

微分方程数值解习题

Lecturer: 高华东 副教授 *

2022 年 4 月

1 第一章习题

用向前 Euler 法、向后 Euler、中心格式计算下面的常微分方程 (组)

1.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2u, 0 < t < 1 \\ t = 0, u(0) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

(2)

这里真解 $u(t) = \exp(-2t)$.

2.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2, 0 < t < 1 \\ t = 0, u(0) = 1, \end{cases} \quad (3)$$

(4)

这里真解 $u(t) = \frac{1}{1-t}$.

3. Lorentz 方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (5)$$

(6)

(7)

其中 σ, ρ, β 为变化区域有一定限制的实参数。

- 对取定参数值 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \frac{8}{3}$, 选取不同的初值, 观察计算结果并画出轨迹图。
- 适当改变 σ, ρ, β , 重复计算并观察现象。

*华中科技大学 数学与统计学院. Email: huadong@hust.edu.cn.

2 第二章习题

1. 使用五点中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

这里 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.

2. 使用五点中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

这里区域为 L 形状 $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) - (0, 1) \times (-1, 0)$.

3. 使用五点中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega - \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & (x, y) \in \Gamma_1 := \{(x, y) | 0 < x < 1, y = 0\}. \end{cases} \quad (12)$$

这里区域 $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$.

4. 试对不同的 $\epsilon = 1, 1 \times 10^{-1}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-5}$ 计算下面的一维两点边值问题

$$\begin{cases} -\epsilon u''(x) + u'(x) = 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

请注意 ϵ 的选择严重影响算法所产生矩阵的性质。请妥善设计格式。我们可以验证真实解

$$u(x) = x - \frac{e^{-(1-x)/\epsilon} - e^{-1/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}.$$

对于不知道真实解的问题，如何计算误差？(以极细网格上的数值解为真解)。

3 第三章习题

1. (A Baby Model) 使用向前 Euler，向后 Euler，Crank–Nicolson，以及 BDF2 结合中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in (0, 1)^2 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = u_0(x, y), & t = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

真实解 $u = e^t \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. 其他的函数和边界条件都由真实解 u 来确定。

2. 请用 ADI 格式计算上述问题。

3. (Allen–Cahn Model) 设计合适的时间离散结合中心差分格式计算下面的问题，终止时间 $T = 100$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon^2 u_{xx} - \epsilon^2 u_{yy} + (u^3 - u) = 0, & (x, y) \in (0, 1)^2 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = u_0(x, y), & t = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

这里 $\epsilon = 1.0 \times 10^{-2}$. 初始值 u_0 可以在网格点随机生成，且满足模不大于 1.

4 Final Project 最终上机作业

使用 Marker and cell (MAC) 格式计算方腔流 (Lid-driven cavity model). 要求网格 $h < \frac{1}{128}$.

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (23)$$

这里 $\Omega = (0, 1)^2$. 在上边界， $\mathbf{u} = (1, 0)^T$; 在剩余边界 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.