



# Prozessidentifikation 1 \*

Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl. Math. Klaus Röbenack

23. April 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
1.1	Aufgaben und Ziele der Prozessanalyse . . . . .	4
1.2	Allgemein Strategien . . . . .	5
1.3	Modellvorstellung zu Prozessen . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Problemformulierung für statische Modelle</b>	<b>7</b>
2.1	Einführungsbeispiel . . . . .	7
2.2	Unterteilung statischer Modelle . . . . .	7
2.3	Linearität (Allgemein) . . . . .	7
2.4	Linearität und Parameterlinearität . . . . .	8
2.5	Problemformulierung . . . . .	8
2.5.1	Fehlermodelle . . . . .	8
2.5.2	Gütekriterium: Normen . . . . .	9
2.5.3	Abstand zwischen Vektoren: Metrik . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Methode der kleinsten Fehlerquadrate</b>	<b>11</b>
3.1	Basisalgorithmus . . . . .	11
3.2	Lösungsansätze für unbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	13
3.3	Erinnerung: Lösbarkeit linearer Gleichungssystem. . . . .	13
3.4	Rangbestimmung und Singulärzerlegung . . . . .	14
3.5	Lösbarkeit des Systems der Normalengleichungen . . . . .	14
3.6	Lösung der Normalengleichungen mittels Cholesky Zerlegung . . . . .	15
3.7	Direkte Lösung des Quadratmittelproblems auf der Basis von Orthogonalesierungsverfahren . . . . .	16
3.8	Direkte Lösungsdarstellung mittels verallgemeinerter Inverser . . . . .	17
3.9	Parameternichtlineare Modelle . . . . .	19
3.10	Newton-Verfahren . . . . .	19
3.11	Gauss-Newton-Verfahren . . . . .	19
3.12	Totale MKQ . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Anwendungen der MKQ</b>	<b>20</b>
4.1	Verallgemeinerung des Fehlermodells . . . . .	20
4.2	Einführungsbeispiel: Diodenmodell . . . . .	20
4.3	Verallgemeinerter Fehler . . . . .	21
4.4	Zeitdiskrete Modelle . . . . .	22
4.5	Übergang in zeitdiskreten Modellen . . . . .	22

4.6	ARX-Modelle . . . . .	22
4.7	Sonderfall: FIR-Filter . . . . .	23
4.8	Weitere Modellansätze . . . . .	24
4.9	Zeitkontinuierliche Modelle . . . . .	24
4.10	ARX-Differentialgleichungsmodell . . . . .	24

# 1 Einführung

## 1.1 Aufgaben und Ziele der Prozessanalyse

- System:  
Abgegrenzte Anordnung von aufeinander einwirkende Gebilden
- Prozess:  
Umformung oder Transfort von Materie Energie bzw. Information
- Prozess und Systemanalyse:  
Gewinnung mathematischer Modelle von Prozessen bzw. Systemen

Nutzung von Modellen:

- Vorhersage (Simulation)
- Verbessern des Verhaltens des Systems (Optimierung Regelung)

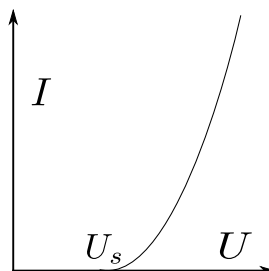
Prozessanalyse  $\leftrightarrow$  Signalanalyse  $\leftrightarrow$  Systemanalyse

Systemanalyse:

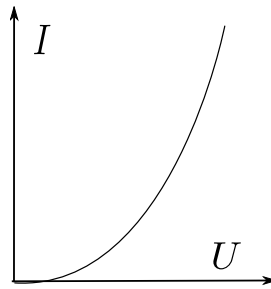
- Modell (Aufgabestellung)
- statische bzw. stationäre Modell
- dynamische Modell
  1. Modelle mit konzentrierten Parameter (gewöhnliche DGL) ODE
  2. Modelle mit verteilten Parameter  
(Partielle DGL) Wärmeleitung, Maxwellsche Partielle DGL

Beispiel:

-Schalter



-statischer Modell  $I = I_s(e^{\frac{U}{mU_T}} - 1)$ .



-dynamischer Modell → (Kapazitätsdiode)

- Verwendungszweck bestimmt
  - Darstellungsform
    1. nicht parametrisch (graphisch oder tabellarisch). Darstellung von Systemcharakteristiken
    2. parametrisch (Symbolische Ausdrücke mit Struktur z.B. Polynom gebrochen rationale Funktion)
  - Darstellungsbereich
    1. Amplitudenbereich (z.B. statische Kennlinie)
    2. Zeitbereich (z.B. Gewichtsfunktion, Sprungantwort)
    3. Spektralbereich (z.B. Übertragungsfunktion  $G(s)$  Frequenzgang)
- Nutzung von A-priori-Information über wichtige Modelleigenschaften  
z.B. linear/nicht linear

## 1.2 Allgemein Strategien

Modellvereinfachung dynamischer Modell bei der theoretischen Prozessanalyse

Modelle mit verteilten Parameter (partielle DGL) Diskretisierung (örtlich) Modellanalyse

↓

Modelle mit konzentrierten Parameter (gewöhnliche DGL.) Linearisierung (im Arbeitspunkt).  
Lineares Modell, lineare DGL. Ordnung  $n$  Ordnungsreduktion

↓

Lineares Modell, lineare DGL. Ordnung  $1 < n$ .

- Aktive bzw. passive Experimentation
  - \* Merkblatt
  - Aktive Experimentation (z.B. Sprung)
    - \* Testsignal Sinusschwingung, Rausch-Signal
  - Passive Experimentation Messung im laufenden Betrieb
  - Aktive passive Experimentation

## 1.3 Modellvorstellung zu Prozessen

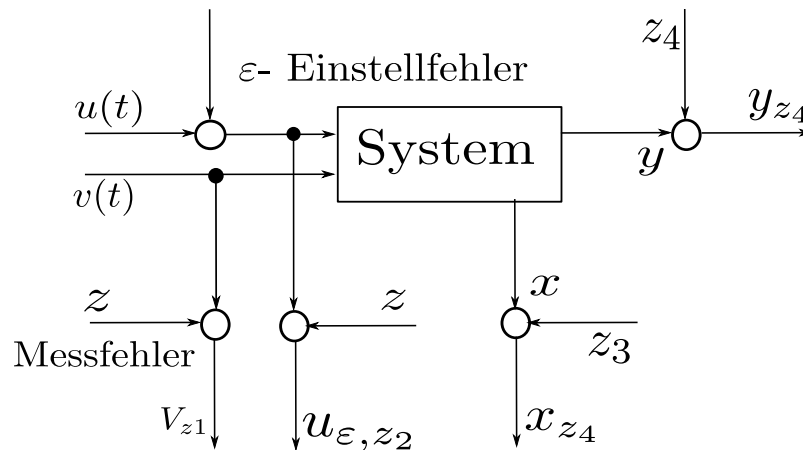
### 1. Prozesse in MIMO-Struktur (vektorielle Einflußgrößen Vereinfachung prüfen)

MIMO-MISO.

MISO-SISO.

- Bemerkung: Teimodelle müssen unbedingt mit Teilaufgaben übereinstimmen.

### 2. Präzisierung der Modellvorstellung

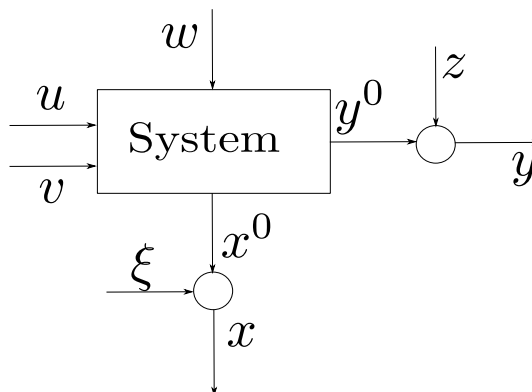


Modellvorstellung der Einstellgrößen  $\varepsilon, z_1 \dots z_4 \dots w$ .

- Realisierung von Zufallsvektoren  $\varepsilon, z_1 \dots z_4 \dots w$ .
- oder: Realisierung von Zufallsprozessen  $\varepsilon(t), z_1(t)$ .
- oder: (einfach) unbekannte Werte

### 3. Vereinfachung prüfen

- Signifikant von Einstellfehlern von  $u$ , ggf  $\varepsilon = 0$
- Signifikant von Messfehler von  $u, V$ , ggf  $z_1 = 0 \quad z_2 = 0$
- Abhängigkeiten der Signale
- Prozessstörung  $w$  werden als auf  $x^0, y^0$  Transfonierte Störung behandelt.



- Signifikant der Einflußgrößen  $\rightarrow$  Reduktion der Dimension
- Dekomposition (Zerlegung z.B in MISO-SISO)

## 2 Problemformulierung für statische Modelle

### 2.1 Einführungsbeispiel

Modellansatz:  $y = a + b \cdot u \leftrightarrow 0 = y - a - b \cdot u$

Fragestellung:

- kann man ähnliche explizite Schätzregeln auch für mehrvariable bzw. nichtlineare Modelle erhalten?
- Für welche Klassen nichtlinearer Modelle sind ähnlich Schätzregeln leicht zu gewinnen?
- Welche Fehlermaße sind zu verwenden?

### 2.2 Unterteilung statischer Modelle

$U, Y \dots$  Vektorräume

Eine Abb.  $f : U \rightarrow Y$  heißt linear, wenn für alle Vektoren  $u, v \in U$  sind alle Skalare  $\alpha, \beta$  gilt.

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= \alpha f(v) && \text{Homogenität} \\ f(u + v) &= f(u) + f(v) && \text{(Additivität)} \end{aligned}$$

Gleichbedeutend (Superpositionsprinzip)

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Bsp:  $U = V = \mathbb{R}$ ,  $f(u) = a + bu$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$

### 2.3 Linearität (Allgemein)

Seien  $U$  und  $Y$  zwei Vektorräume. Ein Abbildung  $f : U \rightarrow Y$  heißt linear, wenn für alle Vektoren  $u, v \in U$  und alle Skalare  $\alpha, \beta$  die Bedingungen

1.  $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$  Homogenität
2.  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  Additivität erfüllt sind. Diese zwei Bedingungen sind gleichbedeutend mit:
3.  $f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

## 2.4 Linearität und Parameterlinearität

Wir betrachten statische, parametrische Modelle der Form  $y = f(\underline{u}, \underline{a})$  und den zusätzlichen Parametervektor  $\underline{a}$ .

- Definition:  
Die Funktion  $f$  heißt *linear*, wenn sie bezüglich  $\underline{u}$  linear ist für alle  $\underline{a}$ .  
Die Funktion  $f$  heißt *parameterlinear*, wenn sie bezüglich des Parametervektors  $\underline{a}$  linear ist für alle  $\underline{u}$ .
- Bsp: 1. Polynome in  $u(u, y, )$  skalar:

$$y = f(u, a) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$$

$$= (1, u, u^2, \dots, u^n) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

nichtlinear aber parameternichtlinear.

- Bsp: 2. Polynome in mehreren Variablen,  
z. B.  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$y = f(u, a) = a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_1 u_2$$

$$= (u_1^2, u_2^2, u_1 u_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

nichtlinear, aber parameterlinear.

- Bsp: 3. Strom-Spannungs-Kennlinie eine Flächendiode:

$$i = I_s (e^{\frac{u}{m U_T}} - 1)$$

$I_s \dots$  Sättigungsstrom  
 $U_T \dots$  Temperaturspannung  
 $m \dots$  Koeff ( $m = 1 \dots 2$ )

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s \\ m U_T \end{pmatrix}$$

- Fazit:  
Parameterlineare statische SISO- und MISO Modelle lassen sich als Skalarprodukte einer Funktion  $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  (SISO:  $m = 1$ ) mit dem Parametervektor  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$  darstellen:  
 $y = \rho^T(\underline{u})\underline{a} = \underline{a}^T \rho(\underline{u})$

## 2.5 Problemformulierung

### 2.5.1 Fehlermodelle

Ausgangsmodell für den Fehler:  $\varepsilon = y - \tilde{y}$



- System:  $y = f(u, a) + z$
- Modell:  $\tilde{y} = f(u, \tilde{a})$
- Gütekriterium: Bei MIMO-Systemen bzw. bei mehreren Messwerten ist  $\varepsilon$  vektorwertig. Es bietet sich die Verwendung eines Gütekriteriums an. Die Minimierung bezüglich des Parameters  $a$  liefert den *optimalen* Parameter  $\tilde{a}$ 
  - ungestörter oder schwach gestörter Fall  $z \approx 0$  Approximationsproblem
  - gestörter Fall  $\rightarrow$  Parameterschätzproblem

## 2.5.2 Gütekriterium: Normen

- Eigenschaften:
  1.  $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0 \quad \forall x$
  2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha, x$
  3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y$
- Merke:  
Der Normoperator bildet den Vektor auf eine reelle Zahl ab. Aus den Eigenschaften folgt, dass eine Norm nur nichtnegative Werte annehmen kann  
 $0 = \|0\| = \|x - x\| + \|-x\| = \|x\| + \|x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0$   
 Beispiele für Normen:

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^m, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

- Spaltensummen-Norm (1-Norm):  $\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_m|$   
Matlab: `norm(x, 1)`
- Euklidische Norm (2-Norm):  $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2} = \sqrt{x^T x}$   
Matlab: `norm(x)` oder `norm(x, 2)`
- p-Norm:  $\|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_m|^p}$
- Maximum-Norm oder Tschebyschew-Norm:  $\|\underline{x}\|_\infty = \max |x_1|, \dots, |x_m|$
- Wikipedia: Die Maximumnorm ist *formal keine p-Norm, kann aber als Grenzfall für  $p \rightarrow \infty$  aufgefasst werden*.
- Verwendung von Normen bei Approximationsproblemen:
- 2-Norm  $\Rightarrow$  direkte (explizite) Schätzregeln möglich.
- andere Normen  $\Rightarrow$  i.d.R nur numerisch mit Optimierungssoftware möglich.

- Bsp:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \|x\|_1 = 6, \|x\|_2 \approx 3.74, \|x\|_\infty = 3$$

Für quadratische integrierbare Fkt.  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\|u\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty [u(t)]^2 dt}$$

eine Norm.

Verwendung von Normen bei Approximationsproblemen

- 2 -Norm  $\rightarrow$  direkte Schätzregel möglich
- andere Norm  $\rightarrow$  in der Regel nur numerisch

### 2.5.3 Abstand zwischen Vektoren: Metrik

Mit

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V$$

wird eine Metrik  $d$  auf  $V$  definit.

Eigenschaften (Metrik als Abstand):

1.  $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

# 3 Methode der kleinsten Fehlerquadrate

## 3.1 Basisalgorithmus

Gütekriterium mit  $\varepsilon_i = y_i - f(u_i, a)$ ,  $i = 1, \dots, N$  (Messwerte)

- ungewichtete MKQ:  $q(\underline{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \underline{\varepsilon}^T \underline{\varepsilon} = \|\underline{\varepsilon}\|_2^2$
- gewichtete MKQ: statt einzelne Abweichungen  $\varepsilon_i$  betrachte man gewichtete Abweichungen  $w_i \varepsilon_i$  mit Gewichten  $w_i$  für  $i = 1 \dots N$ .

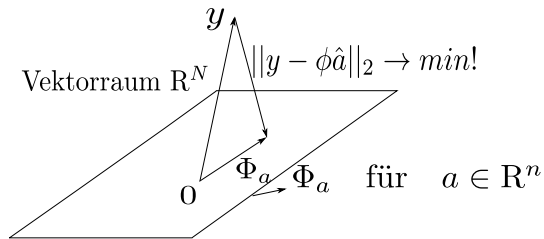
$$q(\underline{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^N w_i^2 \varepsilon_i^2 = \underline{\varepsilon}^T W^T W \underline{\varepsilon} = \|W \underline{\varepsilon}\|_2^2$$

$$\text{mit } w = \text{diag}(w_1 \dots w_N) = \begin{pmatrix} w & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

- MKQ für parameterlineare Modelle:
  - Modell:  $y = f(u, a) = \varphi^T(u) a$ .  
Für alle Messungen  $(u_i, y_i)$  soll gelten.  $y_i \approx \varphi^T(u_i) \underline{a}$  für  $i = 1 \dots N$   
Erfassung aller  $N$  Messungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\underline{y} \in \mathbb{R}^N} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi^T(u_1) \\ \vdots \\ \varphi^T(u_N) \end{pmatrix}}_{\phi \in \mathbb{R}^{N \times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}}_{\underline{a} \in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}}_{\underline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^N}$$

- In der Regel:  $N \geq n$  (Mehr Messwerte als Parameter)  
Gleichungssystem ist überbestimmt  $\rightarrow$  In der Regel NICHT lösbar.
  - Ausweg:  
Minimale Fehler  $\underline{\varepsilon}$  zwischen linker und rechter Seite des Gleichungssystem:  $(\star)$ .  
 $\|\underline{\varepsilon}\|_2 = \|\underline{y} - \phi \underline{a}\|_2 = d(\underline{y}, \phi \underline{a})$  ungewichtete MKQ  
 $\|w \underline{\varepsilon}\|_2 = \|w(\underline{y} - \phi \underline{a})\|_2$  gewichtete MKQ



Günstig  $\|\cdot\|_2 \rightarrow \min \leftrightarrow \|\cdot\|_2^2 \rightarrow \min$

– Gütefunktional:

$$\begin{aligned}
 q = \|\underline{\varepsilon}\|_2^2 &= \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon} \\
 &= \underbrace{(y - \phi \underline{a})^T (y - \phi \underline{a})}_{\star} \\
 &= y^T y - y^T \phi \underline{a} - (\phi \underline{a})^T \cdot y + (\phi \underline{a})^T \phi \underline{a} \\
 &= y^T \cdot y - 2y^T \phi \underline{a} + \underline{a}^T \phi^T \phi \cdot \underline{a}
 \end{aligned}$$

• Gesucht: Gradient  $\frac{\partial q}{\partial \underline{a}} = \left( \frac{\partial q}{\partial a_1} \dots \frac{\partial q}{\partial a_n} \right)$

• Erinnerung

– Quadratisch:  $\frac{\partial}{\partial x} (x^T A x) = x^T (A + A^T)$

– Asymmetrisch:  $\frac{\partial}{\partial x} (x^T A x) = 2x^T A$ .  
d.h.

$$A = A^T$$

– Abweichung des Gütefunktionals nach dem Parametervektor  $\underline{a}$

$$\frac{\partial q}{\partial \underline{a}} = -2y^T \phi + 2\underline{a}^T \phi^T \phi$$

– Notwendige Bedingung für lokale Extremum.

$$0^T = \frac{\partial q}{\partial \underline{a}} = -2y^T \phi + 2\underline{a}^T \cdot \phi^T \phi \cdot y^T \phi = \underline{a}^T \cdot \phi^T \cdot \phi, \quad \phi^T y = \phi^T \phi \underline{a}$$

– System der Normalengleichung.

– Lösung der Normalengleichungen falls  $\phi^T \phi$  invertierbar.

$$\hat{\underline{a}} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y$$

• Zusammenfassung:

Nicht lösbares lineares Gleichungssystem.  $y = \phi \underline{a}$ .

Minimierung des Fehlers  $\downarrow$  Gauß-Transformation

Multiplikation

$$\|y - \phi \underline{a}\|_2^2 \quad \text{linkst mit } \phi^T$$

Normalengleichungen:  $\phi^T y = \phi^T \phi \underline{a}$

Geometrische Interpretation

$$\begin{aligned}
\langle \phi \underline{a}, \underline{\varepsilon} \rangle &= (\phi, \underline{a})^T \underline{\varepsilon} = \underline{a}^T \phi^T (y - \phi \underline{a}) \\
&= \underline{a}^T (\phi^T y - \phi^T \phi \underline{a}) = 0 \\
&= 0 \text{ für } \underline{a} = \hat{\underline{a}}
\end{aligned}$$

Lösung der Normalengleichung

→  $\underline{\varepsilon}$  stet senkrecht auf  $\phi \underline{a}$ ,

→ von  $y$  wird orthogonal auf die Ebene (KVR) projiziert

- Gewichtete MKQ:

Statt  $\|y - \phi \underline{a}\|_2^2$  wird  $\|w(y - \phi \underline{a})\|_2^2$  minimiert

Substitution:  $\tilde{y} = w \cdot y, \quad \tilde{\phi} = w \cdot \phi$

– Lösung der ungewichtete MKQ für  $\|\tilde{y} - \tilde{\phi} \underline{a}\|_2^2$

– Lösung:  $\hat{\underline{a}} = (\tilde{\phi}^T \tilde{\phi})^{-1} \tilde{\phi}^T w^T w y$

– Beispiel (ungewichtete MKQ)

– Meßwerte:

– Ansatz:  $y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u & u^2 \end{pmatrix}}_{\phi^T(u)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\underline{a} \in \mathbb{R}^3} \quad n = 3$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^T(u_1) \\ \vdots \\ \phi^T(u_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 3} \quad \text{Meßvektor: } y = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

– System der Normalengleichung

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 91 \\ 413 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 46 \\ 12 & 46 & 198 \\ 46 & 198 & 898 \end{pmatrix} \cdot \hat{\underline{a}} \quad \phi^T y \in \mathbb{R}^3 \quad \phi^T \phi$$

– Parametervektor:  $\hat{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y \approx \begin{pmatrix} 11.86 \\ -9.43 \\ 1.93 \end{pmatrix}.$

## 3.2 Lösungsansätze für unbestimmte lineare Gleichungssysteme

## 3.3 Erinnerung: Lösbarkeit linearer Gleichungssystem.

- Lineares Gleichungssystem:

$$Ax = b. \quad (\text{L})$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n$

- Lösbarkeit: Das Gleichungssystem(L) ist genau dann lösbar, wenn  $\text{rang } A = \text{rang}(A, b)$ .

- Interpretation: Der Vektor  $b$  kann als Linearkombination der Spalten  $\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$  von  $A = (\underline{a}_1 | \dots | \underline{a}_n)$  dargestellt werden.  
 $Ax = b \Leftrightarrow x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = b$ .  
 Koeffizienten der Linearkombination sind die Koeffizienten der Lösung  $x$ .
- Eindeutigkeit (Unität): Gleichungssystem (L) in lösbar. mit  $r = \text{rang} A$  dann
  1.  $r = n$  : Lösung ist eindeutig. d.h. Lösungsmenge ist ein einzelner Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$
  2.  $r < n$  : Lösung ist nicht eindeutig, Lösungsmenge ist eine  $(n - r)$  - dim. lin. Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^n$

### 3.4 Rangbestimmung und Singulärzerlegung

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $r = \text{rank} A$ . Dann gibt es orthogonale Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$

sowie eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0_{(m-r) \times (n-r)} & \end{pmatrix}$$

derart, dass gilt  $A = U \cdot S \cdot V^T$

Die Zahlen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_{\min(n,m)}$  heißen *Singulärwerte*

### 3.5 Lösbarkeit des Systems der Normalengleichungen

Frage: Unter welchen Voraussetzung an  $A$  ist das System  $(N)$  der Normalengleichungen - siehe Abschnitt 3.3 lösbar?

- Singularwertzerlegung:
 
$$\left. \begin{aligned} A &= USV^T \\ A^T &= VS^T U^T \end{aligned} \right\} U \text{ und } U^T \text{ sind so zu wählen, dass } U^T U = \text{Einheitsmatrix}$$

$$A^T A = VS^T U^T U S V^T = VS^T E_m S V^T = VS^T S V^T = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

Damit hat man auch eine Singulärwertzerlegung von  $A^T A$  mit den Singulärwerten  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \dots > \sigma_r^2 = 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n$

- Folgerung:  $A$  hat vollen Spaltenrang  $n$   
 $\Leftrightarrow A^T A$  ist regulär  
 $\Leftrightarrow$  Normalengleichungen sind eindeutig lösbar.
- Definition: Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und symmetrisch, d.h.  $A^T = A$

1.  $A$  heißt positiv (negativ) definit, wenn

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

2.  $A$  heißt positiv (negativ) semidefinit, wenn

$$\underline{x}^T A \underline{x} = \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

3.  $A$  heißt indefinit, wenn

$A$  weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Definitheit von  $M := A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Die Bedingung  $\underline{x}^T M \underline{x} > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$   
ist wegen  $\underline{x}^T A^T A \underline{x} = \underbrace{\underline{x}^T V}_{V^T} S^T S \underbrace{V^T \underline{x}}_V$

gleichbedeutend mit  $V^T \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V > 0$ , für alle  $V \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^r v_i^2 \sigma_i^2 > 0, \forall V \in \mathbb{R}^n}$$

• Folgerungen:

$n = r \rightarrow A^T A$  positiv definit (alle  $\sigma_i^2 > 0$ , mindestens ein  $v_i^2 > 0$ )

$n > r \rightarrow A^T A$  ist positiv semidefinit (kein negatives  $v_i^2 \sigma_i^2$ )

• Hinreichende Optimalitätsbedingung für die MKQ

– Quadrat des Fehlers bei der MKQ:

$$Q = y^T y - 2y^T \phi \underline{a} + \underline{a}^T \phi^T \phi \underline{a}$$

– Gradient:  $\frac{\partial Q}{\partial \underline{a}} = -2y^T \phi \underline{a} + 2\underline{a}^T \phi^T \phi = \underline{0}^T$

– Hessematrix:  $\frac{\partial^2 Q}{\partial \underline{a}^2} = 2\phi^T \phi$

Besitzt  $A$  vollen Spaltenrang ( $r = n$ ), dann ist die Hessematrix  $2\phi^T \phi$  positiv definit und das Gütekriterium  $Q$  besitzt an der Stelle  $\hat{a} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y$  ein Minimum.

### 3.6 Lösung der Normalengleichungen mittels Cholesky Zerlegung

Sei  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  symmetrisch ( $M = M^T$ ) und positiv definit. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$M = L \cdot L^T \text{ mit (unknown) Dreieckmatrix. } \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \dots & l_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Äquivalent Dreieckmatrix  $R = L^T$ . *Cholesky-Zerlegung*

Matlab/Octave  $R = \text{chol}(M)$

Lösung eines lin.DGL  $Mx = q$ .

1. Cholesky-Zerlegung.

$$M = LL^T \text{ bzw. } M = R^T R$$

2. Bestimmung des Hilfsvektors  $c$  durch Vorwärtseinsetzen (von  $c_1$  bis  $c_n$ )
3. Bestimmung des Lösungsvektors  $\underline{x}$  durch Rückwärtseinsetzen (von  $x_n$  bis  $x_1$ ):  
 $L^T x = c, Rx = c$

- Begründung:

Sei  $x$  Lösung von  $L^T x = \underline{c}$  und  $c$  Lösung von  $Lc = q$   
 $\rightarrow x = (L^T)^{-1}c = (L^T)^{-1}L^{-1}q = (LL^T)^{-1}q = M^{-1}q$ .  
d.h.  $x$  ist Lösung von  $Mx = q$

- Vorteil: Durch Ausnutzung der speziellen Struktur von  $M$  (symm. pos. def) nur etwa halber Rechenaufwand wie bei Gauß.

Gauß:  $\approx \frac{n^3}{6}$

Chol:  $\approx \frac{n^3}{6}$

- Anmerkung: Ich meine aber, dass beim manuellen Lösen eines Gleichungssystems das Gauß-Verfahren einfacher anzuwenden ist als die Cholesky-Zerlegung, weil man bei diesem Verfahren häufig quadratische Gleichungen lösen muss, wobei häufig längere Wurzelterme entstehen und mit diesen Wurzeltermen muss man dann auch noch weiterrechnen. Wenn ein Rechner im Einsatz ist, mag die oben genannte Aussage stimmen und die Cholesky-Zerlegung von Vorteil sein.

### 3.7 Direkte Lösung des Quadratmittelsproblems auf der Basis von Orthogonalesierungsverfahren

- Gesucht: Direkte Lösung des Quadratmittelsproblems  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min!$
- Aussage: Sei  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal (d.h.  $Q^T = Q^{-1}$ ). und  $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ .

Dann:  $\|\varepsilon\|_2 = \|Q\varepsilon\|_2$

- Satz: Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang} A = n$  (vollen Spaltenrang)

Dann gilt es eine orthogonale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sowie eine Matrix  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $A = Q \cdot R$

mit oberer Dreiecksmatrix  $\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$R_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , regulär Matlab-Scilab:  $[Q, R] = \text{qr}(A)$ .

Aufgrund der Orthogonalität von  $Q$  gilt:

$$\min \leftarrow \|Ax - b\|_2 = \|QRx - b\|_2 = \|Q(Rx - Q^{-1}b)\|_2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|_2 = \|Rx - c\|_2$$

$$Ax - b =: \varepsilon \quad Q^T b =: c \quad Rx - c =: \tilde{\varepsilon}$$

Fehler im transformierten System

Fehler  $\tilde{\varepsilon}$  im transformierten System:



$$\begin{array}{rcl}
r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1n}x_n - c_1 & = & \tilde{\varepsilon}_1 \\
r_{22}x_2 + \dots + r_{2n}x_n - c_2 & = & \tilde{\varepsilon}_2 \\
& \vdots & \\
r_{nn}x_n - c_n & = & \tilde{\varepsilon}_n \\
& \vdots & \\
c_m & = & \tilde{\varepsilon}_m \\
\text{Fehler wird Null beim} & & \text{Lösen der ersten n Gleichungen} \\
c_{n+1} & = & \tilde{\varepsilon}_{n+1} \\
& \vdots & \\
c_m & = & \tilde{\varepsilon}_m \\
\text{Kann durch } x \text{ nicht verändert werden.} & & 
\end{array}$$

$$\rightarrow \text{Quadratmittellösung: } R_0 x = c_0 \quad c_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_1 = \dots = \tilde{\varepsilon}_n = 0, \quad \|\tilde{\varepsilon}\|_2 \text{ nimmt Minimum an etwas verpasst: } \|\tilde{\varepsilon}_n\|_2^2 = \sum_{i=1}^m$$

- Bsp:(Fortsetzung):  $A = \phi \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} -2.236 & -5.3666 & -20.572 \\ 0 & 4.147 & 21.122 \\ 0 & 0 & 5.35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c = Q^* b = \text{etwas}$$

verpasst hier

Lösung von  $R_0 x = c_0$  :

$$x_0 \approx \begin{pmatrix} 11.9 \\ -9.43 \\ 1.93 \end{pmatrix}$$

### 3.8 Direkte Lösungsdarstellung mittels verallgemeinerter Inverser

- Definition: Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  Eine Matrix  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  etwas verpasst hier eine Lösung  $x = A^- b$ .  
Ist  $A$  regulär  $C =$  invertierbar. d.h.  $m = n \quad \det A \neq 0$ , Dann ist  $A^-$  durch  $A^- = A^{-1}$  eindeutig festgelegt.
- Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert genau einen Moore-Penrose-Inverse  $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- $A^+$  ist eine (spezielle) verallgemeinerte Inverse, d.h. (für ein lösbares Gleichungssystem(L) ist  $x = A^+ b$  (MPL) eine Lösung (Moore-Penrose-Lösung) )
- Ist  $A$  regulär  $\rightarrow A^+ = A^{-1}$

#### Definition

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Ein Matrix  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  heisst Moore-Penrose-Inverse oder Pseudoinverse, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

$$\begin{array}{lcl}
AGA & = & A \\
GAG & = & G \\
(AG)^T & = & AG \\
(GA)^T & = & GA
\end{array} \quad \text{Notation } G = A^+$$

Aussagenhinsichtlich der Z-Norm:

$$Ax = b \quad (L)$$

1. Falls (L) lösbar ist, dann ist die Moore-Penrose-Lösung

$$x = A^+ b \quad (MPL)$$

gerade die Lösung  $x$  mit der kleinsten 2-Norm.

2. Falls (L) nicht lösbar ist, dann minimiert (MPL) den Fehler  $\|Ax - b\|_2$

Matlab/Scilab:  $A^+ \dots pin(A)$   $x = Ainv(b)$  liefert (MPL)

BSP: Lin Gleichungssystem mit  $m = 1$  GL. und  $n = 2$  Unbekannten:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - 2x_1$$

Berechnung:

1. Singulärwertzerlegung von  $A = \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang} A = r$

$$A = U \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{S \in \mathbb{R}^{m \times n}} : V^T \text{ Pseudoinverse:}$$

$$R^{n \times m} \ni A^+ = V \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{S \in \mathbb{R}^{m \times n}} : U^T$$

2. Zerlegung von  $A = BC$  mit  
 $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$  (Voller Spaltenrang)  
 $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  (Voller Zeilenrang)

$$m \overset{n}{\boxed{A}} = m \overset{\Gamma}{\boxed{B}} \cdot \overset{\Gamma}{\boxed{C}} n$$

Dann gilt:

$$A^+ = C^+ \cdot B^+ \text{ mit}$$

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T \rightarrow (\text{MKQ})$$

$$C^+ = C^T (C C^T)^{-1}$$

### 3.9 Parameternichtlineare Modelle

### 3.10 Newton-Verfahren

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig diffbar.

- Gesucht: Nullstelle  $x^*$ , dh  $f(x^*) = \underline{0}$
- Ziel: Näherungsweise Berechnung von  $x^*$  durch Folge  $\mathbb{R}^n \ni x_0, x_1, x_2 \rightarrow x^*$   
Taylorreihenentwicklung im Punkt  $x_i \in \mathbb{R}^n$   
 $\underline{0} = f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$  führt auf lineares Gleichungssystem  
$$f(x_i) = \underbrace{f'(x_i)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}}(x_i - x_{i+1})$$
  
Lösung falls Jacobimatrix  $f'(x_i)$  regulär ist:  
$$x_i - x_{i+1} = \left[ f'(x_i) \right]^{-1} f(x_i)$$
  
Newton-Schritt:  
$$x_{i+1} = x_i - \gamma \left[ f'(x_i) \right]^{-1} f(x_i) \text{ mit Schrittweitenparameter } \gamma \in (0, 1]$$

### 3.11 Gauss-Newton-Verfahren

Geg  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m > n$  Dann ist das nichtlineare Gleichungssystem  $f(x) = 0$  überbestimmt und in der Regel nicht lösbar.

- Gesucht:  $x^* \in \mathbb{R}^n$  so dass  
$$\|f(x)\|_2^2 = \sum_{l=1}^m f_l^2(x) \rightarrow \text{Min!}$$
  
Quadratmittellösung des lin. Gleichungssystem  
$$f(x_i) = \underbrace{f'(x_i)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}(x_i - x_{i+1}) \text{ lautet } x_i - x_{i+1} = [f'(x_i)]^+ f(x_i)$$
  
Gauss-Newton-Schritt: 
$$x_{i+1} = x_i - \gamma [f'(x_i)]^+ f(x_i) \text{ mit Schrittweitenparameter } \gamma \in (0, 1]$$

### 3.12 Totale MKQ

Bei der normalen MKQ wird der Fehler  $\underline{\varepsilon}$  des Gleichungssystem als Fehler in  $y$  aufgefasst:

$$\begin{aligned} y &= \phi(u)\underline{a} + \underline{\varepsilon} \\ &= \phi(u)\underline{a} + \Delta y \end{aligned}$$

- Gesucht: Parameter  $\underline{a}$  mit  $\|\Delta y\|_2^2 \rightarrow \text{Min!}$   
Explizite Lösung:  $\hat{\underline{a}} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y$
- Bei der totalen MKQ betrachtet man simultan die Fehler in  $\underline{u}$  und  $y$   
$$y = \phi(\underline{u} + \Delta \underline{u})\underline{a} + \Delta y$$
- Gesucht: Parameter  $\underline{a}$  mit  $\left\| \begin{pmatrix} \Delta \underline{u} \\ \Delta y \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|\Delta \underline{u}\|_2^2 + \|\Delta y\|_2^2 \rightarrow \text{Min!}$   
 $\Rightarrow$  Nichtlineares Gleichungssystem!

# 4 Anwendungen der MKQ

## 4.1 Verallgemeinerung des Fehlermodells

## 4.2 Einführungsbeispiel: Diodenmodell

- Modell:  $y = ae^{bu}$ , nichtlineares parameternichtlinear

- Ausweg:  $\ln y = \underbrace{\ln a}_{=:a_1} + bu = \underbrace{(1, u)}_{\varphi^T(u)} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ b \end{pmatrix}}_p$

- Messungen:  $y_i = ae^{bu_i}$   
 $\Rightarrow \ln y_i = (1, u_i) \begin{pmatrix} a_1 \\ b \end{pmatrix}$

- Gesamtproblem:  $\underbrace{\begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \vdots \\ \ln y_N \end{pmatrix}}_{\tilde{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_N \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ b \end{pmatrix}}_p$

- MKQ:  $\hat{\phi} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \tilde{y} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{a} = e^{\hat{a}_1}$

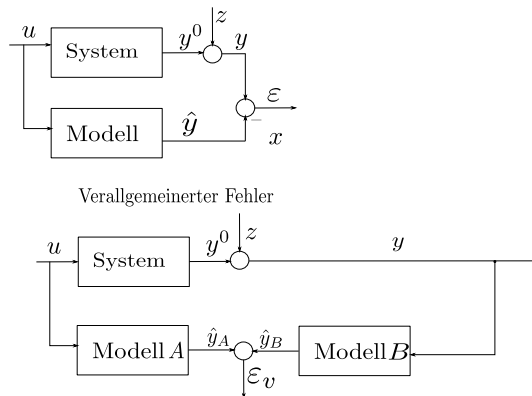
- Beispiel: Diodenmodell  $i = I_0(e^{\frac{1}{mu_T}u} - 1) \approx I_0 e^{-\frac{u}{mu_T}}$   
 $\Rightarrow \ln i \approx \underbrace{\ln I_0}_{p_1} + \underbrace{\frac{1}{mu_T}}_{p_2} u = (1, u) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

- Lineares Gleichungssystem:  $\underbrace{\begin{pmatrix} 0.693 \\ 1.099 \\ 1.386 \\ 1.792 \\ 2.079 \end{pmatrix}}_{\tilde{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.45 \\ 1 & 0.5 \\ 1 & 0.6 \\ 1 & 0.7 \\ 1 & 0.75 \end{pmatrix}}_{\phi} \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_p$

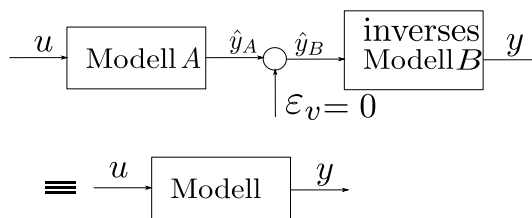
- MKQ:  
 $\hat{p} = \phi^T \tilde{y} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \tilde{y}$   
 $\approx \begin{pmatrix} -1.1495 \\ 4.2655 \end{pmatrix}$   
 $I_0 = \exp(p_1) \approx 0.3168$   
 $\Rightarrow i \approx 0.3168 e^{4.2655u}$  bzw.  $i \approx 0.3168(e^{4.2655u} - 1)$

## 4.3 Verallgemeinerter Fehler

- Bisher: Ausgangsfehler  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$  durch Vergleich von System und Modell
- Jetzt: Verallgemeinerter Fehler / Gleichungsfehler  
 $\varepsilon_v(t) = \hat{y}_B(t) - \hat{y}_A(t)$  durch Aufspaltung des Modells in zwei Teilsysteme:



Modell  $B$  muss invertierbar sein: Für  $\varepsilon_v = 0$  muss die Hintereinanderschaltung das ursprüngliche Modell liefern.



- Ziel dieser Aufspaltung / Transformation Überführung eines parameternichtlinearen Modells in ein parameterlineares Modell

– Beispiel: (Diode, ungelöst)  $y = p_1 e^{p_2 u} = p(u)$ ,  $\underbrace{\ln(y)}_{y_B=f(y)} = \underbrace{\ln(p_1) + p_2 u}_{y_A=f(u,p)}$  image1

– Beispiel: 1. Produktansatz für verschiedene Potenzen  
 $y = u_1^{a_1} \cdot u_n^{a_n}$ ,  $\ln(y) = a_1 \ln(u_1) + \dots + a_n \ln(u_n)$

$\Rightarrow$  Parameterlineares Modell  $\ln(y) = \underbrace{\ln(u_1), \dots, \ln(u_n)}_{\varphi^T(u)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

– Beispiel: 2. Produktansatz für verschiedene Exponentialfunktion

$y = a_1^{u_1} \cdot a_n^{u_n}$ ,  $\ln(y) = u_1 \ln(a_1) + \dots + u_n \ln(a_n) = \underbrace{(u_1, \dots, u_n)}_{\varphi^T(u)} \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(a_1) \\ \vdots \\ \ln(a_n) \end{pmatrix}}_{=:\underline{p}} \Rightarrow$

- \* Bestimmung  $\underline{p}$  MKQ
- \* Rücktransformation

– Beispiel: 3. Gebrochenrationale Funktionen.  $y = \frac{b_0 + b_1 u + \dots + b_m u^m}{1 + a_1 u + \dots + a_n u^n} = y(1 + a_1 u + \dots + a_n u^n)$

$$y = b_0 + b_1 u + \dots + b_m u^m - a_1 u y - \dots - a_n u^n y = \underbrace{(1, u, \dots, u^m, -u y, \dots, -u^m y)}_{\varphi^T(u, y)} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Feststellung: Beim Ausgangsfehler hängt  $\varphi^T(u)$  bzw.  $\phi(u)$  von  $n$  ab. Beim verallgemeinerten Fehlermodell kann  $\phi^T(u, y)$  bzw.  $\phi(u, y)$  neben  $u$  auch von  $y$  abhängen.

$\phi$  hängt auch  $\Rightarrow$  verallgem.

von  $y$  ab  $\nLeftarrow$  Fehler

(siehe Diodenmodell) Einfluss von Störung am Ausgang

#### 1. Ausgangsfehlermodell

Eingang  $u$  ungestört Ausgang  $y = \underbrace{y^0}_{\text{ungestörter Ausgang}} + \underbrace{z}_{\text{Störung (additiv)}}$

$$\hat{a} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T (y^0 + \underline{z}) = \underbrace{\text{etwas}}_{a \text{ exakter wahrer Parameter}}$$

#### 2. Verallgemeinertes Fehlermodell

wieder:  $u$  ungestört,  $y = y^0 + z$

Abweichung  $\hat{a} - a = [\phi^T(\underline{u}, \underbrace{\underline{y}}_{y^0 + \underline{z}}) \phi^T(\underline{u}, \underbrace{\underline{y}}_{y^0 + \underline{z}})]^T \phi^T(\underline{u}, \underbrace{\underline{y}}_{y^0 + \underline{z}}) \underline{z}$  hängt nichtlinear von der

Störung  $\underline{z}$  ab.

## 4.4 Zeitdiskrete Modelle

## 4.5 Übergang in zeitdiskreten Modellen

- System- Modell Konfiguration:
- Modellierung des Eingangssignals:
  - Eingangssignal stückweise konstant.  $u(t) = u[n]$  für  $n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t$
  - Halteglied 0-ter Ordnung  $H_0(s) = \frac{1-e^{-s\Delta T}}{s}$  liefert  $u_H(t)$
  - Abbildung  $u(t) \rightarrow u_H(t)$  ist linear

## 4.6 ARX-Modelle

Differenzengleichung

$$\underbrace{y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_{m_a} y[n-m_a]}_{\text{AR .. auto regressiv}} = \underbrace{b_0 u[n-d] + b_1 u[n-d-1] + \dots + b_{m_b} u[n-d-m_b]}_{\text{X .. extra input}} + \underbrace{r[n]}_{\text{nicht messbare Störung}}$$

Erinnerung an  $Z$ -Transformation:

- Definition:  $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x[k]$
- Verschiebungssatz:  $Z[x[n-k]] = z^{-k} \cdot X(z)$   
 ARX-Modell in  $z$ -Bereich:  $Y(z) \cdot \underbrace{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_a} z^{-m_a})}_{A(z^{-1})}$

$$= U(z)z^{-d} \underbrace{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_b} z^{-m_b})}_{B(z^{-1})} + R(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} U(z) + \frac{1}{A(z^{-1})} R(z)$$

MKQ: Umstellen nach  $y[n]$  im Zeitbereich

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - \dots - a_{m_a} y[n-m_a] + b_0 u[n-d] + \dots + b_{m_b} u[n-d-m_b] + r[n]$$

$$= \underbrace{(-y[n-1], \dots, -y[n-m_a], u[n-d], \dots, u[n-d-m_b])}_{\varphi^T(\dots) \text{ hängt auch von } y \text{ ab}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m_a} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{m_b} \end{pmatrix}}_{\underline{\rho}}$$

$\Rightarrow$  verallgemeinerter Fehler

Sei  $m = \max(m_a, m_b + d)$

Abtastwerte  $u[n], y[n]$  für  $m = 0, \dots, N-1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y[m] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{pmatrix}}_{\underline{y} \in \mathbb{R}^{N-m}} = \begin{pmatrix} -y[m-1] & \dots & -y[m-m_a] & u[m-d] & \dots & u[m-m_b-d] \\ \vdots & & \vdots & \dots & & \vdots \\ -y[N-2] & \dots & -y[N-m_a-1] & u[N-d-1] & \dots & u[N-m_b-d-1] \end{pmatrix}$$

3 Zeilen etwas.

## 4.7 Sonderfall: FIR-Filter

$A(z^{-1}) = 1$  (d.h.  $m_a = 0$ ), sei  $m := m_b$  Differenzengleichung

$y[n] = b_0 u[n-d] + \dots + b_m u[n-d-m] + r[n]$  bzw.  $Y(z) = z^{-1} B(z^{-1}) U(z) + R(z)$  nichtlineares Filter,

FIR-Filter (finite impulse response) endliche Impulsantwort:

Diskreter Impuls:  $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Für  $u[n] = \delta[n], r[n] = 0$ :

$y[j] = 0$  für  $j = 0, \dots, d-1$

$y[d] = b_0$

$y[d+1] = b_1$

$\vdots$

$y[d+m] = b_m$

$y[k] = 0$  für  $k > d+m$  leichte Implementierung (DSP)

$$y[n] = \underbrace{(u[n-d], \dots, u[n-d-m])}_{\varphi^T(u[\dots])} \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\underline{\rho} \in \mathbb{R}^{m+1}} + r[n] \text{ parameternichtlinear}$$

Lineares Gleichungssystem für Messungen  $0, \dots, N-1$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y[m+d] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{pmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u[m] & \dots & u[0] \\ \vdots & & \vdots \\ u[N-1-d] & \dots & u[N-1-d-m] \end{pmatrix}}_{\underline{\phi}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\underline{\rho}} \quad \text{MKQ: } \hat{\underline{\rho}} = \phi^+ \underline{y}$$

## 4.8 Weitere Modellansätze

ARX-Modell  $A(z^{-1})Y(z) = z^{-d}B(z^{-1})U(z) + R(z)$

Störsignal  $r[n]$  : stochastische Interpretation ab weisses Rauschen, technisch realistisch Annahme: farbiges Rauschen = gefiltertes weisses Rauschen

- ARMAX-Modell:

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-s}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})R(z) \text{ mit } C(z^{-1}) = 1 + C_1z^{-1} + \dots + C_{m_c}z^{-m_c}$$

- Allgemeine Modellstruktur

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-d}\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}U(z) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}R(z) \quad A, B, C, D, F \in \mathbb{R}[z^{-1}] \text{ (Polynome in } z^{-1})$$

Spezialfälle

- FIR:  $Y = z^{-d}BU + R$
- ARX:  $AY = z^{-d}BU + R$
- ARMAX:  $AY = z^{-d}BU + CR$
- OE:  $Y = z^{-d}\frac{B}{F}U + R$  *output error*
- BJ:  $Y = z^{-d}\frac{B}{F}U + \frac{C}{D}R$  *Box-Jenkins*

Spezialfälle für autonome Systeme (ohne Steuereingang)

- AR:  $AY = R$
- ARMA:  $AY = CR$

## 4.9 Zeitkontinuierliche Modelle

## 4.10 ARX-Differentialgleichungsmodell

lineare zeitinvariante stabile Differentialgleichung

$$y(t) + a_1\dot{y}(t) + \dots + a_{m_a}y^{m_a}(t) = b_0u(t) + b_1\dot{u}(t) + \dots + b_{m_b}u^{m_b}(t) + r(t)$$

Umformung in parameterlineare Darstellung:

$$y(t) = -a_1\dot{y}(t) - \dots - a_{m_a}y^{m_a}(t) + b_0u(t) + \dots + b_{m_b}u^{m_b}(t) + r(t)$$

- Zusammenfassung von  $N$ -Messungen in den Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_{N-1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(t_0) \\ \vdots \\ y(t_{N-1}) \end{pmatrix}}_{\underline{y} \in \mathbb{R}^N} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) & u(t_0) \\ \vdots & \vdots \\ -\dot{y}(t_{N-1}) & u(t_{N-1}) \end{pmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{pmatrix} T \\ K \end{pmatrix}}_{\underline{\rho}}$$

- Berechnung der Ableitungen:

1. Numerische Differentiation: Ersetzen der Ableitungen durch Differenzenquotienten, z.B:  
Rückwärtsdifferenzen  $\dot{y}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$

2. Zustandsvariablenfilter:

Gleichzeitige Filterung von Ein.-und Ausgangssignal

$$U_f(s) = F(s) \cdot U(s) \quad F \dots \text{Filterübertragungsfunktion}$$

$$Y_f(s) = F(s) \cdot Y(s)$$

$$\text{Strecke: } Y(s) = G(s)U(s)$$



$$\begin{aligned}
Y_f(s) &= F(s) \cdot Y(s) \\
&= F(s) \cdot G(s) \cdot U(s) \\
\rightarrow &= \underbrace{F(s) \cdot G(s) \cdot F^{-1}(s)}_{=G(s) \text{ für SISO}} \cdot U_f(s) \quad \text{Bild1}
\end{aligned}$$

Ansatz für Filter (Tiefpass):

$$F(s) = \frac{Y_f(s)}{Y(s)} = \frac{U_f(s)}{U(s)} = \frac{1}{f_0 + f_1 s + \dots + f_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad \text{Bild2}$$

Zustandsraumdarstellung (Regelungsnormalform, Beobachternormalform):

$$\dot{\underline{\xi}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ -f_0 & -f_1 & \dots & -f_{n-1} \end{pmatrix} \underline{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} y(t)$$

$$y_f = (1 \ 0 \dots 0) \underline{\xi}$$