

# **Technische Universität Dresden**

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

## **Diplomarbeit**

### **Modellbildung, Simulation, Regler- und Steuerungsentwurf für einen Dreifachpendel-Versuchsstand**

vorgelegt von: Bolorkhuu Dariimaa  
geboren am: 26. Juni 1989 in Choibalsan

zum Erlangen des akademischen Grades

### **Diplomingenieur** (Dipl.-Ing.)

Betreuer: Dr.-Ing. J. Winkler  
Dr.-Ing. C. Knoll

Verantwortlicher Hochschullehrer: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack  
Tag der Einreichung: 26. September 2017

# TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

## Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

### Aufgabenstellung für die Diplomarbeit

**Name des Diplomanden:** Herr Bolorkhuu Dariimaa

---

**Thema:** Modellbildung, Simulation, Regler- und Steuerungsentwurf für einen Dreifachpendel-Versuchsstand

**Zielsetzung:**

Das Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie ist im Besitz eines verschieblichen Dreifachpendels. Die Aufgabe besteht darin, einen Schlitten, an dem drei Pendelarme sequentiell montiert sind, in horizontaler Richtung so zu bewegen, dass die drei Pendel beispielsweise in aufrechter Position stabilisiert bzw. sogar dorthin aufgerichtet werden. Der Versuchsstand ist bereits in Betrieb genommen und funktioniert für ein gewöhnliches Einfachpendel. Nun soll die Funktionalität auf das Dreifachpendel übertragen werden.

Hierzu sind die folgenden Arbeiten erforderlich:

- Aufstellen eines nichtlinearen Modells, Linearisierung des Modells um verschiedene Arbeitspunkte,
- Implementierung des Modells unter Verwendung der Programmiersprache Python, Verifikation der Implementierung und Durchführung von Simulationsstudien,
- Entwurf von linearen Reglern zur Stabilisierung der drei Pendel in allen möglichen Ruhelagen (alle drei Pendel unten/ oben, gemischte Konfigurationen),
- Entwurf von Steuerstrategien zur Überführung der Pendel aus der Ruhelage „alle drei Pendel unten“ in beliebige andere Ruhelagen,
- Konzeption und Durchführung von Versuchsreihen zur Identifikation der benötigten Parameter.
- Implementation der entworfenen Steuerungs- und Regelungsalgorithmen in der Programmiersprache C auf der an der Anlage vorhandenen Echtzeitumgebung (LabView/ CompactRIO).

**Prüfer:** Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack  
Dr.-Ing. J. Winkler

**Betreuer:** Dr.-Ing. J. Winkler, Dr.-Ing. C. Knoll

**Ausgehändigt am:** 18. 04. 2017

**Einzureichen am:** 26. 09. 2017



Prof. Dr.-Ing. S. Bernet  
Vorsitzender des Prüfungsausschusses



Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack  
Verantwortlicher Hochschullehrer

# **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tage dem Prüfungsausschuss der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik eingereichte Diplomarbeit zum Thema

**Modellbildung, Simulation, Regler- und Steuerungsentwurf für einen  
Dreifachpendel-Versuchsstand**

selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen sind, wurden als solche kenntlich gemacht.

Dresden, 26. September 2017

Bolorkhuu Dariimaa

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem modellbasierten Steuerungs- und Regelungsentwurf für ein unteraktuiertes, mechanisches System mit drei seriellen Pendeln, die nacheinander drehbar an einem horizontal beweglichen Wagen auf einer Führungsschiene befestigt sind. Der Wagen wird dabei über einen Zahnriemen von einem Synchronmotor angetrieben. Für den Steuerungs- und Regelungsentwurf werden die Bewegungsgleichungen des Systems mittels des Lagrange-Formalismus hergeleitet und es wird eine partielle Eingangs-Ausgangslinearisierung vorgenommen. Anschließend wird eine Parameteridentifikation durchgeführt. Für die Stabilisierung in allen Ruhelagen wird ein Zustandsregler mittels Polplatzierung sowie ein zeitinvarianter Riccati-Regler entworfen. Für die Überführung aus der unteren stabilen Ruhelage in die obere instabile Ruhelage wird eine Trajektorie mittels des Kollokationsverfahrens ermittelt. Um ein besseres Folgeverhalten entlang der Solltrajektorie zu erzielen, wird ein zeitvarianter Riccati-Regler eingesetzt. Außerdem wird ein erweitertes Kalman-Filter für die Schätzung des nicht messbaren Zustands entworfen, implementiert und erfolgreich getestet.

## Abstract

The present diploma thesis deals with the model based feedforward and feedback controller design for an underactuated mechanical system with three pendulums which are rotatably mounted on a sliding cart. The cart moves horizontally on a rail track and is driven via a toothed belt by a synchronous motor. In order to design a feedforward and feedback controller, the equations of motion of the system are derived by use of the Lagrange-Formalism. After that, a parameter identification is carried out. In order to stabilize the system in all of its equilibrium points, a time-invariant Riccati controller and a feedback controller by means of pole placement are designed. The solution of trajectory for the swing-up maneuver from the lower stable equilibrium point to the upper unstable equilibrium point is calculated by use of a collocation method. In order to achieve a better trajectory tracking performance, a time-variant Riccati feedforward controller is applied. Finally, an extended Kalman-Filter for the estimation of the non-measurable state is designed, implemented and successfully tested.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VI</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Gliederung . . . . .	2
<b>2 Versuchsstand</b>	<b>3</b>
2.1 Aufbau des Versuchsstands . . . . .	3
<b>3 Modellbildung</b>	<b>5</b>
3.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen . . . . .	5
3.2 Partielle Linearisierung . . . . .	10
<b>4 Parameteridentifikation</b>	<b>13</b>
4.1 Identifikation der messbaren Parameter . . . . .	13
4.2 Identifikation der nicht messbaren Parameter . . . . .	14
4.2.1 Parameteridentifikation der Pendelkörper (einzeln) . . . . .	14
4.2.2 Parameteridentifikation mittels nichtlinearer MKQ . . . . .	17
<b>5 Regler- und Trajektorienentwurf</b>	<b>19</b>
5.1 Ruhelagen . . . . .	19
5.2 Linearisierung um die Ruhelagen . . . . .	20
5.3 Reglerentwurf . . . . .	21
5.3.1 Reglerentwurf mittels Polplatzierung . . . . .	21
5.3.2 Reglerentwurf mittels LQR-Optimierung . . . . .	25
5.4 Trajektorienentwurf . . . . .	31
5.4.1 Kollokationsverfahren . . . . .	31
5.4.2 Trajektorienfolgeregelung . . . . .	32
5.4.3 Trajektorienplanung für Ruhelagenüberführung . . . . .	33
5.4.4 Trajektorienplanung für seitliches Versetzen des Wagens . . . . .	36

<b>6 Beobachterentwurf</b>	<b>38</b>
6.1 Erweitertes Kalman-Filter . . . . .	39
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>43</b>
<b>A Simulationsergebnis</b>	<b>45</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>54</b>

# Symbolverzeichnis

Notation	Bedeutung
$\dot{y}$	erste Ableitung von $y$ nach der Zeit
$\ddot{y}$	zweite Ableitung von $y$ nach der Zeit
$y^{(p)}$	$p$ -te Ableitung von $y$ nach der Zeit
Symbole	Bedeutung
$q$	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten
$\dot{q}$	Geschwindigkeitsvektor der verallgemeinerten Koordinaten
$\ddot{q}$	Beschleunigungsvektor der verallgemeinerten Koordinaten
$i, j$	Indexvariablen mit wechselnder Bedeutung
$\mathcal{L}$	Lagrange Funktion
$\mathcal{T}$	Kinetische Energie
$\mathcal{U}$	Potentielle Energie
$\tau$	Vektor der externen generalisierten Kräfte und Momente
$\mathcal{R}$	Rayleighsche Dissipationsfunktion
$d_1$	Viskoser Reibungskoeffizient des inneren Pendels
$d_2$	Viskoser Reibungskoeffizient des mittleren Pendels
$d_3$	Viskoser Reibungskoeffizient des äußeren Pendels
$f$	Anzahl des Freiheitsgrades
$\varphi_1$	Winkel des inneren Pendels
$\varphi_2$	Winkel des mittleren Pendels
$\varphi_3$	Winkel des äußeren Pendels
$\dot{\varphi}_1$	Winkelgeschwindigkeit des inneren Pendels
$\dot{\varphi}_2$	Winkelgeschwindigkeit des mittleren Pendels
$\dot{\varphi}_3$	Winkelgeschwindigkeit des äußeren Pendels
$x_0$	Position des Wagens
$\dot{x}_0$	Geschwindigkeit des Wagens
$F$	Stellkraft
$g$	Erdbeschleunigung
$\ddot{\varphi}_1$	Winkelbeschleunigung des inneren Pendels
$\ddot{\varphi}_2$	Winkelbeschleunigung des mittleren Pendels
$\ddot{\varphi}_3$	Winkelbeschleunigung des äußeren Pendels
$\ddot{x}_0$	Beschleunigung des Wagens
$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$	Ortsvektoren der Massenschwerpunkte
$\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dot{\mathbf{r}}_3$	Zeitliche Ableitung der Ortsvektoren der Massenschwerpunkte

## Partielle Linearisierung

$x$	Zustandsvektor
$\dot{x}$	Zeitliche Ableitung des Zustandsvektors
$\tilde{u}$	Systemeingang
$r$	Relativer Grad
$n$	Systemordnung

## Jacobi-Linearisierung und Reglerentwurf

$A$	Systemmatrix
$B$	Eingangsmatrix
$c^T$	Ausgangsmatrix
$m$	Dimension des Ausgangsvektors
$x_{\text{ref}}$	Sollposition des Wagens
$\Delta x$	Zustandsvektor im linearisierten Modell
$\Delta \dot{x}$	Zeitliche Ableitung des Zustandsvektors im linearisierten Modell
$\Delta u$	Eingangsvektor im linearisierten Modell
$\Delta y$	Ausgangsvektor im linearisierten Modell
$f^T$	Verstärkungsvektor der linearen Zustandsrückführung
$V$	Vorfiltermatrix
$Q$	Zustandsgewichtungsmatrix
$R$	Eingangsgewichtungsmatrix

## Trajektorienplanung

$R$	Anzahl der Ruhelagen
$x^*$	gesuchte Lösung des Zustands
$u^*$	gesuchte Lösung des Eingangs
$t_e$	Stellzeit
$y_f$	Flacher Ausgang

## Beobachterentwurf

$k$	Zeitindex
$\hat{x}_k$	Geschätzter Zustand am Zeitpunkt $k$
$H$	Kovarianzmatrix des Prozessrauschen
$S$	Kovarianzmatrix des Messrauschen

**Bemerkung** (Notation). In der Arbeit wird entgegen der im deutschen Sprachraum üblichen Schreibweise der Punkt („.“) als Dezimaltrennzeichen verwendet.

# Abkürzungsverzeichnis

<b>AWA</b>	Anfangswertaufgabe
<b>CARE</b>	Continuous Time Algebraic Riccati Equation
<b>CLCP</b>	Closed Loop Characteristic Polynomial
<b>DARE</b>	Discrete Time Algebraic Riccati Equation
<b>EKF</b>	Extended Kalman Filter
<b>FPGA</b>	Field Programmable Gate Array
<b>IO</b>	Input Output
<b>LabVIEW</b>	Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench
<b>LQR</b>	Linear Quadratischer Regler
<b>MKQ</b>	Methode der kleinsten Fehlerquadrate
<b>MPR</b>	Modellbasierte prädiktive Regelung
<b>NI</b>	National Instruments
<b>PI</b>	Proportional Integral
<b>Riccati-DGL</b>	Riccati-Differentialgleichung
<b>RWA</b>	Randwertaufgabe
<b>sbRIO</b>	Single Board Reconfigurable Input Output
<b>SISO</b>	Single Input Single Output

# Abbildungsverzeichnis

1	Dreifachpendel-Versuchsstand . . . . .	3
2	sbRIO-9636 von NI <sup>1</sup> . . . . .	4
3	Starrkörpermodell des Dreifachpendel-Versuchsstands. . . . .	6
4	Schematische Darstellung des inversen Einfachpendels auf dem horizontal verschiebblichen Wagen. . . . .	14
5	Vergleich der Verläufe des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit aller Pendel anhand von Messdaten und der Simulation mit den identifizierten Parametern. . . . .	18
6	Das linearisierte System mit Zustandsrückführung und Vorfilter für die Vorgabe einer Führungsgröße $x_{\text{ref}}$ (siehe Abschnitt 5.3.1). . . . .	21
7	Simulationsergebnis mit dem Zustandsregler in der Ruhelage $R_{\text{ooo}}$ mit einer Anfangsauslenkung $\varphi_1 = 5^\circ, \varphi_2 = 5^\circ$ für eine Sollposition $x_{\text{ref}} = 40\text{cm}$ . . . . .	24
8	Simulationsergebnis mit dem LQR in der Ruhelage $R_{\text{ooo}}$ mit einer Anfangsauslenkung $\varphi_1 = 5^\circ, \varphi_2 = 5^\circ$ für eine Sollposition $x_{\text{ref}} = 40\text{cm}$ . . . . .	28
9	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{\text{ooo}}$ . . . . .	29
10	Stabilisierung mittels LQ-Reglers in der Ruhelage $R_{\text{ooo}}, \Delta u \neq 0$ . Die graue Stelle markiert den Übergang von Sollposition $x_0^*$ mit $[-20\text{cm} \rightarrow 0\text{cm}]$ . . . . .	30
11	Schematische Darstellung des Regelkreises mit Folgeregler. . . . .	32
12	Momentaufnahmen beim Aufschwing der Pendel, $R_{\text{uuu}} \rightarrow R_{\text{ooo}}$ . Dargestellt ist der Referenzverlauf. . . . .	33
13	Trajektorienverlauf beim Aufschwingen der Pendel, $R_{\text{uuu}} \rightarrow R_{\text{ooo}}$ . Dargestellt sind die Referenzwerte und Messergebnisse sowie Folgereglerverstärkungen. . . . .	34
14	Tatsächlicher Aufschwingverlauf der Pendel (orange) im Vergleich zur Solltrajektorie (schwarz), $R_{\text{uuu}} \rightarrow R_{\text{ooo}}$ . Zur deutlicheren Darstellung ist die Bewegung des Wagens $x_0$ nicht aufgetragen, stattdessen wird die Zeit $t$ für die waagerechte Achse verwendet. . . . .	35
15	Trajektorienverlauf beim seitlichen Versetzen des Wagens . . . . .	36
16	Regelkreis mit dem Beobachter. . . . .	38
17	Zustandsschätzung mittels EKF in der Ruhelage $R_{\text{uuu}}, \Delta u = 0$ . . . . .	41
18	Zustandsschätzung mittels EKF in der Ruhelage $R_{\text{ooo}}, \Delta u \neq 0$ . . . . .	42

19	Vergleich der Verläufe des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit aller Pendel anhand von Messdaten und der Simulation mit den identifizierten Parametern für 10 Sekunden. . . . .	45
20	Vergleich der Verläufe des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit aller Pendel anhand von Messdaten und der Simulation mit den identifizierten Parametern für 15 und 20 Sekunden. . . . .	46
21	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{uuu}$ . . . . .	47
22	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{uuo}$ . . . . .	48
23	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{ouu}$ . . . . .	49
24	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{uo0}$ . . . . .	50
25	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{ooo}$ . . . . .	51
26	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{ouo}$ . . . . .	52
27	Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage $R_{oo0}$ . . . . .	53

# Tabellenverzeichnis

1	Die mechanische Parameter des Modells für $i = \{1, 2, 3\}$ . . . . .	6
2	Einträge der Massenmatrix. . . . .	8
3	Einträge der Coriolismatrix. . . . .	9
4	Die gemessene Parameter des Versuchsstands. . . . .	13
5	Die nicht messbaren Parameter des Versuchsstands. . . . .	17
6	Ruhelagen des Dreifachpendels. . . . .	20
7	Verstärkungsvektoren und Vorfilter für alle Ruhelagen mittels Polplatzierung. . . . .	23
8	LQR-Verstärkungsvektoren und Vorfilter für alle Ruhelagen. . . . .	27

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Ein inverses Pendel stellt ein nichtlineares, instabiles System dar. Dessen Stabilisierung in der aufrechten Position ist eines der anschaulichsten Beispiele der Regelungstechnik. Es ist vergleichbar mit dem Balancieren eines langen Gegenstands auf der Fingerspitze und ist erfahrungsgemäß schwierig. Jedoch lässt sich das Problem mit Hilfe einer geeigneten Regelung lösen.

Die Realisierung erfolgt meist mit einem Schlitten. Dabei ist das Pendel um eine horizontale Achse drehbar auf dem Schlitten gelagert, der wiederum durch geeignete Aktorik in horizontaler Richtung bewegt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird ein dreifaches Pendelsystem betrachtet. Seine Grundfunktionalität findet sich in der praktischen Anwendungen in vielen Bereichen. Beispielsweise in der Steuerung von Segways<sup>1</sup> oder der senkrecht landenden SpaceX-Trägerrakete<sup>2</sup>.

Das Institut für Regelung- und Steuerungstheorie an der TU-Dresden verfügt über einen Dreifachpendel-Versuchsstand. Im Vergleich zum inversen Pendel sind zusätzlich noch zwei Pendel vorhanden und sind in Reihe zu dem inneren Pendel aufgehängt. Der Aufbau besteht im Wesentlichen aus einem Wagen, der auf einer Schiene gleitet sowie dem drehbar am Wagen gelagerten inneren Pendel. Ähnliche Ausführungen mit dreifachen und zweifachen Pendelplattformen existieren bereits als Versuchsstand an der Universität Stuttgart und der TU-Wien.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, bei diesem Versuchsstand zu zeigen, eine erfolgreiche Implementierung der Ruhelagenüberführung mittels einer Trajektorie und eine Positionierung des Wagens an einer gewünschten Stelle zu realisieren, während dabei die Stabilisierung in der instabilen Ruhelage erfolgt. Dies soll ausschließlich durch die Positionsregelung des Wagens erreicht werden, d.h. in den Pendel-Gelenken wirkt keine Kraft.

Für die Modellbildung, Simulation und Bestimmung der Trajektorien werden in der vorliegenden Arbeit die frei verfügbare Python-Bibliotheken NumPy [14], SymPy [22], SciPy [20] und Matplotlib [12] sowie PyTrajectory [9] als Hilfsmittel intensiv genutzt.

---

<sup>1</sup>Segway: <http://www.segway.com/>

<sup>2</sup>SpaceX: <http://www.spacex.com/>

## 1.2 Gliederung

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Kapitel 2 stellt den mechanischen und elektrischen Aufbau des Versuchsstands vor und gibt Einblicke in die Struktur des realen Systems. Im Anschluss werden in Kapitel 3 die Bewegungsgleichungen des Systems hergeleitet und folgt deren partiellen Eingangs-Ausgangs-Linearisierung. Daran schließt sich die Parameteridentifikation der Regelstrecke sowie Verifikation des Modells mit der Messung in Kapitel 4 an. Der Reibung in den einzelnen Gelenken wird dabei besondere Beachtung geschenkt. Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Bestimmung der Ruhelagen und Jacobi-Linearisierung sowie dem Reglerentwurf für die Stabilisierung in allen Ruhelagen. Anschließend folgt der Trajektorienentwurf für die Überführung der Ruhelagen sowohl auf Basis des nichtlinearen als auch linearen Modells. Außerdem ist der Entwurf eines Folgereglers entlang der Solltrajektorie ebenfalls Bestandteil dieses Kapitels. Da die Zustandskomponenten nicht alle messbar sind, wird in Kapitel 6 ein erweitertes Kalman-Filter für die Schätzung der nicht messbaren Zustandskomponenten entworfen. Mit der Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse und dem Ausblick endet die Arbeit in Kapitel 7.

# Kapitel 2

## Versuchsstand

Dieses Kapitel beschreibt den Aufbau des Dreifachpendel-Versuchsstands der Firma HASOMED GmbH am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU-Dresden. Der Versuchsstand dient perspektivisch als Demonstrator für die Lehre und Praktika und veranschaulicht das Verhalten verschiedener Regelungsalgorithmen auf einem anspruchsvollen realen System.

### 2.1 Aufbau des Versuchsstands

Der Dreifachpendel-Versuchsstand ist als ein elektrisch angetriebenes, mechanisches System aufgebaut und in Abbildung 1 dargestellt. Der Aufbau besteht im Wesentlichen aus drei Pendeln und einem Wagen, der auf einer etwa drei Meter langen horizontalen Führungsschiene über einen Zahnriemen geführt wird. Die Pendel sind einzeln abmontierbar und ermöglichen damit, auch die Konfiguration als Einfach- und Zweifachpendel-Versuchsstand.



Abbildung 1 – Dreifachpendel-Versuchsstand

Sowohl die Winkelmessung der einzelnen Pendel als auch die Positionsmessung des Wagens erfolgen über die im Gelenk und Wagen eingebauten Quadraturencoder. Die Signale werden dann in die Gelenkkachse optisch übertragen, um eine Reibung durch Verkabelung zwischen den Gelenken zu vermeiden.

Für die Steuerung und Regelung sowie Messsignalverarbeitung steht ein Modul **sbRIO-9636** von National Instruments (NI) (siehe Abbildung 2) zur Verfügung, welches über LabVIEW programmiert werden kann. Es verfügt über einen Mikroprozessor mit einem Takt von 400 MHz und einen rekonfigurierbaren FPGA sowie IO-Schnittstelle.

Die Aufgabe der Steuerung und Regelung wird von dem Mikroprozessor übernommen und sequentiell in Echtzeit abgearbeitet, wobei die Auswertung der Encodersignale im FPGA geschieht.



Abbildung 2 – sbRIO-9636 von NI<sup>1</sup>

Der Wagen wird über einen Zahnriemen von einem Synchronmotor angetrieben. Die Drehzahlregelung des Synchronmotors übernimmt ein unterlagerter PI-Regler, welcher über eine serielle Schnittstelle eingestellt werden kann. Der PI-Regler erwartet seinen Referenzwert als elektrische Spannung, daher wird die Solldrehzahl entsprechend in Spannung umgewandelt. Die maximale zulässige Spannung beträgt hierbei 12 V, wobei diese einer Geschwindigkeit von  $4.2 \text{ m s}^{-1}$  entspricht.

Für die Gewährleistung des sicheren Betriebs sind die linken und rechten Ränder der Führungsschiene durch zwei Notschalter geschützt, die bei Überschreitung des zulässigen Positionsreichs die Leistung des Motorumrichters automatisch abschalten. Neben den Notschalter hat der Versuchstand außerdem zwei Lichtschranken sowie zwei Federdämpfer. Die Lichtschranken ermöglichen eine softwareseitige Abschaltung des Umrichters. Für den Fall, dass der Wagen doch nicht stehen bleibt, wird er durch den Federdämpfer bis zum Stillstand gebremst.

<sup>1</sup>sbRIO-9636: <http://sine.ni.com/>

# Kapitel 3

## Modellbildung

In diesem Kapitel wird die Modellbildung des Dreifachpendels durchgeführt. Es werden die Bewegungsgleichungen des Systems mittels des Lagrange-Formalismus aufgestellt. Abschließend erfolgt die partielle Eingangs-Ausgangs-Linearisierung, welche zu einem vereinfachten äquivalenten System führt.

### 3.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Um das Verhalten des Dreifachpendels hinreichend genau wiedergeben und untersuchen zu können, wird ein Starrkörpermodell entwickelt, welche die Herleitung der Bewegungsgleichungen erheblich erleichtert. Dafür wird die Euler-Lagrangessche Gleichung zweiter Art [2]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}_i} = \boldsymbol{\tau}^T \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial \mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}, \quad i = \{1, \dots, 4\} \quad (3.1)$$

mit den verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$  verwendet. Dabei stellt  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  die Lagrange-Funktion dar und wird gebildet als die Differenz von kinetischer und potentieller Energie:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (3.2)$$

Die von außen auf das System einprägende Momente und Kräfte lassen sich durch  $\boldsymbol{\tau}$  darstellen. Der Vektor  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^4$  ergibt sich dann für das konkrete System

$$\boldsymbol{\tau} = [0, \ 0, \ 0, \ F]^T. \quad (3.3)$$

Wie man sieht, entsteht eine direkte Kraftwirkung  $F$  durch den Riemenantrieb nur auf den Wagen. Damit ist das System unteraktuiert.

Die Reibung in den Gelenken wird durch die Rayleighsche Dissipationsfunktion

$$\mathcal{R}(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} d_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} d_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} d_3 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)^2 \quad (3.4)$$

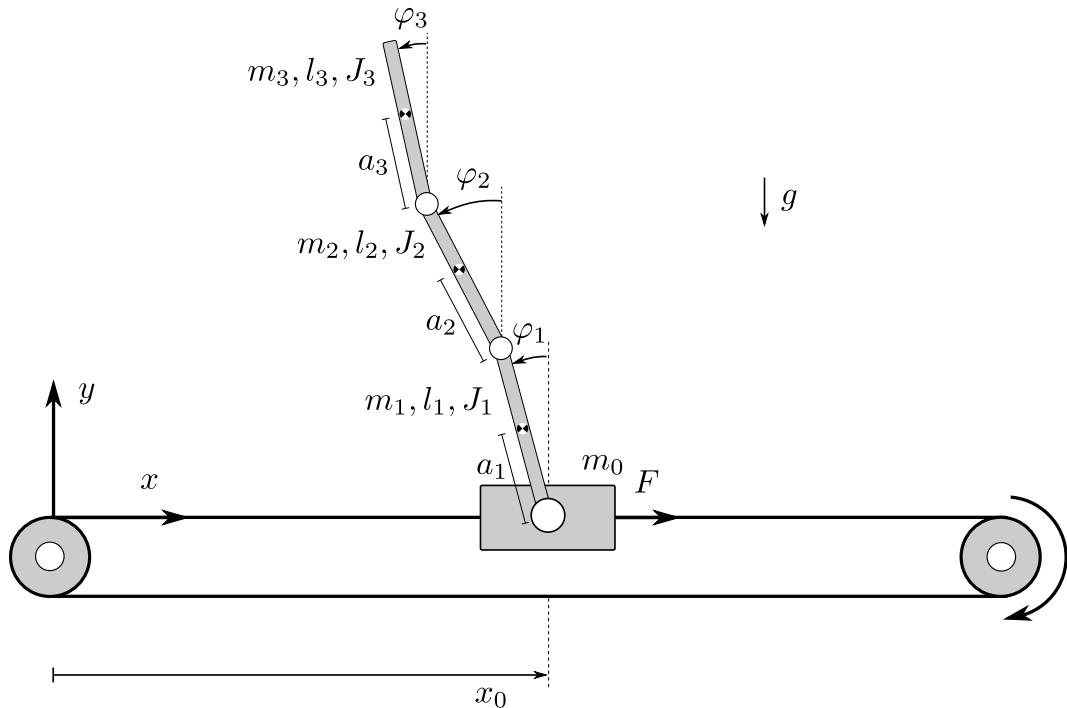
mit den viskosen Reibungskoeffizienten  $d_1, d_2, d_3$  modelliert [4].

Die Kinematik des Dreifachpendels, dargestellt in Abbildung 3, lässt sich durch die Winkel  $\varphi_1, \varphi_2$  und  $\varphi_3$  sowie die Position des Wagens  $x_0$  als verallgemeinerte Koordinaten  $\mathbf{q}$  beschreiben. Damit verfügt das System über den Freiheitsgrad  $f = 4$ .

Die verallgemeinerte Koordinaten  $\mathbf{q}$  werden folgendermaßen gewählt:

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x_0]^T. \quad (3.5)$$

Die Pendelwinkel  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  stehen als Absolutwinkel gegenüber dem inertialen Koordinatensystem  $\{x, y\}$  zur Verfügung.



**Abbildung 3** – Starrkörpermodell des Dreifachpendel-Versuchsstands.

Abbildung 3 zeigt eine schematische Darstellung des Dreifachpendels auf dem horizontal verschiebblichen Wagen. Die zur Modellierung verwendete Nomenklatur werden in der Tabelle 1 zusammengefasst. Die zugehörigen Parameterwerte können dem Abschnitt 4.1 Parameteridentifikation, Tabelle 4 und 5 entnommen werden.

Modul	Parameter	Beschreibung
Wagen	$m_0$	Masse
	$J_i$	Trägheitsmoment um den Schwerpunkt
	$m_i$	Masse
Pendel $i$	$l_i$	Länge
	$a_i$	Schwerpunktsabstand zur Drehachse
	$g$	Erdbeschleunigung
	$F$	Stellkraft

**Tabelle 1** – Die mechanische Parameter des Modells für  $i = \{1, 2, 3\}$ .

Um die kinetische und potentielle Energiefunktion aufzustellen, müssen zunächst die Ortsvektoren bestimmt werden. Für die Ortsvektoren der drei Massenschwerpunkte erhält man

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_0 - a_1 \sin \varphi_1 \\ a_1 \cos \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} x_0 - l_1 \sin \varphi_1 - a_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

und

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} x_0 - l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_3 \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_3 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Weiterhin erhält man deren zeitlichen Ableitungen

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 - a_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 \\ -a_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 - l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - a_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - a_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

und

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 - l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - a_3 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - a_3 \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Mit ihnen ergibt sich die kinetische Energie  $\mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , die nicht nur von den Positionskoordinaten, sondern auch von den Geschwindigkeiten abhängt, wobei diese aus einem rotatorischen Anteil

$$\mathcal{T}_{\text{rot}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\varphi}_i^2 \quad (3.12)$$

und einem translatorischen Anteil besteht:

$$\mathcal{T}_{\text{tran}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{r}}_i^T m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2. \quad (3.13)$$

Die potentielle Energie ist hingegen nur von den Positionskoordinaten abhängig und lässt sich wie folgt als skalare Funktion schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathbf{q}) &= m_1 \mathbf{r}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} + m_2 \mathbf{r}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} + m_3 \mathbf{r}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \\ &= m_1 g a_1 \cos \varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \\ &\quad + m_3 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  von (3.2) ergibt sich nun zu

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 J_i \dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{r}}_i^T m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 - \left( m_1 \mathbf{r}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} + m_2 \mathbf{r}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} + m_3 \mathbf{r}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right).$$

Das Gleichungssystem (3.1) führt zu einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}$ . Dieses kann leicht in eine gut handhabbare Matrix-Vektor-Form (3.15) überführt werden. Die Bewegungsgleichungen in der Matrix-Vektor-Darstellung [6] lauten

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.15)$$

mit der positiv definiten quadratischen Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Die Matrizen  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  und  $\mathbf{K}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  stellen die geschwindigkeitsabhängige und lageabhängige Kräfte dar. Der Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  repräsentiert äußere Kräfte und Momente.

Die Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) & M_{13}(\mathbf{q}) & M_{14}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) & M_{23}(\mathbf{q}) & M_{24}(\mathbf{q}) \\ M_{31}(\mathbf{q}) & M_{32}(\mathbf{q}) & M_{33}(\mathbf{q}) & M_{34}(\mathbf{q}) \\ M_{41}(\mathbf{q}) & M_{42}(\mathbf{q}) & M_{43}(\mathbf{q}) & M_{44}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

besitzt außerdem eine Symmetrie-Eigenschaft, so dass folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})^T. \quad (3.17)$$

Die Einträge der Massenmatrix sind spiegelsymmetrisch bezüglich ihrer Hauptdiagonale  $M_{ij}(\mathbf{q}) = M_{ji}(\mathbf{q})$  für  $i, j = \{1, \dots, 4\}$  und sind in der Tabelle 2 dargestellt.

$M_{11}(\mathbf{q}) = J_1 + m_1 a_1^2 + (m_2 + m_3) l_1^2,$	$M_{12}(\mathbf{q}) = (m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$
$M_{13}(\mathbf{q}) = m_3 l_1 a_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3),$	$M_{14}(\mathbf{q}) = -(m_1 a_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) \cos \varphi_1,$
$M_{21}(\mathbf{q}) = M_{12}(\mathbf{q}),$	$M_{22}(\mathbf{q}) = J_2 + m_2 a_2^2 + m_3 l_2^2,$
$M_{23}(\mathbf{q}) = m_3 l_2 a_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3),$	$M_{24}(\mathbf{q}) = -(m_2 a_2 + m_3 l_2) \cos \varphi_2$
$M_{31}(\mathbf{q}) = M_{13}(\mathbf{q}),$	$M_{32}(\mathbf{q}) = M_{23}(\mathbf{q}),$
$M_{33}(\mathbf{q}) = J_3 + m_3 a_3^2,$	$M_{34}(\mathbf{q}) = -m_3 a_3 \cos \varphi_3,$
$M_{41}(\mathbf{q}) = M_{14}(\mathbf{q}),$	$M_{42}(\mathbf{q}) = M_{24}(\mathbf{q}),$
$M_{43}(\mathbf{q}) = M_{34}(\mathbf{q}),$	$M_{44}(\mathbf{q}) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3.$

Tabelle 2 – Einträge der Massenmatrix.

Die Zentrifugal- bzw. Corioliskräfte werden durch die Masse  $m_i$ , den Schwerpunkt-abstand  $a_i$  und den Absolutwinkel  $\varphi_i$  des  $i$ -ten Pendels bestimmt. Die quadratische Coriolismatrix  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  ergibt sich zu

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := \begin{bmatrix} C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{14}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{24}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{34}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{41}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{42}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{43}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{44}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Die Einträge der Coriolismatrix  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  können aus der Tabelle 3 entnommen werden.

$C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$	$C_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (m_2 a_2 + m_3 l_2) l_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$
$C_{13}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_3 l_1 a_3 \dot{\varphi}_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3),$	$C_{14}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$
$C_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (m_2 a_2 + m_3 l_2) l_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$	$C_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$
$C_{23}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_3 l_2 a_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3),$	$C_{24}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$
$C_{31}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_3 l_1 a_3 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3),$	$C_{32}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -m_3 l_2 a_3 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3),$
$C_{33}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$	$C_{34}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$
$C_{41}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (m_1 a_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1,$	$C_{42}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (m_2 a_2 + m_3 l_2) \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2,$
$C_{43}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m_3 a_3 \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3,$	$C_{44}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0,$

**Tabelle 3** – Einträge der Coriolismatrix.

Die Reibungen in den Gelenken treten in der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  auf und so erhält man

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Die Potentialkräfte wirken allein auf die Masse des Pendels und ergibt sich zu

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) := \begin{bmatrix} -(m_1 a_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1) g \sin \varphi_1 \\ -(m_2 a_2 + m_3 l_2) g \sin \varphi_2 \\ -m_3 a_3 g \sin \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Für weitere Betrachtung liegen die Bewegungsgleichungen (3.15) in einer besser lesbaren Form

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}(\mathbf{q})] \quad (3.21)$$

durch die Umstellung nach dem Beschleunigungsvektor  $\ddot{\mathbf{q}}$  zu Grunde. Im nächsten Abschnitt wird auf die partielle Linearisierung des Systems eingegangen.

**Bemerkung (SymPy).**

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen des Dreifachpendel-Versuchsstands sowie Bestimmung der Einträge von  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}(\mathbf{q})$  wurden mit Hilfe von Computer-Algebra Software SymPy durchgeführt.

## 3.2 Partielle Linearisierung

Um den Regler- und Steuerungsentwurf zu vereinfachen, sollen die im vorigen Abschnitt hergeleitete Bewegungsgleichungen des Dreifachpendel-Versuchsstands nun in eine einfache Systemdarstellung überführt werden. Dazu wird zunächst eine Eingangs-Ausgangs-Linearisierung auf dem System für einen Ausgang vorgenommen. Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen (3.21) mit Hilfe von definitorischen Gleichungen in eine eingangsaffine SISO-Zustandsdarstellung [18]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.22}$$

mit der Zeit  $t \in \mathbb{R}$  und den glatten Vektorfeldern  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  überführt. Als Zustandsvektor wird

$$\mathbf{x} := [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x_0, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, \dot{x}_0]^T \in \mathbb{R}^n \tag{3.23}$$

gewählt. Die Größen  $u \in \mathbb{R}$  und  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  repräsentieren den skalaren Eingang und Ausgang. Die Eingangs-Ausgangs-Linearisierung erfolgt, indem man die skalare Ausgangsfunktion  $y$  solange nach der Zeit ableitet, bis sie explizit von dem Eingang  $u$  abhängt. Die erforderlichen Schritte werden in den folgenden Formeln mit den Lie-Ableitungen<sup>1</sup> ausgedrückt:

$$\begin{aligned}y &= h(\mathbf{x}), \\ \dot{y} &= \mathbf{L}_f h(\mathbf{x}), \\ \ddot{y} &= \mathbf{L}_f^2 h(\mathbf{x}), \\ &\vdots \\ y^{(r-1)} &= \mathbf{L}_f^{r-1} h(\mathbf{x}), \\ y^{(r)} &= \mathbf{L}_f^r h(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{r-1} h(\mathbf{x}) u, \\ &:= \tilde{u},\end{aligned}\tag{3.24}$$

wobei  $r$  den relativen Grad<sup>2</sup> von  $y = h(\mathbf{x})$  bezüglich  $u$  darstellt. Die Größe  $y^{(r)}$  wird als neuer Systemeingang  $\tilde{u}$  aufgefasst.

Vor der Linearisierung soll eine geschickte Auswahl der Ausgangsfunktion  $y$  getroffen werden. Bei mechanischen, unteraktuierten Systemen ist es sinnvoll, die aktive Koordinate als Systemausgang festzulegen, wenn eine Kraft- und Drehmomentregelung erfordert wird. Daher wird die Wagenposition  $x_0$  als Systemausgang  $y = x_0$  festgelegt. Nachdem die Lie-Ableitung  $\mathbf{L}_f$  bei der Ausgangsfunktion zweimal hintereinander angewandt wird, tritt die Kraft  $F$  in dem Term auf. Dabei erhält das System den neuen (virtuellen)

---

<sup>1</sup>  $\mathbf{L}_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ : Lie-Ableitung des Skalarfeldes  $h(\mathbf{x})$  entlang des Vektorfeldes  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  im Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup> Relativer Grad ist niedrigste Ordnung einer Zeitableitung des Ausgangs von (3.22), die explizit vom Eingang  $u$  abhängt [18].

Eingang<sup>3</sup>  $\ddot{y} = \tilde{u}$ , was der Vorgabe der Wagenbeschleunigung  $\ddot{x}_0$  entspricht. Somit beträgt der relative Grad des Systems  $r = 2$  und ist kleiner als die Systemordnung ( $n = 8$ ). Wenn man nun die unterlagerte Rückführung

$$u = \frac{1}{\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{r-1}} (\tilde{u} - \mathbf{L}_f^r h(\mathbf{x})) = F \quad (3.25)$$

anwendet, lässt sich das System in zwei Teilsysteme aufspalten: ein lineares (Doppelintegrator):

$$\ddot{x}_0 = \tilde{u} \quad (3.26)$$

und ein nichtlineares (sogenannte interne Dynamik):

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) & M_{13}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) & M_{23}(\mathbf{q}) \\ M_{31}(\mathbf{q}) & M_{32}(\mathbf{q}) & M_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ G_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ G_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{14}(\mathbf{q}) \\ M_{24}(\mathbf{q}) \\ M_{34}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \tilde{u} \right). \quad (3.27)$$

Dabei gilt für das Vektorfeld  $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  folgende Beziehung:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}). \quad (3.28)$$

Das System lässt sich wie folgt mit den Vektorfeldern  $\mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  darstellen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\tilde{u}. \quad (3.29)$$

Für das Vektorfeld  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  gilt

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ - \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) & M_{13}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) & M_{23}(\mathbf{q}) \\ M_{31}(\mathbf{q}) & M_{32}(\mathbf{q}) & M_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ G_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ G_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Die Komponenten des Vektorfelds  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  ergeben sich zu

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}) & M_{12}(\mathbf{q}) & M_{13}(\mathbf{q}) \\ M_{21}(\mathbf{q}) & M_{22}(\mathbf{q}) & M_{23}(\mathbf{q}) \\ M_{31}(\mathbf{q}) & M_{32}(\mathbf{q}) & M_{33}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_{14}(\mathbf{q}) \\ M_{24}(\mathbf{q}) \\ M_{34}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

---

<sup>3</sup>Über die numerische Integration der Wagenbeschleunigung kann die tatsächliche Stellgröße berechnet werden, d.h. der Sollwert des Drehzahlreglers siehe Abschnitt 2.1.

Anhand der Darstellung der Vektorfelder  $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})$  ist deutlich zu sehen, dass die Koordinaten miteinander über Integratorketten zusammenhängen. Die Nichtlinearität tritt nur in der zweiten Ableitung der Winkelkoordinaten auf.

Das neue Zustandsraummodell hat die folgende nichtlineare Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_5, \\ \dot{x}_2 &= x_6, \\ \dot{x}_3 &= x_7, \\ \dot{x}_4 &= x_8, \\ \dot{x}_5 &= a_5(\mathbf{x}) + b_5(\mathbf{x})\tilde{u}, \\ \dot{x}_6 &= a_6(\mathbf{x}) + b_6(\mathbf{x})\tilde{u}, \\ \dot{x}_7 &= a_7(\mathbf{x}) + b_7(\mathbf{x})\tilde{u}, \\ \dot{x}_8 &= \tilde{u}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Durch die partielle Linearisierung ist das System nun einfacher zu handhaben. Im Unterschied zu einer Taylor-Linearisierung (Vernachlässigung Terme höherer Ordnung) ist das so erhaltene System äquivalent mit (3.15). In den nächsten Kapiteln wird nur dieses Modell für weitere Betrachtungen verwendet, beispielsweise für den Entwurf des Reglers und der Steuerung sowie des Beobachters.

# Kapitel 4

## Parameteridentifikation

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Parameteridentifikation des Dreifachpendel-Versuchsstands. Die Parameteridentifikation spielt eine wichtige Rolle in der Regelungstechnik und beschreibt eine experimentelle Analyse der Regelstrecke. Durch die Messung und Experimente kann das Systemmodell mittels mathematischer Methoden identifiziert werden. Damit werden eine numerische Simulation und ein modellbasierter Reglerentwurf erst möglich. Die Parameter lassen sich in direkt messbare und nicht direkt messbaren Größen unterteilen. Die direkt messbaren Parameter können ohne großen Aufwand gemessen werden. Der Schwerpunkt dieses Kapitels wird deshalb durch die Methoden zur Ermittlung der nicht direkt messbaren Parameter gebildet.

### 4.1 Identifikation der messbaren Parameter

Zu den direkt messbaren Parameter gehören die Masse des Wagens und der einzelnen Pendel. Die Länge und der Schwerpunktabstand des Pendels gehören ebenfalls dazu. In der Tabelle 4 werden die gemessenen Parameter des Versuchsstands angegeben.

Modul	Parameter	Wert	Einheit	Beschreibung
Wagen	$m_0$	3.34	kg	Masse
	$m_1$	0.8512	kg	Masse
Inneres Pendel	$l_1$	0.32	m	Länge
	$a_1$	0.2	m	Schwerpunktabstand zur Drehachse
Mittleres Pendel	$m_2$	0.8973	kg	Masse
	$l_2$	0.419	m	Länge
	$a_2$	0.26	m	Schwerpunktabstand zur Drehachse
Äußeres Pendel	$m_3$	0.5519	kg	Masse
	$l_3$	0.485	m	Länge
	$a_3$	0.216	m	Schwerpunktabstand zur Drehachse

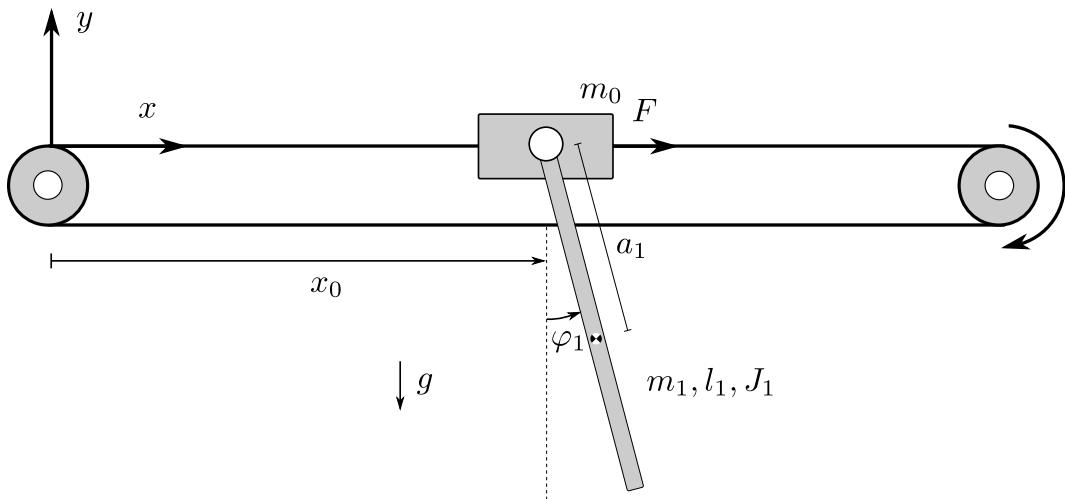
Tabelle 4 – Die gemessene Parameter des Versuchsstands.

## 4.2 Identifikation der nicht messbaren Parameter

Die nicht direkt messbaren Parameter sind die Trägheitsmomente des Pendelkörpers und die Reibungskoeffizienten. Zur Bestimmung der Parameter können Schwingungsversuche durchgeführt werden. Dabei besteht die Möglichkeit, die Pendelkörper einzeln getrennt zu identifizieren, indem das Pendel in Schwingung versetzt wird. Dies führt zu einer einfacheren mathematischen Formulierung des Schätzproblems. Im folgenden Abschnitt wird dieser Ansatz näher betrachtet.

### 4.2.1 Parameteridentifikation der Pendelkörper (einzelnen)

Das verschiebbliche Einfachpendel ist in Abbildung 4 dargestellt.



**Abbildung 4** – Schematische Darstellung des inversen Einfachpendels auf dem horizontal verschieblichen Wagen.

Für den Schwingungsversuch wird der Wagen im Stillstand gehalten, damit ergibt sich die Bewegungsgleichung für  $x_0 = \text{const}$ :

$$J_A \ddot{\varphi}_1 - m_1 g a_1 \sin \varphi_1 + d_1 \dot{\varphi}_1 = 0 \quad (4.1)$$

mit dem Trägheitsmoment des Pendels um die Drehachse nach Steiner  $J_A = J_1 + m_1 a_1^2$ .

#### Analytische Ermittlung des Trägheitsmoments von einem Stabpendel

Die Pendel vom Versuchsstand haben in der Realität eine inhomogene Dichte. Für eine grobe Schätzung des Trägheitsmoments um den Schwerpunkt wird dennoch die Dichte des Pendels  $\rho_1$  konstant angenommen und man erhält

$$J_1 = \int_{-l_1/2}^{l_1/2} \rho_1 x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{m_1}{l_1} x^3 \Big|_{-l_1/2}^{l_1/2} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2. \quad (4.2)$$

### Ermittlung des Trägheitsmoments auf Basis des linearen Modells

Zunächst soll die nichtlineare Bewegungsgleichung (4.1) um die stabile Ruhelage vereinfacht werden. Für kleine Auslenkung gilt  $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$  und  $d_1 \dot{\varphi}_1 \approx 0$ . Somit erhält man die linearisierte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi}_1 - \underbrace{\frac{m_1 g a_1}{J_A}}_{\omega_0^2} \varphi_1 = 0 \quad (4.3)$$

mit der Eigenfrequenz des Pendels  $\omega_0$ . Für die Eigenfrequenz gilt

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{T_1} = \sqrt{\frac{m_1 g a_1}{J_A}}. \quad (4.4)$$

Das unbekannte Trägheitsmoment ergibt sich mit

$$J_1 = J_A - m_1 a_1^2 = \frac{m_1 g a_1}{4\pi^2} T_1^2 - m_1 a_1^2 \quad (4.5)$$

durch eine einfache Messung der Periodendauer  $T_1$  der Schwingung. Wie man in (4.5) sieht, kann nur das Trägheitsmoment mit diesem Ansatz ermittelt werden. Er hat den Nachteil, dass die Schwingung eine kleine Amplitude voraussetzt. Für größere Auslenkung gilt die linearisierte Gleichung nicht mehr.

Für eine gleichzeitige Identifizierung von Trägheitsmoment und Reibungskoeffizienten wird die Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) in dem nächsten Abschnitt betrachtet.

### Ermittlung der nicht messbaren Parameter mittels MKQ

Die Methode der kleinsten Quadrate wird häufig in der Regelungstechnik zur Identifizierung der Regelstrecke eingesetzt. In der vorliegenden Arbeit wird die ungewichtete MKQ [17] verwendet. Die MKQ setzt ein parameterlineares Modell

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \hat{\mathbf{a}} \quad (4.6)$$

mit dem Ausgangsvektor  $\hat{\mathbf{y}}$ , dem Datenvektor  $\Phi$  sowie dem Parametervektor  $\hat{\mathbf{a}}$  voraus, um das Minimierungsproblem für das Kostenfunktional  $\mathbf{J}_{\min}$  zu lösen.

Für das Kostenfunktional erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\min} &:= \int_0^T \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dt, \\ &:= \int_0^T \underbrace{\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{y}} - 2\hat{\mathbf{y}}^T \Phi \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^T \Phi^T \Phi \hat{\mathbf{a}})}_{\hat{q}} dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit dem Residuenvektor  $\boldsymbol{\varepsilon} := \hat{\mathbf{y}} - \Phi \hat{\mathbf{a}}$ .

Die Lösung des Minimierungsproblems ergibt sich mit der Bedingung für ein lokales Extremum

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{q}}}{d\hat{\mathbf{a}}} &= -\hat{\mathbf{y}}^T \Phi + \hat{\mathbf{a}}^T \Phi^T \Phi, \\ &\stackrel{!}{=} \mathbf{0}^T \end{aligned} \quad (4.8)$$

und führt mit der Umstellung nach dem Parametervektor zu der Moore-Penrose-Inverse<sup>1</sup>

$$\hat{\mathbf{a}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \hat{\mathbf{y}}. \quad (4.9)$$

Die nichtlineare Bewegungsgleichung (4.1) des Einzelpendels lässt sich leicht in eine parameterlineare Form

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 g a_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \sin \varphi_1 - \frac{d_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \dot{\varphi}_1 \quad (4.10)$$

überführen. Für den Ausgang erhält man  $\hat{\mathbf{y}} = \ddot{\varphi}_1$  und den Datenvektor

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1, & \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

sowie den neu eingeführten Parametervektor

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 g a_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \\ -\frac{d_1}{J_1 + m_1 a_1^2} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Für  $N \geq 2$  Messungen existiert die Moore-Penrose-Inverse. Das überbestimmte Gleichungssystem ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{a}}. \quad (4.13)$$

Die Bewegungsgleichungen des Dreifachpendel-Versuchsstands können nicht in einer parameterlinearen Form überführt werden. Daher wird in dem nächsten Abschnitt eine nichtlineare MKQ für die Identifizierung aller nicht messbaren Parameter betrachtet.

---

<sup>1</sup>Die Moore-Penrose-Inverse wird auch als Pseudoinverse genannt.

### 4.2.2 Parameteridentifikation mittels nichtlinearer MKQ

Die nichtlineare MKQ ist eine Methode für Parameterschätzung eines nichtlinearen Systems und ähnelt stark der linearen MKQ. Der Hauptunterschied besteht darin, dass das Systemmodell bei der nichtlinearen MKQ durch ein lineares Modell approximiert wird, dessen Parameter durch mehrere Iterationsschritte optimiert werden. Das Kostenfunktional lässt sich ähnlich wie in (4.7) aufstellen und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\min} &:= \int_0^T \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\theta}, t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, t) dt, \\ &:= \int_0^T \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\theta}, t) + \varepsilon_2^2(\boldsymbol{\theta}, t) + \varepsilon_3^2(\boldsymbol{\theta}, t)) dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit dem Parametervektor  $\boldsymbol{\theta}$  und den im Kapitel 3 partiell linearisierten Modellgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\tilde{u}. \quad (4.15)$$

Nun gilt es, den Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  so zu bestimmen, dass das Residuum

$$\varepsilon_i(\boldsymbol{\theta}, t) = \varphi_{i,M}(t) - \varphi_i(\boldsymbol{\theta}, t) \quad \text{für } i = \{1, 2, 3\} \quad (4.16)$$

zwischen den gemessenen Winkeln  $\varphi_{i,M}(t)$  und den Modellwinkeln  $\varphi_i(\boldsymbol{\theta}, t)$  minimal wird. Für die Identifikation des Parametervektors  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^6$  wurden die drei Pendel um die stabile Ruhelage ausgeschwungen während der Wagen im Stillstand fixiert ist. Es wurden Messwerte aufgezeichnet (siehe Abbildung 5). Für den Parametervektor

$$\boldsymbol{\theta} = [J_1, \ J_2, \ J_3, \ d_1, \ d_2, \ d_3]^T \quad (4.17)$$

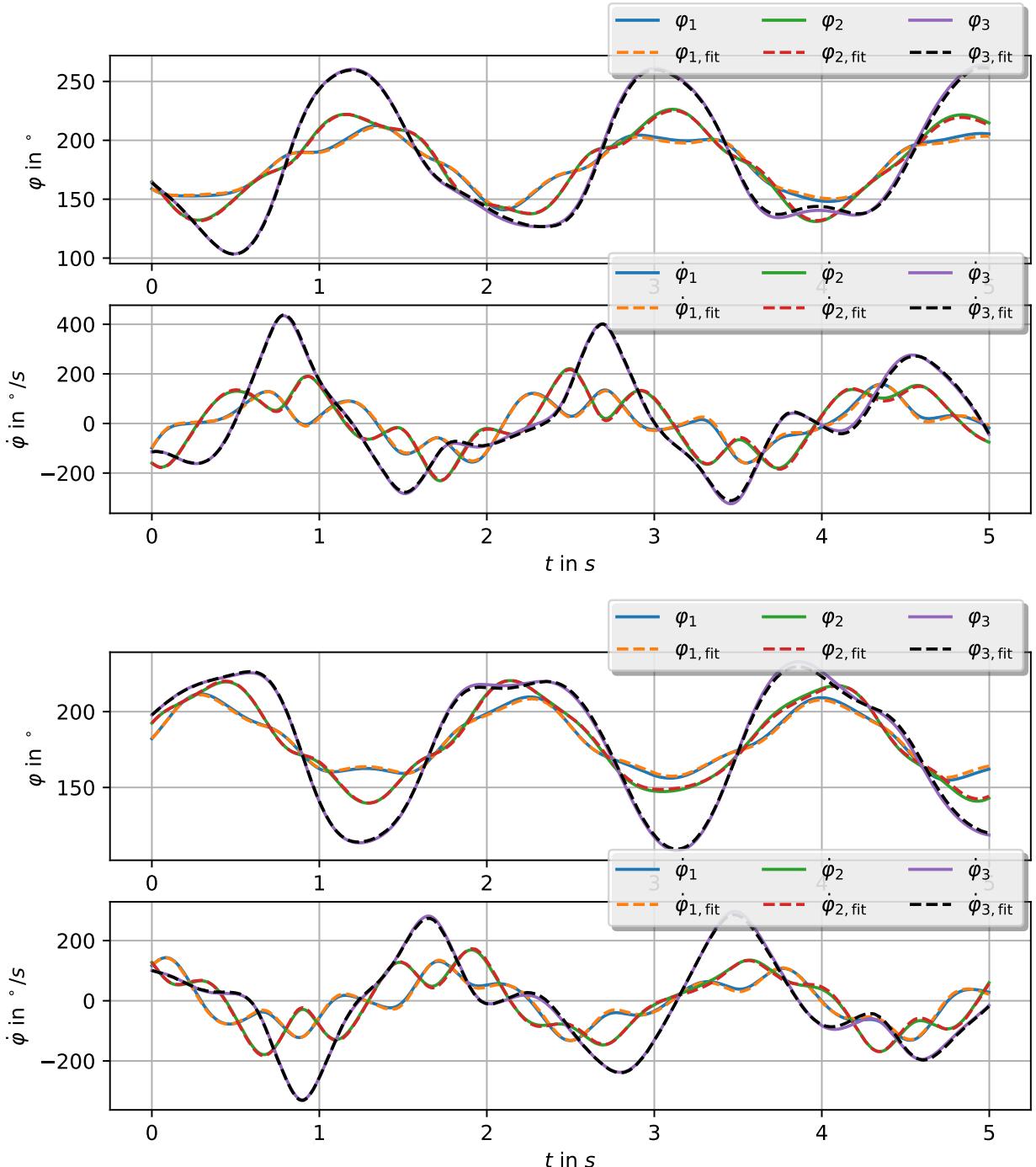
mit einem grobgeschätzten Startwert  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$  wird das Optimierungsproblem anschließend unter Python-Umgebung mit der SciPy-Funktion `lmfit` [13] gelöst. Die so erhaltene Parameterwerte sind in Tabelle 5 zusammengefasst.

Modul	Parameter	Wert	Einheit	Beschreibung
Inneres Pendel	$J_1$	0.01980	$\text{Nms}^2$	Trägheitsmoment
	$d_1$	0.00715	Nms	Reibungskoeffizient
Mittleres Pendel	$J_2$	0.02105	$\text{Nms}^2$	Trägheitsmoment
	$d_2$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	Nms	Reibungskoeffizient
Äußeres Pendel	$J_3$	0.01818	$\text{Nms}^2$	Trägheitsmoment
	$d_3$	0.00164	Nms	Reibungskoeffizient

**Tabelle 5** – Die nicht messbaren Parameter des Versuchsstands.

Zur Verifizierung des Modells wird eine Simulation mit dem partiell linearisierten, nichtlinearen System (3.29) und den ermittelten Parametern durchgeführt. Das Simulationsergebnis ist im Vergleich zur Messung in der Abbildung 5 dargestellt. Die Verläufe des

simulierten und gemessenen Zustände gehen für längeren Zeitraum langsam auseinander, da die kleine Anfangsabweichung der Zustände mit der Zeit akkumulieren (siehe im Anhang 19, 20).



**Abbildung 5** – Vergleich der Verläufe des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit aller Pendel anhand von Messdaten und der Simulation mit den identifizierten Parametern.

# Kapitel 5

## Regler- und Trajektorienentwurf

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den modellbasierten Reglerentwurfsverfahren. Dazu werden zunächst die Ruhelagen bestimmt. Anschließend wird für das System um alle Ruhelagen eine Jacobi- bzw. Taylor-Linearisierung durchgeführt und ein linearer Zustandsregler durch Polplatzierung sowie ein optimaler Zustandsregler mittels LQR-Verfahren<sup>1</sup> entworfen. Abschließend wird auf den Entwurf der Trajektorien für die Ruhelagenüberführung eingegangen.

### 5.1 Ruhelagen

Die Ruhelagen<sup>2</sup> des partiell linearisierten Systems (3.29) lassen sich durch Null-Setzen der Ableitung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}_R) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_R)\tilde{u}, \\ &\stackrel{!}{=} \mathbf{0}\end{aligned}\tag{5.1}$$

für den Eingang  $\tilde{u} = 0$  ermitteln. Der Dreifachpendel-Versuchsstand verfügt nun über eine stabile und 7 instabile Ruhelagen, insgesamt also 8 verschiedene Ruhelagen. Darauf hat die Wagenposition

$$x_0 = c, \quad c \in \mathbb{R}\tag{5.2}$$

keinen Einfluss. Das heißt, für den Wagen existieren unendlich viele Ruhelagen. Die einzige asymptotisch stabile Ruhelage entsteht durch die schwache Reibung im Gelenkraum. Dabei sind die drei Pendel um  $180^\circ$  ausgelenkt, bzw. alle nach unten ausgerichtet.

Um die Ruhelagen für spätere Betrachtung leicht unterscheiden zu können, wurde ein Bezeichnungsschema eingeführt. Der Index  $o$  steht für oben, der Index  $u$  für unten. In der Tabelle 6 sind die Ruhelagen mit den entsprechenden Bezeichnungen dargestellt.

---

<sup>1</sup>LQR steht für linear quadratischer Regler oder Riccati Regler.

<sup>2</sup>Ruhelage wird in manchen Literaturen Gleichgewichtslage oder Nulllage genannt.

**Tabelle 6** – Ruhelagen des Dreifachpendels.

Ruhelage	$\varphi_{1,R}$ [rad]	$\varphi_{2,R}$ [rad]	$\varphi_{3,R}$ [rad]	$x_{0,R}$ [m]	$\dot{\varphi}_{1,R}$ [rad/s]	$\dot{\varphi}_{2,R}$ [rad/s]	$\dot{\varphi}_{3,R}$ [rad/s]	$\dot{x}_{0,R}$ [m/s]	Stabilität
R <sub>uuu</sub>	$\pi$	$\pi$	$\pi$	c	0	0	0	0	stabil
R <sub>uuo</sub>	$\pi$	$\pi$	0	c	0	0	0	0	instabil
R <sub>ouo</sub>	$\pi$	0	$\pi$	c	0	0	0	0	instabil
R <sub>ooo</sub>	$\pi$	0	0	c	0	0	0	0	instabil
R <sub>ouu</sub>	0	$\pi$	$\pi$	c	0	0	0	0	instabil
R <sub>uo</sub>	0	$\pi$	0	c	0	0	0	0	instabil
R <sub>oo</sub>	0	0	$\pi$	c	0	0	0	0	instabil
R <sub>oo</sub>	0	0	0	c	0	0	0	0	instabil

## 5.2 Linearisierung um die Ruhelagen

Das im Kapitel 5 partiell linearisierte, nichtlineare System (3.29) wird um die im vorigen Abschnitt ermittelten Ruhelagen linearisiert. Das lineare System ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_R = \left[ \mathbf{J}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}_R, u_R) + \mathbf{J}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})\tilde{u}}(\mathbf{x}_R, u_R) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_R) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_R, u_R) (\tilde{u} - u_R) \quad (5.3)$$

bzw.

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \left[ \mathbf{J}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}_R, u_R) + \mathbf{J}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})\tilde{u}}(\mathbf{x}_R, u_R) \right] \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}(\mathbf{x}_R, u_R) \Delta u, \quad (5.4)$$

wobei  $\mathbf{J}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}_R, u_R)$  und  $\mathbf{J}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})\tilde{u}}(\mathbf{x}_R, u_R)$  die entsprechende Jacobi-Matrizen an der Stelle  $(\mathbf{x}_R, u_R)$  bezeichnen. Das lineare Zustandsraummodell hat also die Form

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta u, \quad \Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0, \\ \Delta \mathbf{y} &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{J}_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}_R, u_R) + \mathbf{J}_{\mathbf{b}(\mathbf{x})\tilde{u}}(\mathbf{x}_R, u_R) \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (5.6)$$

der Eingangsmatrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_R, u_R) \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (5.7)$$

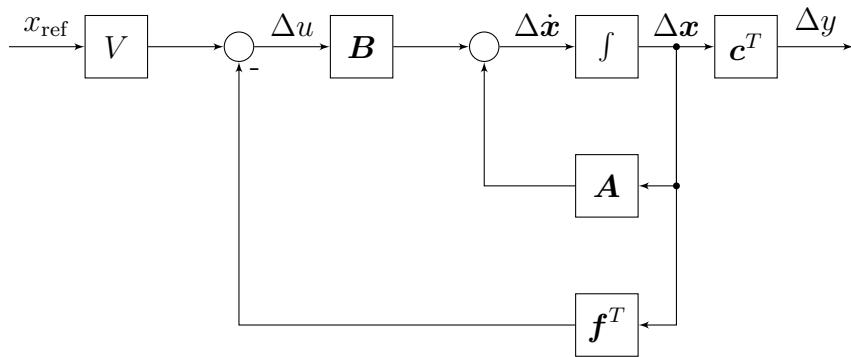
sowie der Ausgangsmatrix  $\mathbf{c}^T = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

## 5.3 Reglerentwurf

Der Dreifachpendel-Versuchsstand kann mit einem Zustandsregler in allen Ruhelagen stabilisiert werden. Für den modellbasierten Reglerentwurf steht das lineare Modell (5.5) zur Verfügung. Um einen Zustandsregler für das System auszulegen, muss das System zustandssteuerbar sein. Um dies zu prüfen, kann das Steuerbarkeitskriterium von Kalman oder Hautus angewendet werden [16]. Die Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ergibt sich zu

$$\mathbf{Q}_s = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]. \quad (5.8)$$

Das System ist genau dann vollständig zustandssteuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix den vollen Rang besitzt, d.h.  $\det \mathbf{Q}_s \neq 0$  bzw.  $\text{Rang } \mathbf{Q}_s = n$ . Das System verfügt in allen Ruhelagen über den vollen Rang, somit ist das lineare System zustandssteuerbar und flach. Folglich muss sich das System bei beliebiger Wagenposition  $x_{\text{ref}}$  (außer am Rand) und beispielsweise bei aufrechter Stellung aller Pendel um die instabile Ruhelage durch Zustandsrückführung wie in der Abbildung 6 dargestellt, stabilisieren lassen.



**Abbildung 6** – Das linearisierte System mit Zustandsrückführung und Vorfilter für die Vorgabe einer Führungsgröße  $x_{\text{ref}}$  (siehe Abschnitt 5.3.1).

Im Zuge der Arbeit wurden zwei mögliche Regelungsverfahren für die Auslegung des Reglers untersucht: Polplatzierung und LQR-Entwurf.

### 5.3.1 Reglerentwurf mittels Polplatzierung

Der Entwurf eines Zustandsreglers mittels Polplatzierung ist eines der am häufigsten eingesetzten Regelungsverfahren. Dabei werden die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises vorgegeben und somit dessen Dynamik gezielt durch Zustandsrückführung beeinflusst. Die Systemzustandkomponenten  $x_i$  werden mit einem Verstärkungsvektor  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  gewichtet als Systemeingang  $\Delta u = -\mathbf{f}^T \Delta \mathbf{x}$  zurückgeführt. Das resultierende System des geschlossenen Regelkreises ergibt sich zu

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{f}^T) \Delta \mathbf{x} \quad (5.9)$$

mit der neuen Systemmatrix  $\mathbf{A}_n = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{f}^T$ . Aufgrund der Tatsache, dass die Stabilität eines linearen Systems allgemein von den Eigenwerten der Systemmatrix abhängig ist, kann das System durch eine geeignete Wahl des Verstärkungsvektors  $\mathbf{f}$  stabilisiert werden. Dabei wird gefordert, dass die Eigenwerte alle in der linken offenen Halbebene liegen. Für ein stabiles System kann das charakteristische Polynom<sup>3</sup> (CLCP)

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_{n-1} s^{n-1} + s^n \quad (5.10)$$

mit  $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{R}$  durch die gewünschten Pole mit negativem Realteil aufgestellt werden. Die Determinante der neuen Systemmatrix  $\mathbf{A}_n$  wird mit dem charakteristischen Polynom  $p(s)$  gleichgesetzt. Der Verstärkungsvektor  $\mathbf{f}$  soll nun so bestimmt werden, dass die folgende Ungleichung

$$\det(sI - \mathbf{A}_n) \stackrel{!}{=} p(s) \quad (5.11)$$

erfüllt wird. Die Gleichung lässt sich durch Koeffizientvergleich lösen. Alternativ kann der Verstärkungsvektor

$$\mathbf{f}^T = \mathbf{t}_1^T (p_0 \mathbf{I} + p_1 \mathbf{A} + p_2 \mathbf{A}^2 + \dots + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n) = \mathbf{t}_1^T p(\mathbf{A}) \quad (5.12)$$

mittels Ackermann Formel für das gewünschte CLCP ermittelt werden. Dabei stellt der  $\mathbf{t}_1^T$  die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_s^{-1}$  dar [15].

Die Pole des geregelten Systems können nun geschickt gewählt werden. Zur Wahl der Pole sei hier kurz Folgendes angemerkt: Je weiter die Polstellen in der linken Halbebene platziert werden, desto größer ist die benötigte Kraft, somit ist die Regelung schneller. Es wird vorausgesetzt, dass die benötigte, auf dem Wagen horizontal wirkende Kraft auf dem Versuchsstand realisierbar ist, da die verfügbare mechanische Leistung des Aktuators naturgemäß begrenzt ist. Wenn die Pole aber zu nah an der imaginären Achse (Stabilitätsgrenze) platziert werden, ist die Regelung umgekehrt langsamer. Durch eine kleine Parameterunbestimmtheit der Regelstrecke kann der reale Regelkreis leicht instabil werden. Simulativ wurden verschiedene Pol-Kombinationen ausprobiert. Als gewünschte Pole des geregelten Systems werden folgende Pole gewählt:

$$\mathbf{s}_{\text{des}} = [-3 \ -3 \ -3 \ -4 \ -5 \ -5 \ -5 \ -6]. \quad (5.13)$$

Diesen Pollagen entspricht dem charakteristischen Polynom

$$\text{CLCP}_{\text{des}} = (s + 3)^3 (s + 4) (s + 5)^3 (s + 6). \quad (5.14)$$

---

<sup>3</sup>CLCP: Closed Loop Characteristic Polynomial

### Entwurf einer Vorsteuerung für den stationären Zustand

Im vorigen Abschnitt wurde der Entwurf eines Zustandsreglers mittels Polplatzierung durchgeführt. Diese stabilisiert den Zustand  $\mathbf{x}$  in der entsprechenden Ruhelage. Jedoch ist es unmöglich, eine gewünschte Sollposition des Wagens  $x_{\text{ref}}$  vorzugeben. Daher wird das lineare System mit einer Vorfiltermatrix  $V$  um einen weiteren Term erweitert (siehe auch Abb. 6). Das erweiterte System des geschlossenen Regelkreises ergibt sich für den stationären Zustand  $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{f}^T) \Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}Vx_{\text{ref}}, \\ &\stackrel{!}{=} \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Für den skalaren Systemausgang erhält man

$$\begin{aligned}\Delta y &= \mathbf{c}^T (\mathbf{B}\mathbf{f}^T - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}Vx_{\text{ref}}, \\ &\stackrel{!}{=} x_{\text{ref}}.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Damit die Forderung (5.16) erfüllt bleibt, ergibt sich das Vorfilter zu

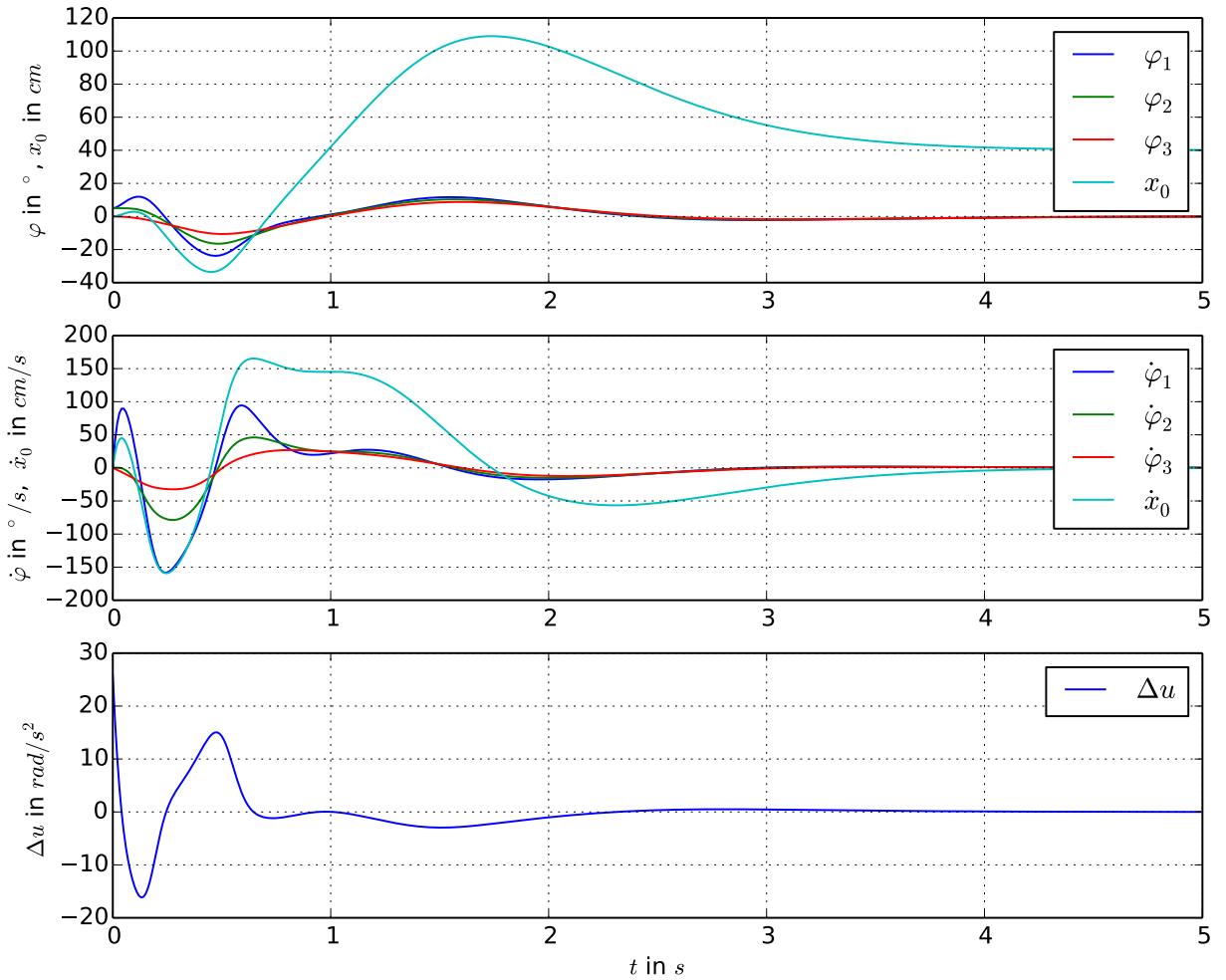
$$V = \left[ \mathbf{c}^T (\mathbf{B}\mathbf{f}^T - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \right]^{-1} \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Der Verstärkungsvektor und der Vorfilter werden für die gewählte Pole in allen Ruhelagen ermittelt und sind in der Tabelle 7 dargestellt.

Ruhelage	Verstärkungsvektor $\mathbf{f}$	Vorfilter $V$
R <sub>uuu</sub>	$\begin{bmatrix} -49.5 & -23.5 & 33.7 & 4.9 & -4.7 & -4.8 & -1.7 & 8.1 \end{bmatrix}$	4.9
R <sub>uuo</sub>	$\begin{bmatrix} -119.0 & -66.4 & 212.5 & -1.0 & -11.5 & -18.0 & 37.3 & -2.1 \end{bmatrix}$	-1.0
R <sub>ouu</sub>	$\begin{bmatrix} -153.9 & 217.6 & -34.4 & -1.2 & 12.0 & 29.2 & -8.4 & -2.3 \end{bmatrix}$	-1.2
R <sub>ooo</sub>	$\begin{bmatrix} -169.6 & 384.0 & -222.6 & 1.0 & -10.3 & 32.9 & -32.4 & 2.1 \end{bmatrix}$	1.0
R <sub>ouu</sub>	$\begin{bmatrix} 159.2 & -145.0 & 16.0 & -1.3 & 12.0 & 0.3 & -3.3 & -2.5 \end{bmatrix}$	-1.3
R <sub>ouo</sub>	$\begin{bmatrix} 185.6 & 44.4 & -242.1 & 1.3 & 10.3 & 21.0 & -42.7 & 2.6 \end{bmatrix}$	1.3
R <sub>oou</sub>	$\begin{bmatrix} 197.7 & -236.7 & 30.8 & 1.0 & 9.9 & -27.6 & 8.0 & 2.1 \end{bmatrix}$	1.0
R <sub>ooo</sub>	$\begin{bmatrix} 287.0 & -593.5 & 356.6 & -2.5 & 14.1 & -45.0 & 52.8 & -4.7 \end{bmatrix}$	-2.5

**Tabelle 7** – Verstärkungsvektoren und Vorfilter für alle Ruhelagen mittels Polplatzierung.

Mit den ermittelten Verstärkungsvektoren und dem Vorfilter wird eine Simulation mit dem nichtlinearen Modell (3.29) in der Ruhelage  $R_{ooo}$  durchgeführt und ist in der Abbildung 7 dargestellt. Dabei wird eine Sollposition  $x_{\text{ref}} = 40\text{cm}$  für den Wagen vorgegeben. Wie man deutlich im Simulationsergebnis sieht, kompensiert der Regler die kleinen Anfangsregelabweichungen nach ca. vier Sekunden vollständig und platziert gleichzeitig den Wagen an der gewünschten Stelle.



**Abbildung 7** – Simulationsergebnis mit dem Zustandsregler in der Ruhelage  $R_{ooo}$  mit einer Anfangsauslenkung  $\varphi_1 = 5^\circ, \varphi_2 = 5^\circ$  für eine Sollposition  $x_{\text{ref}} = 40\text{cm}$ .

Im nächsten Abschnitt wird auf den Entwurf eines LQ-Reglers eingegangen. Mittels Simulation werden die beiden Regelungsverfahren miteinander verglichen um dabei die Vorteile und Nachteile zu untersuchen.

### 5.3.2 Reglerentwurf mittels LQR-Optimierung

Der LQ-Regler ist ebenfalls ein Zustandsregler, d.h. der Zustand  $\mathbf{x}$  wird zurückgeführt. Er unterscheidet sich nur in der Bestimmung des Verstärkungsvektors  $\mathbf{f}$ . Bei dem Zustandsregler durch Polplatzierung wird hierzu, wie oben ausführlich behandelt, die Polplatzierung für die Berechnung des Verstärkungsvektors  $\mathbf{f}$  verwendet. Im Gegensatz dazu wird bei dem LQ-Regler die Minimierung der quadratischen Fläche des Zustands und Eingangs genutzt, um ein möglichst schnelle Regelvorgang ohne großes Überschwingen und mit geringem Stellenaufwand zu erzeugen. Man spricht daher von verlaufs- und verbrauchsoptimaler Regelung [3]. Für die quantitative Erfassung der optimierenden Größe wird das Kostenfunktional

$$\mathbf{J}_{\min} := \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \underbrace{\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x}}_{\text{verlaufsoptimal}} + \underbrace{\Delta u^T \mathbf{R} \Delta u}_{\text{verbrauchsoptimal}} \right] dt \quad (5.18)$$

eingeführt, mit der symmetrischen, positiv semidefiniten Gewichtungsmatrix des Zustands  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und der symmetrischen, positiv definiten Gewichtungsmatrix des Eingangs  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}$ . Das Minimierungsproblem des LQR-Entwurfs lässt sich mit Hilfe einer Riccati-Differentialgleichung (Riccati-DGL) lösen.

#### Herleitung der Riccati-DGL

Für die Herleitung der Riccati-DGL müssen zunächst die Hamilton-Funktion

$$H(\Delta \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \Delta u, t) = -\frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \Delta u^T \mathbf{R} \Delta u) + \boldsymbol{\psi}^T (\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta u) \in \mathbb{R} \quad (5.19)$$

mit dem Lagrangeschen Multiplikator-Vektor  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^n$  und der adjungierten Differentialgleichung sowie der Steuergleichung aufgestellt werden. Aus der Differentiation von  $H$  nach dem Zustandsvektor  $\Delta \mathbf{x}$  ergibt sich die adjungierte Differentialgleichung mit

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta \mathbf{x}} = -\mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} = -\dot{\boldsymbol{\psi}}. \quad (5.20)$$

Die Steuergleichung lässt sich durch Null-Setzen der Ableitung von  $H$  nach dem Eingang  $\Delta u$  aufstellen

$$\frac{dH}{d\Delta u} = -\mathbf{R} \Delta u + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.21)$$

Aus der Steuergleichung (5.21) ergibt sich das optimale Regelungsgesetz

$$\Delta u = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} = -\underbrace{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}}_{\mathbf{f}^T} \Delta \mathbf{x} \quad (5.22)$$

mit dem Ansatz

$$\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{P} \Delta \mathbf{x}, \quad (5.23)$$

damit das Regelungsgesetz von (5.22) linear bleibt. Um die unbekannte zeitvariante Matrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zu ermitteln, setzt man den Ansatz (5.23) in die Steuergleichung (5.20) und das lineare Zustandsraummodell (5.5) ein und erhält

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}, \quad (5.24)$$

bzw.

$$-(\dot{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{P} \Delta \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}. \quad (5.25)$$

Die Gleichungen (5.24) und (5.25) können in einer einzigen Gleichung zusammengefasst werden und man erhält

$$-\dot{\mathbf{P}} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{P} (\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{Q} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x}, \quad (5.26)$$

bzw.

$$(\dot{\mathbf{P}} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (5.27)$$

Da die Gleichung für alle  $\Delta \mathbf{x}$  gelten soll, verschwindet der Faktor von  $\Delta \mathbf{x}$ . Daraus ergibt sich die sogenannte Riccati-DGL

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{Q}, \quad (5.28)$$

was der Ausgangspunkt für den Entwurf eines zeitvarianten Riccati-Reglers ist. Darauf wird später im Abschnitt 5.4.2 eingegangen. Für den stationären Fall  $T \rightarrow \infty$  gilt  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$  und daraus folgt die algebraische Riccati-Gleichung (CARE)

$$\mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.29)$$

mit den symmetrisch positiv definiten Matrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T$ . Die stationäre Lösung von  $\mathbf{P}$  kann mittels der Hamilton-Schur-Methode berechnet werden [10]. Die Hamilton-Matrix

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (5.30)$$

lässt sich durch eine quadratische, orthogonale Transformationsmatrix  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  in eine obere Dreieckmatrix

$$\mathbf{U}^T \mathbf{Z} \mathbf{U} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ 0 & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (5.31)$$

transformieren, wobei  $\mathbf{S}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix ist. Die Spalten von  $\mathbf{U}$  sind dabei die Eigenvektoren von  $\mathbf{Z}$  und die gesuchte Matrix  $\mathbf{P}$  ergibt sich dann zu

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_{21} \mathbf{U}_{11}^{-1}. \quad (5.32)$$

**Bemerkung.** Die stationäre Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung kann man leicht unter **Matlab** mit dem Befehl `care` oder unter **Python** mittels `scipy.linalg.solve_continuous_are` lösen. Alternativ geht das auch, indem man die Riccati-DGL mit einer positiv definiten Matrix  $\mathbf{P}(t_k)$  als Anfangsbedingung zeitlich rückwärts integriert lässt, bis  $\mathbf{P}$  auf eine stationäre Lösung konvergiert ist.

Für den LQR-Enwurf können die Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  nun als Entwurfsfreiheitsgrade dimensioniert werden. Dabei ist Folgendes zu beachten: Je größer die Einträge der Matrix  $\mathbf{Q}$  gegenüber denen in  $\mathbf{R}$  gewählt werden, desto schneller konvergieren die Zustandskomponenten  $x_i$ , aber desto höher ist der Stellauflauf bzw. der Ausschlag des Eingangssignals  $\Delta u$ . Umgekehrt gilt dies analog. In der Simulation werden verschiedene Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  ausprobiert. Als Kompromiss zwischen dem verlaufs- und verbrauchsoptimalen Regelungsverhalten besitzt die Zustandsgewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  die Form einer positiv definiten Diagonalmatrix

$$\mathbf{Q} = \text{diag} [30 \ 30 \ 30 \ 40 \ 50 \ 50 \ 50 \ 60]. \quad (5.33)$$

Die Eingangsgewichtungsmatrix  $\mathbf{R}$  wird für den skalaren Eingang  $\Delta u$  als

$$\mathbf{R} = 1 \quad (5.34)$$

gewählt. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Gewichtungsmatrizen auch Nebendiagonalen besitzen können. Jedoch ist es schwer für die praktische Vorstellung. Mit den gewählten Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  wurden die Verstärkungsvektoren und das Vorfilter nach der Formel (5.17) berechnet und sind in der Tabelle 8 dargestellt.

Ruhelage	Verstärkungsvektor $\mathbf{f}$	Vorfilter $V$
$R_{uuu}$	$[-111.4 \ 34.7 \ 22.7 \ 6.3 \ -7.6 \ -7.5 \ -0.8 \ 11.9]$	6.3
$R_{uuo}$	$[-223.2 \ -301.2 \ 627.6 \ -6.3 \ -18.6 \ -55.1 \ 108.7 \ -13.4]$	-6.3
$R_{ouu}$	$[-257.4 \ 439.0 \ -88.4 \ -6.3 \ -19.2 \ 53.8 \ -6.1 \ -12.9]$	-6.3
$R_{ooo}$	$[-415.9 \ 1128.9 \ -825.7 \ 6.3 \ -13.9 \ 80.5 \ -126.2 \ 14.8]$	6.3
$R_{ouu}$	$[187.3 \ -81.4 \ -19.1 \ -6.3 \ 17.1 \ 6.5 \ 0.8 \ -12.6]$	-6.3
$R_{ouo}$	$[310.7 \ 283.5 \ -694.2 \ 6.3 \ 11.1 \ 60.5 \ -120.6 \ 14.2]$	6.3
$R_{oou}$	$[350.7 \ -537.2 \ 95.9 \ 6.3 \ 11.9 \ -61.7 \ 7.5 \ 13.8]$	6.3
$R_{ooo}$	$[543.4 \ -1379.9 \ 991.2 \ -6.3 \ 24.2 \ -95.7 \ 151.2 \ -15.7]$	-6.3

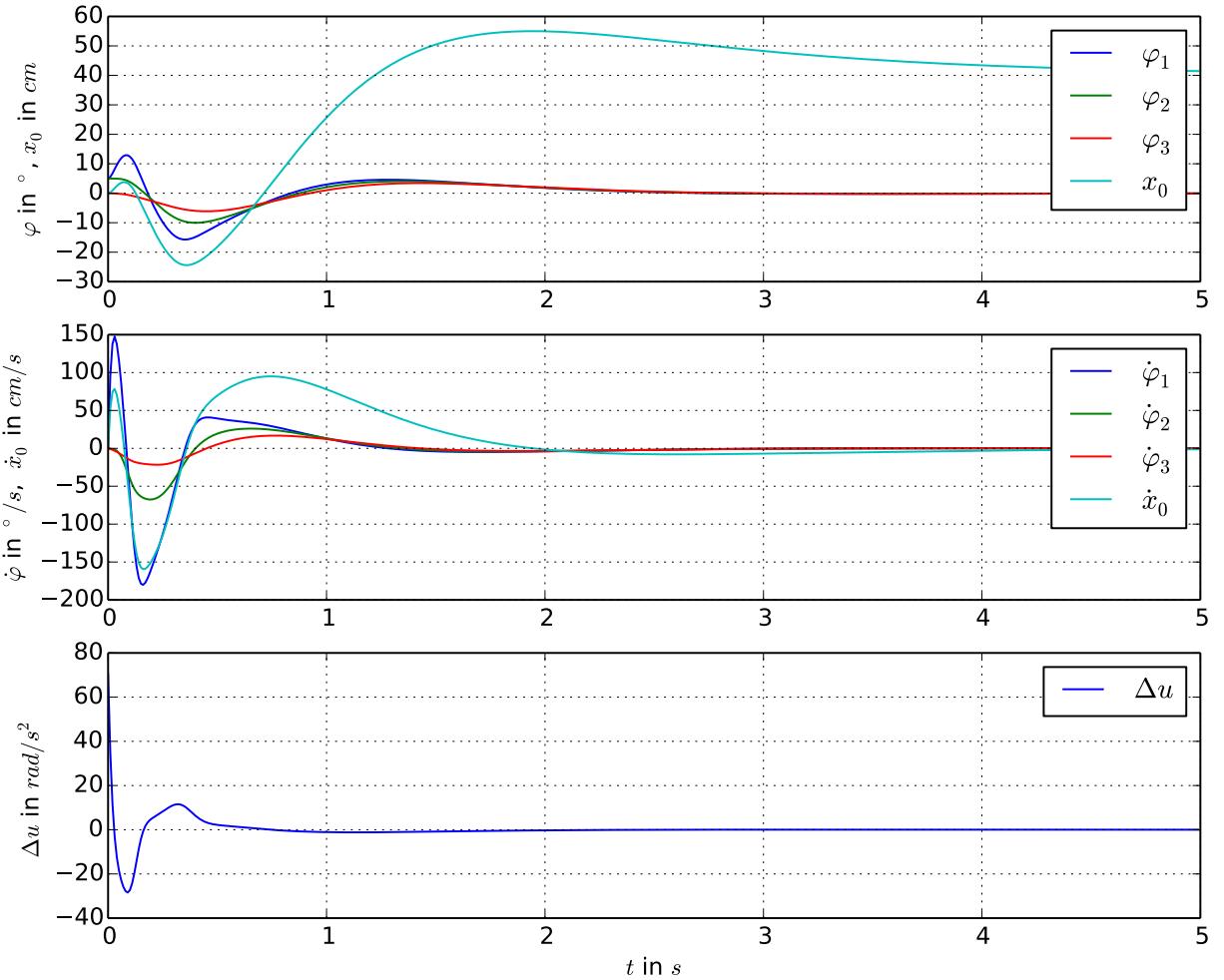
**Tabelle 8** – LQR-Verstärkungsvektoren und Vorfilter für alle Ruhelagen.

Mit den ermittelten Verstärkungsvektoren vom LQ-Regler und Vorfilter wird eine Simulation in der Ruhelage  $R_{ooo}$  mit der selben Anfangsabweichung durchgeführt, welche in der vorigen Simulation Abbildung 7 mit dem Zustandsregler durch Polplatzierung angewendet wurde.

Die Abbildung 8 stellt das Simulationsergebnis dar. Die Simulation zeigt, dass die schwingende Regelabweichung vom LQR geregelten System im Vergleich zu dem Zustandsregler durch Polvorgabe schneller abklingt, dafür aber mehr Stellkraft erfordert. Die resultierende Pole des geschlossenen Regelkreises in der Ruhelage  $R_{ooo}$  lauten

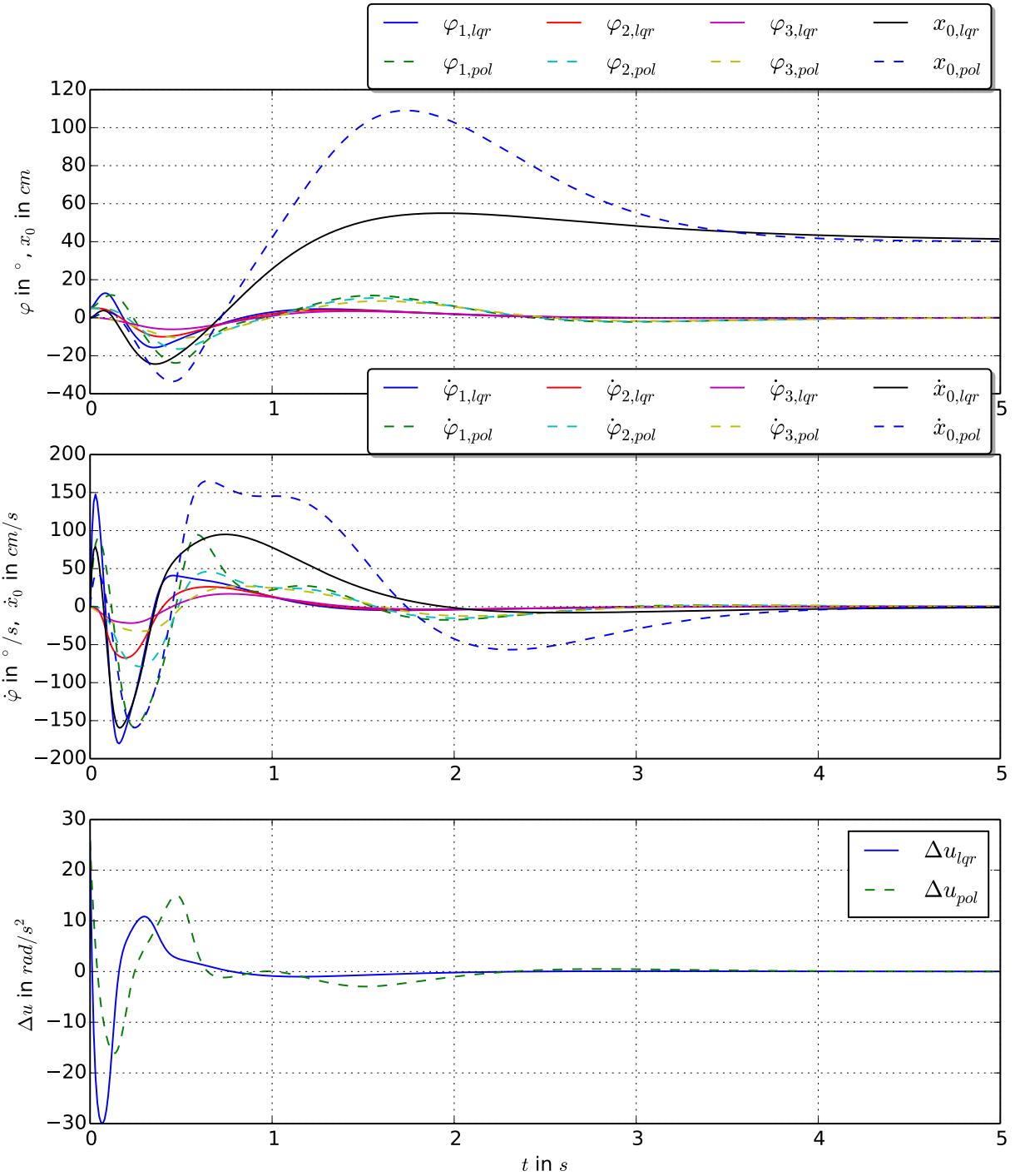
$$[-26.691 \quad -10.212 \pm 3.111j \quad -5.632 \pm 2.559j \quad -1.971 \pm 1.167j \quad -0.821]. \quad (5.35)$$

Ein solches Ergebnis wie in der Abbildung 8 dargestellt, kann durch einen Zustandsregler mittels Polplatzierung ebenfalls erzielt werden, wenn man die Pole von (5.35) vorgibt.

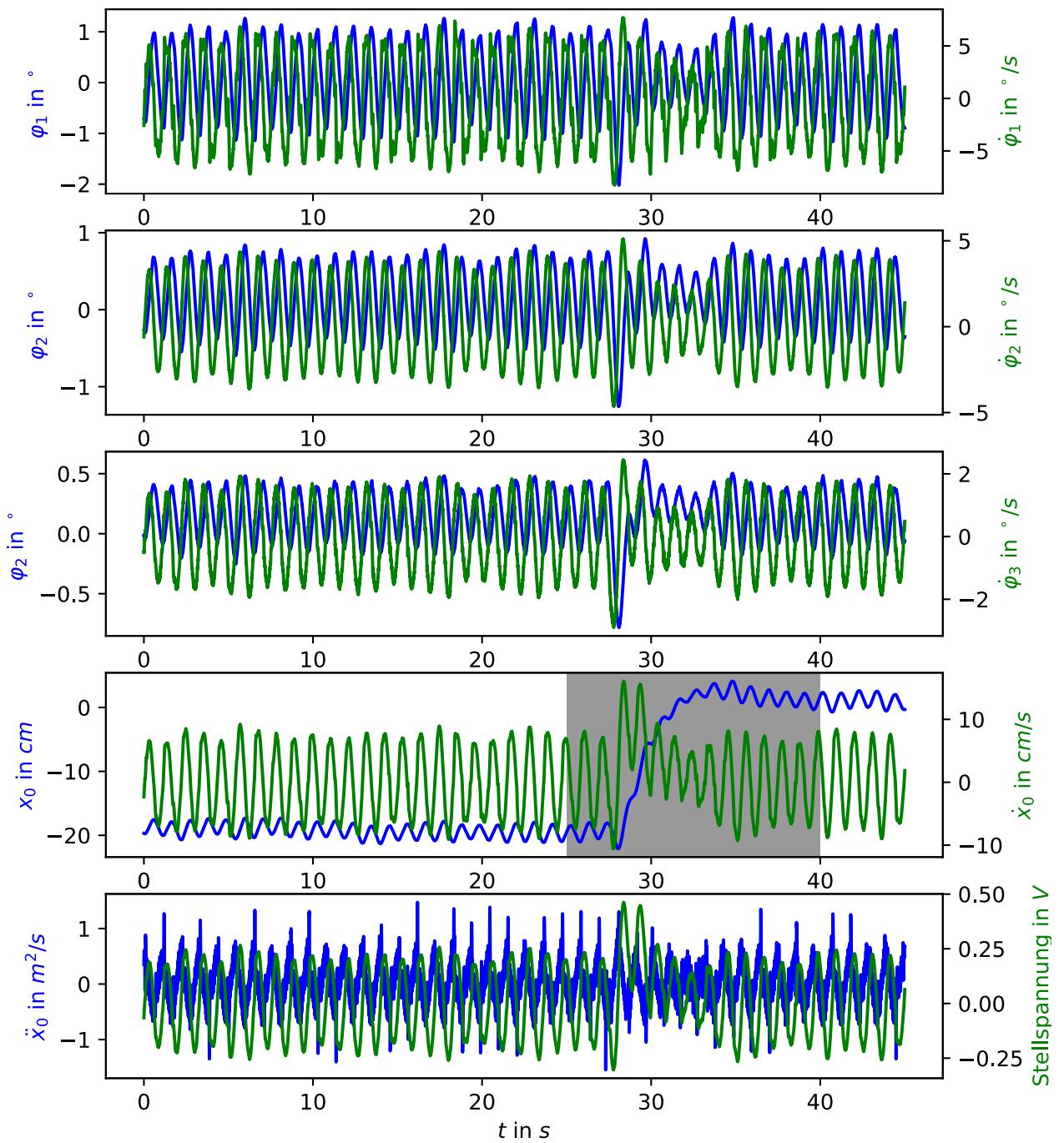


**Abbildung 8** – Simulationsergebnis mit dem LQR in der Ruhelage  $R_{ooo}$  mit einer Anfangsauslenkung  $\varphi_1 = 5^\circ, \varphi_2 = 5^\circ$  für eine Sollposition  $x_{\text{ref}} = 40\text{cm}$ .

Für einen besseren visuellen Vergleich sind die beiden Simulationsergebnisse nebeneinander in Abbildung 9 dargestellt.



**Abbildung 9** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{ooo}$ .



**Abbildung 10** – Stabilisierung mittels LQ-Reglers in der Ruhelage  $R_{ooo}$ ,  $\Delta u \neq 0$ . Die graue Stelle markiert den Übergang von Sollposition  $x_0^*$  mit  $[-20\text{cm} \rightarrow 0\text{cm}]$ .

## 5.4 Trajektorienentwurf

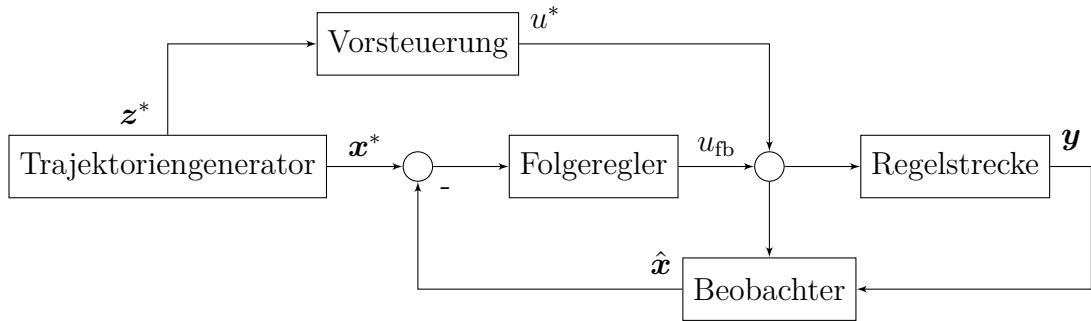
Die Planung und der Entwurf von Trajektorien stellt eine schwierige Herausforderung in der Regelungstechnik dar. Insbesondere dann, wenn es sich um nicht-flache, nichtlineare Systeme handelt. Bei flachen Systemen erfolgt der Trajektorienentwurf relativ einfach, wenn man die Flachheits-Eigenschaft, bzw. die Kenntnis des flachen Ausgangs ausnutzt. Mit dem flachen Ausgang und dessen zeitlichen Ableitungen können alle Eingangs- und Zustandsgrößen des Systems ermittelt werden, bzw. durch Vorgabe eines Sollverlaufs des flachen Ausgangs kann unmittelbar der dafür nötigen Eingangsverlauf des Systems bestimmt werden. Für das seitliche Versetzen des Wagens kann die Trajektorie sowohl auf Basis des nichtlinearen als auch linearen Streckenmodells entworfen werden, da die steuerbare, lineare Systeme alle flach sind [1]. Falls das nichtlineare Streckenmodell nicht flach, bzw. kein flacher Ausgang bekannt ist, wird das Problem der Trajektorienplanung für die Ruhelagenüberführung auf ein mehrdimensionales Randwertproblem mit freien Parametern zurückgeführt. Die Randwertaufgabe mit freien Parametern kann im Allgemeinen nicht analytisch gelöst werden. Es wurde daher in der Literatur vorgeschlagen, auf numerische Kollokationsverfahren wie z.B. die Matlab-Funktion `bvp4c` [21] oder das quelloffene Python-Paket `PyTrajectory` [9] zurückzugreifen um die exakte Lösung des Randwertproblems näherungsweise zu approximieren.

### 5.4.1 Kollokationsverfahren

Im Kollokationsverfahren werden die Systemgleichungen auf einem Zeitintervall  $[0, t_e]$  äquidistant diskretisiert [19]. Dabei werden sowohl das Eingangssignal  $\tilde{u}$  als auch die Verläufe der Zustandskomponenten  $x_i$  mit einem Ansatz bezüglich der Zeit parametriert [8]. Als Ansatzfunktion werden Polynome höherer Ordnung mit endlich vielen Parametern ausgewählt, die die vorgegebenen Randbedingungen des Eingangs und Zustands erfüllen sollen. Um die eingeführten Parameter zu berechnen, werden Systemgleichungen zu den diskreten Stützstellen bzw. den sogenannten Kollokationspunkten ausgewertet. Dies führt auf ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem in Abhängigkeit der Parameter der Ansatzfunktion. Aus der Lösung des Gleichungssystems ergibt sich unmittelbar ein Stellgrößenverlauf. Mittels Simulation wird das Anfangswertproblem gelöst, um den zu dieser Eingangstrajektorie zugehörigen Zustandsverlauf zu erhalten. Wenn der resultierende Zustandsverlauf und insbesondere der Endzustand mit dem Zielzustand die vorgegebene Toleranz nicht überschreitet, so hat man eine Näherungslösung gefunden und das Verfahren ist abgeschlossen. Wenn das nicht der Fall ist, kann die Parameteranzahl der Ansatzfunktion und die Kollokationspunkte erhöht werden, oder eine bessere Startschätzung für die Parameter durchgeführt werden. Im Softwarepaket `PyTrajectory` werden stückweise definierte kubische Splines als Ansatzfunktion zur Approximation des Eingangs und Zustands verwendet. Im nächsten Abschnitt wird auf den Entwurf eines Folgereglers entlang der Solltrajektorie eingegangen.

### 5.4.2 Trajektorienfolgeregelung

Ein wichtiger Abschnitt der oft aus der Trajektorienplanung folgt, ist der Entwurf eines Folgeregels. Dabei wird der Folgeregler eingesetzt, um das System entlang einer vorgegebenen Solltrajektorie asymptotisch zu stabilisieren. Das heißt, der Regler korrigiert die Vorgabe der Steuerung für das Stellglied, da eine reine Steuerung aufgrund von äußeren Einflüssen: wie z.B. Störgrößen und Parameterunbestimmtheiten der Regelstrecke nicht genügt, um ein befriedigendes Folgeverhalten entlang der Trajektorie zu erzielen. Als Folgeregler wird in dieser Arbeit ein zeitvarianter Riccati-Regler verwendet.



**Abbildung 11** – Schematische Darstellung des Regelkreises mit Folgeregler.

Der Ausgangspunkt für den Reglerentwurf ist das partiell linearisierte, nichtlineare System (3.29). Für den Entwurf des zeitvarianten Riccati-Reglers lässt sich das Kostenfunktional

$$\mathbf{J}_{\min} := \frac{1}{2} \mathbf{x}(T)^T \mathbf{P}(T) \mathbf{x}(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}} \right] dt \quad (5.36)$$

aufstellen, wobei die Matrix  $\mathbf{P}(T)$  die stationäre Lösung der Riccati-DGL am Zielzustand darstellt. Das Minimierungsproblem des zeitvarianten LQR-Entwurfs führt wie im Abschnitt 5.3.2 erwähnt, auf eine Riccati-Differentialgleichung (5.28). Die Lösung der Riccati-DGL kann nur mit einer positiv definiten Matrix  $\mathbf{P}(t_k) = \mathbf{P}(T)$  als Anfangsbedingung durch zeitliche Rückwärts-Integration berechnet werden. Die numerische Integration von  $\mathbf{P}$  in positive Zeitrichtung lässt sich leicht mit Hilfe des Euler-Verfahrens

$$\mathbf{P}(t_k) \approx \mathbf{P}(t_{k-1}) + dt \dot{\mathbf{P}}(t_{k-1}) \quad (5.37)$$

mit einer hinreichend kleinen Schrittweite  $dt$  durchführen. Die Rückwärts-Integration ergibt sich durch den Übergang von  $dt$  zu  $-dt$  zu

$$\mathbf{P}(t_{k-1}) \approx \mathbf{P}(t_k) - dt \dot{\mathbf{P}}(t_k). \quad (5.38)$$

Im nächsten Abschnitt wird die Planung einer Trajektorie für die Überführung der Ruhelagen mittels PyTrajectory beschrieben.

### 5.4.3 Trajektorienplanung für Ruhelagenüberführung

Der Dreifachpendel-Versuchsstand verfügt über  $R = 8$  Ruhelagen, damit können insgesamt  $R(R - 1)$  verschiedene Trajektorien geplant werden. Eine mögliche geforderte, vermutlich interessanteste Trajektorie stellt das Überführen zwischen den Pendelruhelagen  $R_{uuu} \rightarrow R_{ooo}$  dar. Dabei sollen alle Pendel zum Anfang der Trajektorie nach unten hängen und aufgestellt werden. Die Stellzeit soll unter Berücksichtigung der jeweiligen Trajektorie entsprechend gewählt werden. Der Wagen soll nach der gewählten Überführungszeit von  $t_e = 3.2$  s an der gleichen Position stehen und alle Pendel in Ruhe sein.

$$\boldsymbol{x}^*(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ x_{0,\text{offset}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow{t_e} \boldsymbol{x}^*(t_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ x_{0,\text{offset}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

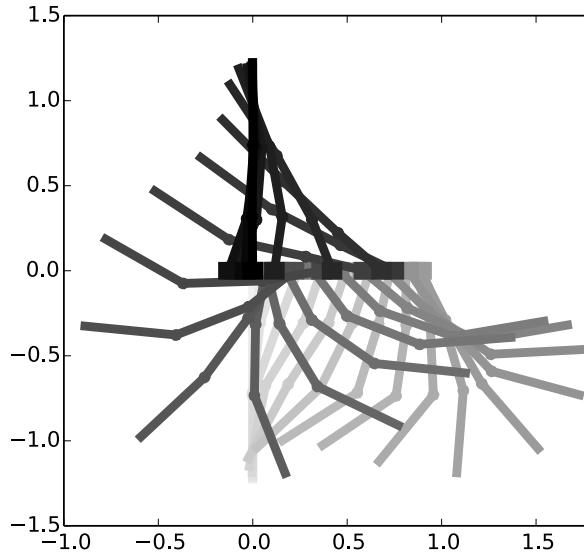
Für die Ermittlung der Trajektorie werden kinematische Beschränkungen des Wagens

$$x_0^* \in [-1.1, 1.1] \text{ m}, \quad (5.40)$$

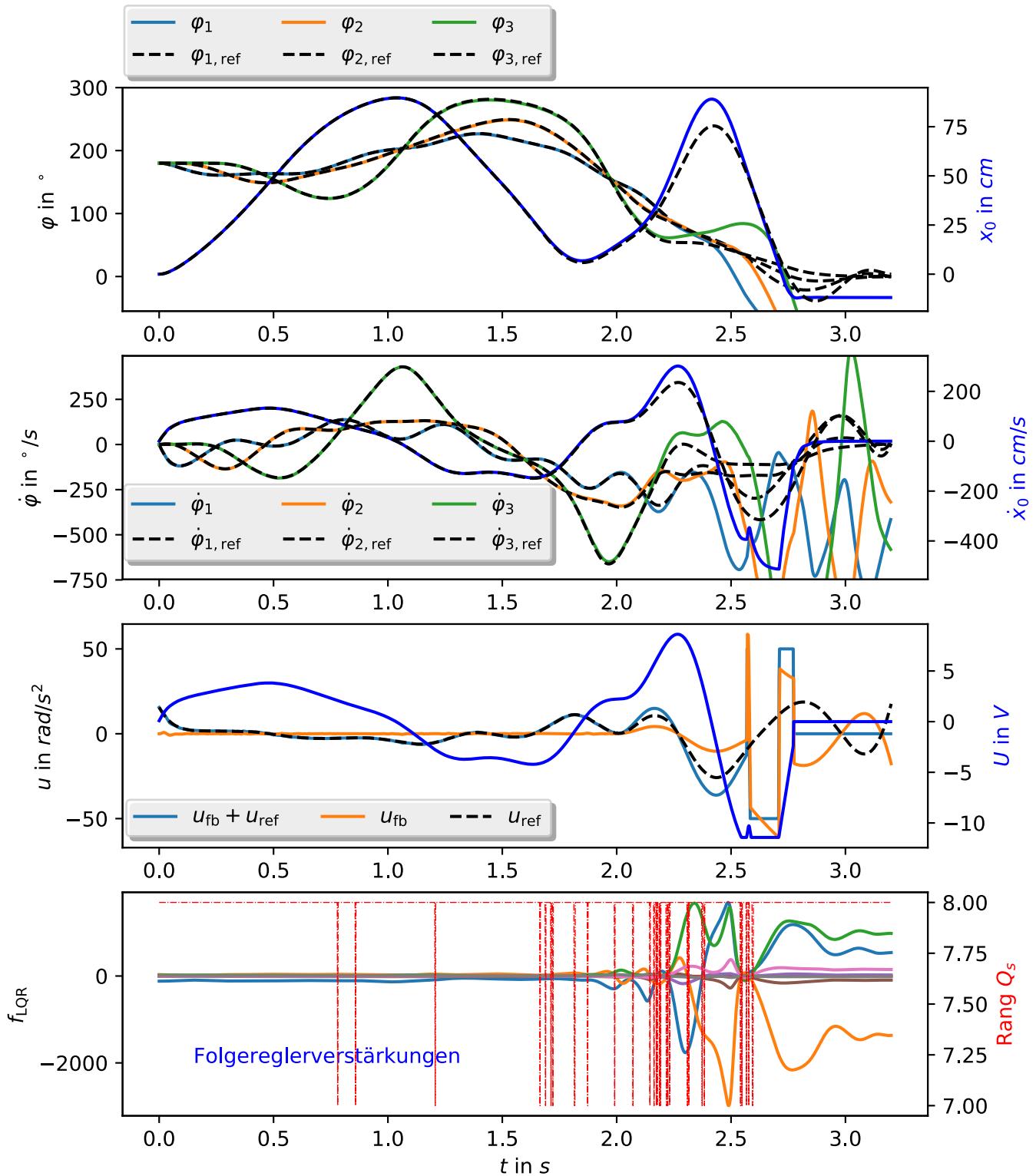
$$\dot{x}_0^* \in [-4.2, 4.2] \text{ ms}^{-1}, \quad (5.41)$$

$$\ddot{x}_0^* \in [-40, 40] \text{ ms}^{-2} \quad (5.42)$$

als Nebenbedingung in PyTrajectory aufgestellt. Die mittels PyTrajectory ermittelten Trajektorienverläufe sind in den Abbildungen 12 und 13 mit den dazugehörigen Messergebnissen dargestellt.

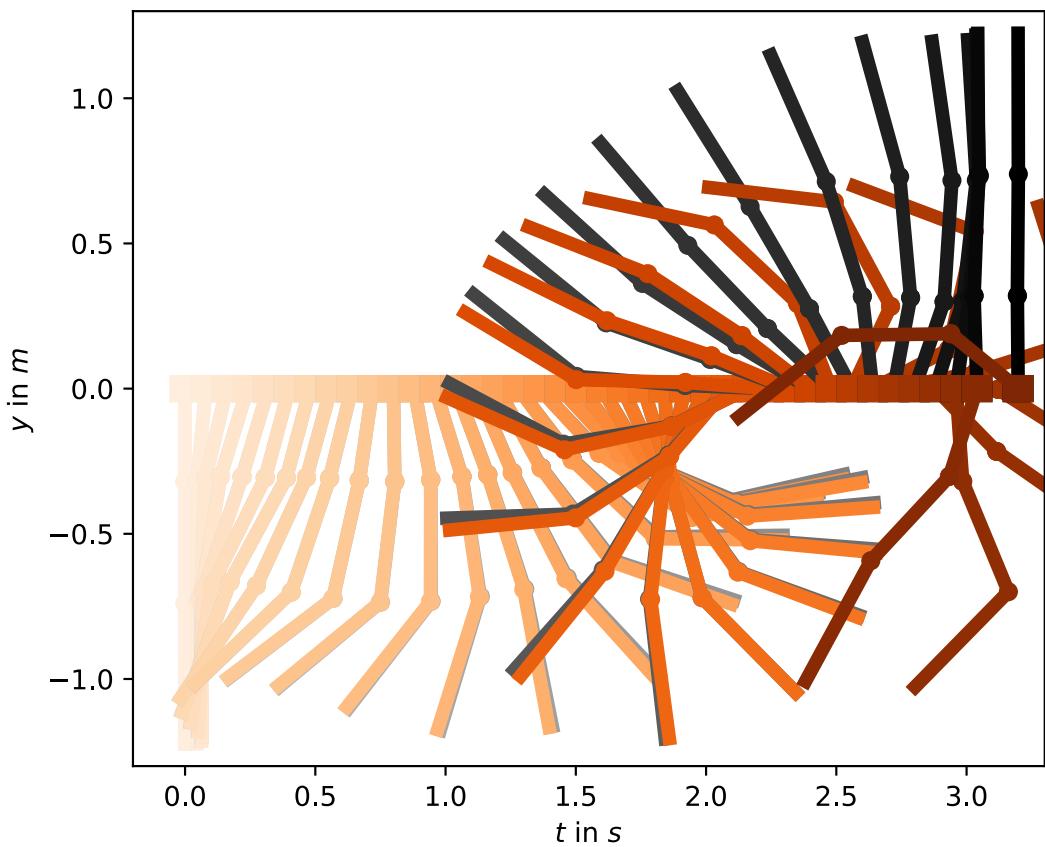


**Abbildung 12** – Momentaufnahmen beim Aufschwing der Pendel,  $R_{uuu} \rightarrow R_{ooo}$ . Dargestellt ist der Referenzverlauf.



**Abbildung 13** – Trajektorienverlauf beim Aufschwingen der Pendel,  $R_{uuu} \rightarrow R_{ooo}$ . Dargestellt sind die Referenzwerte und Messergebnisse sowie Folgereglerverstärkungen.

Die Realisierung der Trajektorienüberführung  $R_{uuu} \rightarrow R_{ooo}$  in der Praxis gestaltet sich als schwierig, da das System entlang der Solltrajektorie mehrmals seine Steuerbarkeit (siehe Abb. 13) verliert. Das hat zur Folge, dass eine kleine Abweichung zwischen dem Soll- und Istzustand genügt eine große, negative Auswirkung auf die Steuerung des (chaotischen) Systems zu verursachen, trotz einer Folgeregelung. Mögliche Gründe dafür sind zum einen, dass das mathematische Modell der Regelstrecke nicht 100 % exakt ist und zum anderen, dass die verwendete Solltrajektorie kaum Reserve zur Stellgrößenbeschränkung (5.42) hat. Der Folgeregler kann in dieser Phase nicht viel ausrichten.



**Abbildung 14** – Tatsächlicher Aufschwingverlauf der Pendel (orange) im Vergleich zur Solltrajektorie (schwarz),  $R_{uuu} \rightarrow R_{ooo}$ . Zur deutlicheren Darstellung ist die Bewegung des Wagens  $x_0$  nicht aufgetragen, stattdessen wird die Zeit  $t$  für die waagerechte Achse verwendet.

#### 5.4.4 Trajektorienplanung für seitliches Versetzen des Wagens

Eine weitere Aufgabenstellung stellt das seitliche Versetzen des Wagens in  $x$ -Richtung („Side Stepping“) dar. Dabei sollen sowohl der Wagen als auch die Pendel am Anfang und Ende des Vorgangs in Ruhe sein, bzw. in der Ruhelage  $R_{ooo}$  alle Pendel senkrecht nach oben ausgerichtet sein. Für einen sanften Verlauf zur Überwindung eines 0.5 m Abstands wird die Stellzeit  $t_e = 1.0$  s gewählt:

$$\mathbf{x}^*(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ x_{0,\text{offset}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow{t_e} \mathbf{x}^*(t_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ x_{0,\text{offset}} + 0.5\text{m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Die mittels PyTrajectory ermittelte Trajektorie ist in Abbildung 15 dargestellt.

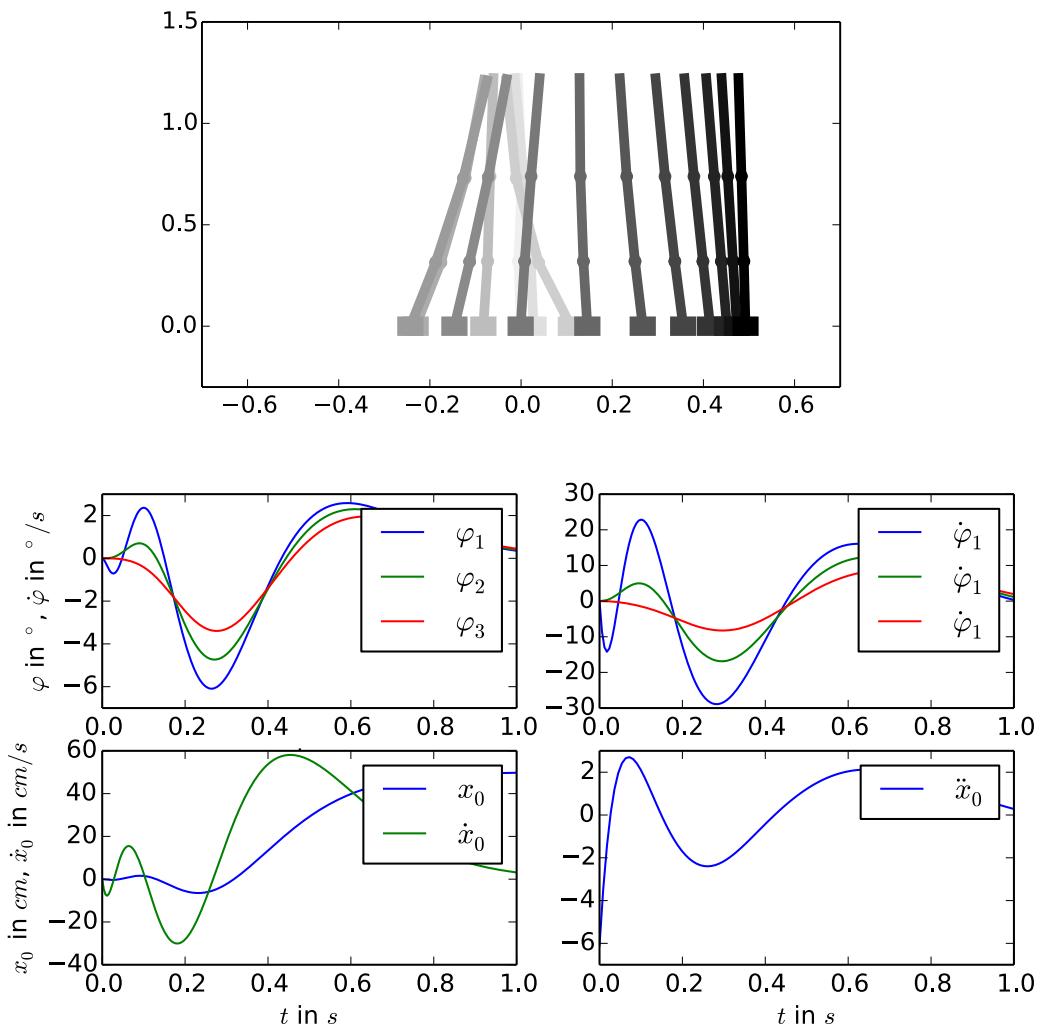


Abbildung 15 – Trajektorienverlauf beim seitlichen Versetzen des Wagens

## Modellbildung für flachheitsbasierte Vorsteuerung

Mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung kann das seitliche Versetzen des Wagen-Teilsystems realisiert werden. Dafür liegt das lineare, steuerbare Systemmodell (5.5) mit dem flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f = \mathbf{t}_1^T \Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}$  und dem relativen Grad  $r = n$  zu Grunde, wobei  $\mathbf{t}_1^T$  die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_s^{-1}$  darstellt. Für den flachen Ausgang des um diese Ruhelage  $R_{ooo}$  linearisierten Systems erhält man konkret

$$\mathbf{y}_f \approx [-l_1, -l_2, -0.7l_3, 1, 0, 0, 0, 0] \kappa \Delta \mathbf{x} \quad \text{mit } \kappa = -1/79263.$$

Mit der Ähnlichkeits-Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  und den neuen Systemkoordinaten

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_f \\ \dot{\mathbf{y}}_f \\ \vdots \\ \mathbf{y}_f^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{T} \Delta \mathbf{x} \quad (5.44)$$

ergibt sich das neue lineare Systemmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z} + \mathbf{T} \mathbf{B} \Delta u, \\ &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{B}} \Delta u \end{aligned} \quad (5.45)$$

in der linearen Regelungsnormalform. Die Matrizen  $\tilde{\mathbf{A}}$  und  $\tilde{\mathbf{B}}$  stellen die neue System- und Eingangsmatrix dar.

Für die flachheitsbasierte Vorsteuerung lässt sich nun der Steuereingang [23]

$$u^* = \mathbf{y}_f^{(n)} - \mathbf{t}_1^T \mathbf{A}^n \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z} \quad (5.46)$$

mit dem flachen Ausgang und dessen zeitlichen Ableitungen ermitteln. Die ursprünglichen Koordinaten ergeben sich dann durch die inverse Transformationsmatrix

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}. \quad (5.47)$$

Ein möglicher Sollverlauf des flachen Ausgangs kann mit einem mindestens  $n$  mal differenzierbaren Polynom vom Grad  $2n - 1$

$$\mathbf{y}_{f,\text{ref}}(t) = \mathbf{y}_f(0) + [\mathbf{y}_f(t_e) - \mathbf{y}_f(0)] \sum_{i=n}^{2n-1} \mathbf{p}_i \left( \frac{t}{t_e} \right), \quad t \in [0, t_e] \quad (5.48)$$

vorgegeben werden, wobei  $\mathbf{y}_f(0), \mathbf{y}_f(t_e)$  die Anfangs- und gewünschte Endposition des Wagens mit dem Gewichtungsfaktor  $\kappa$  darstellen:

$$\mathbf{y}_f(0) = x_0(0)\kappa, \quad \mathbf{y}_f(t_e) = x_0(t_e)\kappa. \quad (5.49)$$

Mit der Aufstellung der Stetigkeitsbedingungen erhält man ein lineares Gleichungssystem. Damit können die Koeffizienten  $\mathbf{p}_i$  berechnet werden.

# Kapitel 6

## Beobachterentwurf

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem Entwurf eines Beobachters für die Schätzung des nicht messbaren Systemzustands. Bei dem Dreifachpendel-Versuchsstand können nur die Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  und Position  $x_0$  gemessen werden. Deren zeitliche Ableitungen lassen sich prinzipiell leicht durch numerische Differentiation nach der Zeit bilden. Allerdings sind die so erhaltene Ergebnisse zu ungenau wegen der Quantisierungseffekte. Ein besseres Ergebnis kann durch einen Beobachter erzielt werden, wie zum Beispiel einen Luenberger-Beobachter oder ein erweitertes Kalman-Filter (EKF). In der Arbeit wird ein erweitertes Kalman-Filter entworfen und als Beobachter eingesetzt. Der Regelkreis mit dem Beobachter ist in der Abbildung 16 dargestellt. Der Luenberger-Beobachter und das

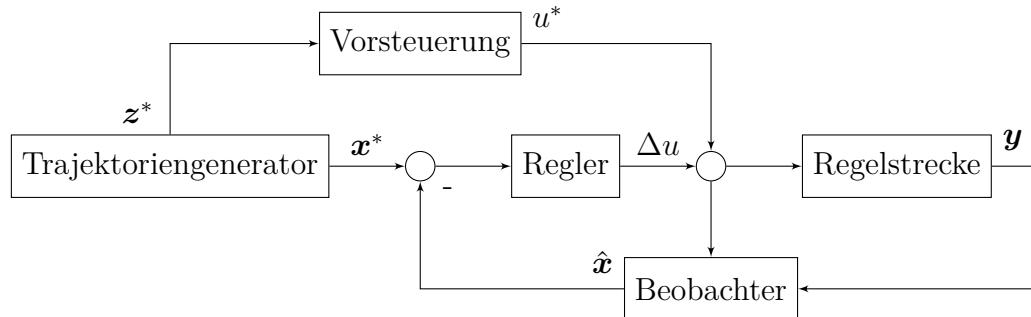


Abbildung 16 – Regelkreis mit dem Beobachter.

erweiterte Kalman-Filter sind im Prinzip identisch [1]. Beide beruhen auf der Simulation des Strecken-Modells mit einer Rückführung des Ausgangsfehlers. Sie unterscheiden sich nur in der Bestimmung der Beobachterverstärkung. Beim Luenberger-Beobachter werden die gewünschten Pole für die Berechnung der Beobachterverstärkung vorgegeben, analog zum normalen Zustandsregler, siehe Abschnitt 5.3.1. Im Gegensatz dazu wird die Beobachterverstärkung des erweiterten Kalman-Filters so ausgelegt, dass der Einfluss vom Mess- und Prozessrauschen auf dem Schätzfehler minimal bleibt. Das geschieht wie im LQR-Entwurf mittels eines Kostenfunktional

$$\mathbf{J}_{\min} := \frac{1}{2} \int_0^T \mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{e}\} dt \quad (6.1)$$

wobei  $\mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{e}\}$  den Erwartungswert des Schätzfehlers  $\mathbf{e} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  darstellt.

## 6.1 Erweitertes Kalman-Filter

Das erweiterte Kalman-Filter ist eines der am häufigsten eingesetzten Beobachterverfahren für nichtlineare Systeme [1]. Es ähnelt stark dem stationären Kalman-Filter. Der Unterschied besteht nur darin, dass bei letzterem die linearisierte Darstellung der nichtlinearen Systemdynamik für die Simulation verwendet wird. Der Ausgangspunkt für den Beobachterentwurf ist das partiell linearisierte System von (3.29)

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\tilde{u} + \boldsymbol{\mu}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\rho}\end{aligned}\quad (6.2)$$

mit der Messmatrix  $\boldsymbol{c}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Die Vektoren  $\boldsymbol{\mu}$  und  $\boldsymbol{\rho}$  repräsentieren mittelwertfreie, normalverteilte, weiße, unkorrelierte Rauschprozesse, nämlich das Prozessrauschen und Messrauschen mit ihren Kovarianzmatrizen  $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Da die Schätzung des Zustands auf einem Mikroprozessor erfolgen soll, muss die zeitkontinuierliche Gleichung in der zeitdiskreten Form vorliegen. Mittels Euler-Verfahren lässt sich das System diskretisieren:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + dt \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_k + dt \left[ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_k)\tilde{u}_k + \boldsymbol{\mu} \right]. \quad (6.3)$$

Das zeitdiskrete Modell ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k, \tilde{u}_k) + dt \boldsymbol{\mu}, \\ \boldsymbol{y}_k &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\rho}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Die Minimierung des Kostenfunktionalen (6.1) mit dem zeitdiskreten Modell führt wie im LQR-Entwurf zu einer Riccati-DGL. Auf die Herleitung der zeitdiskreten Beobachter-Riccati-DGL (DARE) wird in dieser Arbeit nicht eingegangen, hierfür sei auf [11] verwiesen.

Die Regelschleife des zeitdiskreten erweiterten Kalman-Filters besteht aus einem Prädiktions- und Korrekturschritt [7]. Im Prädiktionsschritt

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \tilde{u}_{k-1}), \quad (6.5)$$

$$\boldsymbol{J}_F = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \tilde{u}) \Big|_{\begin{array}{l} \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \\ \tilde{u} = \tilde{u}_{k-1} \end{array}}, \quad (6.6)$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{J}_F \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{J}_F^T + \boldsymbol{H} \quad (6.7)$$

werden die aktuelle Zustände  $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$  mittels Modellgleichung geschätzt (6.5). Das zeitdiskrete System wird dann am letzten (a priori) Zustand  $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$  linearisiert (6.6). Am Ende des Prädiktionsschrittes wird die Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{P}_k^-$  des Systems auf Basis des linearisierten Modells ermittelt (6.7).

Im Korrekturschritt

$$\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{c} \left( \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{c} + \boldsymbol{S} \right)^{-1}, \quad (6.8)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{L}_k \left( \boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}_k^- \right), \quad (6.9)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \left( \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{c}^T \right) \boldsymbol{P}_k^- \quad (6.10)$$

werden die Beobachterverstärkungen  $\mathbf{L}_k$  mit Hilfe der zuvor modellbasiert ermittelten Kovarianzmatrix bestimmt. Anschließend werden die Zustände unter Berücksichtigungen der Messung korrigiert. Abschließend wird die Kovarianzmatrix durch die Beobachterverstärkungen aktualisiert. Im nächsten Zeitschritt wiederholt sich das Ganze vom Anfang.

Die Charakteristik des erweiterten Kalman-Filters lässt durch geeignete Wahl der Matrizen  $\mathbf{H}$  Gl.(6.7) und  $\mathbf{S}$  Gl.(6.8) beeinflussen. Wenn die Einträge der Matrix  $\mathbf{H}$  größer als die von  $\mathbf{S}$  gewählt werden, wird bei der Schätzung mehr auf die Messung vertraut und weniger auf das Modell. Umgekehrt gilt dies analog. Die Matrizen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{S}$  lauten konkret

$$\mathbf{H} = \text{diag}\left[\frac{\mu_p dt^2}{2}, \frac{\mu_p dt^2}{2}, \frac{\mu_p dt^2}{2}, \frac{\mu_w dt^2}{2}, \mu_p dt, \mu_p dt, \mu_p dt, \mu_w dt\right], \quad (6.11)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}\left[\frac{\sigma_p \pi}{180}, \frac{\sigma_p \pi}{180}, \frac{\sigma_p \pi}{180}, \frac{\sigma_w}{1000}\right] \quad (6.12)$$

mit den Tuning-Parametern  $\mu_p, \mu_w$  des Modells und den Standardabweichungen  $\sigma_p, \sigma_w$  der Sensoren.

Der Quadraturencoder von allen Pendeln hat eine Auflösung von 8192 Inkrementen pro Umdrehung und der des Wagens von 4096 Inkrementen pro 70 mm Verfahrweg. Der Pendelwinkel und die Wagenposition werden mit der Schrittweite  $q_p, q_w$  quantisiert. Die Varianz der Gleichverteilung [5] ergibt sich für das Pendel

$$\text{Var}_p = \frac{q_p^2}{12} \quad \text{mit} \quad q_p = \frac{8192}{360^\circ} \quad (6.13)$$

und für den Wagen

$$\text{Var}_w = \frac{q_w^2}{12} \quad \text{mit} \quad q_w = \frac{4096}{70\text{mm}}. \quad (6.14)$$

Für die Standardabweichungen erhält man

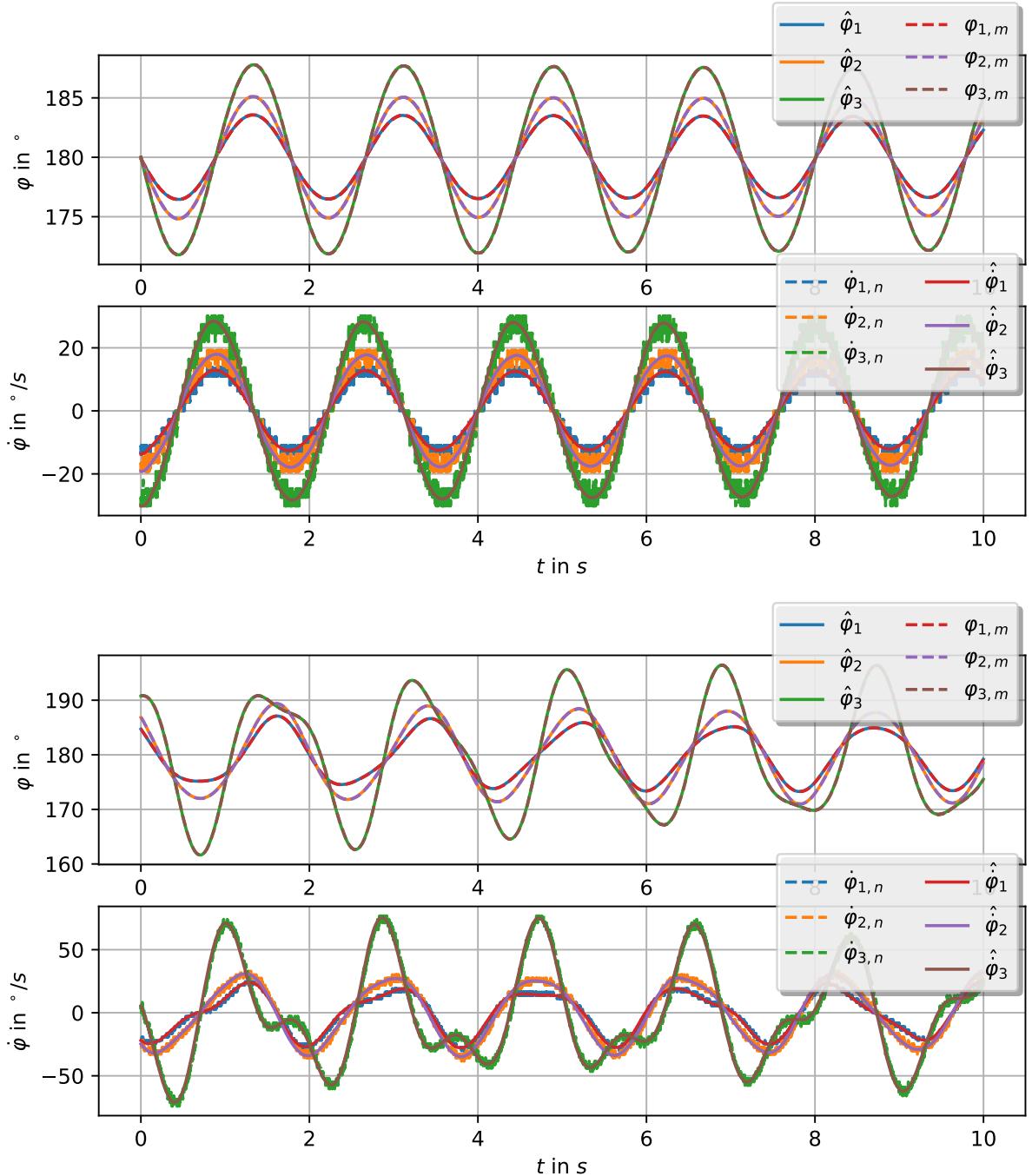
$$\sigma_p = \sqrt{\text{Var}_p} = 0.01^\circ \quad \text{und} \quad \sigma_w = \sqrt{\text{Var}_w} = 0.005 \text{ mm}. \quad (6.15)$$

Mit den Parametern  $\mu_p, \mu_w$  können die Parameterunbestimmtheiten des Modells zusätzlich die Restterme der höheren Ordnung modelliert werden, die durch Linearisierung verschwinden. Mittels Simulation sind die Parameter  $\mu_p, \mu_w$  wie folgt eingestellt:

$$\mu_p = 1 \quad \text{und} \quad \mu_w = 5. \quad (6.16)$$

Der Einschwingvorgang des erweiterten Kalman-Filters wird durch den Anfangswert der Kovarianzmatrix stark beeinflusst. Je höher die Einträge der Kovarianzmatrix gewählt werden, desto langsamer konvergiert die Schätzung und desto ruhiger ist der Einschwingvorgang. Wenn sie umgekehrt klein gewählt werden, ist der Einschwingvorgang kürzer. Ein Nachteil davon ist, dass ein differentierendes Verhalten entsteht bzw. am Anfang hohe Ausschläge des Zustands zur Folge haben wird. In der Arbeit ist der Anfangswert der Kovarianzmatrix als Einheitsmatrix festgelegt.

In den Abbildungen 17 und 18 sind die geschätzte Zustandsverläufe  $x_i$  mittels EKF im Vergleich zu dem gemessenen Winkel  $\varphi_{i,m}$  und dem numerisch ermittelten Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_{i,n}$  dargestellt. Dabei ist deutlich zu sehen dass das verstärkte Quantisierungsrauschen der numerisch ermittelten Winkelgeschwindigkeiten bei kleiner Auslenkung relativ ausgeprägter ist als bei größerer Auslenkung.



**Abbildung 17** – Zustandsschätzung mittels EKF in der Ruhelage  $R_{uuu}$ ,  $\Delta u = 0$ .

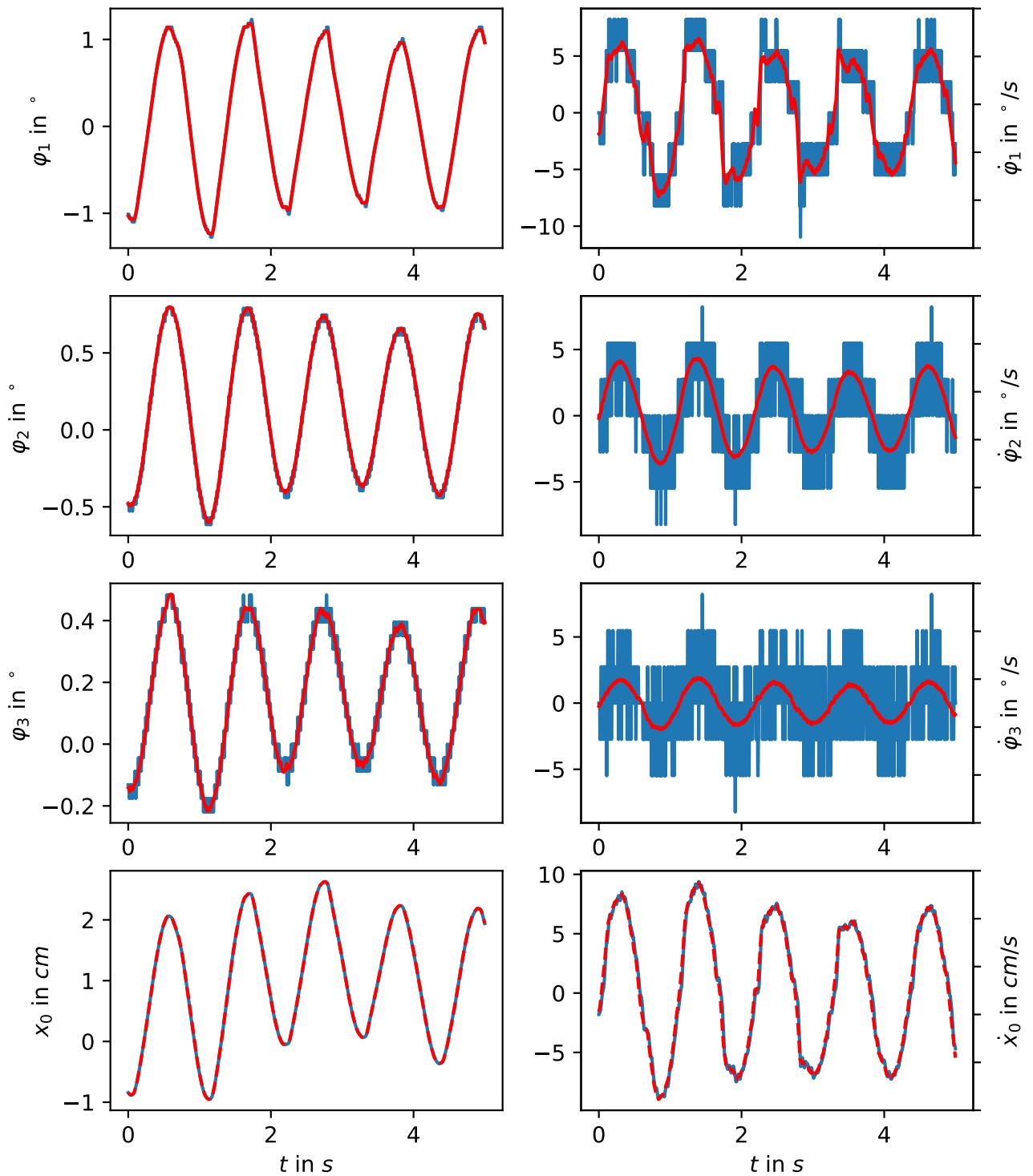


Abbildung 18 – Zustandsschätzung mittels EKF in der Ruhelage  $R_{ooo}$ ,  $\Delta u \neq 0$ .

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit dem modellbasierten Steuerungs- und Regelungsentwurf für ein unteraktuiertes, mechanisches System.

Im ersten Kapitel der Arbeit wurde der mechanische und elektrische Aufbau des Dreifachpendel-Versuchsstands vorgestellt und Einblicke in die Struktur des realen Systems gegeben. Im Anschluss wurden die Bewegungsgleichungen des Systems mittels des Lagrange-Formalismus durch die Verwendung von Computer-Algebra Software SymPy ohne großen Aufwand hergeleitet und eine partielle Eingangs-Ausgangs-Linearisierung vorgenommen. Das daraus resultierende partiell linearisierte, nichtlineare System bildet den Ausgangspunkt für alle weiteren regelungstechnischen Betrachtungen.

Das darauf folgende Kapitel befasste sich mit der Identifikation der Regelstrecke. Dabei wurden zunächst verschiedene Arten von mathematischen Ansätzen zur Identifizierung der direkt messbaren und nicht direkt messbaren Parametern diskutiert. Vor allem wurde dabei der Reibung in den Pendelgelenken besondere Beachtung geschenkt. Anschließend wurde die Identifikation der Modellparameter mittels nichtlineare MKQ unter Verwendung der SciPy-Funktion `lmfit` durchgeführt. Damit wurde eine numerische Simulation erst möglich.

Nach der Identifikation der Modellparameter wurden die Ruhelagen für das partiell linearisierte, nichtlineare System ermittelt. Anschließend wurde ein linearer Zustandsregler und ein Vorfilter zur Vorgabe einer Führungsgröße für alle Ruhelagen entworfen. Dabei wurde auf bekannte Standardverfahren zurückgegriffen, beispielsweise Polplatzierung und LQR-Entwurf. Es konnte mit diesen Zustandsreglern gezeigt werden, dass das Dreifachpendel in allen Ruhelagen, wie in der Simulation vorgesehen, stabilisiert und der Wagen an der gewünschten Stelle platziert werden kann.

Abschließend folgte der Entwurf und die Planung einer Trajektorie für die Überführung der Ruhelagen, was zweifellos die größte Herausforderung dieser Arbeit darstellt. Da mit einer reinen Steuerung die Ruhelagenüberführung erwartungsgemäß nicht möglich ist, wurde ein zeitvarianter Riccati-Regler entworfen. Neben dem Entwurf des Folgereglers, der das System entlang der Solltrajektorie stabilisiert, war eine zeitintensive Suche nach einer geeigneten Trajektorie mittels PyTrajectory erforderlich. Mit zahlreichen Versuchen ist der Aufschwing nicht gelückt. Jedoch konnte mit den Messergebnissen gezeigt werden, dass ein erfolgreiches Aufschwingen kurz vor dem Ziel ist.

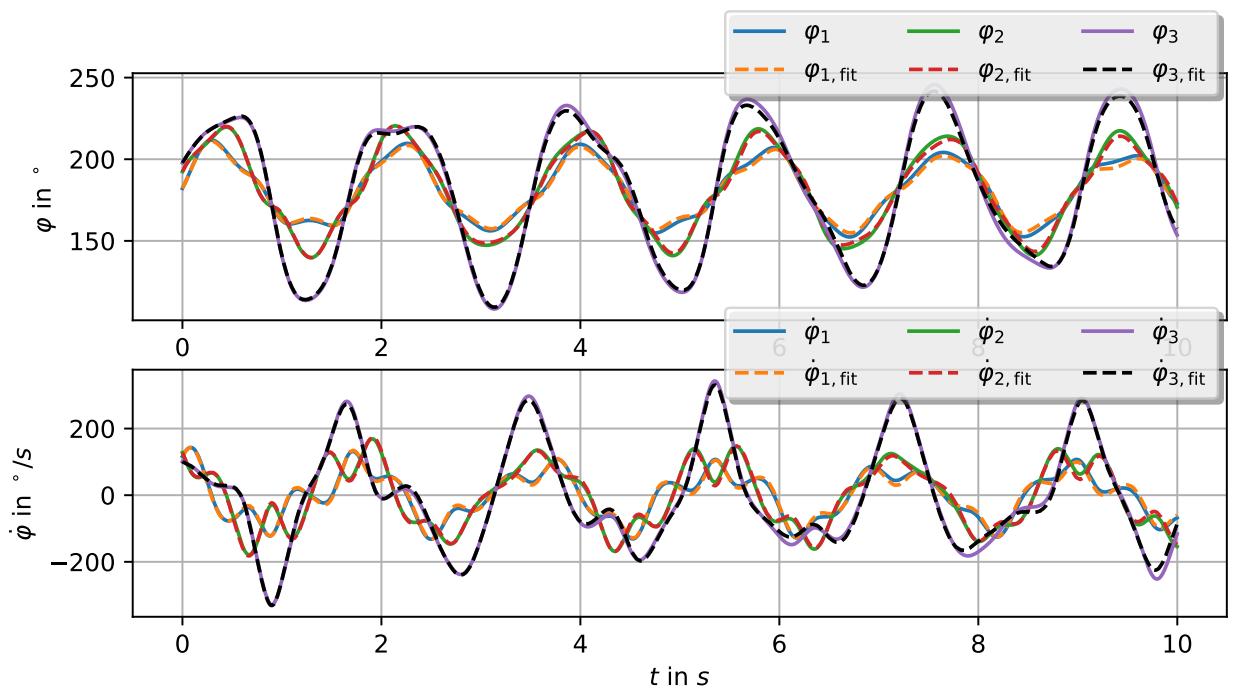
Das vorletzte Kapitel beschäftigte sich mit dem Entwurf eines Beobachters für die Schätzung des nicht messbaren Zustands. Dabei wurden zwei Arten von Beobachtern (Luenberger Beobachter, Erweitertes Kalman-Filter) in Erwägung gezogen und diskutiert. Abschließend folgt die Implementierung des erweiterten Kalman-Filters in der Programmiersprache C, was ebenfalls eine große Herausforderung darstellte.

Bei praktischen Arbeiten in Python stellte die Verwendung verschiedener Software-Pakete, wie zum Beispiel NumPy, SymPy, SciPy und Matplotlib sowie PyTrajectory, eine große Erleichterung dar. Dadurch konnte die Arbeit maßgeblich beschleunigt werden.

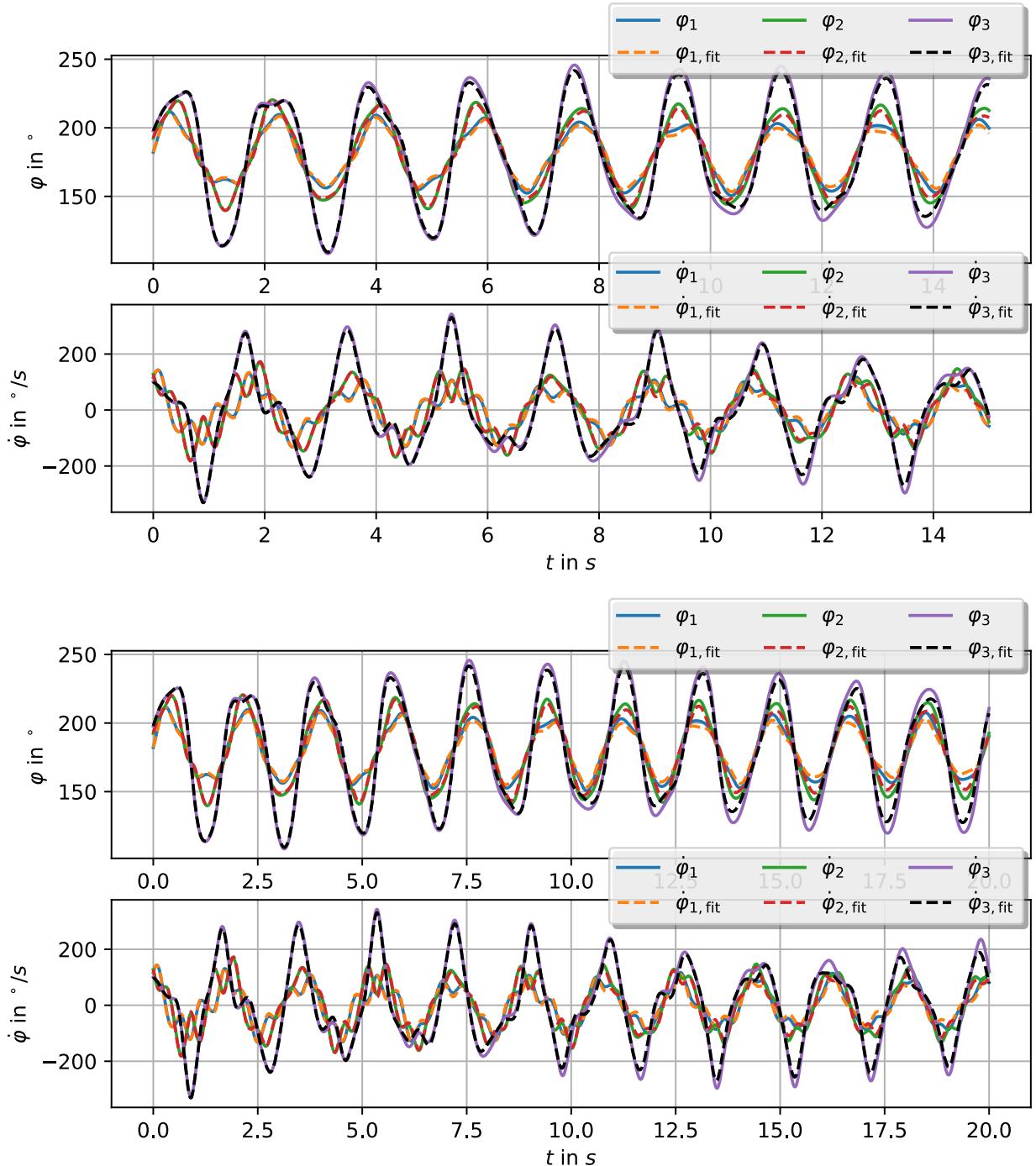
Das Aufschwingen kann meiner Ansicht nach gelingen werden, wenn eine optimale Trajektorie gefunden wird. Außerdem kann eine modellbasierte prädiktive Regelung (MPR) eingesetzt werden, um das Folgeverhalten zu verbessern.

# Anhang A

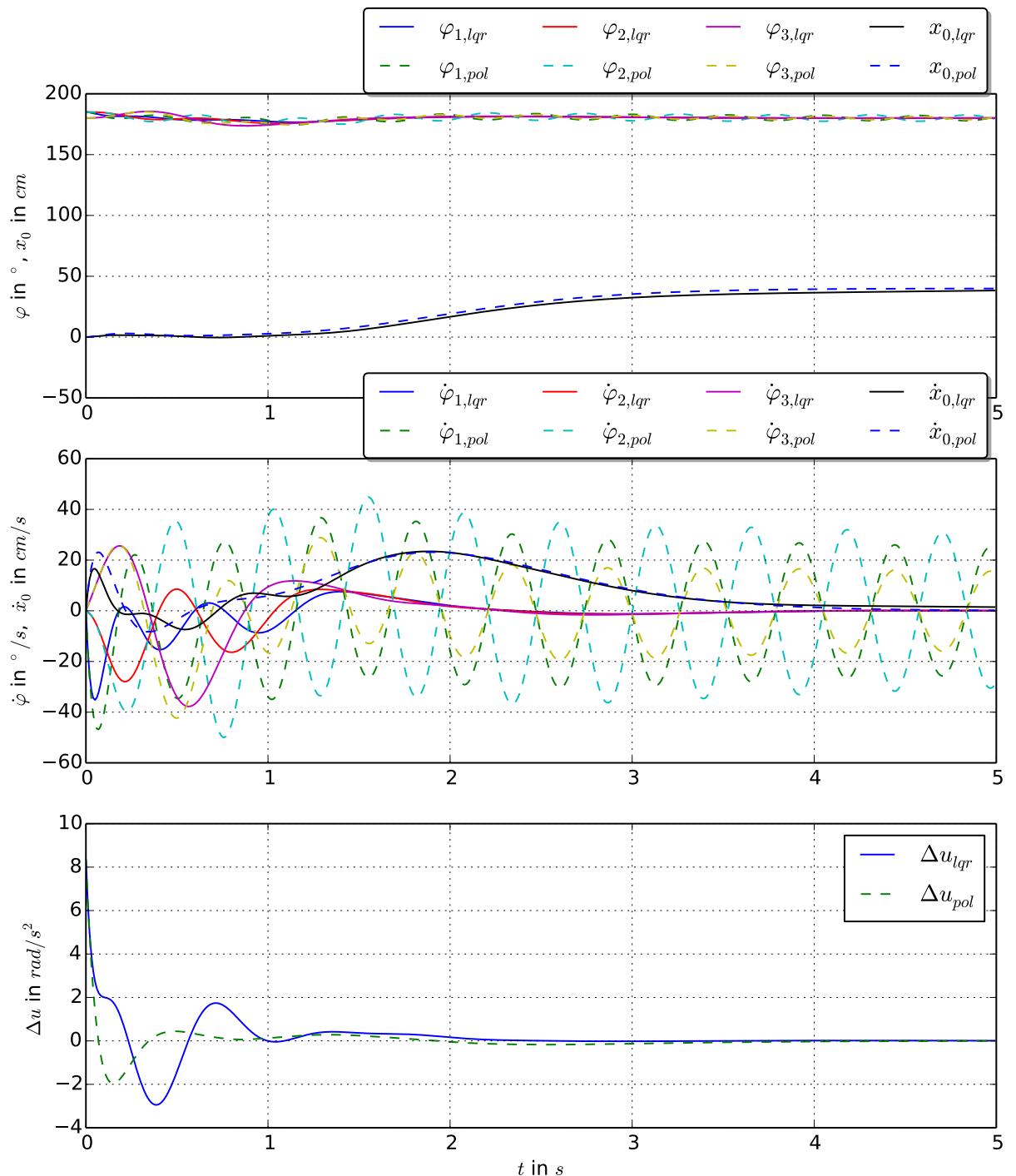
## Simulationsergebnis



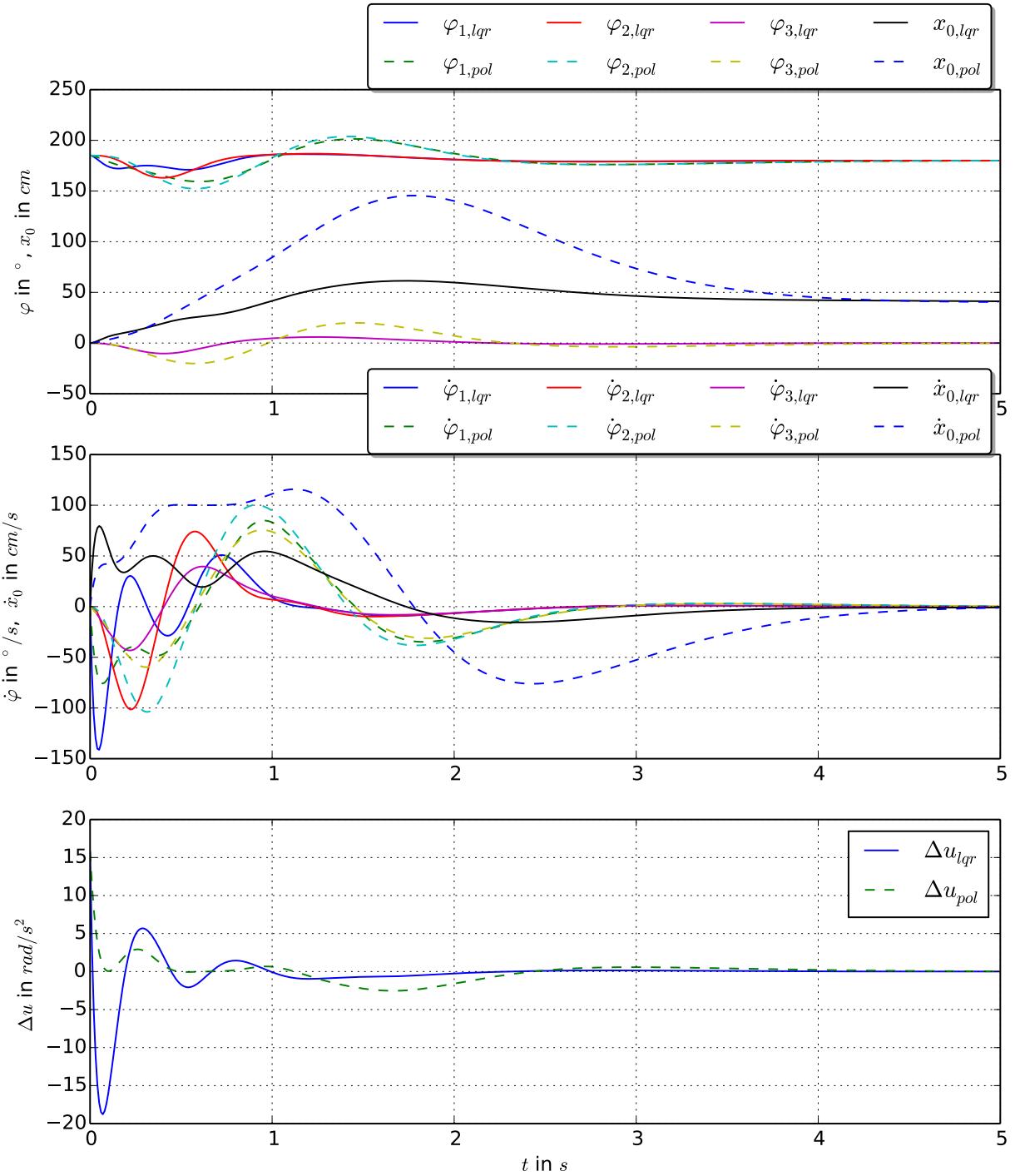
**Abbildung 19** – Vergleich der Verläufe des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit aller Pendel anhand von Messdaten und der Simulation mit den identifizierten Parametern für 10 Sekunden.



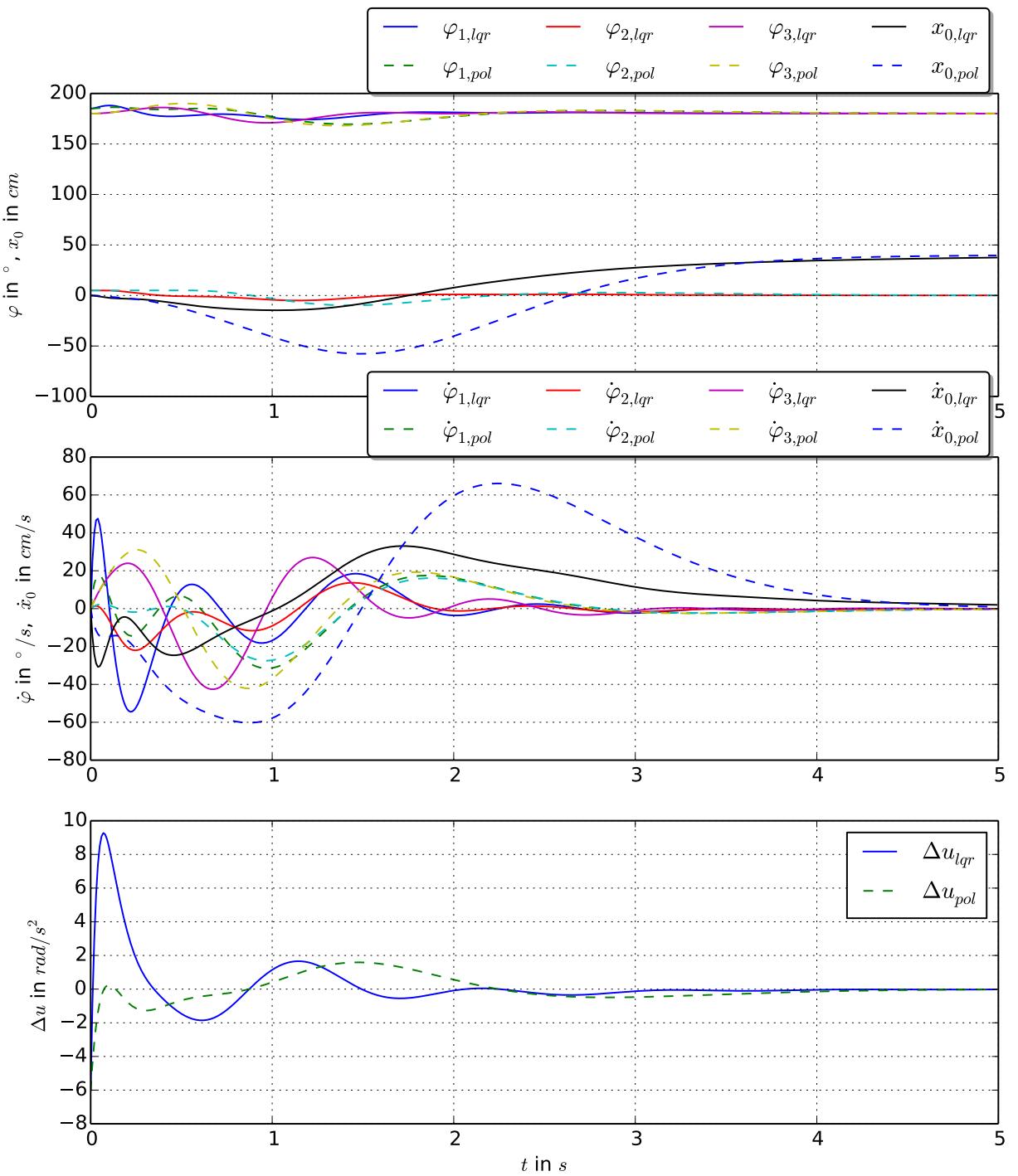
**Abbildung 20** – Vergleich der Verläufe des Winkels und der Winkelgeschwindigkeit aller Pendel anhand von Messdaten und der Simulation mit den identifizierten Parametern für 15 und 20 Sekunden.



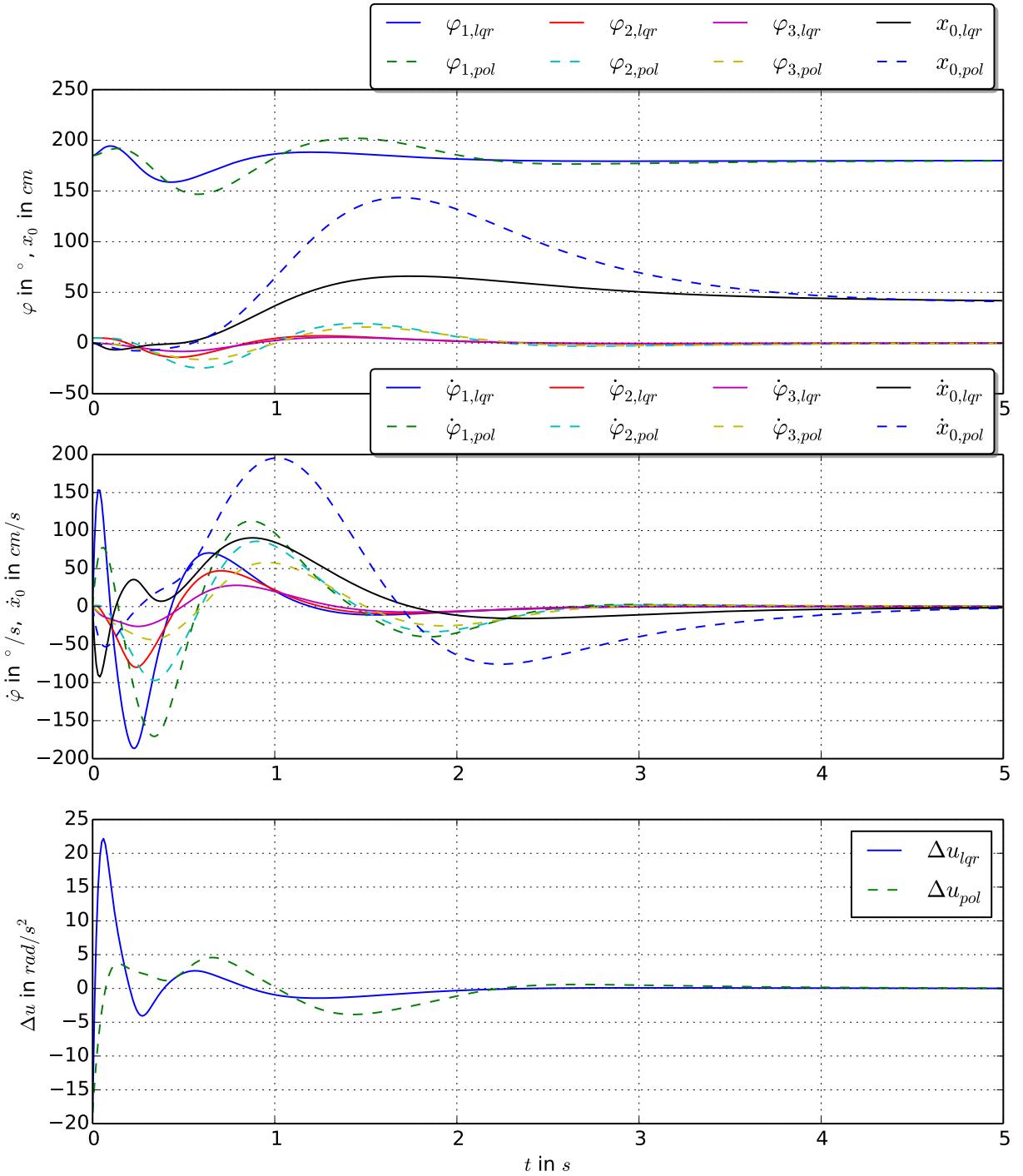
**Abbildung 21** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{uuu}$



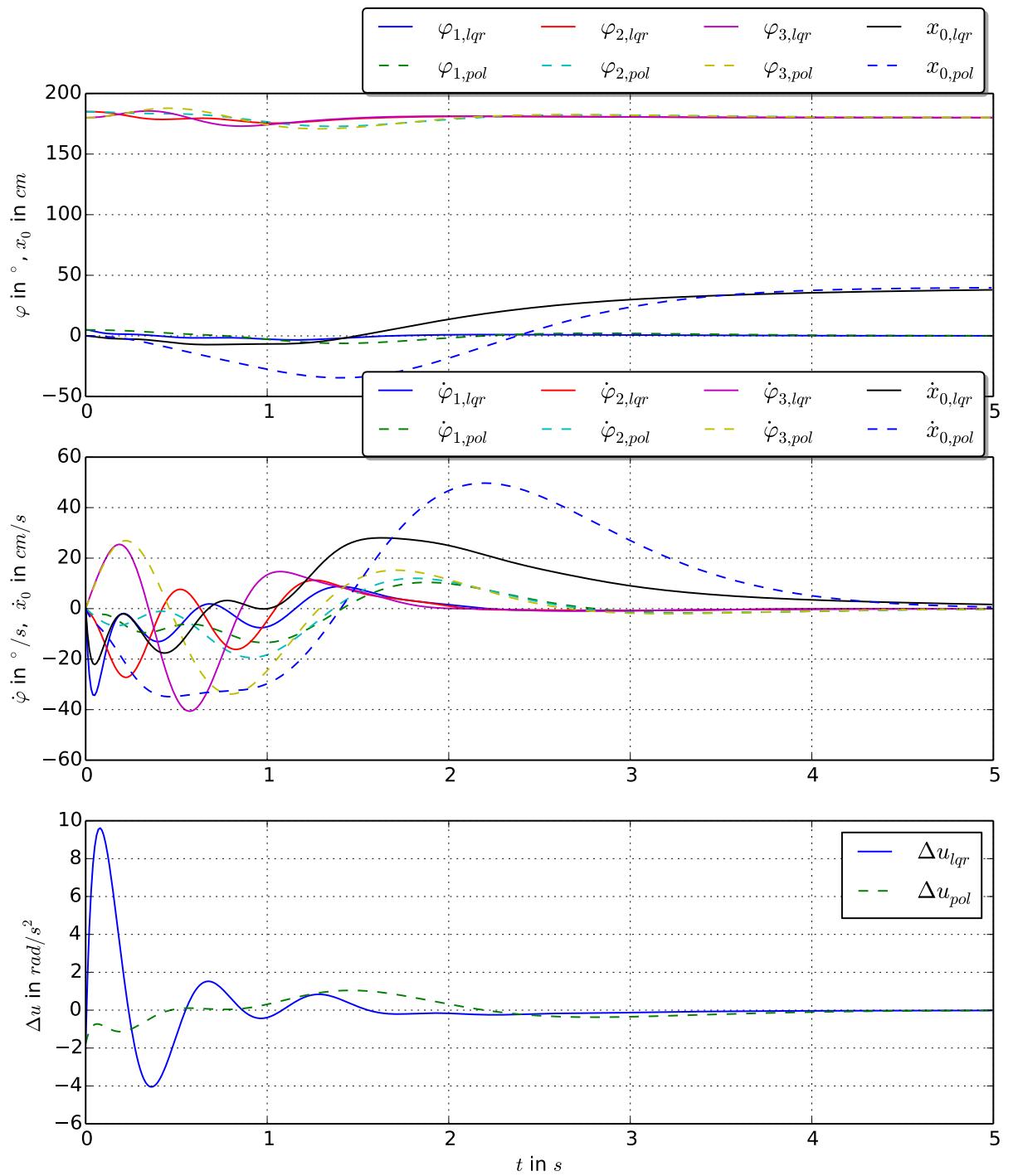
**Abbildung 22** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{uu0}$



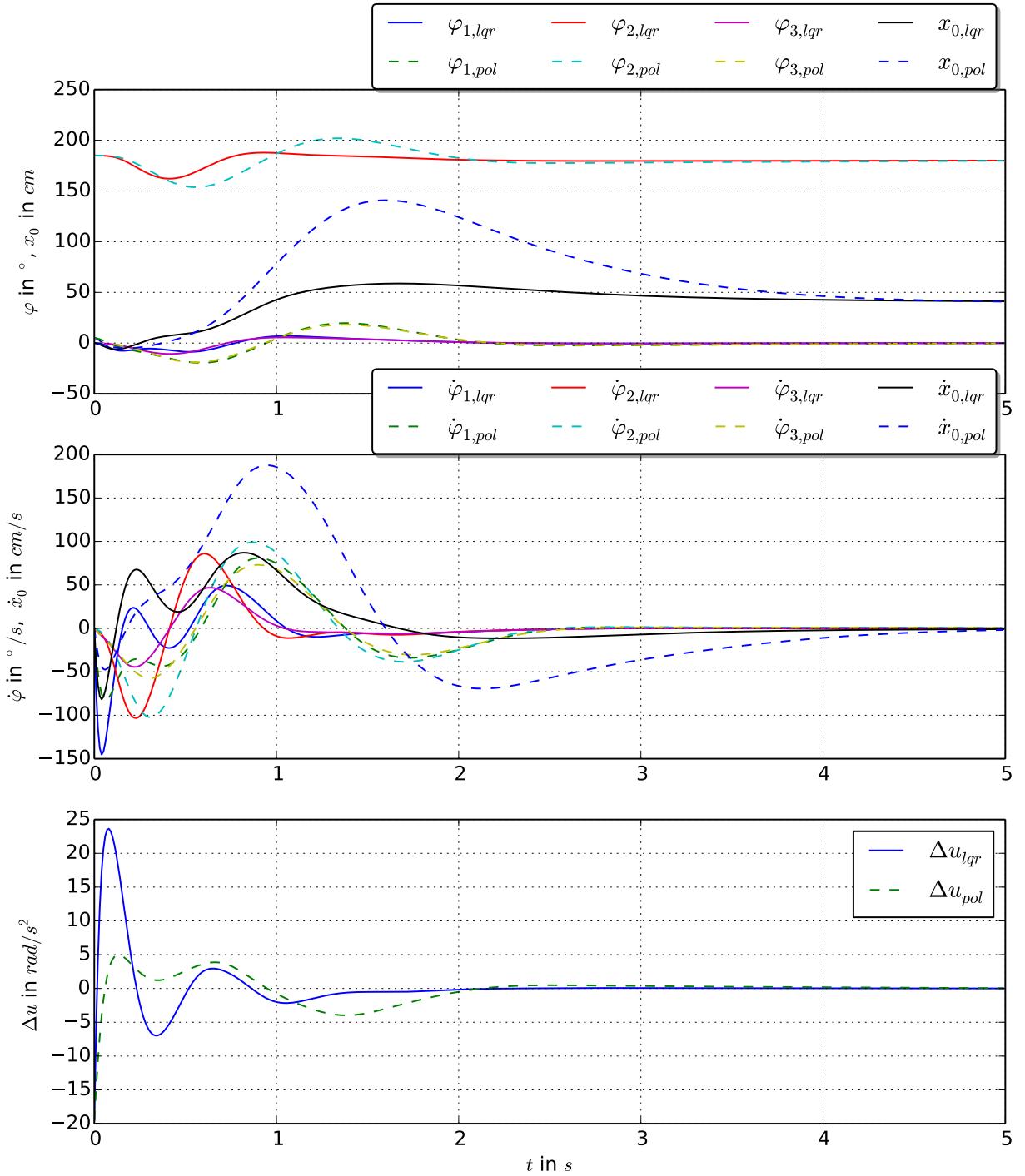
**Abbildung 23** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{uou}$



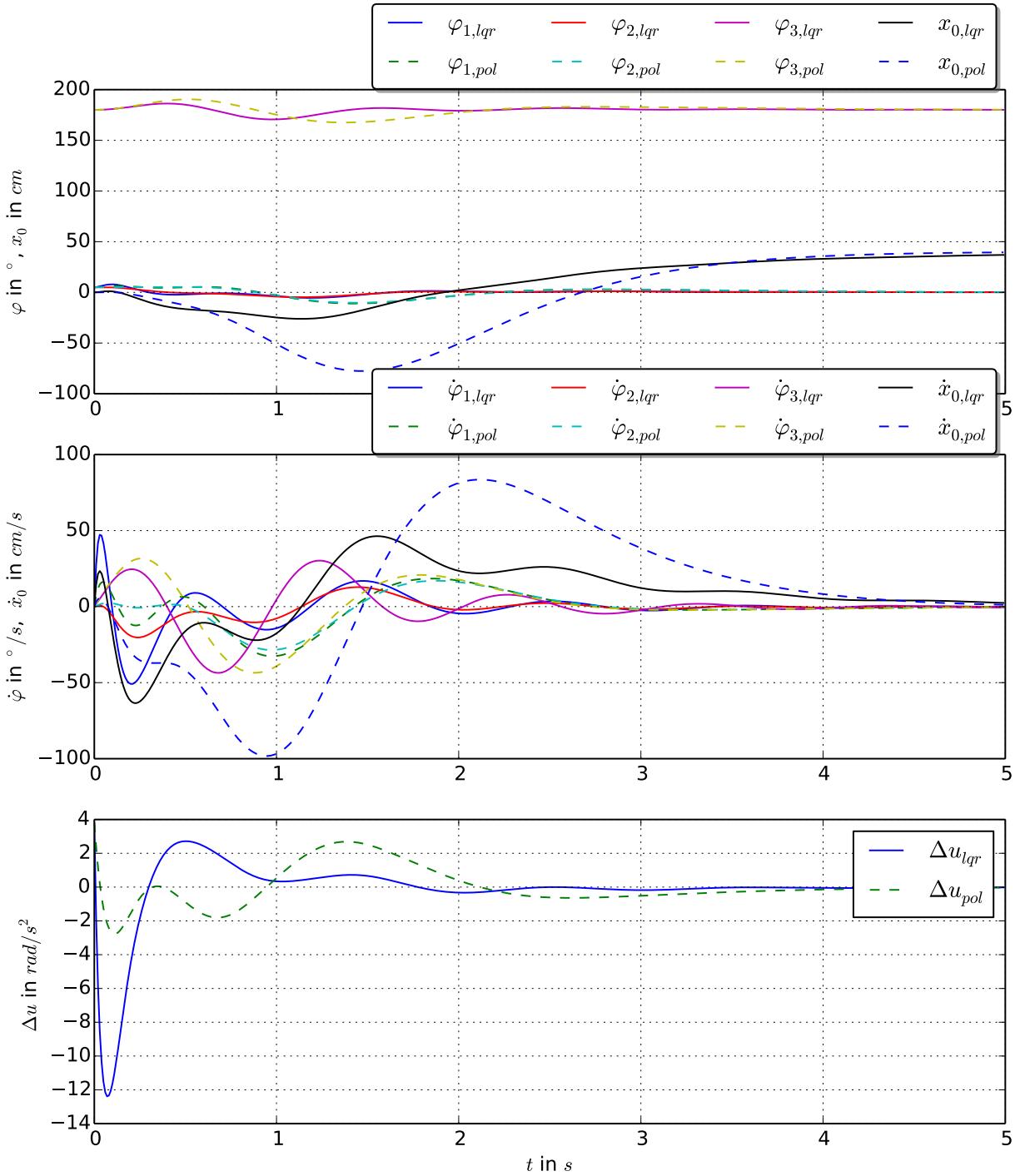
**Abbildung 24** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{u00}$



**Abbildung 25** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{ouu}$



**Abbildung 26** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{ouo}$



**Abbildung 27** – Simulationsvergleich zwischen dem LQ-Regler und Zustandsregler mittels Polplatzierung in der Ruhelage  $R_{\text{ou}}$

# Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2. Aufl., 2014.
- [2] BURGGRAF, C.: *Reibkraftkompensation und Aufrichtstrategien für ein verschiebbliches Zweifachpendel*. Diplomarbeit, TU Dresden, 2016.
- [3] FÖLLINGER, O.: *Optimale Regelung und Steuerung*. R.Oldenbourg Verlag, München, Wien, 3. Aufl., 1994.
- [4] GLÜCK, T., A. EDER und A. KUGI: *Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation*. Automatica, 2013.
- [5] HESSE, C.: *Angewandte Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vieweg, Wiesbaden, 1. Aufl., 2003.
- [6] JANSCHEK, K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme*. Springer, Dresden, 2010.
- [7] JANSCHEK, K.: *Vorlesungsunterlagen „Steuerung mobiler Roboter“*. 2014.
- [8] KNOLL, C.: *Regelungstheoretische Analyse- und Entwurfsansätze für unteraktivierte mechanische Systeme*. Dissertation, TU Dresden - Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 2016.
- [9] KUNZE, A., O. SCHNABEL und C. KNOLL: *Dokumentation PyTrajectory*, 2017. <https://www.pytrajectory.readthedocs.org>, Version 1.2.0.
- [10] LAUB, A. J.: *A Schur Method For Solving Algebraic Riccati Equations*. Massachusetts Institute of Technology, 1978.
- [11] LJUNG, L.: *System Identification*. Prentice Hall, Linköping University Sweden, 2. Aufl., 1999.
- [12] MATPLOTLIB-DEVELOPMENT-TEAM: *Dokumentation Matplotlib*, 2017. <https://www.matplotlib.org>, Version 2.0.1.
- [13] NEWVILLE, M. und T. STENSITZKI: *Dokumentation lmfit*, 2017. <https://www.github.com/lmfit/lmfit-py/>, Version 0.9.6.
- [14] OLIPHANT, T. und NUMPY-DEVELOPMENT-TEAM: *Dokumentation NumPy*, 2017. <https://www.numpy.org>, Version 1.12.1.

- [15] REINSCHKE, K.: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2. Aufl., 2014.
- [16] RÖBENACK, K.: *Vorlesungsunterlagen „Regelungstechnik II“*. 2013.
- [17] RÖBENACK, K.: *Vorlesungsunterlagen „Prozessidentifikation“*. 2014.
- [18] RÖBENACK, K.: *Vorlesungsunterlagen „Nichtlineare Regelungstechnik II“*. 2015.
- [19] SCHNABEL, O.: *Untersuchungen zur Trajektorienplanung durch Lösung eines Randwertproblems*. Studienarbeit, TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 2013.
- [20] SCI PY-DEVELOPMENT-TEAM: *Dokumentation SciPy*, 2017. <https://www.scipy.org>, Version 1.13.1.
- [21] SHAMPINE, L.F., M. R. und J. KIERZENKA: *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in MATLAB with bvp4c*, 2017. [http://www.mathworks.com/bvp\\_tutorial](http://www.mathworks.com/bvp_tutorial).
- [22] SYMPY-DEVELOPMENT-TEAM: *Dokumentation SymPy*, 2017. <https://www.sympy.org>, Version 1.1.1.
- [23] ZEITZ, M.: *Flachheit - Eine nützliche Methodik auch für lineare Systeme*. Elgersburg, 2014. [https://www.control.tu-berlin.de/wiki/images/3/34/folien\\_zeitz.pdf](https://www.control.tu-berlin.de/wiki/images/3/34/folien_zeitz.pdf).