微分方程数值解习题

Lecturer: 高华东 副教授 *

2022 年 4 月

1 第一章习题

用向前 Euler 法、向后 Euler、中心格式计算下面的常微分方程 (组)

1.
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -2u\,, 0 < t < 1 & (1) \\ t = 0, u(0) = 1, & (2) \end{cases}$$

这里真解 $u(t) = \exp(-2t)$.

2.
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u^2\,, 0 < t < 1 & (3) \\ t = 0, u(0) = 1, & (4) \end{cases}$$

这里真解 $u(t) = \frac{1}{1-t}$.

3. Lorentz 方程
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), & (5) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \rho x - y - xz, & (6) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z, & (7) \end{cases}$$

其中 σ，ρ，β 为变化区域有一定限制的实参数。

- 对取定参数值 $\sigma = 10$，$\rho = 28$，$\beta = \frac{8}{3}$，选取不同的初值，观察计算结果并画出轨迹图。
- 适当改变 σ，ρ，β ，重复计算并观察现象。

*华中科技大学 数学与统计学院. Email: huadong@hust.edu.cn.

2 第二章习题

1. 使用五点中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), & (x,y) \in \Omega \qquad (8) \\
u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega \qquad (9)
\end{cases}
$$

这里 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$.

2. 使用五点中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, & (x,y) \in \Omega \qquad (10) \\
u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \qquad (11)
\end{cases}
$$

这里区域为 L 形状 $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) - (0,1) \times (-1,0)$.

3. 使用五点中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, & (x,y) \in \Omega \qquad (12) \\
u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega - \Gamma_1 \qquad (13) \\
\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & (x,y) \in \Gamma_1 := \{(x,y) | 0 < x < 1, y = 0\}. \qquad (14)
\end{cases}
$$

这里区域 $\Omega = (-1,1) \times (0,1)$.

4. 试对不同的 $\epsilon = 1, 1 \times 10^{-1}, 1 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-5}$ 计算下面的一维两点边值问题

$$
\begin{cases}
-\epsilon u''(x) + u'(x) = 1, \quad x \in (0,1), \\
u(0) = u(1) = 0.
\end{cases} \qquad (15)
$$

请注意 ϵ 的选择严重影响算法所产生矩阵的性质。请妥善设计格式。我们可以验证真实解

$$
u(x) = x - \frac{e^{-(1-x)/\epsilon} - e^{-1/\epsilon}}{1 - e^{-1/\epsilon}}.
$$

对于不知道真实解的问题，如何计算误差？(以极细网格上的数值解为真解)。

3 第三章习题

1. 使用向前 Euler，向后 Euler，Crank–Nicolson，以及 BDF2 结合中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - u_{xx} - u_{yy} = f(x,y)\,, & (x,y) \in (0,1)^2 \qquad (16)\\
u(x,y) = u_0(x,y), & t = 0, \qquad (17)\\
u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega \qquad (18)
\end{cases}
$$

真实解 $u = e^t \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. 其他的函数和边界条件都由真实解 u 来确定。

2. 请用 ADI 格式计算上述问题。

4 第四章习题

1. 使用中心差分格式计算下面的问题，并比较数值解在离散范数 $\|u_h\|_c, \|u_h\|_0$ 下的误差

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} = 0\,, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T], \qquad (19)\\
u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x,0) = \sin(\pi x) & t = 0, \qquad (20)\\
u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 \le t \le T, \qquad (21)
\end{cases}
$$

这里真实解 $u(x,t) = \sin(\pi x)(\cos(\pi t) + \frac{\sin(\pi t)}{\pi})$.

2. 请使用 leap–frog 格式计算下面的问题，这里假设周期边界条件

$$
\begin{cases}
u_t + u_x = 0\,, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T], \qquad (22)\\
u(x,0) = \exp(-60\pi(x-0.3)^2) & t = 0. \qquad (23)
\end{cases}
$$