

Analise e Modelagem Matemática de um Sensor Submerso Multinível para medir a Turbidez da Água

Pedro M. Botelho, David M. dos Santos, David M. Couto, Rodolfo C. Rebouças

¹Universidade Federal do Ceará (UFC) - Av. José de Freitas Queiroz, 5003, 63902-580
Cedro – Quixadá – Ceará - Brasil

Abstract. *In this paper, mathematical modeling of a submersible turbidity sensor will be carried out, using mathematical and computational resources. This analysis seeks to provide a mathematical model accurate enough to obtain the turbidity of a liquid from the sensor output, which in turn will inform the four vertical levels of turbidity of the water that passes through ducts where the emitters and receivers are coupled. of light.*

Resumo. *Neste trabalho será realizada a modelagem matemática de um sensor de turbidez submersível, utilizando recursos matemáticos e computacionais. Essa análise busca trazer um modelo matemático preciso o bastante para obter a turbidez de um líquido a partir da saída do sensor, que por sua vez irá informar os quatro níveis verticais de turbidez da água que passa por entre dutos onde estão acoplados os emissores e receptores de luz.*

1. Introdução

A turbidez é frequentemente empregada como um indicador prático para determinar a qualidade da água. Através de amostragens mecânicas, é possível quantificar a concentração desses sólidos suspensos (em mg/L) na água. Contudo, a medição da turbidez tem se tornado cada vez mais popular, devido à sua facilidade de uso e ao custo mais acessível [Mylvaganaru and Jakobsen 1998]. Esse indicador é extremamente útil, oferecendo informações valiosas de maneira rápida, econômica e contínua. Ele é aplicável em uma variedade de contextos, desde sistemas pequenos e com recursos limitados até instalações grandes e sofisticadas de tratamento de água.

Embora a turbidez em si nem sempre represente um risco direto à saúde pública, ela pode indicar a presença de micro-organismos patogênicos e ser um indicador eficaz de eventos perigosos no sistema de abastecimento de água, desde a captação até o ponto de uso. Por exemplo, a turbidez elevada nas águas de origem pode abrigar patógenos microbianos que prejudicam a desinfecção, enquanto um aumento na turbidez nos sistemas de distribuição pode indicar a liberação de biofilmes e escalas de óxido ou a entrada de contaminantes devido a falhas como rupturas de tubulações [World Health Organization 2017].

Neste artigo, a ênfase é colocada na análise técnica e estatística do sensor de turbidez desenvolvido, focando-se em avaliar a precisão, confiabilidade e eficácia da instrumentação utilizada. A análise estatística será aplicada para validar a precisão dos dados coletados pelo sensor, examinando sua consistência e precisão em diferentes condições e concentrações de turbidez. Este trabalho visa não apenas aferir a eficácia do sensor, mas também estabelecer metodologias robustas para a avaliação e interpretação dos dados de turbidez, contribuindo assim para o aprimoramento das técnicas de monitoramento e gestão da qualidade da água.

2. Fundamentação Teórica

Esta dissertação aborda uma análise estatística detalhada de um dispositivo destinado à medição da turbidez da água. Essa análise é crucial para determinar o nível de pureza da água, integrando aspectos de instrumentação e tecnologia. O estudo visa não apenas avaliar a eficácia do dispositivo, mas também explorar as implicações dos dados obtidos para a gestão da qualidade da água.

2.1. Turbidez

A análise de **turbidez** é a investigação das características ópticas responsáveis pela dispersão e absorção da luz ao atravessar a água, em detrimento da sua transmissão linear. A turbidez provoca a opacidade ou redução na transparência da água. A trajetória da luz transmitida sofre alterações ao interagir com partículas presentes na coluna de água [Trevathan et al. 2020]. Em condições de baixa turbidez, ocorre menor dispersão da luz, mantendo-a mais próxima de sua direção original.

Portanto, ao projetar um feixe de luz através do líquido, é viável medir a turbidez pela análise dos feixes que efetivamente passam pela amostra. Este processo, referido como o "método de atenuação da luz", fundamenta-se na quantificação da luz que consegue transpassar o líquido. A fim de reduzir a interferência da luz do ambiente nas medições, será empregado o uso de luz infravermelha (IR), que não é detectável pelo olho humano. Neste trabalho, vai ser adotado NTU(Unidades Nefelométricas de Turbidez, medida padrão de turbidez) como a unidade de medida padrão.

2.2. Parâmetros Estáticos

Nesta sub-seção, serão apresentados os parâmetros estáticos empregados para a análise da eficácia do projeto do sensor. Estes parâmetros são fundamentais para avaliar a performance e a precisão do dispositivo em estudo [Bhuyan 2010].

2.2.1. Precisão

A precisão é uma propriedade crucial de um sistema de medição, indicando a consistência dos resultados obtidos sob condições experimentais idênticas. No contexto da medição de turbidez em corpos d'água, a precisão torna-se particularmente relevante devido à variabilidade introduzida por fatores dinâmicos, que podem alterar os níveis de turbidez. A média das leituras é representada em 1.

$$\bar{X}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \quad (1)$$

A precisão das medições é expressa por

$$P = 1 - \left| \frac{X_n - \bar{X}}{\bar{X}} \right|. \quad (2)$$

2.2.2. Erro

A discrepância entre a saída de um sistema de medição e o valor considerado verdadeiro ou ideal é referida como o erro do sistema. Calcula-se esse erro subtraindo-se o valor verdadeiro do valor observado, o que é conhecido como erro absoluto. Ocasionalmente, o erro é quantificado como um percentual relativo ao alcance total ou à escala do instrumento de medição. Portanto, a expressão matemática do erro é mostrada em 3 e o percentual em 4.

$$e = X_{\text{observado}} - X_{\text{verdadeiro}} \quad (3)$$

$$e = \frac{X_{\text{observado}} - X_{\text{verdadeiro}}}{X_{\text{verdadeiro}}} * 100 \quad (4)$$

O Erro Médio Quadrático (MSE) e o Erro Médio Absoluto (MAE) são métricas cruciais para avaliar a precisão de modelos de previsão. O MSE é calculado pela fórmula

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i,\text{observado}} - X_{i,\text{verdadeiro}})^2, \quad (5)$$

que enfatiza erros maiores ao elevar as diferenças entre os valores observados e verdadeiros ao quadrado. Por outro lado, o MAE é obtido através da fórmula

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_{i,\text{observado}} - X_{i,\text{verdadeiro}}|, \quad (6)$$

oferecendo uma média simples das diferenças absolutas, sendo menos sensível a outliers. Ambas as métricas são fundamentais para compreender a eficácia de modelos em prever dados com precisão.

2.2.3. Sensibilidade

A relação entre entrada x e saída y é denominada sensibilidade. De forma quantitativa, a sensibilidade em um ponto de medição i é dada pela inclinação

$$S_i = \frac{dy_i}{dx_i} \quad (7)$$

onde x_i e y_i são a entrada e a saída no ponto de medição i . É desejável que um sensor possua uma sensibilidade constante, de modo que para todas as medições tem aproximadamente um valor K .

2.2.4. Análise de Variância

A Análise de Variância, conhecida como ANOVA, é uma técnica estatística utilizada para comparar as médias de dois ou mais grupos a fim de determinar se existem diferenças

significativas entre eles. A ANOVA será aplicada para testar a hipótese de que não há diferença significativa entre as medições de turbidez realizadas sob diferentes condições experimentais. A ANOVA é particularmente útil no contexto do projeto, pois permite uma avaliação robusta da uniformidade e confiabilidade das medições do sensor de turbidez, mesmo quando sujeitas a variações ambientais.

$$F = \frac{MS_{entre}}{MS_{dentro}} \quad (8)$$

onde MS_{entre} é a média do quadrado das somas entre os grupos e MS_{dentro} é a média do quadrado das somas dentro dos grupos. Valores de F significativamente altos sugerem que as diferenças entre as médias dos grupos são mais substanciais do que seria de esperar por variação aleatória, indicando assim a presença de fatores sistemáticos afetando as medições.

2.2.5. Regressão Linear

A regressão linear é um método estatístico que modela a relação entre uma variável dependente e uma ou mais variáveis independentes. A regressão linear pode ser utilizada para modelar a relação entre a turbidez da água (variável dependente) e os sinais elétricos medidos pelo sensor (variáveis independentes). Isto nos permite prever o valor de turbidez baseado nas leituras de tensão, estabelecendo uma relação quantitativa entre a turbidez e os valores medidos pelo sensor. A modelagem da equação de reta é dada por

$$Y = aX + b \quad (9)$$

onde Y é o valor previsto de turbidez, X é o valor medido pelo sensor, a é a inclinação da linha de regressão, e b é o intercepto com o eixo y .

3. Metodologia

Sendo o objetivo desse trabalho obter um modelo matemático completo e preciso para o sensor algumas métricas tiveram que ser seguidas. Para uma maior precisão e eficácia as seguintes 3 métricas foram levadas em consideração:

3.1. Medição da Turbidez

A obtenção dos dados será feita utilizando um sensor cilíndrico e submersível [Botelho et al. 2023], com secções contendo dutos (com os emissores e receptores acoplados) por onde irá passar porções do líquido onde o sensor está inserido. Portanto é nessa porção que atravessa os dutos que será realizada a leitura (utilizando o método da atenuação da luz), verificando a quantidade de luz que atravessa o líquido no duto.

Percebe-se então que a medição é feita em pontos muito bem definidos do sensor, com porções do líquido total, precisando-se fazer várias medições para conseguir um resultado médio satisfatório, como está denotado na equação 1. Com isso em mente várias medições foram feitas com o intuito de obter um resultado final satisfatório com **alta precisão**, como está denotado na equação 2, tentando manter os “subsensores” com o máximo possível de precisão e numa faixa semelhante. A **sensibilidade** também é um fator importantíssimo a ser considerado, devendo estar o mais constante possível.

3.2. Análise de Variância

De forma a comparar a média entre os vários pares de sensores, e atestar que não existem diferenças significativas entre eles, será usado a ANOVA, o que irá trazer confiabilidade às medições do sensor, independente de fatores naturais, aos quais os experimentos estão predispostos.

Portanto, utilizando ANOVA é possível atestar a confiabilidade das medições do sensor.

3.3. Regressão Linear

De forma a transcrever valores da saída do sensor (em volts) para valores de turbidez (em NTU) será utilizada regressão linear, obtendo a reta resultante e, por conseguinte, a equação resultante, que irá mapear os valores de tensão para NTU. Essa equação é importantíssima, já que é ela que permite que o sensor seja realmente utilizado para algum fim, de forma a obter a turbidez do líquido a partir de sua saída.

Sendo assim a regressão linear, utilizando pontos de saída do sensor e os respectivos valor de NTU, são parte essencial do sensor.

4. Resultados

A partir de experimentos que simulam quatro sensores para medir diferentes regiões verticais água, notamos uma diminuição sistemática na leitura do sensor devido ao acréscimo progressivo de partículas, o que elevou a obscuridade da água, seguindo a escala de Unidades Nefelométricas de Turbidez (NTU) referenciada no estudo [Hussain et al. 2016].

Os resultados obtidos em [Botelho et al. 2023], são usados para ser feita a análise dos componentes estáticos do projeto. A precisão dos 4 sensores é mostrada em 1.

Os resultados mostrados na tabela indicam que as leituras do sensor estão extremamente consistentes entre si, dada a alta precisão calculada. Em termos de precisão de medição, quanto mais próximo de 1, melhor, pois indica menor variabilidade entre as medições individuais em relação à média.

Com os resultados também foi possível fazer uma **regressão linear**, de forma a obter uma equação que permita calcular a turbidez da água no recipiente, em NTU, a partir da tensão de saída do sensor, em milivolts (mV). O gráfico de cada sensor pode ser visto na ??, sendo aproximações sutis do comportamento real do sensor.

Aqui estão as equações das retas de regressão linear para cada sensor:

- **Sensor 01:** $y = -5.41x + 1629.16$
- **Sensor 02:** $y = -7.58x + 1772.33$
- **Sensor 03:** $y = -9.48x + 1918.39$
- **Sensor 04:** $y = -11.11x + 2065.24$

Essas equações representam a relação linear entre o número de NTU (x) e as leituras médias de cada sensor (y), com base nos dados fornecidos. Os valores de Sensibilidade são dados pelo coeficiente angular de cada reta da regressão:

- $S_1: -5.41x$
- $S_2: -7.58x$

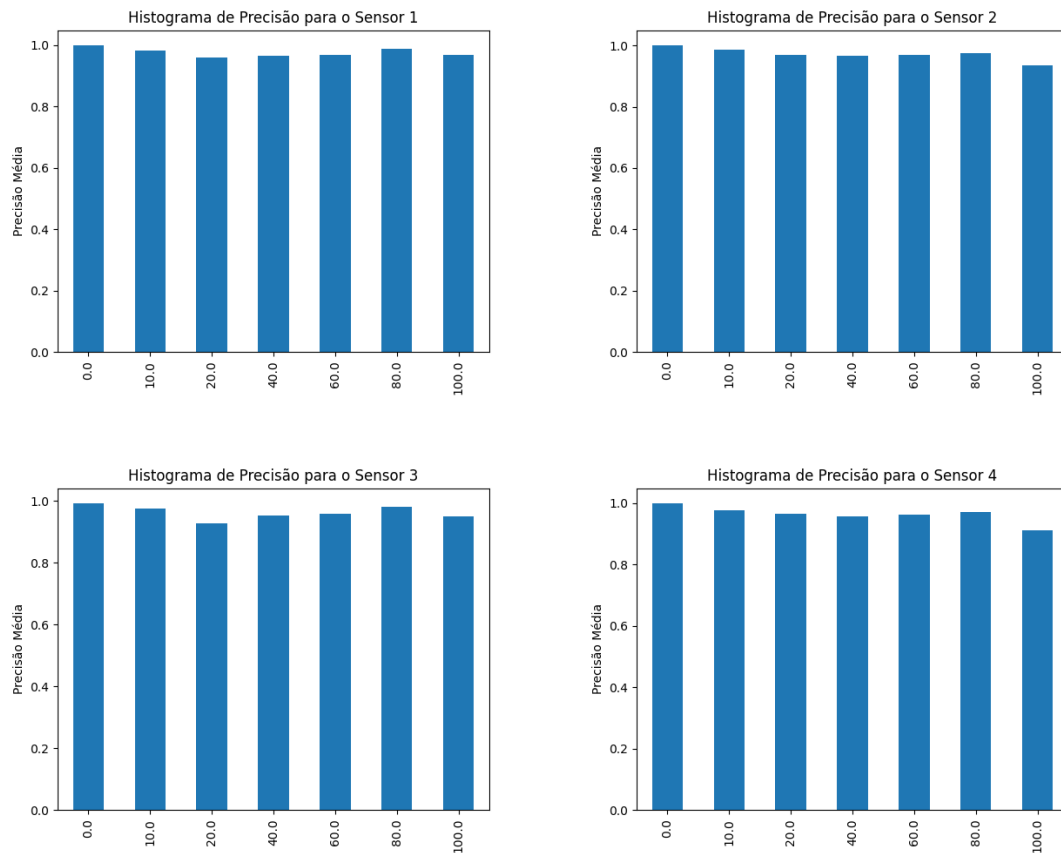


Figura 1. Histograma das precisões de diferentes sensores

- $S_3: -9.48x$
- $S_4: -11.11x$

Os valores de MSE e MAE são dados pelo coeficiente angular de cada reta da regressão:

- Sensor 1 - MAE: 0.033, MSE: 0.001
- Sensor 2 - MAE: 0.126, MSE: 0.018
- Sensor 3 - MAE: 0.035, MSE: 0.001
- Sensor 4 - MAE: 0.127, MSE: 0.018

Analisando os resultados obtidos das métricas de erro para a regressão linear de cada sensor, percebemos variações significativas na precisão das previsões. Os sensores mostra um desempenho notavelmente preciso, indicando que as previsões estão muito próximas dos valores reais. A Análise de Variância, irá comparar as médias entre diferentes valores de [NTU] para ver se há diferenças estatisticamente significativas entre eles.

Os valores de F muito altos e os valores-p tão próximos de zero significam que você pode rejeitar com confiança a hipótese nula de que não há diferença entre as médias dos grupos para cada sensor. Portanto, os resultados indicam que há fatores sistemáticos

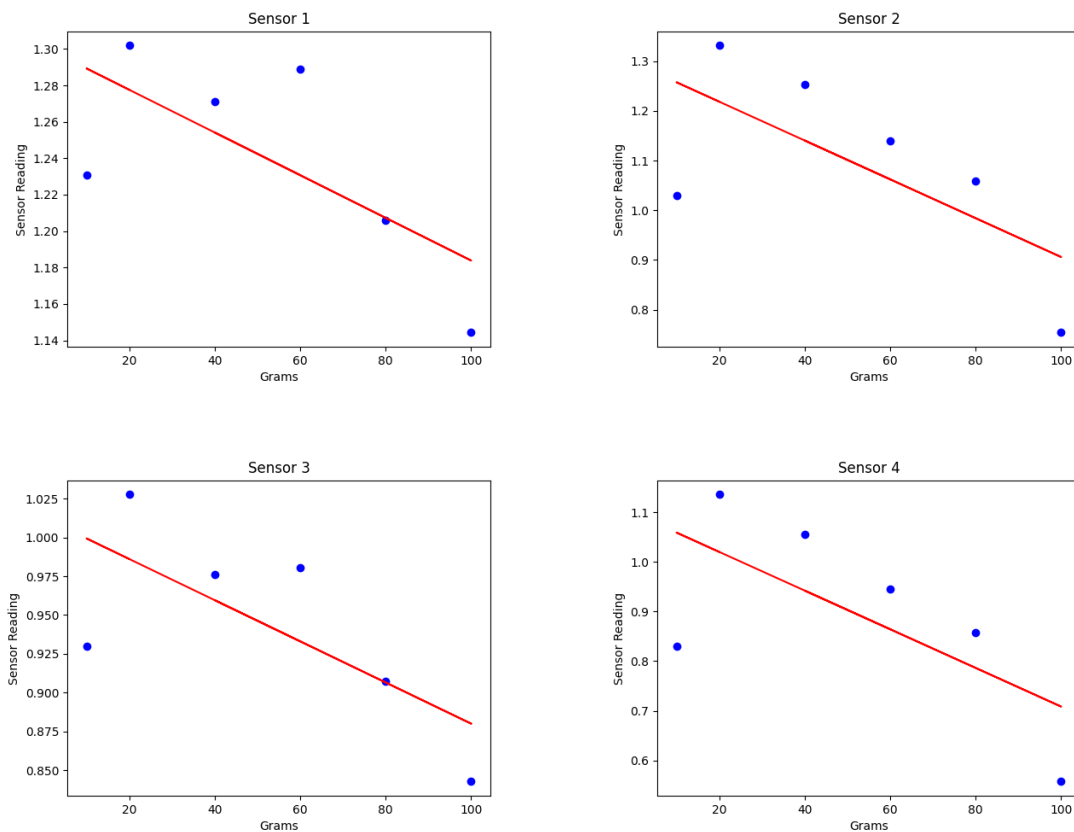


Figura 2. Regressão Linear dos sensores de 1 a 4

```

Performing ANOVA for Sensor 1
ANOVA F-Statistic: 328.6528612288891, p-value: 4.2540252595310486e-226
Performing ANOVA for Sensor 2
ANOVA F-Statistic: 3369.5916088078548, p-value: 0.0
Performing ANOVA for Sensor 3
ANOVA F-Statistic: 340.3643892634592, p-value: 4.4062987213445646e-237
Performing ANOVA for Sensor 4
ANOVA F-Statistic: 4139.031250283735, p-value: 0.0
  
```

Figura 3. ANOVA dos sensores

afetando as medições de turbidez que são detectáveis pelos sensores. Isso pode ser devido às diferentes condições experimentais ou características intrínsecas das amostras que estão sendo medidas.

5. Conclusão

Os dados coletados e analisados demonstram a eficácia do sensor, comprovada através de uma rigorosa análise estatística. Os resultados obtidos não apenas atestam a precisão do sensor em diversas condições, mas também abrem caminho para a sua aplicação em cenários práticos de monitoramento da qualidade da água.

Há um vasto terreno para pesquisa adicional, visando aperfeiçoamentos técnicos que possam expandir ainda mais a utilidade e a aplicabilidade do sensor em uma variedade de contextos de tratamento e análise de água.

Referências

- Bhuyan, M. (2010). *Intelligent Instrumentation: Principles and Applications*. CRC Press, 1st edition.
- Botelho, P. M., Santos, D. M. d., Couto, D. M., and Rebouças, R. C. (2023). Construção de um sensor submerso multinível para a medição da turbidez da Água.
- Hussain, I., Ahamad, K., and Nath, P. (2016). Water turbidity sensing using a smartphone. *RSC Adv.*, 6:22374–22382.
- Mylvaganaru, S. and Jakobsen, T. (1998). Turbidity sensor for underwater applications. In *IEEE Oceanic Engineering Society. OCEANS'98. Conference Proceedings (Cat. No.98CH36259)*, volume 1, pages 158–161 vol.1.
- Trevathan, J., Read, W., and Schmidtke, S. (2020). Towards the development of an affordable and practical light attenuation turbidity sensor for remote near real-time aquatic monitoring. *Sensors*, 20(7).
- World Health Organization (2017). Water quality and health: Review of turbidity. Information note WHO/FWC/WSH/17.01, World Health Organization. Accessed: [your access date].