МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Отчёт по практикуму

Приближенное решение краевой задачи

Студент: Болычев Антон Владимирович
Преподаватель: Лапшин Евгений Александрович

Группа: 409

Москва
2018

1 Постановка задачи

Пусть $u(x,t) : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ и

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ u(0,t) &= u(1,t) \\ u_i(x,0) &= \phi_i(x),\ i=1,2 \end{aligned}$$

Требуется решить задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = c\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases}$$

Введем для удобства матрицу A

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

а также

$$\frac{\partial u}{\partial t} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial u}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

и перепишем формулировку следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial x}$$

2 Необходимые замены

Будем решать задачу для диагонализируемой матрицы A. Возьмем матрицу C, у которой по столбцам будут стоять собственные вектора A, тогда будет справедливо

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \Lambda$$

Положим

$$u = Cv, \quad \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

Тогда наша задача перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial v}{\partial x} \\ v_i(x,0) = \psi_i(x), \quad i=1,2 \\ v(0,t) = v(1,t) \end{cases}$$

3 Построение разностных схем

Таким образом мы свели двумерную задачу к одномерной задаче вида

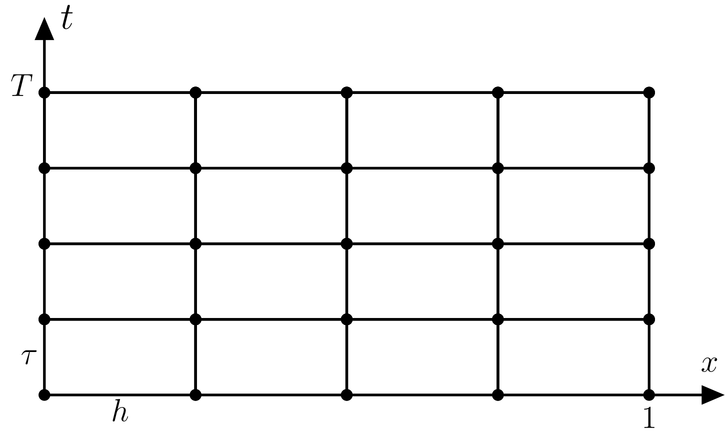
$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \lambda\frac{\partial y}{\partial x} \\ y(0,t) = y(1,t) \\ y(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Замечание 1. *Точное решение y данной задачи определено при $x \in [0,1]$. Мы можем его периодически продолжить на всю действительную прямую. Таким образом, законно считать, что $y(x,t)$ имеет период равный 1 по переменной x.*

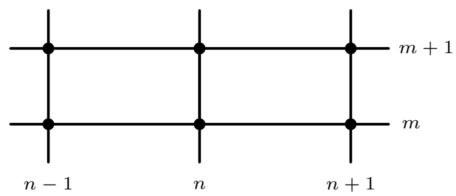
Для её численного решения мы составим разностные схемы трех типов. Будем искать решение на ограниченной области $[0,1] \times [0,T]$, где $T \in (0,+\infty)$. Для этого зафиксируем натуральные числа M, N и положим:

$$\begin{gathered} h = 1/N, \quad \tau = T/M \\ (x_n, t_m) := (nh, m\tau) \end{gathered}$$

таким образом введя сетку на $[0,1] \times [0,T]$:



Для построения разностных схем будем использовать 6-точечный шаблон:

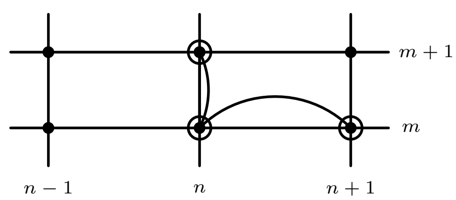


Обозначим $y(x_n, t_m) := y_{n,m}$ и построим схему, которую назовем

3.1 Правый треугольник

$$\begin{cases} \frac{y_{n,m+1}-y_{n,m}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{y_{n+1,m}-y_{n,m}}{h} \\ y_{n,0} = y_{n,N} \\ y_{0,m} = \varphi(x_m) \end{cases}$$

которую по аналогии изобразим:

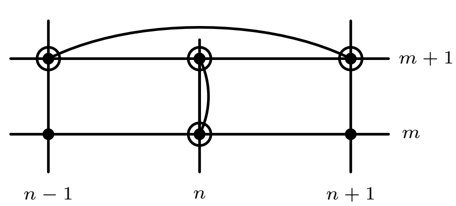


Заметим, что зная все $y_{n,m}$ при фиксированном m, мы можем через них явно выразить все $y_{n,m+1}$, поэтому схема называется *явной*.

3.2 Верхний треугольник

$$\begin{cases} \frac{y_{n,m+1}-y_{n,m}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{y_{n+1,m+1}-y_{n-1,m+1}}{2h} \\ y_{n,0} = y_{n,N} \\ y_{0,m} = \varphi(x_m) \end{cases}$$

которую по аналогии изобразим:



Здесь ситуация обстоит иначе. Мы не можем явно выразить все $y_{n,m+1}$, как это было в предыдущем случае. По этой причине схема называется *неявной*. Чтобы найти $y_{n,m+1}$ при известных $y_{n,m}$ требуется решить систему линейных уравнений. Это можно сделать с помощью метода циклической прогонки.

Циклическая прогонка

Распишем алгоритм решения данной схемы. Для этого перепишем схему в виде:

$$\frac{\lambda\tau}{2h}y_{n-1,m+1} + y_{n,m+1} - \frac{\lambda\tau}{2h}y_{n+1,m+1} = y_{n,m}$$

В силу замечания 1 мы полагаем $y_{n,m} = y_{n+N,m}$ $\forall n, m$. Далее вводим коэффициенты

$$\alpha_i := \frac{\lambda\tau}{2h}, \;\; \beta_i := 1, \;\; \gamma_i := \frac{\lambda\tau}{2h} \quad \forall i = \overline{1, ..., N}$$

вводим переменные $z_n := y_{n,m+1}$ (при этом $z_n = z_{n+N}$ в силу замечания 1) и свободные члены $f_n := y_{n,m}$. Таким образом, имеем систему

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N-2} & \beta_{N-2} & \gamma_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ \gamma_N & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_N & \beta_N \end{pmatrix}}_{M_N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ z_N \end{pmatrix}}_{Z_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ f_N \end{pmatrix}}_{F_N} \tag{1}$$

Теперь пусть M_{N-1} – трёхдиагональная матрица, полученная из M_N вычеркиванием последнего столбца и последней строки, $Z_{N-1} := (z_1, ..., z_{N-1})^T$, $F_{N-1} := (f_1, ..., f_{N-1})^T$, $U = (\underbrace{\alpha_1, 0, 0, ..., 0, \gamma_{N-1}}_{N-1 \text{ элемент}})^T$. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} M_{N-1} \cdot Z_{N-1} + U \cdot z_N = F_{N-1} \\ \gamma_N z_1 + \alpha_N z_{N-1} + \beta_N z_N = f_N \end{cases}$$

И будем искать решение в виде

$$z_n = p_n + q_n z_N, \;\; \text{где} \;\; M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{pmatrix} = F_{N-1}, \;\; M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix} = -U$$

Итак, раз M_{N-1} – трехдиагональная, то системы

$$M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{pmatrix} = F_{N-1}, \;\; M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix} = -U$$

естественно решать методом прогонки, поэтому положим

$$p_n = C_n p_{n+1} + \varphi_n^{(p)}, \quad q_n = C_n q_{n+1} + \varphi_n^{(q)} \;\; \text{для} \;\; n = 1, ..., N-2 \tag{2}$$

Так как $z_n = p_n + q_n z_N$, то, подставляя в данное выражение формулы (2), получим

$$z_n = C_n p_{n+1} + \varphi_n^{(p)} + \left(C_n q_{n+1} + \varphi_n^{(q)}\right) z_N = C_n z_{n+1} + \varphi_n^{(p)} + \varphi_n^{(q)} z_N \tag{3}$$

Мы вычислим коэффициенты $\left\{C_n, \varphi_n^{(p)}, \varphi_n^{(q)}\right\}$ так, чтобы формула (3) выполнялась для всех $n = 1, ..., N-1$.
Этап 1: *Найдем* $\left\{C_n, \varphi_n^{(p)}, \varphi_n^{(q)}\right\}$ *для всех* $n = 1, ...N-1$
Разберемся сначала с $\left\{C_1, \varphi_1^{(p)}, \varphi_1^{(q)}\right\}$. Итак, из первого уравнения системы (1) нам известно:

$$\beta_1 z_1 = \gamma_1 z_2 + f_1 - \alpha_1 z_N$$

поэтому, чтобы было выполнено (3), естественно положить

$$C_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \;\; \varphi_1^{(p)} = \frac{f_1}{\beta_1}, \;\; \varphi_1^{(q)} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

Теперь разберёмся с остальными коэффициентами. Выпишем из системы (1) $n+1$-ое уравнение

$$\alpha_{n+1} z_n + \beta_{n+1} z_{n+1} + \gamma_{n+1} z_{n+2} = f_{n+1},$$

Подставим в него (3):

$$\alpha_{n+1}\left(C_n z_{n+1} + \varphi_n^{(p)} + \varphi_n^{(q)} z_N\right) + \beta_{n+1} z_{n+1} + \gamma_{n+1} z_{n+2} = f_{n+1} \iff$$

$$z_{n+1} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} z_{n+2} + \frac{f_{n+1} - \alpha_{n+1}\varphi_n^{(p)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}\varphi_n^{(q)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} z_N$$

Таким образом, справедливо положить

$$C_{n+1} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}}, \quad \varphi_{n+1}^{(p)} = \frac{f_{n+1} - \alpha_{n+1}\varphi_n^{(p)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}}, \quad \varphi_{n+1}^{(q)} = -\frac{\alpha_{n+1}\varphi_n^{(q)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} \tag{4}$$

Алгоритм нахождения $\left\{C_n, \varphi_n^{(p)}, \varphi_n^{(q)}\right\}$ для всех n следующий: зная тройку $\left\{C_1, \varphi_1^{(p)}, \varphi_1^{(q)}\right\}$, можно, используя (4), найти $\left\{C_2, \varphi_2^{(p)}, \varphi_2^{(q)}\right\}$, затем, снова подставляя в (4) найденные $\left\{C_2, \varphi_2^{(p)}, \varphi_2^{(q)}\right\}$, вычислить $\left\{C_3, \varphi_3^{(p)}, \varphi_3^{(q)}\right\}$ и так далее:

$$\left\{C_1, \varphi_1^{(p)}, \varphi_1^{(q)}\right\} \xrightarrow{(4)} \left\{C_2, \varphi_2^{(p)}, \varphi_2^{(q)}\right\} \xrightarrow{(4)} \left\{C_3, \varphi_3^{(p)}, \varphi_3^{(q)}\right\} \xrightarrow{(4)} ... \xrightarrow{(4)} \left\{C_{N-1}, \varphi_{N-1}^{(p)}, \varphi_{N-1}^{(q)}\right\}$$

Этап 2: *Найдем* p_n, q_n *для* $n = \overline{1, ..., N-1}$. Итак,

$$\begin{cases} z_{N-1} = p_{N-1} + q_{N-1} z_N \\ z_{N-1} = C_{N-1} z_N + \varphi_{N-1}^{(p)} + \varphi_{N-1}^{(q)} z_N \end{cases}$$

то есть

$$p_{N-1} = \varphi_{N-1}^{(p)}, \;\; q_{N-1} = C_{N-1} + \varphi_{N-1}^{(q)}$$

Теперь пользуясь формулой (2), можем найти все остальные p_n, q_n:

$$\{p_{N-1}, q_{N-1}\} \xrightarrow{(2)} \{p_{N-2}, q_{N-2}\} \xrightarrow{(2)} \ldots \xrightarrow{(2)} \{p_1, q_1\}$$

Этап 3: *Найдем* $z_1, ..., z_N$ Начнем с z_N. Напишем систему:

$$\begin{cases} z_1 = p_1 + q_1 z_N \\ z_{N-1} = p_{N-1} + q_{N-1} z_N \\ \gamma_N z_1 + \alpha_N z_{N-1} + \beta_N z_N = f_N \end{cases} \implies z_N = \frac{f_N - \gamma_N p_1 - \alpha_N p_{N-1}}{\beta_N + \gamma_N q_1 + \alpha_N q_{N-1}}$$

Далее используя формулу $z_n = p_n + q_n z_N$, найдем остальные $z_1, z_2, z_3, ..., z_{N-1}$.

Устойчивость метода циклической прогонки
Для устойчивости метода достаточно, чтобы $|\beta_i| \geqslant |\alpha_i| + |\gamma_i| \;\; \forall i$, то есть $1 \geqslant |\lambda|\frac{\tau}{h} \iff \frac{\tau}{h} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}$

4 Аппроксимация

Пусть y – решение нашей задачи. Подставим его в

4.1 Правый треугольник

$$\frac{y(x_n,t_{m+1})-y(x_n,t_m)}{\tau}-\lambda\cdot\frac{y(x_{n+1},t_m)-y(x_n,t_m)}{h}=$$
$$=\frac{1}{\tau}\cdot\Big[y(x_n,t_m)+\tau y'_t(x_n,t_m)+O(\tau^2)-y(x_n,t_m)\Big]-\frac{\lambda}{h}\cdot\Big[y(x_n,t_m)+hy'_x(x_n,t_m)+O(h^2)-y(x_n,t_m)\Big]=$$
$$=O(\tau+h) \quad (5)$$

4.2 Верхний треугольник

$$\frac{y(x_n,t_{m+1})-y(x_n,t_m)}{\tau}-\lambda\cdot\frac{y(x_{n+1},t_{m+1})-y(x_{n-1},t_{m+1})}{2h}=$$
$$=\frac{1}{\tau}\cdot\Big[y(x_n,t_m)+\tau y'_t(x_n,t_m)+O(\tau^2)-y(x_n,t_m)\Big]-$$
$$-\frac{\lambda}{2h}\cdot\Big[y(x_n,t_{m+1})+hy'_x(x_n,t_m)+\frac{h^2}{2}y''_{xx}(x_n,t_m)-y(x_n,t_{m+1})+hy'_x(x_n,t_m)-\frac{h^2}{2}y''_{xx}(x_n,t_m)+O(h^3)\Big]=$$
$$=O(\tau+h^2)$$

4.3 Вводим определение аппроксимации

Итак, пусть требуется решить задачу
$$\mathcal{L}u(\overline{x})=f(\overline{x}),\ \ \overline{x}\in G, \tag{6}$$
где $\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор, G – область m-мерного пространства, $f(\overline{x})$ – заданная функция. Для её решения сначала вводится сетка G_η, состоящая из конечного множества точек, принадлежащих G, плотность распределения которых характеризуется вектором η (в нашем случае $\eta=(h,\tau)$, а $G_\eta=G_{(h,\tau)}=\big\{(x_n,t_m),\ \ n=\overline{0,1,...N},\ \ m=\overline{0,1,...M}\big\}$). Затем строится разностная схема с разностным оператором $\mathcal{L}_\eta$
$$\mathcal{L}_\eta v(\overline{x})=\varphi_\eta(\overline{x}),\ \ \overline{x}\in G_\eta \tag{7}$$
решение $(v(\overline{x}),\overline{x}\in G_\eta)$ которой претендует на то, чтобы быть приближением решения $(u(\overline{x}),\overline{x}\in G)$ задачи (6). Теперь обозначим проекцию решения $u(\overline{x})$ задачи (6) на сетку G_η как $[u]_\eta(\overline{x})$, положив
$$[u]_\eta(\overline{x})=u(\overline{x})\big|_{\overline{x}\in G_\eta}$$
а также зафиксируем норму $||\cdot||_\eta$, в рамках нашей задачи положив $||\cdot||_\eta=||\cdot||_{(h,\tau)}$, введя следующее

Определение 4.1. *Пусть w – функция, определенная на $G_{(h,\tau)}$, тогда*
$$||w||_{(h,\tau)}=\tau h\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}|w(x_n,\tau_m)|$$

Определение 4.2. *Говорят, что разностная задача* (7) *аппроксимирует* (6)*, если*
$$||\varphi_\eta(\overline{x})-\mathcal{L}_\eta[u]_\eta(\overline{x})||_\eta\to 0,\ \ |\eta|\to 0$$

4.4 Доказательство аппроксимации

практически завершено. В самом деле, в рамках нашей задачи для доказательства аппроксимации осталось посчитать норму из определения 4.1. Для правого и левого треугольников она будет равна

$$\tau h \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} O(\tau + h) = O(\tau + h)$$

а для верхнего

$$\tau h \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} O(\tau + h^2) = O(\tau + h^2)$$

5 Устойчивость

В линейных задачах для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы всякое решение разностной схемы было равномерно ограничено по m. Рассмотрим частное решение в виде гармоники $y_{n,m} = \mu^m e^{in\alpha}$ и подставим его в схему

5.1 Правый треугольник

$$\frac{\mu^{m+1} e^{in\alpha} - \mu^m e^{in\alpha}}{\tau} = \lambda \frac{\mu^m e^{i(n+1)\alpha} - \mu^m e^{in\alpha}}{h}$$

Отсюда сокращая на $\mu^m e^{in\alpha}$ получаем, что

$$\frac{\mu - 1}{\tau} = \lambda \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} \Longleftrightarrow \mu = \lambda \frac{\tau}{h} \left(e^{i\alpha} - 1\right) + 1$$

Посчитаем $|\mu|^2$:

$$|\mu|^2 = \mu \cdot \overline{\mu} = \left(\lambda \frac{\tau}{h} \left(e^{i\alpha} - 1\right) + 1\right) \cdot \left(\lambda \frac{\tau}{h} \left(e^{-i\alpha} - 1\right) + 1\right) = 1 + 4 \cdot \lambda \frac{\tau}{h} \cdot \left[\lambda \frac{\tau}{h} - 1\right] \cdot \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Таким образом при $\lambda < 0$ получаем, что для $\forall \tau, h$ число $|\mu| > 1 \Rightarrow |y_{n,m}| = \mu^m \to \infty \ \forall \tau, h$, то есть схема будет *безусловно неустойчивой.*

Теперь рассмотрим случай $\lambda > 0$. Легко видеть что решение $y_{n,m}$ равномерно ограничено по m для всех α, если и только если $\mu \leqslant 1$. Таким образом, схема является устойчивой при $0 < \lambda \frac{\tau}{h} \leqslant 1$ (так как в этом случае $\mu \leqslant 1$). При $\lambda \frac{\tau}{h} > 1$ легко видеть, что $\mu > 1$, то есть устойчивости не будет. Таким образом, при $\lambda > 0$ схема является *условно устойчивой*

5.2 Верхний треугольник

Действуем аналогично: подставляем $y_{n,m} = \mu^m e^{in\alpha}$ в соответствующую разностную схему и после сокращения на $\mu^m e^{in\alpha}$ получаем

$$\frac{\mu - 1}{\tau} = \lambda \mu \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h}$$

Выражаем отсюда

$$\mu = \frac{1}{1 - i\lambda \frac{\tau}{2h} \sin(\alpha)} \Rightarrow |\mu|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2 \frac{\tau^2}{4h^2} \sin^2(\alpha)} \leqslant 1$$

Таким образом, $|\mu| \leqslant 1 \ \forall \tau, h \Rightarrow \forall \tau, h \ y_{n,m}$ равномерно ограничено по $m \Rightarrow$ схема *безусловно устойчива.*

6 Набор начальных функций

6.1 Первый набор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi x) \\ \cos(2\pi x) \end{pmatrix}$$

Мотивировка выбора данного набора следующая: в качестве первого набора стоит взять что-нибудь простое, чтобы посмотреть как работают разностные схемы в тривиальных случаях. Легко проверить, что точное решение будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi(x+t)) \\ \cos(2\pi(x+t)) \end{pmatrix}$$

6.2 Второй набор

Теперь в качестве ϕ_1 возьмем какую-нибудь гладкую функцию и зашумим её мелкими колебаниями, а в качестве ϕ_2 – уголок $|x - 1/2|$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) + 0.1\sin(50\pi x) \\ |x - 1/2| \end{pmatrix}$$

Если мы будем использовать явную разностную схему с $\lambda\frac{\tau}{h} = 1$, то график решения будет просто периодически "переноситься" при увеличении t. При $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$ для явной схемы мелкое колебание $0.1\sin(50\pi x)$ будет сглаживаться и в конце концов исчезнет, а уголок $|x - 1/2|$ в конце концов сгладиться. Явление можно объяснить следующим образом: если расписать аппроксимацию схемы правый треугольник (5) подробнее, то можно увидеть, что полученное $O(\tau + h)$ на самом деле равняется

$$O(\tau + h) = \frac{\lambda h}{2}\left(1 - \lambda\frac{\tau}{h}\right) y''_{xx} + \left(1 - \lambda\frac{\tau}{h}\right)\cdot(...)$$

то есть при $\lambda\frac{\tau}{h} = 1$ решение будет находиться точно (отсюда и возникает явление "переноса"), а при $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$ мы будем явление сглаживания из-за наличия дополнительных членов в разложении для аппроксимации.

Если говорить о неявной схеме, то при $\lambda\frac{\tau}{h} \leqslant 1$ (достаточное условие устойчивости циклической прогонки) мы будем наблюдать ситуацию, аналогичную случаю $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$ для явной схемы.

6.3 Третий набор

Теперь возьмем разрывные функции:

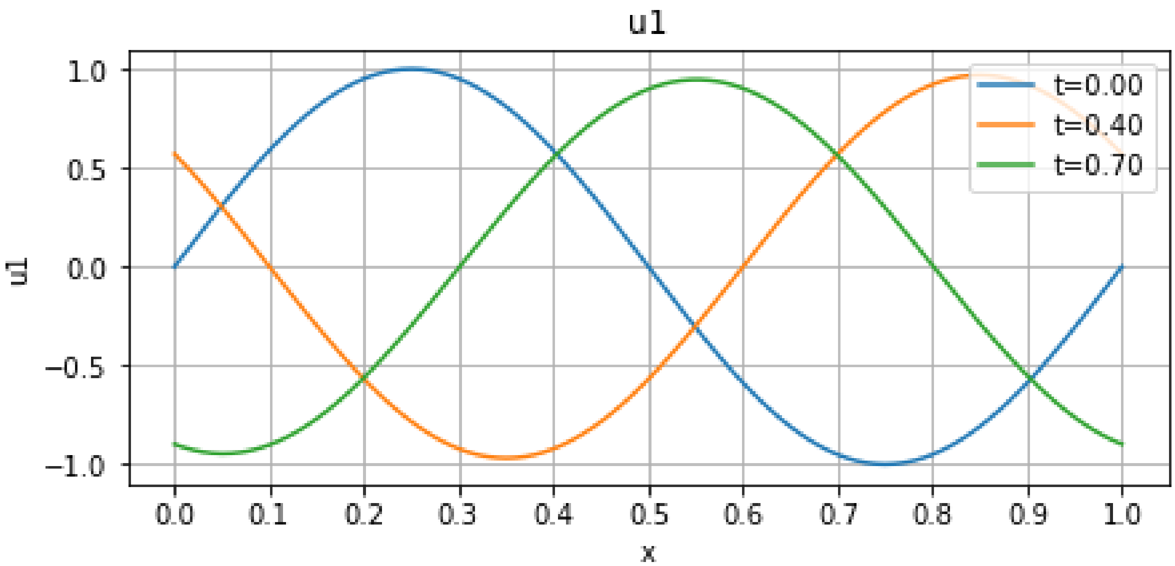
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\{x>1/2\}}(x) \\ \mathbf{1}_{\{1/4<x<3/4\}}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

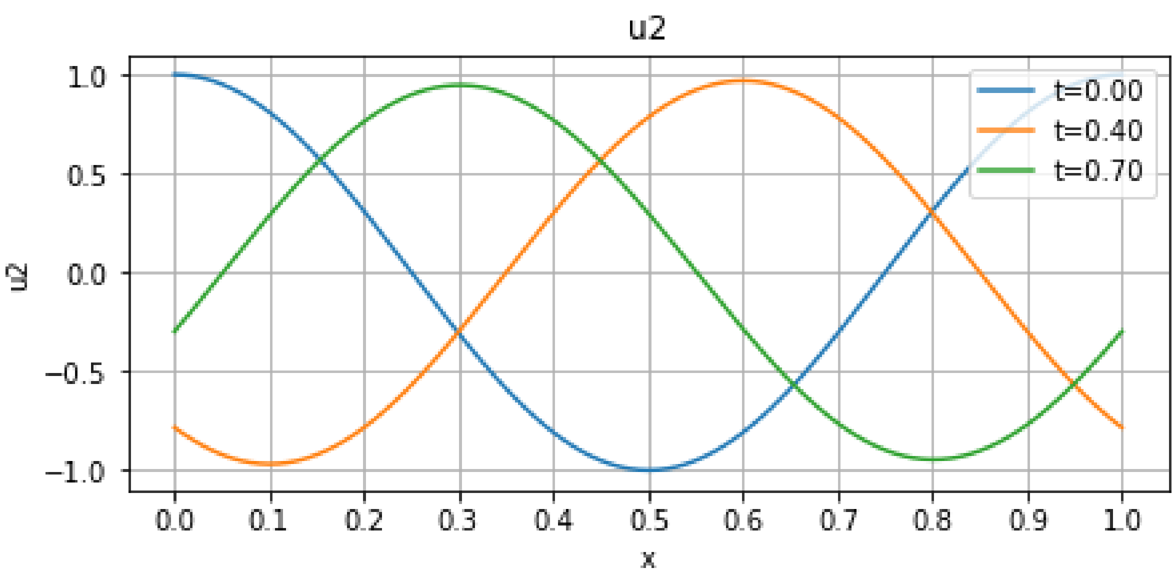
Ситуация аналогичная: при подстановке в явную схему при $\lambda\frac{\tau}{h} = 1$ график решения будет периодически "переноситься" с увеличением t. При $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$ явная схема будет сглаживать разрывы. С неявной схемой будет происходить следующее: при $\lambda\frac{\tau}{h} = 1$ у решения будет возникать участки частых колебаний, разрывы будут сглаживаться аналогично неявной схеме, при $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$ помимо осциллирующих участков будут также возникать колебания в окрестности сглаженного разрыва.

7 Результаты счёта

7.1 Первый набор

7.1.1 Явная схема $\lambda \frac{\tau}{h} < 1$



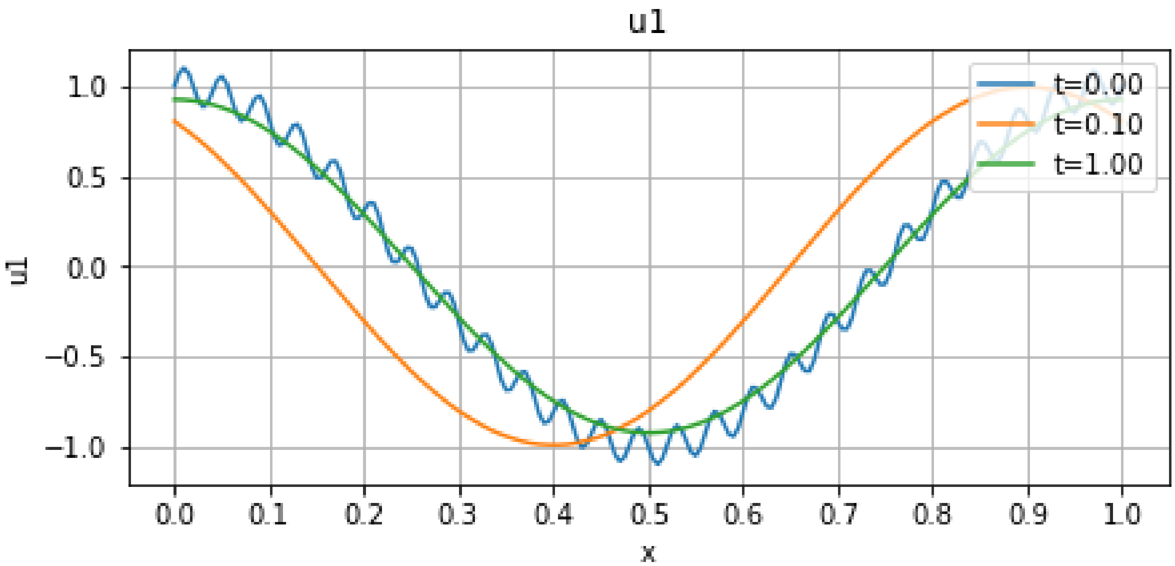


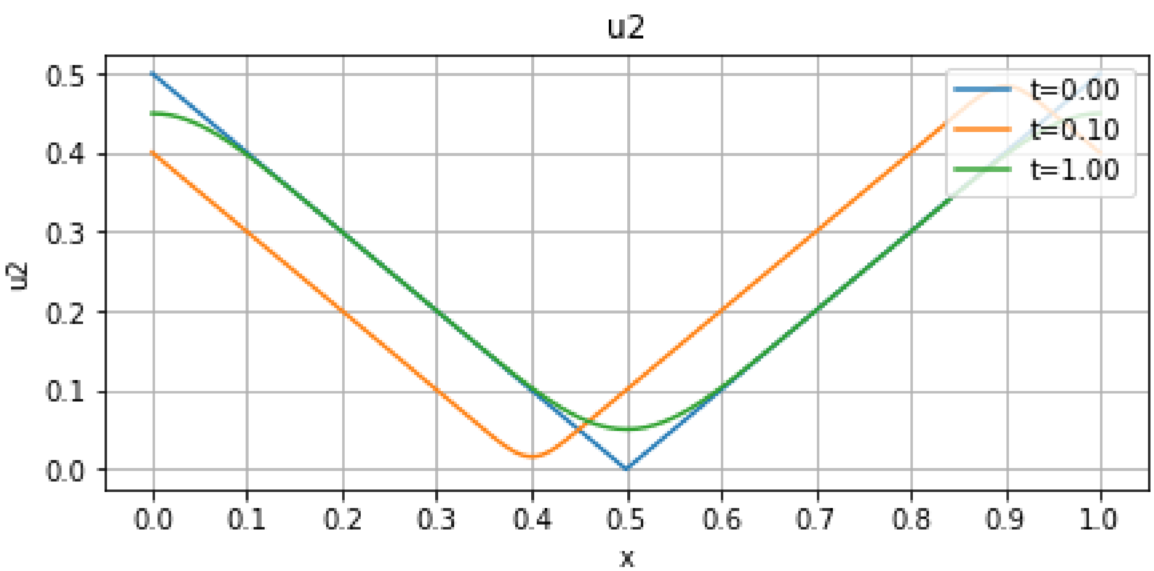
7.1.2 Остальные случаи

При $\lambda \frac{\tau}{h} \leqslant 1$ в неявной и явных схем результаты аналогичны предыдущему

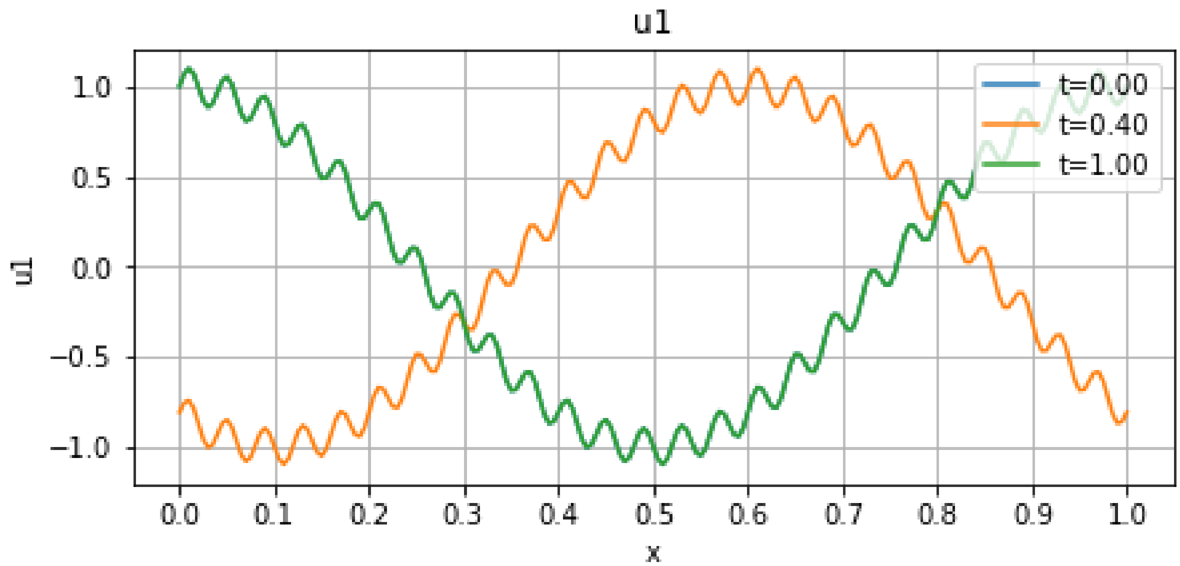
7.2 Второй набор

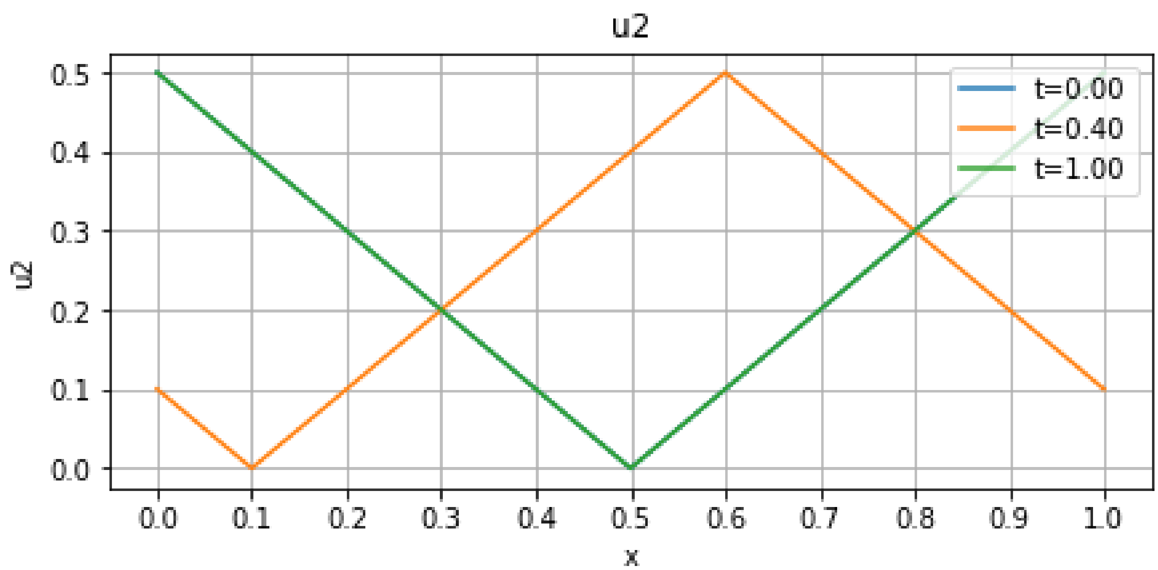
7.2.1 Явная схема $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$





7.2.2 Явная схема $\lambda\frac{\tau}{h} = 1$



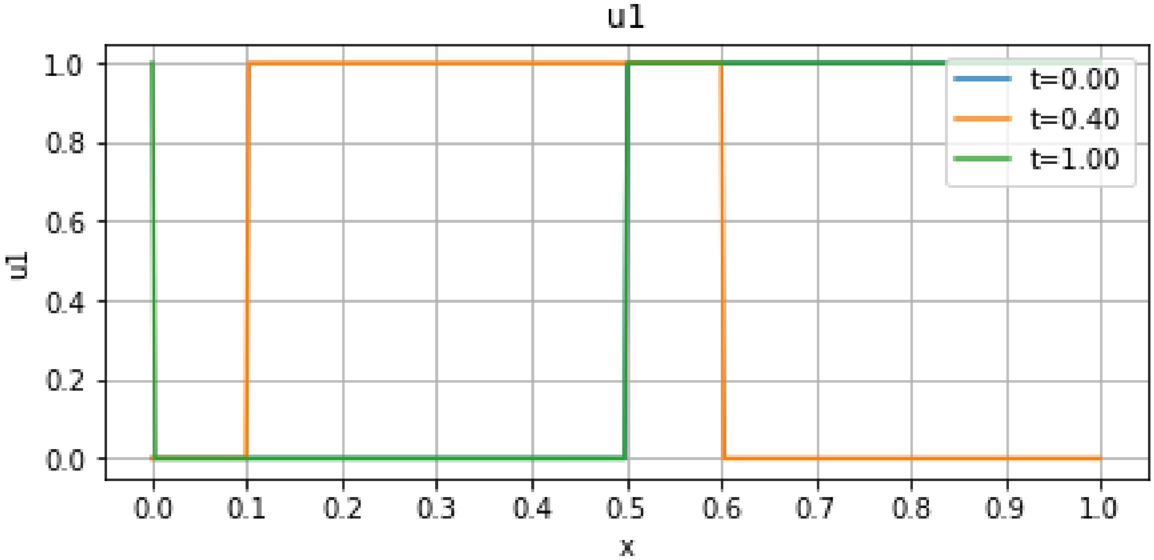


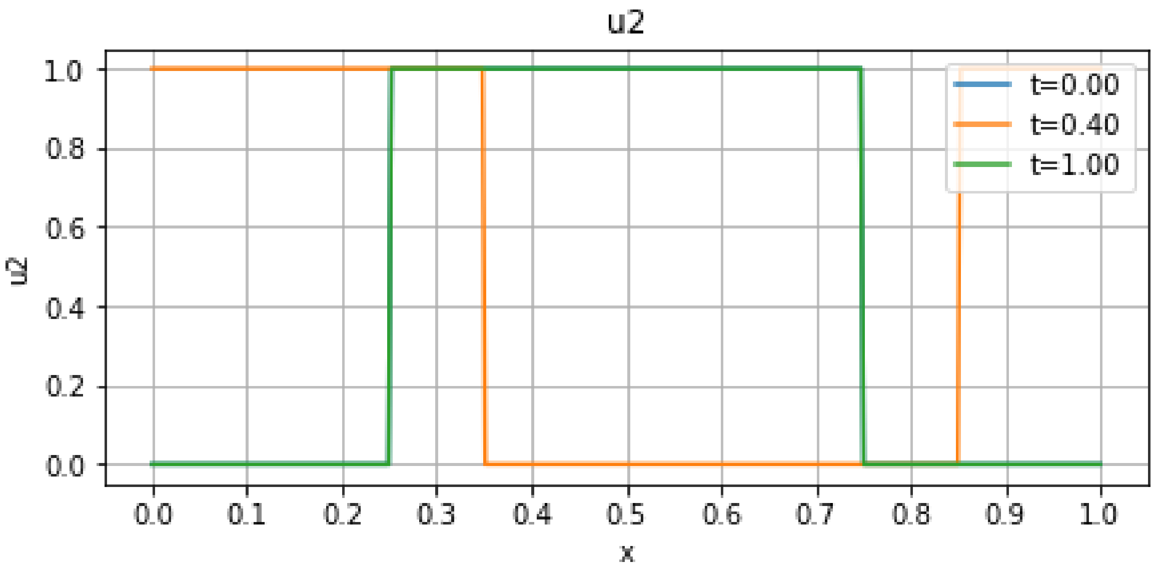
7.2.3 Неявная схема $\lambda\frac{\tau}{h} \leqslant 1$

Результаты аналогичны случаю явной схемы $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$

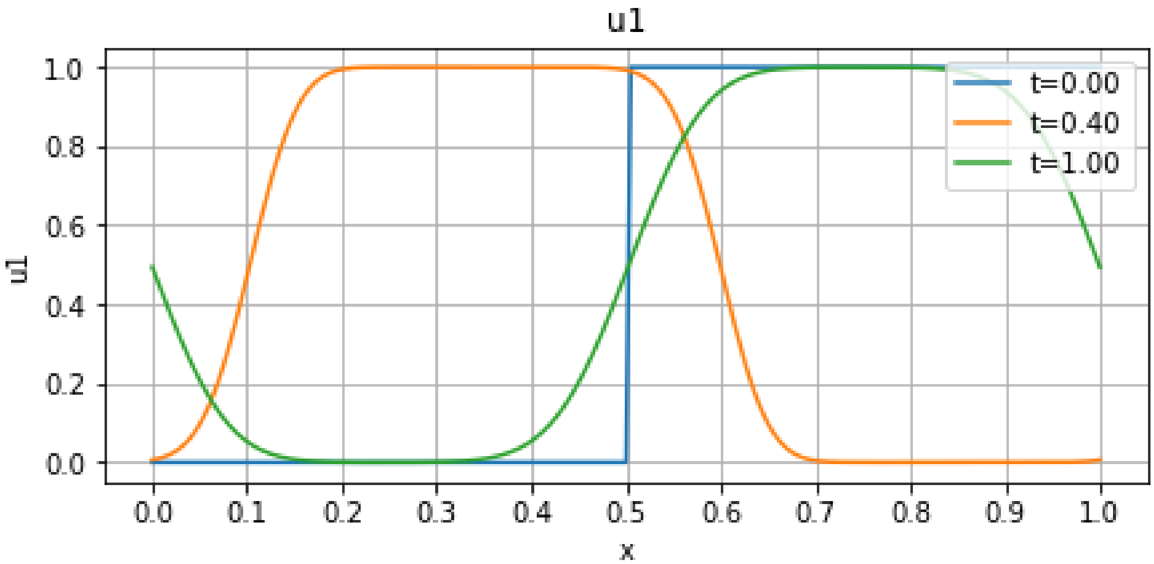
7.3 Третий набор

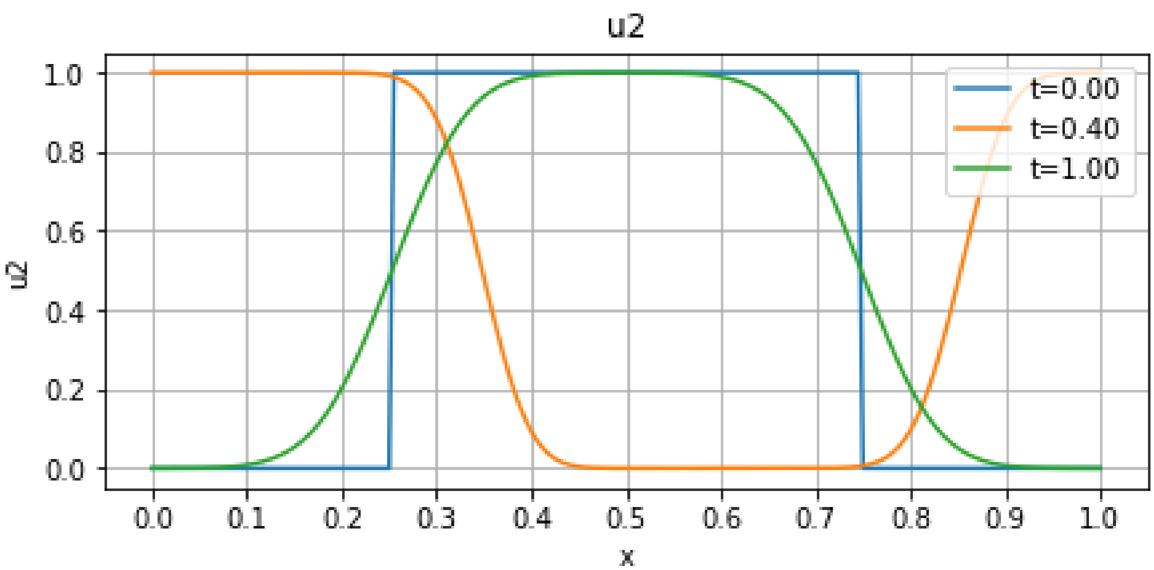
7.3.1 Явная схема $\lambda\frac{\tau}{h} = 1$



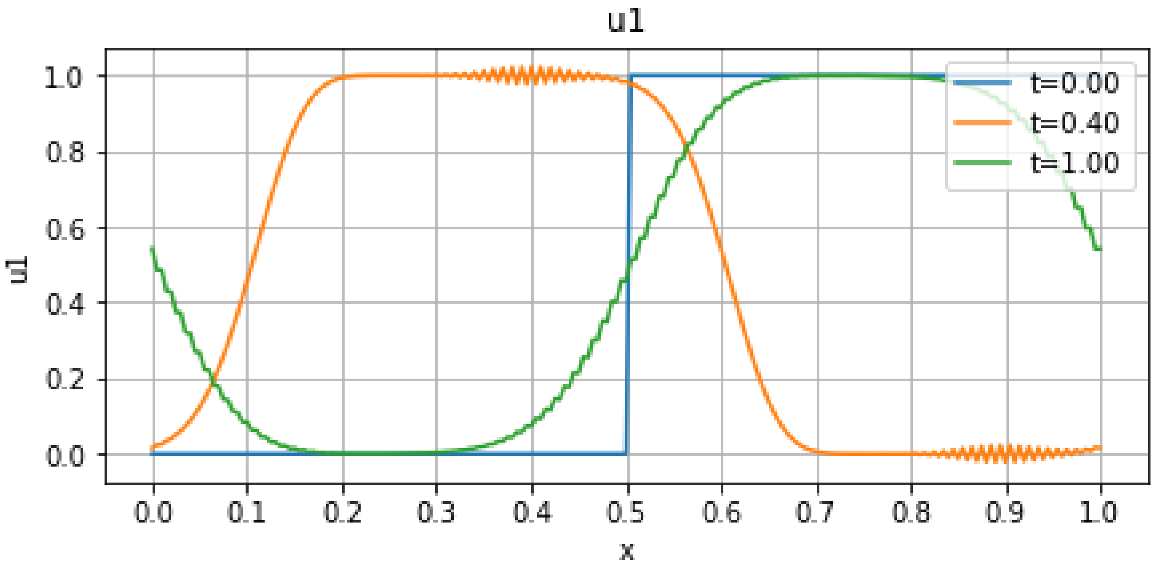


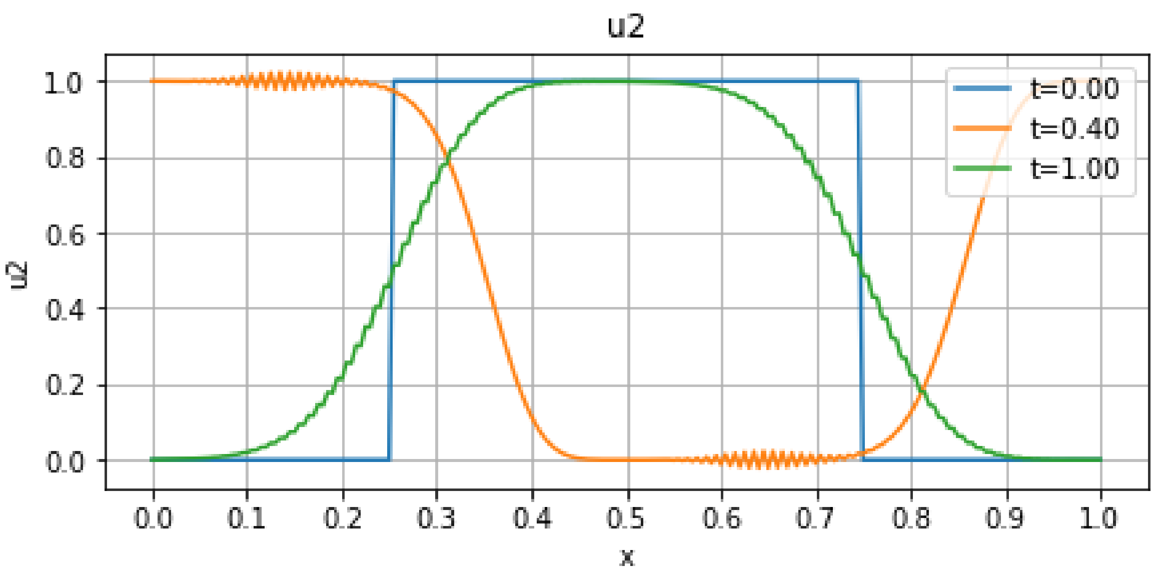
7.3.2 Явная схема $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$





7.3.3 Неявная схема $\lambda \frac{\tau}{h} = 1$





7.3.4 Неявная схема $\lambda\frac{\tau}{h} < 1$