})u \quad y = x_1 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$f(\underline{x})$  nicht genau bekannt, aber nach oben durch stetige Funktion beschränkt  $g(x)$  nicht genau bekannt, aber von bekannten festen Vorzeichen und durch bekannte stetige Funktion beschränkt!

Ziel: Zustand  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  einer Solltrajektorie  $\underline{x}_{ref} = (x_{1,ref}, \dots, x_{n,ref})^T$  nichtführen.

Regelabweichung:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \underline{x} - \underline{x}_{ref} \\ \tilde{y} &= x_1 - x_{1,ref} \\ s(\underline{x}, t) &= \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{y}\end{aligned}\quad (6.7)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \tilde{y} + 2\lambda \frac{d}{dt} \tilde{y} + \lambda^2 \tilde{y}$$

Es soll gelten:  $s(\underline{x}, t) = 0 \approx$  Bewegung auf der Gleitfläche

$s = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{y} = 0$  lineare Differenzialgleichung  $(n-1)$  ter Ordnung

Lösung:  $\tilde{y} = 0 \Rightarrow \tilde{x} = 0$

→ Skalarer  $s$  auf 0 halten, Reduktion eines Problems  $n$ .ter Ordnung ( $\underline{x} = \underline{x}_{ref}$ ) auf ein Problem 1.Ordnung ( $s = 0$ )

Forderung, damit  $s = 0$  gehalten wird.

$$V = \frac{1}{2}s^2 \rightarrow \dot{V} = s\dot{s} < 0 \quad \forall \quad s \neq 0$$

bzw. mit Sicherheitsabstand  $\dot{V} = s\dot{s} \leq -\eta|s| < 0 \quad \forall \quad s \neq 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta|s| \text{ sogenannte Gleitbedingung} \quad (6.8)$$

Reglerentwurf auf Basis von (6.7) und (6.8)

Beispiel:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + u$$

$$\text{mit } f(x, \dot{x}, t) = -a(t)\dot{x}^2 \cos(3x)$$

$$y = x$$

$$1 \leq a(t) \leq 2$$

1. Wahl der Gleitfläche ( $n = 2$ )

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) \tilde{y} = \dot{\tilde{y}} + \lambda \tilde{y} \quad \tilde{y} = y - y_{ref}$$

$$\dot{s} = \ddot{\tilde{y}} + \lambda \dot{\tilde{y}}$$

$$\dot{s} = \underbrace{f(x, \dot{x}, t) + u - \ddot{x}_{ref}(t) + \lambda \dot{\tilde{x}}(t) + \lambda \dot{\tilde{x}}}_{\ddot{\tilde{x}} = \ddot{\tilde{y}}}$$

2. Gleitbedingung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta|s|$$

$$s\dot{s} = s(f(x, \dot{x}, t) + u - \ddot{x}_{ref}(t) + \lambda \dot{\tilde{x}}(t)) \leq \eta|s|$$

$$-a(t)\dot{x}^2 \cos(3x) + u - \ddot{x}_{ref} + \lambda \dot{\tilde{x}} \begin{cases} \leq -\eta & \text{für } s > 0 \\ \geq \eta & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

$a(t) \rightarrow$  nicht genau bekannt  $a$  darf nicht explizit im Regelgesetz vorkommen

$$u \begin{cases} \leq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} + a\dot{x}^2 \cos(3x) - \eta & \text{für } s > 0 \\ \geq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} + a\dot{x}^2 \cos(3x) + \eta & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

$$u \begin{cases} \leq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} - \dot{x}^2 a |\cos(3x)| - \eta \\ \geq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} + \dot{x}^2 a |\cos(3x)| + \eta \end{cases}$$

$1 \leq a \leq 2$  worstcase  $a = 2$

$$u \begin{cases} \leq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} - \dot{x}^2 2 |\cos(3x)| - \eta \\ \geq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} + \dot{x}^2 2 |\cos(3x)| + \eta \end{cases} \Rightarrow u = x_{ref} - \lambda \tilde{x} - (2\dot{x}^2 |\cos(3x)| + \eta) \operatorname{sgn}(s) \text{ mit } s = \dot{y} + \lambda y$$

$$u \leq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} - 2\dot{x}^2 |\cos(3x)| - \eta \leq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} - \dot{x}^2 |\cos(3x)| - \eta \leq \ddot{x}_{ref} - \lambda \tilde{x} + a\dot{x}^2 \cos(3x) - \eta$$

Reglerparameter:

$\eta \rightarrow$  stellt ein wie schnell  $s \rightarrow 0$

$\lambda$  stellt Fehlerparameter in  $\tilde{y}$  ein

## 7 Feedbacklinearisierung

### 7.1 Fehlt etwas

#### 7.1.1 fehlt etwas

System:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin(x_2) + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Schritt 1:  $y$  solange ableiten, bis  $u$  auftaucht.

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)\dot{x}_3 \\ &= \underbrace{(\cos(x_2) + x_3)(x_1^5 + x_3) + (x_2 + 1)x_1^2 + (x_2 + 1)u}_{f_1(\underline{x})} \end{aligned} \tag{7.6}$$

$u$  taucht in 2. Ableitung von  $y$  auf  $\Rightarrow$  man sagt, das System habe den relativen Grad 2.

Schritt 2:

Wahl von  $u$  so, dass ein linearer Zusammenhang zwischen  $\ddot{y}$  und einem neuen (fiktiven) Eingang  $v$  entsteht.

Einfachst möglichstes Wunschsystem:  $\ddot{y} = v$

Also Wahl  $u$ :

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1(\underline{x})) \tag{7.7}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = v \tag{7.8}$$

Schritt 3: Stabilisierung von (7.8) durch geeignete Wahl von  $v$  (lineare Methoden!)

$y \rightarrow y_{ref}$  für  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} v &= \ddot{y}_{ref} - K_1(\dot{y} - \dot{y}_{ref}) - K_0(y - y_{ref}) = 0 \\ K_1, K_0 &> 0 \Rightarrow \text{stabil} = y \rightarrow y_{ref} \end{aligned} \tag{7.9b}$$

Schritt 4: Stellgesetz angeben  
(7.9a) in (7.7)

$$u = \frac{1}{x_2 + 1} (\ddot{y} + K_1 \dot{\tilde{y}} + K_0 \tilde{y} - f_1(\underline{x})) \quad (7.10)$$

$$\tilde{y} = y - y_{ref}$$

den System wird eine lineare Fehlerdynamik aufgeprägt

Schritt 5: Überprüfung

2 Probleme

- a) wenn  $x_2 = -1$  dann Stellgesetz (7.10) bzw. (7.7) nicht definiert! Ausserdem ist der relative Grad dann nicht mehr 2 (nicht wohldefiniert)
- b) Regler sorgt für eine stabile Dynamik 2.Ordnung, das System ist jedoch 3.Ordnung  
 $\Rightarrow$  Es gibt eine interne Dynamik, die durch die Eingangs-Ausgangs-Linearisierung (unsichtbar) wird, wenn diese instabil, so ist der Regler damit ungeeignet!

### 7.1.2 Relativer Grad

Das System (7.4) hat an der Stelle  $x_0 \in D$  den relativen Grad  $r$ , wenn gilt

$$L_g L_F^K h(\underline{x}) = 0 \text{ für } K = 0, 1, \dots, r-2$$

$$L_G L_F^{r-1} h(\underline{x}) \neq 0 \quad \forall x \in D$$

Erinnerung  $L_f h(x) = \Delta h f = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} f(x)$   
entlang des Vektorfeldes  $\underline{f}$

$$L_f^i h = L_f(L_f^{i-1} h)$$

$$L_g L_f h = \Delta(L_f h) g$$

$$y = h(\underline{x})$$

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} (\underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) u)$$

$$= \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \underline{g}(\underline{x}) u}_0$$

$$\ddot{y} = L_f^2 h(\underline{x}) + \underbrace{L_g L_f h(\underline{x}) u}_{=0}$$

fehlt einiges

### 7.1.3 Verallgemeinerter Entwurf

System (7.4),  $r < n$

Schritt 1: Eingangs-Ausgangs-Zusammenhang erzeugen ( $y$  solange ableiten, bis  $u$  auftaucht)

$$y = h(\underline{x})$$

$$\vdots$$

$$y^{(r)} = L_f^r h(\underline{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\underline{x}) u$$

mit  $L_g L_f^{r-1} h(\underline{x}) \neq 0 \quad \forall x \in D$  Schritt 2:  $u$  so, dass ein Zusammenhang entsteht.  
Wunsch:

$$y^{(r)} = V \Rightarrow u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(\underline{x})} (V - L_f^r h(\underline{x})) \quad (7.11)$$

Schritt 3: Stabilisierung von (7.11) durch Wahl von  $V$

$V = y_{ref}^{(r)} - K_{r-1} \tilde{y}^{(r-1)} - \dots - K_1 \ddot{\tilde{y}} - K_0 \tilde{y} \quad \tilde{y} = y - y_{ref}$  mit  $K_{r-1}, \dots, K_0$  so, dass Wurzeln des char. Polynoms alle in der LHE liegen!