МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Отчёт по практикуму

Приближенное решение краевой задачи

Студент:	Болычев Антон Владимирович
Преподаватель:	Лапшин Евгений Александрович
Группа:	409

Москва
2018

1 Постановка задачи

Пусть $u(x,t) : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ и

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ u(0,t) &= u(1,t) \\ u_i(x,0) &= \phi_i(x),\ i = 1,2 \end{aligned}$$

Требуется решить задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = c\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases}$$

Введем для удобства матрицу A

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

а также

$$\frac{\partial u}{\partial t} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial u}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

и перепишем формулировку следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial x}$$

2 Необходимые замены

Будем решать задачу для диагонализируемой матрицы A. Возьмем матрицу C, у которой по столбцам будут стоять собственные вектора A, тогда будет справедливо

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \Lambda$$

Положим

$$u = Cv, \quad \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

Тогда наша задача перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \Lambda\frac{\partial v}{\partial x} \\ v_i(x,0) = \psi_i(x), \quad i = 1,2 \\ v(0,t) = v(1,t) \end{cases}$$

3 Построение разностных схем

Таким образом мы свели двумерную задачу к одномерной задаче вида

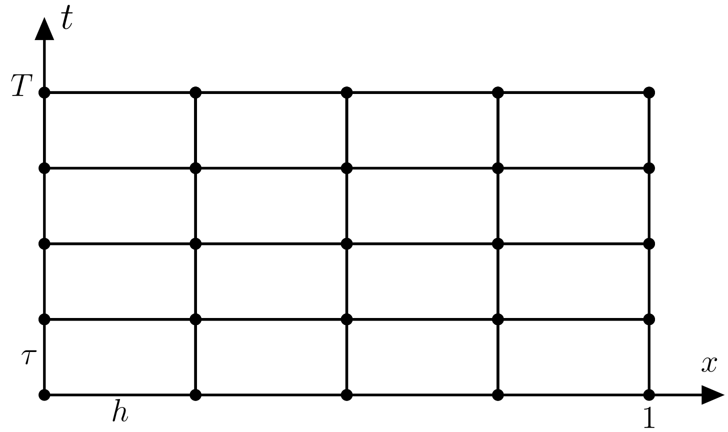
$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \lambda\frac{\partial y}{\partial x} \\ y(0,t) = y(1,t) \\ y(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Замечание 1. *Точное решение y данной задачи определено при $x \in [0,1]$. Мы можем его периодически продолжить на всю действительную прямую. Таким образом, законно считать, что $y(x,t)$ имеет период равный 1 по переменной x.*

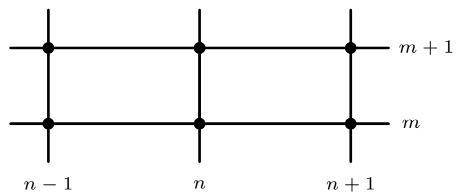
Для её численного решения мы составим разностные схемы трех типов. Будем искать решение на ограниченной области $[0,1] \times [0,T]$, где $T \in (0,+\infty)$. Для этого зафиксируем натуральные числа M, N и положим:

$$h = 1/N, \quad \tau = T/M$$
$$(x_n, t_m) := (nh, m\tau)$$

таким образом введя сетку на $[0,1] \times [0,T]$:



Для построения разностных схем будем использовать 6-точечный шаблон:

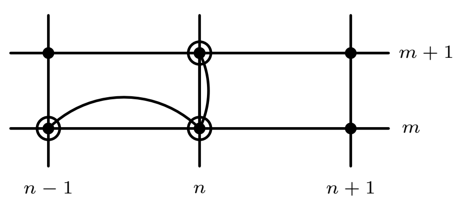


Обозначим $y(x_n, t_m) := y_{n,m}$ и построим схему, которую назовем

3.1 Левый треугольник

$$\begin{cases} \frac{y_{n,m+1} - y_{n,m}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{y_{n,m} - y_{n-1,m}}{h} \\ y_{n,0} = y_{n,N} \\ y_{0,m} = \varphi(x_m) \end{cases}$$

Условно изобразим её следующим образом:

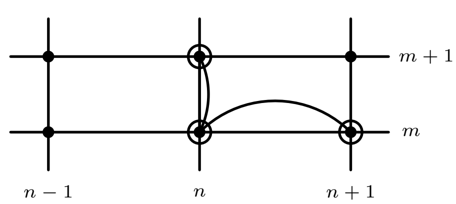


Теперь построим схему

3.2 Правый треугольник

$$\begin{cases} \frac{y_{n,m+1} - y_{n,m}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{y_{n+1,m} - y_{n,m}}{h} \\ y_{n,0} = y_{n,N} \\ y_{0,m} = \varphi(x_m) \end{cases}$$

которую по аналогии изобразим:



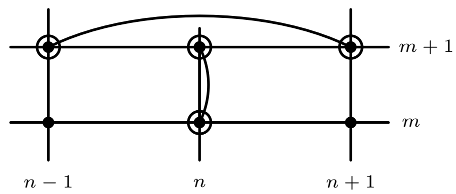
Алгоритм решения данных схем довольно прост:

И наконец

3.3 Верхний треугольник

$$\begin{cases} \frac{y_{n,m+1}-y_{n,m}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{y_{n+1,m+1}-y_{n-1,m+1}}{2h} \\ y_{n,0} = y_{n,N} \\ y_{0,m} = \varphi(x_m) \end{cases}$$

которую по аналогии изобразим:



Циклическая прогонка

Распишем алгоритм решения данной схемы. Для этого перепишем схему в виде:

$$\frac{\lambda\tau}{2h} y_{n-1,m+1} + y_{n,m+1} - \frac{\lambda\tau}{2h} y_{n+1,m+1} = y_{n,m}$$

В силу замечания 1 мы полагаем $y_{n,m} = y_{n+N,m}$ $\forall n, m$. Далее вводим коэффициенты

$$\alpha_i := \frac{\lambda\tau}{2h},\ \ \beta_i := 1,\ \ \gamma_i := \frac{\lambda\tau}{2h} \quad \forall i = \overline{1, ..., N}$$

вводим переменные $z_n := y_{n,m+1}$ (при этом $z_n = z_{n+N}$ в силу замечания 1) и свободные члены $f_n := y_{n,m}$. Таким образом, имеем систему

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{N-2} & \beta_{N-2} & \gamma_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ \gamma_N & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_N & \beta_N \end{pmatrix}}_{M_N} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ z_N \end{pmatrix}}_{Z_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ f_N \end{pmatrix}}_{F_N} \tag{1}$$

Теперь пусть M_{N-1} – трёхдиагональная матрица, полученная из M_N вычеркиванием последнего столбца и последней строки, $Z_{N-1} := (z_1, ..., z_{N-1})^T$, $F_{N-1} := (f_1, ..., f_{N-1})^T$, $U = (\underbrace{\alpha_1, 0, 0, ..., 0, \gamma_{N-1}}_{N-1 \text{ элемент}})^T$. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} M_{N-1} \cdot Z_{N-1} + U \cdot z_N = F_{N-1} \\ \gamma_N z_1 + \alpha_N z_{N-1} + \beta_N z_N = f_N \end{cases}$$

И будем искать решение в виде

$$z_n = p_n + q_n z_N,\ \ \text{где}\ \ M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{pmatrix} = F_{N-1},\ \ M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix} = -U$$

Итак, раз M_{N-1} – трехдиагональная, то системы

$$M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{pmatrix} = F_{N-1},\ \ M_{N-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix} = -U$$

естественно решать методом прогонки, поэтому положим

$$p_n = C_n p_{n+1} + \varphi_n^{(p)}, \quad q_n = C_n q_{n+1} + \varphi_n^{(q)} \text{ для } n = 1, ..., N-2 \tag{2}$$

Так как $z_n = p_n + q_n z_N$, то, подставляя в данное выражение формулы (2), получим

$$z_n = C_n p_{n+1} + \varphi_n^{(p)} + \left(C_n q_{n+1} + \varphi_n^{(q)}\right) z_N = C_n z_{n+1} + \varphi_n^{(p)} + \varphi_n^{(q)} z_N \tag{3}$$

Мы вычислим коэффициенты $\left\{C_n, \varphi_n^{(p)}, \varphi_n^{(q)}\right\}$ так, чтобы формула (3) выполнялась для всех $n = 1, ..., N-1$.

Этап 1: *Найдем* $\left\{C_n, \varphi_n^{(p)}, \varphi_n^{(q)}\right\}$ *для всех* $n = 1, ...N-1$

Разберемся сначала с $\left\{C_1, \varphi_1^{(p)}, \varphi_1^{(q)}\right\}$. Итак, из первого уравнения системы (1) нам известно:

$$\beta_1 z_1 = \gamma_1 z_2 + f_1 - \alpha_1 z_N$$

поэтому, чтобы было выполнено (3), естественно положить

$$C_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1}, \ \ \varphi_1^{(p)} = \frac{f_1}{\beta_1}, \ \ \varphi_1^{(q)} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}$$

Теперь разберёмся с остальными коэффициентами. Выпишем из системы (1) $n+1$-ое уравнение

$$\alpha_{n+1} z_n + \beta_{n+1} z_{n+1} + \gamma_{n+1} z_{n+2} = f_{n+1},$$

Подставим в него (3):

$$\alpha_{n+1}\left(C_n z_{n+1} + \varphi_n^{(p)} + \varphi_n^{(q)} z_N\right) + \beta_{n+1} z_{n+1} + \gamma_{n+1} z_{n+2} = f_{n+1} \Longleftrightarrow$$

$$z_{n+1} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} z_{n+2} + \frac{f_{n+1} - \alpha_{n+1}\varphi_n^{(p)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}\varphi_n^{(q)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} z_N$$

Таким образом, справедливо положить

$$C_{n+1} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}}, \quad \varphi_{n+1}^{(p)} = \frac{f_{n+1} - \alpha_{n+1}\varphi_n^{(p)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}}, \quad \varphi_{n+1}^{(q)} = -\frac{\alpha_{n+1}\varphi_n^{(q)}}{\alpha_{n+1} C_n + \beta_{n+1}} \tag{4}$$

Алгоритм нахождения $\left\{C_n, \varphi_n^{(p)}, \varphi_n^{(q)}\right\}$ для всех n следующий: зная тройку $\left\{C_1, \varphi_1^{(p)}, \varphi_1^{(q)}\right\}$, можно, используя (4), найти $\left\{C_2, \varphi_2^{(p)}, \varphi_2^{(q)}\right\}$, затем, снова подставляя в (4) найденные $\left\{C_2, \varphi_2^{(p)}, \varphi_2^{(q)}\right\}$, вычислить $\left\{C_3, \varphi_3^{(p)}, \varphi_3^{(q)}\right\}$ и так далее:

$$\left\{C_1, \varphi_1^{(p)}, \varphi_1^{(q)}\right\} \xrightarrow{(4)} \left\{C_2, \varphi_2^{(p)}, \varphi_2^{(q)}\right\} \xrightarrow{(4)} \left\{C_3, \varphi_3^{(p)}, \varphi_3^{(q)}\right\} \xrightarrow{(4)} ... \xrightarrow{(4)} \left\{C_{N-1}, \varphi_{N-1}^{(p)}, \varphi_{N-1}^{(q)}\right\}$$

Этап 2: *Найдем* p_n, q_n *для* $n = \overline{1, ..., N-1}$. Итак,

$$\begin{cases} z_{N-1} = p_{N-1} + q_{N-1} z_N \\ z_{N-1} = C_{N-1} z_N + \varphi_{N-1}^{(p)} + \varphi_{N-1}^{(q)} z_N \end{cases}$$

то есть

$$p_{N-1} = \varphi_{N-1}^{(p)}, \ \ q_{N-1} = C_{N-1} + \varphi_{N-1}^{(q)}$$

Теперь пользуясь формулой (2), можем найти все остальные p_n, q_n:

$$\{p_{N-1}, q_{N-1}\} \xrightarrow{(2)} \{p_{N-2}, q_{N-2}\} \xrightarrow{(2)} \dots \xrightarrow{(2)} \{p_1, q_1\}$$

Этап 3: *Найдем* $z_1, ..., z_N$ Начнем с z_N. Напишем систему:

$$\begin{cases} z_1 = p_1 + q_1 z_N \\ z_{N-1} = p_{N-1} + q_{N-1} z_N \\ \gamma_N z_1 + \alpha_N z_{N-1} + \beta_N z_N = f_N \end{cases} \implies z_N = \frac{f_N - \gamma_N p_1 - \alpha_N p_{N-1}}{\beta_N + \gamma_N q_1 + \alpha_N q_{N-1}}$$

Далее используя формулу $z_n = p_n + q_n z_N$, найдем остальные $z_1, z_2, z_3, ..., z_{N-1}$.

Устойчивость метода прогонки

Для устойчивости метода достаточно, чтобы $|\beta_n| \geqslant |\alpha_n| + |\gamma_n|$, то есть $1 \geqslant |\lambda|\frac{\tau}{h} \Longleftrightarrow \frac{\tau}{h} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}$

4 Исследование на устойчивость схем

Утверждение. *Схема "левый треугольник" устойчива, если*

$$\lambda < 0, \quad -\lambda\frac{\tau}{h} \leqslant 1$$

Схема "правый треугольник" устойчива, если

$$\lambda > 0, \quad \lambda\frac{\tau}{h} \leqslant 1$$

Доказательство. Докажем для схемы "правый треугольник" (для "левого треугольника" всё доказывается аналогично). Пусть мы допустили ошибку δ на $y_{n,m}$:

$$y_{n,m}^{(\delta)} = y_{n,m} + \delta$$

Тогда выражая $y_{n,m+1}$ через ошибочный $y_{n,m}^{(\delta)}$, получим, что ошибка при вычислении $y_{n,m+1}$ будет равна $\left(1 - \frac{\tau}{h}\lambda\right)\delta$:

$$y_{n,m+1}^{(\delta)} = y_{n,m+1} + \left(1 - \frac{\tau}{h}\lambda\right)\delta$$

А при вычислении $y_{n-1,m+1}$ получим ошибку $\frac{\tau}{h}\lambda\delta$:

$$y_{n-1,m+1}^{(\delta)} = y_{n-1,m+1} + \frac{\tau}{h}\lambda\delta$$

В обоих случаях величины ошибок при последующих вычислениях лежат в $[-|\delta|, |\delta|]$. Таким образом, если в какой-то момент допущена ошибка, то при последующих вычислениях она не будет расти $\Rightarrow$ устойчивость доказана.

$\square$

5 Аппроксимация

Пусть y – решение нашей задачи. Подставим его в

5.1 Левый треугольник

$$\frac{y(x_n, t_{m+1}) - y(x_n, t_m)}{\tau} - \lambda \cdot \frac{y(x_n, t_m) - y(x_{n-1}, t_m)}{h} =$$
$$= \frac{1}{\tau} \cdot \Big[y(x_n, t_m) + \tau y'_t(x_n, t_m) + O(\tau^2) - y(x_n, t_m)\Big] - \frac{\lambda}{h} \cdot \Big[y(x_n, t_m) - y(x_n, t_m) + hy'_x(x_n, t_m) + O(h^2)\Big] =$$
$$= O(\tau + h)$$

5.2 Правый треугольник

$$\frac{y(x_n, t_{m+1}) - y(x_n, t_m)}{\tau} - \lambda \cdot \frac{y(x_{n+1}, t_m) - y(x_n, t_m)}{h} =$$
$$= \frac{1}{\tau} \cdot \Big[y(x_n, t_m) + \tau y'_t(x_n, t_m) + O(\tau^2) - y(x_n, t_m)\Big] - \frac{\lambda}{h} \cdot \Big[y(x_n, t_m) + hy'_x(x_n, t_m) + O(h^2) - y(x_n, t_m)\Big] =$$
$$= O(\tau + h)$$

5.3 Верхний треугольник

$$\frac{y(x_n,t_{m+1})-y(x_n,t_m)}{\tau}-\lambda\cdot\frac{y(x_{n+1},t_{m+1})-y(x_{n-1},t_{m+1})}{2h}=$$
$$=\frac{1}{\tau}\cdot\Big[y(x_n,t_m)+\tau y'_t(x_n,t_m)+O(\tau^2)-y(x_n,t_m)\Big]-$$
$$-\frac{\lambda}{2h}\cdot\Big[y(x_n,t_{m+1})+hy'_x(x_n,t_m)+\frac{h^2}{2}y''_{xx}(x_n,t_m)-y(x_n,t_{m+1})+hy'_x(x_n,t_m)-\frac{h^2}{2}y''_{xx}(x_n,t_m)+O(h^3)\Big]=$$
$$=O(\tau+h^2)$$

5.4 Вводим определение аппроксимации

Итак, пусть требуется решить задачу
$$\mathcal{L}u(\overline{x})=f(\overline{x}),\ \ \overline{x}\in G, \tag{5}$$
где $\mathcal{L}$ – линейный дифференциальный оператор, G – область m-мерного пространства, $f(\overline{x})$ – заданная функция. Для её решения сначала вводится сетка G_η, состоящая из конечного множества точек, принадлежащих G, плотность распределения которых характеризуется вектором η (в нашем случае $\eta=(h,\tau)$, а $G_\eta=G_{(h,\tau)}=\big\{(x_n,t_m),\ \ n=\overline{0,1,...N},\ \ m=\overline{0,1,...M}\big\}$). Затем строится разностная схема с разностным оператором $\mathcal{L}_\eta$
$$\mathcal{L}_\eta v(\overline{x})=\varphi_\eta(\overline{x}),\ \ \overline{x}\in G_\eta \tag{6}$$
решение $(v(\overline{x}),\overline{x}\in G_\eta)$ которой претендует на то, чтобы быть приближением решения $(u(\overline{x}),\overline{x}\in G)$ задачи (5). Теперь обозначим проекцию решения $u(\overline{x})$ задачи (5) на сетку G_η как $[u]_\eta(\overline{x})$, положив
$$[u]_\eta(\overline{x})=u(\overline{x})\big|_{\overline{x}\in G_\eta}$$
а также зафиксируем норму $||\cdot||_\eta$, в рамках нашей задачи положив $||\cdot||_\eta=||\cdot||_{(h,\tau)}$, введя следующее

Определение 5.1. *Пусть w – функция, определенная на $G_{(h,\tau)}$, тогда*
$$||w||_{(h,\tau)}=\tau h\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}|w(x_n,\tau_m)|$$

Определение 5.2. *Говорят, что разностная задача* (6) *аппроксимирует* (5)*, если*
$$||\varphi_\eta(\overline{x})-\mathcal{L}_\eta[u]_\eta(\overline{x})||_\eta\to 0,\ \ |\eta|\to 0$$

5.5 Доказательство аппроксимации

практически завершено. В самом деле, в рамках нашей задачи для доказательства аппроксимации осталось посчитать норму из определения 5.1. Для правого и левого треугольников она будет равна
$$\tau h\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}O(\tau+h)=O(\tau+h)$$
а для верхнего
$$\tau h\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}O(\tau+h^2)=O(\tau+h^2)$$

6 Устойчивость

TODO: CHANGE THIS BULLSHIT
Поскольку рассматриваемые разностные задачи линейны, то, очевидно, для того, чтобы соответствующая разностная схема была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы всякое ее решение было равномерно ограничено по m. Согласно спектральному признаку, устойчивость достаточно проверить для произвольной гармоники. Итак, схема устойчива, если всякое решение разностной задачи этой схемы равномерно ограничено по m.

6.1 Правый треугольник

Пусть $y_{n,m} = \mu^m e^{in\alpha}$. Подставим её в схему:

$$\frac{\mu^{m+1}e^{in\alpha} - \mu^m e^{in\alpha}}{\tau} = \lambda \frac{\mu^m e^{i(n+1)\alpha} - \mu^m e^{in\alpha}}{h}$$

Отсюда сокращая на $\mu^m e^{in\alpha}$ получаем, что

$$\frac{\mu - 1}{\tau} = \lambda \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} \Longleftrightarrow \mu = \lambda \frac{\tau}{h}\left(e^{i\alpha} - 1\right) + 1$$

Посчитаем $|\mu|^2$:

$$|\mu|^2 = \mu \cdot \overline{\mu} = \left(\lambda \frac{\tau}{h}\left(e^{i\alpha} - 1\right) + 1\right) \cdot \left(\lambda \frac{\tau}{h}\left(e^{-i\alpha} - 1\right) + 1\right) = 1 + 4 \cdot \lambda \frac{\tau}{h} \cdot \left[\lambda \frac{\tau}{h} - 1\right] \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Таким образом при $\lambda < 0$ получаем, что $|\mu| > 1 \Rightarrow |y_{n,m}| = \mu^m \to \infty$, то есть схема будет *безусловно неустойчивой.*

Теперь рассмотрим случай $\lambda > 0$. Легко видеть что решение $y_{n,m}$ равномерно ограничено по m для всех α, если и только если $\mu \leqslant 1$. Таким образом, схема является устойчивой при $0 < \lambda \frac{\tau}{h} \leqslant 1$ (так как в этом случае $\mu \leqslant 1$). При $\lambda \frac{\tau}{h} > 1$ легко видеть, что $\mu > 1$, то есть устойчивости не будет. Таким образом, при $\lambda > 0$ схема является *условно устойчивой*

6.2 Верхний треугольник

Действуем аналогично: подставляем $y_{n,m} = \mu^m e^{in\alpha}$ в соответствующую разностную схему и после сокращения на $\mu^m e^{in\alpha}$ получаем

$$\frac{\mu - 1}{\tau} = \lambda \mu \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2h}$$

Выражаем отсюда

$$\mu = \frac{1}{1 - i\lambda \frac{\tau}{2h}\sin(\alpha)} \Rightarrow |\mu|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2 \frac{\tau^2}{4h^2}\sin^2(\alpha)} \leqslant 1$$

Таким образом, $|\mu| \leqslant 1 \Rightarrow y_{n,m}$ равномерно ограничено по $m \Rightarrow$ схема *безусловно устойчива.*