Statystyka

DSTA LIO

Materiały na ćwiczenia

Spis treści

Podstawowe informacje **2**

1 Wprowadzenie do R **3**
1.1 Skróty klawiszowe programu RStudio . . . 3
1.2 System pomocy . . . 4
1.3 Pakiety . . . 4
1.4 Wektory atomowe . . . 4
1.5 Operatory arytmetyczne . . . 6
1.6 Operatory logiczne i relacyjne . . . 7
1.7 Indeksowanie wektorów . . . 7
1.8 Wybrane funkcje wbudowane . . . 8
1.9 Zadania . . . 8

2 Wprowadzenie do R cd. **10**
2.1 Listy . . . 10
2.2 Macierze . . . 11
2.3 Czynniki . . . 13
2.4 Ramki danych . . . 14
2.5 Odczytywanie i zapisywanie danych . . . 15
2.6 Zadania . . . 16

3 Programowanie w R **20**
3.1 Funkcje . . . 20
3.2 Instrukcje warunkowe . . . 22
3.3 Pętle . . . 22
3.4 Zadania . . . 23

4 Statystyka opisowa **24**
4.1 Miara asymetrii rozkładu . . . 24
4.2 Miara koncentracji rozkładu . . . 25
4.3 Przykłady . . . 25
4.4 Zadania . . . 30

5 Model statystyczny i estymacja punktowa **35**
5.1 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa . . . 35
5.2 Przykłady . . . 39
5.3 Zadania . . . 44

6 Przedziały ufności **48**
6.1 Przykład . . . 48
6.2 Zadania . . . 48

7 Testowanie hipotez statystycznych **50**
7.1 Przykłady . . . 50

7.2 Zadania 56

8 Analiza wariancji **60**
8.1 Przykład 60
8.2 Zadania 67

9 Regresja liniowa **77**
9.1 Przykład 77
9.2 Zadania 82

10 Regresja wielokrotna i krokowa **96**
10.1 Przykład 96
10.2 Zadania 104

11 Regresja logistyczna i Poissona **120**
11.1 Przykłady 120
11.2 Zadania 127

12 Analiza korelacji **135**
12.1 Przykład 135
12.2 Zadania 137

13 Analiza składowych głównych **139**
13.1 Przykład 139
13.2 Zadania 143

14 Analiza skupień **153**
14.1 Przykład 153
14.2 Zadania 162

15 Klasyfikacja **169**
15.1 Przykład 169
15.2 Zadania 171

Podstawowe informacje

Kontakt

- Dr hab. Łukasz Smaga
  - Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
  - Pokój: B4-8, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, Poznań
  - E-mail: ls@amu.edu.pl
  - Tel.: 61 829-5336
  - Strona internetowa: ls.home.amu.edu.pl
  - Dyżury: aktualne dyżury podane są na powyższej stronie internetowej
- Mgr Paweł Piasecki
  - Zakład Statystyki Matematycznej i Analizy Danych, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
  - Pokój: B4-4, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, Poznań
  - E-mail: pawel.piasecki@amu.edu.pl
  - Tel.: 61 829-5330

  - Strona internetowa: ???
  - Dyżury: ???

Zasady zaliczenia

- Egzamin będzie obejmował całość materiału omawianego na wykładach i ćwiczeniach. Odbędzie się on na ostatnich ćwiczeniach lub w sesji egzaminacyjnej. Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły:
  - (głównie) analizy statystycznej pewnych zagadnień praktycznych z wykorzystaniem programu R i dostępnych danych,
  - podania interpretacji, opisu, itd. wybranych metod statystycznych.
- Ocena końcowa z egzaminu będzie również oceną z ćwiczeń.
- Warunkiem koniecznym zaliczenia ćwiczeń jest obecność na zajęciach, tj. dopuszczalne są co najwyżej dwie nieusprawiedliwione nieobecności na ćwiczeniach (nie dotyczy to ćwiczeń, na których odbywa się egzamin).

Plan przedmiotu

1. Podstawy programu R
2. Statystyka opisowa
3. Model statystyczny
4. Estymacja
5. Weryfikacja hipotez statystycznych
6. Analiza regresji
7. Analiza korelacji
8. Metody wielowymiarowe

Literatura

1. Biecek P. (2008) Przewodnik po pakiecie R. GIS.
2. Biecek P. (2011) Analiza danych z programem R. Modele liniowe z efektami stałymi, losowymi i mieszanymi. Wydawnictwo Naukowe PWN.
3. Gągolewski M. (2014) Programowanie w języku R. Analiza danych, obliczenia, symulacje. Wydawnictwo Naukowe PWN.
4. Górecki T. (2011) Podstawy statystyki z przykładami w R. BTC.
5. Komsta Ł., Wprowadzenie do środowiska R (http://www.r-project.org).

1 Wprowadzenie do R

1.1 Skróty klawiszowe programu RStudio

- `CTRL+SHIFT+n` - tworzy nowy plik źródłowy
- `CTRL+ENTER` - przekazuje kod z edytora do konsoli R
- `CTRL+1` i `CTRL+2` - przenoszą karetkę między edytorem a konsolą
- `CTRL+F11` i `CTRL+F12` - przenoszą karetkę między otwartymi skryptami

1.2 System pomocy

```
?mean
help(mean)
```

1.3 Pakiety

- Pakiet to zestaw narzędzi, takich jak nowe funkcje wraz z dokumentacją oraz nowe zbiory danych, rozszerzających funkcjonalność programu R. Większość z nich znajduje się w repozytorium CRAN (*Comprehensive R Archive Network*).
- `install.packages(nazwa pakietu, dependencies = TRUE)` - instalacja pakietu
- `library(nazwa pakietu)` - ładowanie pakietu
- `detach(package:nazwa pakietu)` - usunięcie pakietu

```
install.packages("car")
library(car)
detach(package:car)
```

1.4 Wektory atomowe

1.4.1 Wektory wartości logicznych

- W R zdefiniowane są dwie stałe logiczne:
  - `TRUE` - prawda,
  - `FALSE` - fałsz.

```
FALSE
```

```
## [1] FALSE
```

- Wektory można tworzyć przez złączanie. Wektor (ciąg) składający się z konkretnych wartości logicznych w określonej kolejności, można utworzyć za pomocą funkcji `c()` (od ang. **c**ombine - złącz).

```
c(TRUE, TRUE, FALSE, FALSE, TRUE)
```

```
## [1]  TRUE  TRUE FALSE FALSE  TRUE
```

```
c(c(TRUE, TRUE, FALSE), c(FALSE, TRUE))
```

```
## [1]  TRUE  TRUE FALSE FALSE  TRUE
```

- Długość wektora zwraca funkcja `length()`.

```
length(c(TRUE, TRUE, FALSE, FALSE, TRUE))
```

```
## [1] 5
```

1.4.2 Wektory liczbowe

```
c(1, +2, -3, 2.3, -.4, 5.)
```

```
## [1]  1.0  2.0 -3.0  2.3 -0.4  5.0
```

- Do generowania ciągów arytmetycznych w R służą:

  - operator `:` (różnica równa się 1 lub -1),
  - funkcja `seq()` (od ang. **seq**uence, dowolne różnice).

```
c(-3:2, 4:0)
```

```
##  [1] -3 -2 -1  0  1  2  4  3  2  1  0
```

```
seq(1, 8, by = 2)
```

```
## [1] 1 3 5 7
```

```
seq(1, 8, length.out = 6)
```

```
## [1] 1.0 2.4 3.8 5.2 6.6 8.0
```

1.4.3 Wektory napisów

- Ciągi dowolnych znaków drukowanych, zwane napisami, tworzymy wykorzystując apostrofy lub cudzysłów.

```
c("DSTA LIO", "informatyka", ",", "statystyka", "!")
```

```
## [1] "DSTA LIO"    "informatyka" ","           "statystyka"  "!"
```

```
length(c("DSTA LIO", "informatyka", ",", "statystyka", "!"))
```

```
## [1] 5
```

1.4.4 Nazywanie obiektów

- W R obiekty nazywamy za pomocą jednego z następujących operatorów przypisania (ang. assignment operator):
  - `=`
  - `<-` (w RStudio skrót klawiszowy `ALT+-`)
  - `->`

```
x = 5
5 = x
## Error in 5 = x : invalid (do_set) left-hand side to assignment
y <- 6
6 -> y
x
## [1] 5
y
## [1] 6
```

- Wielu użytkowników programu R nie zaleca stosowania operatora `=`, ponieważ ma on również inne znaczenia, np. używa się go do ustalania wartości funkcji.
- Lepiej nie używać (poza ewentualnie komentarzami) polskich znaków diakrytycznych.
- Polecenie `ls()` podaje wszystkie aktualnie istniejące obiekty.
- Usunąć jakiś obiekt możemy za pomocą funkcji `rm()`.
- Wszystkie obiekty usuwamy poleceniem `rm(list = ls())`.

```
x <- 1:2
y <- list(1, 2)
ls()
```

```
## [1] "x" "y"
```

```
rm(x)
ls()
```

```
## [1] "y"
```

```
rm(list = ls())
ls()
```

```
## character(0)
```

1.5 Operatory arytmetyczne

- Do działania na wektorach liczbowych (czasem również zespolonych) można używać następujących binarnych operatorów arytmetycznych:
  - `+` (dodawanie),
  - `-` (odejmowanie),
  - `*` (mnożenie),
  - `/` (dzielenie rzeczywiste),
  - `^` (potęgowanie),
  - `%%` (reszta z dzielenie (modulo)),
  - `%/%` (dzielenie całkowite (bez reszty)).
- Operatory arytmetyczne są zwektoryzowane (ang. vectorized), tzn. dla wektorów $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o tej samej długości n w wyniku działania $\mathbf{x} \diamondsuit \mathbf{y}$ uzyskujemy wektor

$$\mathbf{w} = (x_1 \diamondsuit y_1, x_2 \diamondsuit y_2, \ldots, x_n \diamondsuit y_n).$$

  Czyli operacje tego typu wykonywane są element po elemencie (ang. elementwise). Unikamy w tej sposób „jawnej" pętli (pętla jest „ukryta" w kodzie operatora), co może pozwolić na przyśpieszenie obliczeń.

```
7 %% 3
```

```
## [1] 1
```

```
1:3 + c(3, 4, 5)
```

```
## [1] 4 6 8
```

- W przypadku, gdy wektory będące argumentami operatorów binarnych są różnej długości, stosowana jest tak zwana reguła zawijania (ang. recycling rule). Powiela ona niejako krótszy wektor tak, aby uzgodnić jego długość dłuższym wektorem. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, gdzie bez straty ogólności $m \geqslant n$. Wtedy wynikiem działania jest m-elementowy wektor postaci (dla odpowiedniego l)

$$\mathbf{x} \diamondsuit \mathbf{y} = (x_1 \diamondsuit y_1, \ldots, x_n \diamondsuit y_n, x_1 \diamondsuit y_{n+1}, x_2 \diamondsuit y_{n+2}, \ldots, x_l \diamondsuit y_m).$$

```
x <- c(1, 3, 5, 8, 1, 3, 0, 6)
x * c(1, 3)
```

```
## [1]  1  9  5 24  1  9  0 18
```

```
x <- c(1, 3, 5, 8, 1, 3, 0)
x * c(1, 3)
```

```
## Warning in x * c(1, 3): długość dłuszego obiektu nie jest wielokrotnością
## długości krótszego obiektu
```

```
## [1]  1  9  5 24  1  9  0
```

1.6 Operatory logiczne i relacyjne

- Rozważamy następujące operatory i funkcje logiczne:
  - `!x` (negacja),
  - `x | y` (alternatywa),
  - `x & y` (koniunkcja).
- Do porównywania wektorów służą następujące operatory relacyjne:
  - `x < y` (czy mniejsze?),
  - `x > y` (czy większe?),
  - `x <= y` (czy nie większy?),
  - `x >= y` (czy nie mniejszy?),
  - `x == y` (czy równy?),
  - `x != y` (czy nierówny?).
- Można je stosować na wektorach dowolnych typów. Jednak wynikiem ich działania jest zawsze wektor logiczny.

```
(1:7) == (7:1)
```

```
## [1] FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE
```

```
c(TRUE, FALSE) < 1
```

```
## [1] FALSE  TRUE
```

1.7 Indeksowanie wektorów

- Wartości elementów każdego wektora leżą na ściśle określonych pozycjach oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi (`1:length(x)`).
- Do elementów wektora odwołujemy się poprzez nawiasy kwadratowe `[]`.

```
x <- 1:5
x[2]
```

```
## [1] 2
```

```
x[2:4]
```

```
## [1] 2 3 4
```

```
x[-2]
```

```
## [1] 1 3 4 5
```

```
x[-(2:4)]
```

```
## [1] 1 5
```

```
# x[c(1, -2)]
## Error in x[c(1, -2)] : only 0's may be mixed with negative subscripts
x[c(TRUE, TRUE, FALSE, TRUE, FALSE)]
```

```
## [1] 1 2 4
```

```
x[x < 4]
```

```
## [1] 1 2 3
```

- Nawiasów kwadratowych możemy również użyć do zmiany elementów danego wektora.

```
x[2] <- 6
x
```

```
## [1] 1 6 3 4 5
```

```
x[c(2, 4)] <- c(4, 2)
x
```

```
## [1] 1 4 3 2 5
```

```
x[c(2, 4)] <- 6
x
```

```
## [1] 1 6 3 6 5
```

1.8 Wybrane funkcje wbudowane

- Program R zawiera wiele zwektoryzowanych funkcji matematycznych dla wektorów liczbowych lub czasem zespolonych. W wyniku ich działania uzyskujemy wektor tej samej długości co wektor wejściowy, którego wartości są wyznaczane przez przekształcenie każdego elementu daną funkcją.
- `abs()` - wartość bezwzględna, `sign()` - znak liczby, `floor()` - funkcja „podłoga", `ceiling()` - funkcja „sufit", `trunc()` - obcięcie części ułamkowej liczby ($\lfloor x \rfloor$ dla $x \geqslant 0$, $\lceil x \rceil$ dla $x < 0$), `round(x, digits = 0)` - zaokrąglenie `x` do `digits` miejsc po kropce dziesiętnej, `sqrt()` - pierwiastek kwadratowy, `exp()` - funkcja wykładnicza, `log(x, base = exp(1))` - logarytm o podstawie `base`, `gamma()` - funkcja gamma, `beta(a, y)` - funkcja beta, `choose(n, k)` - współczynnik dwumianowy, `sin()`, `cos()`, `tan()` - funkcje trygonometryczne, `asin()`, `acos()`, `atan()` - funkcje cyklometryczne, `Conj(z)` - liczba sprzężona do `z`, `Re(z)` - część rzeczywista `z`, `Im(z)` - część urojona `z`, `Mod(z)` - moduł `z`, `Arg(z)` - argument `z`.

```
abs(-2:2)
```

```
## [1] 2 1 0 1 2
```

```
ceiling(c(-1.99, -0.1, 0.1, 1.99))
```

```
## [1] -1  0  1  2
```

1.9 Zadania

Zadanie 1. Otwórz program RStudio. Następnie utwórz nowy skrypt i zapisz go jako, na przykład, `wprowadzenie_do_R_zadania.R`. W tym skrypcie możesz napisać rozwiązania następujących zadań.

Zadanie 2. Użyj funkcji `rep()`, aby utworzyć wektor logiczny, zaczynając od trzech wartości prawda, następnie czterech wartości fałsz, po których następują dwie wartości prawda i wreszcie pięć wartości fałsz.

Przypisz ten wektor logiczny do zmiennej `x`. Na koniec przekonwertuj ten wektor na wektor numeryczny. Jak zmieniły się wartości prawda i fałsz?

```
##  [1]  TRUE  TRUE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE  TRUE FALSE FALSE
## [12] FALSE FALSE FALSE
```

```
##  [1] 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0
```

Zadanie 3. Palindromem nazywamy wektor, którego elementy czytane od końca tworzą ten sam wektor co elementy czytane od początku. Utwórz taki wektor 100 liczb przy czym pierwsze 20 liczb to kolejne liczby naturalne, następnie występuje 10 zer, następnie 20 kolejnych liczb parzystych, a pozostałe elementy określone są przez palindromiczność (warunek symetrii).

```
##   [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20  0  0  0
##  [24]  0  0  0  0  0  0  0  2  4  6  8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32
##  [47] 34 36 38 40 40 38 36 34 32 30 28 26 24 22 20 18 16 14 12 10  8  6  4
##  [70]  2  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10  9
##  [93]  8  7  6  5  4  3  2  1
```

Zadanie 4. Z wektora `letters` wybierz litery na pozycjach 5, 10, 15, 20, 25.

```
## [1] "e" "j" "o" "t" "y"
```

Zadanie 5. Utwórz wektor liczb naturalnych od 1 do 1000, a następnie zamień liczby parzyste na ich odwrotności.

```
## [1] 1 0.5 3 0.25 5 0.1666667 ...
```

Zadanie 6. Uporządkuj elementy wektora $(6, 3, 4, 5, 2, 3)$ od największego do najmniejszego wykorzystując funkcję `order()`.

```
## [1] 6 5 4 3 3 2
```

Zadanie 7. Wyznacz znaki elementów wektora $(-1{,}876; -1{,}123; -0{,}123; 0; 0{,}123; 1{,}123; 1{,}876)$. Następnie zaokrąglij elementy tego wektora do dwóch miejsc po przecinku. Na koniec wyznacz część całkowitą każdego elementu nowego wektora.

```
## [1] -1 -1 -1  0  1  1  1
```

```
## [1] -1.88 -1.12 -0.12  0.00  0.12  1.12  1.88
```

```
## [1] -2 -2 -1  0  0  1  1
```

Zadanie 8. Wyznacz pierwiastek kwadratowy z każdej liczby naturalnej od 1 do 100 milionów. Najpierw wykonaj to polecenie korzystając z odpowiedniej funkcji wbudowanej w R, a następnie wykorzystując potęgowanie. Który sposób działa szybciej? **Wskazówka:** Do badania długości czasu działania programu można wykorzystać funkcję `Sys.time()`.

```
## Time difference of 1.485525 secs
## Time difference of 9.706759 secs
## [1] 1 1.414214 1.732051 2 2.236068 2.44949 ...
```

Zadanie 9. W pakiecie `schoolmath` znajduje się zbiór danych `primlist`, który zawiera liczby pierwsze pomiędzy 1 a 9999999.

- Znajdź największą liczbę pierwszą mniejszą od 1000.
- Ile jest liczb pierwszych większych od 100 a mniejszych od 500?

```
## [1] 997
```

```
## [1] 73
```

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie kombinacje wartości wektorów (a, b) i $(1, 2, 3)$ za pomocą funkcji `rep()` i `paste()`.

```
## [1] "a1" "a2" "a3" "b1" "b2" "b3"
```

Zadanie 11. Utwórz wektor 30 napisów następującej postaci: `liczba.litera`, gdzie liczba to kolejne liczby naturalne od 1 do 30 a litera to trzy wielkie litery `X`, `Y`, `Z` występujące cyklicznie.

```
##  [1] "1.X"  "2.Y"  "3.Z"  "4.X"  "5.Y"  "6.Z"  "7.X"  "8.Y"  "9.Z"  "10.X"
## [11] "11.Y" "12.Z" "13.X" "14.Y" "15.Z" "16.X" "17.Y" "18.Z" "19.X" "20.Y"
## [21] "21.Z" "22.X" "23.Y" "24.Z" "25.X" "26.Y" "27.Z" "28.X" "29.Y" "30.Z"
```

Zadanie 12. W pewnych sytuacjach przydatna może się okazać tzw. kategoryzacja zmiennych, czyli inny podział na kategorie niżby wynikał z danych. Wygeneruj 100 obserwacji, które są odpowiedziami na pytania ankiety, każda odpowiedź może przyjąć jedną z wartości: 'a', 'b', 'c', 'd', 'e'. Dokonaj kategoryzacji w taki sposób, aby kategoria 1 obejmowała odpowiedzi 'a' i 'b', 2 odpowiedzi 'c' i 'd' oraz 3 odpowiedź 'e'. **Wskazówka:** Wykorzystaj funkcję `sample()` oraz funkcję `recode()` z pakietu `car`.

```
##   [1] "d" "b" "e" "d" "a" "e" "d" "b" "b" "d" "d" "d" "e" "d" "c" "d" "e"
##  [18] "b" "e" "b" "c" "d" "d" "c" "a" "c" "d" "b" "c" "b" "e" "a" "c" "a"
##  [35] "e" "a" "a" "b" "a" "c" "b" "c" "a" "c" "a" "b" "e" "a" "c" "c" "b"
##  [52] "e" "b" "d" "d" "a" "e" "c" "e" "c" "d" "d" "a" "d" "d" "c" "a" "d"
##  [69] "a" "b" "e" "e" "e" "a" "b" "b" "b" "e" "c" "d" "d" "c" "b" "d" "e"
##  [86] "b" "a" "c" "c" "a" "e" "a" "e" "a" "b" "c" "c" "e" "d" "c"
```

```
##   [1] 2 1 3 2 1 3 2 1 1 2 2 2 3 2 2 2 3 1 3 1 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 3 1 2 1 3
##  [36] 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 1 3 1 2 2 1 3 1 2 2 1 3 2 3 2 2 2 1 2 2 2 1 2 1 1
##  [71] 3 3 3 1 1 1 1 3 2 2 2 2 1 2 3 1 1 2 2 1 3 1 3 1 1 2 2 3 2 2
```

2 Wprowadzenie do R cd.

2.1 Listy

- Kolejnym podstawowym typem danych jest lista. Najlepiej postrzegać ją jako ciąg złożony z elementów o dowolnych typach (a więc już niekoniecznie tych samych jak w przypadku wektorów atomowych). W skład listy mogą wchodzić wektory logiczne, liczbowe i napisów, a nawet funkcje, czy też same listy.
- Listy tworzymy zazwyczaj za pomocą funkcji `list()`.

```
(x <- list(TRUE, 3.5, "DSTA"))
```

```
## [[1]]
## [1] TRUE
##
## [[2]]
## [1] 3.5
##
## [[3]]
## [1] "DSTA"
```

```
(x <- list(logiczna = TRUE, liczba = 3.5, napis = "DSTA"))
```

```
## $logiczna
## [1] TRUE
##
## $liczba
```

```
## [1] 3.5
##
## $napis
## [1] "DSTA"
```

```
x[[1]]
```

```
## [1] TRUE
```

```
x$logiczna
```

```
## [1] TRUE
```

```
str(x)
```

```
## List of 3
##  $ logiczna: logi TRUE
##  $ liczba  : num 3.5
##  $ napis   : chr "DSTA"
```

```
x[1] <- NULL
str(x)
```

```
## List of 2
##  $ liczba: num 3.5
##  $ napis : chr "DSTA"
```

2.2 Macierze

- Macierz (typ złożony `matrix`) i, ogólniej, tablice (typ złożony `array`) są reprezentowane w R przez wektory atomowe. Mają one jednak ustawiony atrybut specjalny `dim`. Jako wartość może mieć on przypisany jedynie wektor liczb całkowitych dodatnich o długości nie mniejszej niż dwa.
- Wykorzystując atrybut `dim`, macierz możemy utworzyć „ręcznie”.
- Macierze zazwyczaj łatwiej utworzyć korzystając z funkcji `matrix()`.

```
(x <- matrix(1:8, nrow = 2, ncol = 4))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3    5    7
## [2,]    2    4    6    8
```

```
dim(x)
```

```
## [1] 2 4
```

```
nrow(x)
```

```
## [1] 2
```

```
ncol(x)
```

```
## [1] 4
```

```
(x <- matrix(1:8, nrow = 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3    5    7
## [2,]    2    4    6    8
```

```r
(x <- matrix(1:8, ncol = 4))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    3    5    7
## [2,]    2    4    6    8
```

```r
(x <- matrix(1:8, ncol = 4, byrow = TRUE))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    2    3    4
## [2,]    5    6    7    8
```

- Skoro macierze są wektorami atomowymi, do ich indeksowania możemy użyć nawiasów kwadratowych `[]`. Jednak możemy korzystać z nich na „większą” liczbę sposobów.

```r
(x <- matrix(1:6, ncol = 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6
```

```r
x[2, 3]
```

```
## [1] 6
```

```r
x[2, ]
```

```
## [1] 2 4 6
```

```r
x[, 3]
```

```
## [1] 5 6
```

```r
x[, 2:3]
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    3    5
## [2,]    4    6
```

```r
x[1:2, c(1, 3)]
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    5
## [2,]    2    6
```

- Oczywiście, w R zaimplementowanych jest wiele funkcji wykonujących operacje specyficzne dla macierzy.

```r
t(matrix(1:6, ncol = 3))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    3    4
## [3,]    5    6
```

```r
(A <- matrix(1:6, ncol = 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6
```

```r
(B <- matrix(7:12, ncol = 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    7   10
## [2,]    8   11
## [3,]    9   12
```

```r
A %*% B
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   76  103
## [2,]  100  136
```

```r
B %*% A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   27   61   95
## [2,]   30   68  106
## [3,]   33   75  117
```

```r
(A <- matrix(1:6, ncol = 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    5
## [2,]    2    4    6
```

```r
(B <- matrix(7:12, ncol = 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    7    9   11
## [2,]    8   10   12
```

```r
A * B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    7   27   55
## [2,]   16   40   72
```

- `rankMatrix()` z pakietu `Matrix` - rząd macierzy
- `det()` - wyznacznik macierzy
- `kronecker(A, B)` - iloczyn Kroneckera macierzy
- `solve(A, b)` - rozwiązuje układy równań liniowych, jako pierwszy parametr podajemy macierz współczynników, a jako drugi wektor wyrazów wolnych. Jeśli nie podamy drugiego parametru funkcja obliczy macierz odwrotną.
- `ginv()` z pakietu `MASS` - pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a
- `eigen()` - wartości oraz wektory własne (rozkład spektralny macierzy symetrycznej)

2.3 Czynniki

- Czynnik (ang. factors) można postrzegać jako wektory zawierające elementy ze zbioru o z góry określonej, najczęściej względnie niewielkiej liczbie możliwych wartości. Zatem czynniki służą do reprezentowania danych jakościowych.
- W praktyce analizy danych, zmienne typu czynnikowego zazwyczaj kodują informację o zmiennych niemierzalnych, takich jak płeć, kolor oczu czy wykształcenie. Można je oczywiście zakodować za pomocą liczb.

```r
(plec <- rep(c("F", "M"), c(2, 3)))
```

```
## [1] "F" "F" "M" "M" "M"
```

```r
(plec_factor <- factor(plec))
```

```
## [1] F F M M M
## Levels: F M
```

```r
levels(plec_factor)
```

```
## [1] "F" "M"
```

```r
nlevels(plec_factor)
```

```
## [1] 2
```

```r
table(plec_factor)
```

```
## plec_factor
## F M
## 2 3
```

2.4 Ramki danych

- Ramki danych (ang. data frames) to obiekty przechowujące informacje w postaci macierzowej, najczęściej takie, które są np. wynikiem eksperymentów (także numerycznych). Wiersze ramki danych odpowiadają reprezentowanym obiektom, tzw. obserwacjom (ang. observations), bądź przypadkom (ang. cases), np. badanym osobom. Kolumny z kolei podają informacje na temat wartości różnych zmiennych (ang. variables) opisujących ich wybrane własności (mierzalne lub nie).
- W R, ramki danych są reprezentowane przez listy zawierające wektory atomowe o tej samej długości. Każdy element tej szczególnej listy odpowiada kolumnie ramki danych.

```r
ramka <- data.frame(
  plec = c("K", "K", "M", "M", "K"),
  wyksztalcenie = c("s", "w", "w", "p", "s"),
  waga = c(60, 55, 80, 75, 62)
)
ramka
```

```
##   plec wyksztalcenie waga
## 1    K             s   60
## 2    K             w   55
## 3    M             w   80
## 4    M             p   75
## 5    K             s   62
```

```r
nrow(ramka)
```

```
## [1] 5
```

```r
ncol(ramka)
```

```
## [1] 3
```

```r
rownames(ramka)
```

```
## [1] "1" "2" "3" "4" "5"
```

```r
colnames(ramka)
```

```
## [1] "plec"          "wyksztalcenie" "waga"
```

```r
ramka[[3]] # lub ramka$waga lub ramka[, 3]
```

```
## [1] 60 55 80 75 62
```

```r
ramka$waga <- c(58, 54, 78, 72, 60)
ramka[ramka$plec == "M", ]
```

```
##   plec wyksztalcenie waga
## 3    M             w   78
## 4    M             p   72
```

```r
rbind(ramka[1:2, ], ramka[1:2, ])
```

```
##   plec wyksztalcenie waga
## 1    K             s   58
## 2    K             w   54
## 3    K             s   58
## 4    K             w   54
```

```r
cbind(ramka[1:2, ], wyksztalcenie_2 = as.integer(ramka$wyksztalcenie[1:2]))
```

```
##   plec wyksztalcenie waga wyksztalcenie_2
## 1    K             s   58               2
## 2    K             w   54               3
```

2.5 Odczytywanie i zapisywanie danych

- `read.table()`, `load()`, `read.csv()`, `read.csv2()` - wczytanie zbioru danych, odpowiednio z pliku tekstowego, pliku w formacie programu R (z rozszerzeniem `RData`), pliku `csv`, odpowiednio
- `write.table()`, `save()`, `write.csv()`, `write.csv2()` - zapis zbioru danych, odpowiednio do pliku tekstowego, pliku w formacie programu R (z rozszerzeniem `RData`), plików `csv`, odpowiednio
- Przy odczytywaniu i zapisywaniu danych, wygodnie jest najpierw ustalić katalog bieżący na ten, w którym znajdują się lub mają znaleźć się pliki z danymi. Aktualny katalog bieżący sprawdzamy za pomocą funkcji `getwd()`, natomiast zmieniamy go używając funkcji `setwd()`.

```r
getwd()
```

```
## [1] "/home/ls/MEGA/DYDAKTYKA/STA/DSTA_LIO/DSTA_LIO_cwiczenia_bookdown"
```

```r
# setwd("/home/ls/MEGA/DYDAKTYKA/STA/DSTA_LIO")
# (odczyt_1 <- read.table("odczyt_1.txt"))
(odczyt_1 <- read.table("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/odczyt_1.txt"))
```

```
##         V1       V2       V3
## 1 zmienna1 zmienna2 zmienna3
## 2      1.2      1.3      1.4
## 3      2.1      2.2      2.3
## 4      3.1      3.2      3.3
```

```
(odczyt_1 <- read.table("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/odczyt_1.txt",
                        header = TRUE))
```

```
##   zmienna1 zmienna2 zmienna3
## 1      1.2      1.3      1.4
## 2      2.1      2.2      2.3
## 3      3.1      3.2      3.3
```

```
(odczyt_2 <- read.table("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/odczyt_2.txt",
                        header = TRUE))
```

```
##   zmienna1.zmienna2.zmienna3
## 1                1,2;1,3;1,4
## 2                2,1;2,2;2,3
## 3                3,1;3,2;3,3
```

```
(odczyt_2 <- read.table("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/odczyt_2.txt",
                        header = TRUE, sep = ";", dec = ","))
```

```
##   zmienna1 zmienna2 zmienna3
## 1      1.2      1.3      1.4
## 2      2.1      2.2      2.3
## 3      3.1      3.2      3.3
```

- Pliki z danymi do powyższych przykładów: odczyt_1.txt, odczyt_2.txt
- Można też zaimportować dane klikając na `Import Dataset` w RStudio i w otworzonym okienku ustawić potrzebne parametry.
- Podgląd danych w edytorze kodu źródłowego otrzymujemy za pomocą funkcji `View()`.
- Zapisywanie danych:

```
dane_1 <- data.frame(1:10, 5:14)
write.table(dane_1, "dane_1.txt")
save(dane_1, file = "dane_1.RData")
dane_1 <- read.table("dane_1.txt")
load("dane_1.RData")
```

2.6 Zadania

Zadanie 1. Skonstruuj listę o nazwie `moja_lista`, której pierwszym elementem będzie dwuelementowy wektor napisów zawierający Twoje imię i nazwisko, drugim elementem będzie liczba π, trzecim funkcja służąca do obliczania pierwiastka kwadratowego, a ostatni element listy to wektor złożony z liczb $0{,}02; 0{,}04; \ldots; 1$. Następnie usuń elementy numer jeden i trzy z tej listy. Na zakończenie, wyznacz listę zawierającą wartości funkcji gamma Eulera dla elementów listy `moja_lista`.

```
## List of 4
##  $ : chr [1:2] "Łukasz" "Smaga"
##  $ : num 3.14
##  $ :function (x)
##  $ : num [1:50] 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16 0.18 0.2 ...
```

```
## List of 2
##  $ : num 3.14
##  $ : num [1:50] 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16 0.18 0.2 ...
```

```
## [[1]]
## [1] 2.288038
##
## [[2]]
##  [1] 49.442210 24.460955 16.145727 11.996566  9.513508  7.863252  6.688686
##  [8]  5.811269  5.131821  4.590844  4.150482  3.785504  3.478450  3.216852
## [15]  2.991569  2.795751  2.624163  2.472735  2.338256  2.218160  2.110371
## [22]  2.013193  1.925227  1.845306  1.772454  1.705844  1.644773  1.588641
## [29]  1.536930  1.489192  1.445038  1.404128  1.366164  1.330884  1.298055
## [36]  1.267473  1.238954  1.212335  1.187471  1.164230  1.142494  1.122158
## [43]  1.103124  1.085308  1.068629  1.053016  1.038403  1.024732  1.011947
## [50]  1.000000
```

Zadanie 2. Wyznacz rząd, wyznacznik, odwrotność, wartości własne, wektory własne oraz sumy i średnie arytmetyczne dla kolejnych wierszy i kolumn dla następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponadto, pomnóż tę macierz przez jej odwrotność.

```
## [1] 3
## attr(,"method")
## [1] "tolNorm2"
## attr(,"useGrad")
## [1] FALSE
## attr(,"tol")
## [1] 6.661338e-16
```

```
## [1] 17
```

```
##            [,1]        [,2]        [,3]
## [1,] -0.5882353  0.05882353  1.47058824
## [2,]  0.1764706 -0.11764706  0.05882353
## [3,]  0.2352941  0.17647059 -0.58823529
```

```
## eigen() decomposition
## $values
## [1]  6.0790256 -3.2070365 -0.8719891
##
## $vectors
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -0.7537024  0.7058088 -0.9275678
## [2,] -0.5472752 -0.6900345  0.1392322
## [3,] -0.3638991  0.1602696  0.3467453
```

```
## [1] 9 7 4
```

```
## [1] 3.000000 2.333333 1.333333
```

```
## [1] 4 7 9
```

```
## [1] 1.333333 2.333333 3.000000
```

```
##               [,1]          [,2]         [,3]
## [1,]  1.000000e+00 -1.110223e-16 2.220446e-16
```

```
## [2,]  0.000000e+00  1.000000e+00 0.000000e+00
## [3,] -2.775558e-17 -2.775558e-17 1.000000e+00
```

Zadanie 3. Utwórz wektor kwadratów 100 pierwszych liczb naturalnych. Następnie zlicz, które cyfry oraz jak często występują na pozycji jedności w kolejnych elementach tego wektora.

```
## [1] 1 4 9 16 25 36 ...

##
##  0  1  4  5  6  9
## 10 20 20 10 20 20
```

Zadanie 4. Za pomocą funkcji `outer()` wyznacz tabliczkę mnożenia dla liczb mniejszych od 6.

```
##      [,1]        [,2]        [,3]        [,4]        [,5]
## [1,] "1 * 1 = 1" "1 * 2 = 2"  "1 * 3 = 3"  "1 * 4 = 4"  "1 * 5 = 5"
## [2,] "2 * 1 = 2" "2 * 2 = 4"  "2 * 3 = 6"  "2 * 4 = 8"  "2 * 5 = 10"
## [3,] "3 * 1 = 3" "3 * 2 = 6"  "3 * 3 = 9"  "3 * 4 = 12" "3 * 5 = 15"
## [4,] "4 * 1 = 4" "4 * 2 = 8"  "4 * 3 = 12" "4 * 4 = 16" "4 * 5 = 20"
## [5,] "5 * 1 = 5" "5 * 2 = 10" "5 * 3 = 15" "5 * 4 = 20" "5 * 5 = 25"
```

Zadanie 5. Odczytaj zbiór danych dane1.csv a następnie:

1. Z odczytanej ramki danych wyświetl tylko parzyste wiersze.
2. Korzystając z operatorów logicznych wyświetl tylko wiersze odpowiadające pacjentkom starszym niż 50 lat z przerzutami do węzłów chłonnych (`Wezly.chlonne = 1`).

```
##   Wiek Rozmiar.guza Wezly.chlonne Nowotwor Receptory.estrogenowe
## 1   29            1             0        2                   (-)
## 2   29            1             0        2                  (++)
## 3   30            1             1        2                   (-)
## 4   32            1             0        3                  (++)
## 5   32            2             0       NA                   (-)
## 6   33            1             1        3                   (-)
##   Receptory.progesteronowe Niepowodzenia Okres.bez.wznowy VEGF
## 1                     (++)          brak               22  914
## 2                     (++)          brak               53 1118
## 3                      (+)          brak               38  630
## 4                     (++)          brak               26 1793
## 5                     (++)          brak               19  963
## 6                     (++)        wznowa               36 2776

## ...

##    Wiek Rozmiar.guza Wezly.chlonne Nowotwor Receptory.estrogenowe
## 2    29            1             0        2                  (++)
## 4    32            1             0        3                  (++)
## 6    33            1             1        3                   (-)
## 8    35            2             1        2                   (+)
## 10   36            1             1        2                   (-)
## 12   37            1             0        3                   (-)
##    Receptory.progesteronowe Niepowodzenia Okres.bez.wznowy VEGF
## 2                     (++)          brak               53 1118
## 4                     (++)          brak               26 1793
## 6                     (++)        wznowa               36 2776
## 8                     (++)          brak               38 3827
```

```
## 10                    (++)          brak               37  834
## 12                     (+)        wznowa               40 3331
```

```
## ...
```

```
##    Wiek Rozmiar.guza Wezly.chlonne Nowotwor Receptory.estrogenowe
## 78   51            1             1        2                   (++)
## 79   51            1             1        2                    (+)
## 81   51            2             1        2                  (+++)
## 84   51            2             1       NA                    (-)
## 88   52            2             1        2                    (+)
## 95   55            1             1        2                   (++)
##    Receptory.progesteronowe Niepowodzenia Okres.bez.wznowy VEGF
## 78                     (++)          brak               33  629
## 79                      (+)          brak               36 2879
## 81                     (++)          brak               52 1098
## 84                      (-)          brak               30 8064
## 88                      (+)        wznowa               48 1927
## 95                     (++)          brak               29  373
```

```
## ...
```

Zadanie 6. Poniższe dane są średnimi miesięcznymi temperaturami (w ^{o}F) w Nowym Yorku.

Styczeń – 32	Kwiecień – 52	Lipiec – 77	Październik – 58
Luty – 33	Maj – 62	Sierpień – 75	Listopad – 47
Marzec – 41	Czerwiec – 72	Wrzesień – 68	Grudzień – 35

1. Wprowadź te dane do ramki danych o jednej zmiennej `NY_F`.
2. Utwórz nową zmienną `NY_C` podającą temperaturę w stopniach Celsiusza (zaokrągloną do dwóch miejsc po przecinku). **Wskazówka:** $(x^o\text{F}) = (x - 32) \cdot 5/9(^o\text{C})$
3. Zamień nazwy kolumn na `NY_Fahrenheit` i `NY_Celsiusz`.
4. Usuń kolumnę z temperaturą w Fahrenheitach.
5. Zapisz otrzymane dane w pliku `NY_temp.RData`.

```
##             NY_F
## Styczeń       32
## Luty          33
## Marzec        41
## Kwiecień      52
## Maj           62
## Czerwiec      72
## Lipiec        77
## Sierpień      75
## Wrzesień      68
## Październik   58
## Listopad      47
## Grudzień      35
```

```
##             NY_F  NY_C
## Styczeń       32  0.00
## Luty          33  0.56
## Marzec        41  5.00
## Kwiecień      52 11.11
## Maj           62 16.67
```

```
## Czerwiec      72 22.22
## Lipiec        77 25.00
## Sierpień      75 23.89
## Wrzesień      68 20.00
## Październik   58 14.44
## Listopad      47  8.33
## Grudzień      35  1.67
```

```
##             NY_Fahrenheit NY_Celsiusz
## Styczeń                32        0.00
## Luty                   33        0.56
## Marzec                 41        5.00
## Kwiecień               52       11.11
## Maj                    62       16.67
## Czerwiec               72       22.22
## Lipiec                 77       25.00
## Sierpień               75       23.89
## Wrzesień               68       20.00
## Październik            58       14.44
## Listopad               47        8.33
## Grudzień               35        1.67
```

```
##             NY_Celsiusz
## Styczeń            0.00
## Luty               0.56
## Marzec             5.00
## Kwiecień          11.11
## Maj               16.67
## Czerwiec          22.22
## Lipiec            25.00
## Sierpień          23.89
## Wrzesień          20.00
## Październik       14.44
## Listopad           8.33
## Grudzień           1.67
```

3 Programowanie w R

3.1 Funkcje

- Korzystając z programu R, bardzo szybko odczuwa się potrzebę użycia pewnych fragmentów kodu wielokrotnie, choć być może dla różnych danych.
- Tak jak listy grupują obiekty (być może różnych typów), tak funkcje zbierają określone wyrażenia służące np. do obliczenia pewnych wartości dla zadanych danych.
- Dodatkową zaletą stosowania funkcji jest możliwość dzielenia długiego kodu na łatwiejsze do opanowania części.
- Tworzenie obiektów typu funkcja odbywa się według następującej składni

`function(lista parametrów) ciało funkcji`

gdzie `ciało funkcji` jest wyrażeniem do wykonania na obiektach określonych przez `listę parametrów`.

- Wartość obliczonego wyrażenia jest wynikiem działania funkcji. Takim wynikiem może być jeden i tylko jeden obiekt, np. lista.
- Parametrów może być jednak wiele. `lista parametrów` to ciąg oddzielonych przecinkami elementów postaci:
  - `nazwa` parametru (pod taką nazwą będzie dostępny w funkcji obiekt przekazany przy wywołaniu),
  - `nazwa = wyrażenie` (parametr z wartością domyślną),
  - `...` - parametr specjalny, który pozwala przekazać dowolną liczbę argumentów w grupie.

```
szescian <- function(x) x^3 # funkcje zazwyczaj się nazywa
szescian(2)
```

```
## [1] 8
```

```
szescian_2 <- function(x, y) {
  x3 <- x^3
  y3 <- y^3
  return(c(x3, y3))
}
szescian_2(2, 3) # lub szescian_2(x = 2, y = 3)
```

```
## [1]  8 27
```

```
szescian_3 <- function(x = 2, y = 2) {
  x3 <- x^3
  y3 <- y^3
  return(c(x3, y3))
}
szescian_3()
```

```
## [1] 8 8
```

```
szescian_3(y = 3)
```

```
## [1]  8 27
```

```
str(lapply(list(1, 2, 3), function(x) x^3))
```

```
## List of 3
##  $ : num 1
##  $ : num 8
##  $ : num 27
```

```
szescian_4 <- function(x) {
    if (!is.numeric(x)) {
      stop("non-numeric argument x")
    }
    x^3
}
szescian_4(-3)
## [1] -27
szescian_4("a")
## Error in szescian_4("a") : non-numeric argument x
```

3.2 Instrukcje warunkowe

- Wyrażenie warunkowe `if` ma następującą składnię:

```
if (warunek) wyrazenieTRUE else wyrazenieFALSE
```

- Przykładowo:

```
if (is.numeric("wyrazenie")) {
  print("wyrazenieTRUE")
} else {
  print("wyrazenieFALSE")
}
```

```
## [1] "wyrazenieFALSE"
```

- W celu agregacji wektorów logicznych, można wykorzystać dwie ważne funkcje agregujące wartości logiczne: `all()` i `any()`, które zwracają wartość `TRUE` wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio wszystkie lub co najmniej jedna wartość w wektorze równa jest `TRUE`.

```
x <- 1:5
any(x < 2)
```

```
## [1] TRUE
```

```
all(x < 2)
```

```
## [1] FALSE
```

```
all(x == seq(1, 5))
```

```
## [1] TRUE
```

3.3 Pętle

- Pętle umożliwiają wielokrotne wykonywanie tego samego wyrażenia (choć zapewne na różnych obiektach). W programie R mamy do dyspozycji pętle:
  - `while`
  - `repeat`
  - `for`
- Składnia pętli `while` jest następująca:

```
while (warunek) wyrazenie
```

- Zadaniem pętli `while` jest obliczanie `wyrazenia` dopóty, dopóki `warunek` jest spełniony.

```
i <- 1
while (i <= 3) {
  print(i)
  i <- i + 1
}
```

```
## [1] 1
## [1] 2
## [1] 3
```

- Aby pętla nie wykonywała się nieskończoną liczbę razy, zazwyczaj `warunek` będzie konstruowany na danych odczytywanych z pewnego obiektu, który jest modyfikowany za pomocą `wyrazenia`.

- Może się zdarzyć, że `warunek` testowy nigdy nie będzie spełniony i wtedy liczba wykonanych obrotów pętli będzie równa zeru.
- Pętla `repeat` zachowuje się tak jak `while` z `warunkiem` testowym na stałe ustawionym na `TRUE`. Zatem należy zawsze pamiętać o wywołaniu `break`, o ile chcemy doczekać wyniku.

```
i <- 0
repeat {
  i <- i + 1
  print(i)
  if (i == 3) break
}
```

```
## [1] 1
## [1] 2
## [1] 3
```

- Pętla `for` jest chyba najczęściej stosowaną pętlą w programie R. Szczególnie nadaje się ona do „przechodzenia" po elementach wektora atomowego lub listy bądź też wykonywania ciągu wyrażeń zadaną liczbę razy. Jej składnia jest następująca:

```
for (nazwa in wektor) wyrazenie
```

- W pętli `for` każdą kolejną (od pierwszej do ostatniej) wartość `wektora` związujemy z podaną `nazwą` i obliczamy `wyrażenie`. Pętla ta wykonuje się zawsze dokładnie `length(wektor)` razy, o ile nie użyte zostało wyrażenie `break`.

```
for (i in 1:3) print(i)
```

```
## [1] 1
## [1] 2
## [1] 3
```

3.4 Zadania

Zadanie 1. Oblicz iloczyn elementów dowolnego wektora `x` za pomocą pętli `while`, `repeat` i `for` (każdej z osobna).

```
# dla
x <- 1:5
```

```
## [1] 120
```

Zadanie 2. Ile liczb postaci $\binom{n}{r}$ jest większych od miliona dla $1 \leqslant r \leqslant n \leqslant 100$?

```
## [1] 4075
```

Zadanie 3. Napisz funkcję, która sprawdza czy wektor jest palindromem.

```
# dla
x <- c(1, 2, 3, 3, 2, 1)
```

```
## [1] TRUE
```

```
# dla
x <- c(1, 2, 3, 3, 2, 2)
```

```
## [1] FALSE
```

Zadanie 4. Napisz funkcję zamieniającą miarę kąta podaną w stopniach na radiany. Sprawdź działanie tej funkcji dla kątów o mierze: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°. Następnie przygotuj ramkę danych, w której zebrane będą informacje o wartościach funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens dla kątów o takich miarach.

```
## [1] 0.0000000 0.5235988 0.7853982 1.0471976 1.5707963
```

```
##         sin          cos           tg          ctg
## 1 0.0000000 1.000000e+00 0.000000e+00          Inf
## 2 0.5000000 8.660254e-01 5.773503e-01 1.732051e+00
## 3 0.7071068 7.071068e-01 1.000000e+00 1.000000e+00
## 4 0.8660254 5.000000e-01 1.732051e+00 5.773503e-01
## 5 1.0000000 6.123234e-17 1.633124e+16 6.123234e-17
```

Zadanie 5. Napisz funkcję, której argumentem będzie wektor liczbowy a wynikiem wektor zawierający trzy najmniejsze i trzy największe liczby w tym wektorze. W przypadku argumentu krótszego niż trzy liczby, funkcja ma zwracać komunikat o błędzie z komentarzem „za krótki argument".

```
# dla
x <- c(2, 6, 1, 5, 7, 3, 4)
```

```
## [1] 1 2 3 5 6 7
```

```
# dla
x <- c(2, 6)
## Error in command 'extreme_3(x)': za krótki argument
```

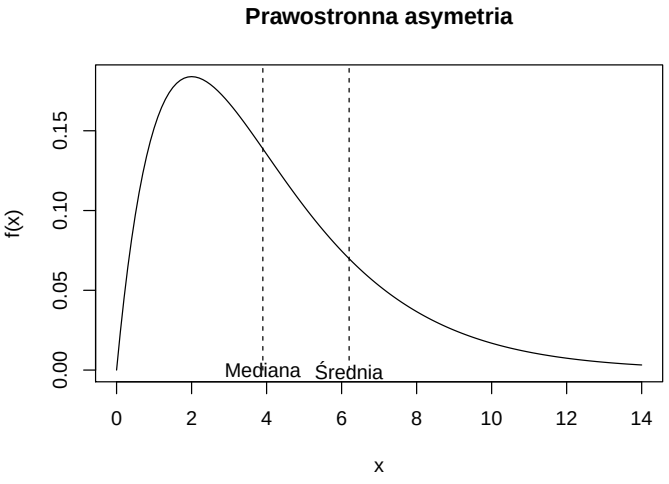
4 Statystyka opisowa

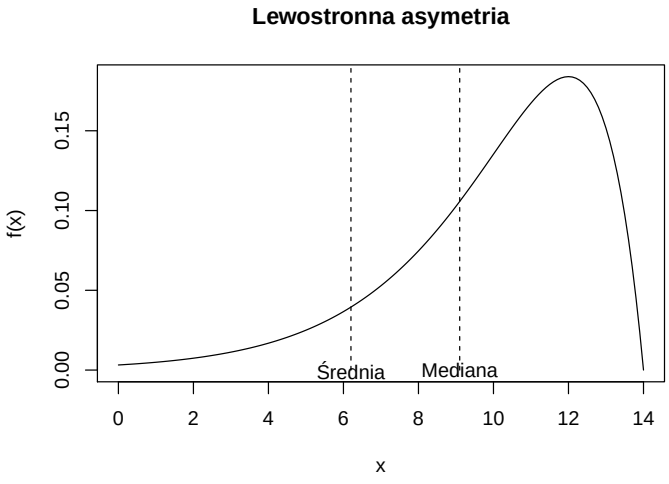
4.1 Miara asymetrii rozkładu

- współczynnik asymetrii (skośności)

$$A = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

- Współczynnik asymetrii
  - równy zeru oznacza symetrię rozkładu zmiennej.
  - przyjmujący wartość dodatnią oznacza prawostronną asymetrię. Prawy ogon jest dłuższy, a masa rozkładu jest skoncentrowana po lewej stronie.
  - przyjmujący wartość ujemną oznacza lewostronną asymetrię. Lewy ogon jest dłuższy, a masa rozkładu jest skoncentrowana po prawej stronie.



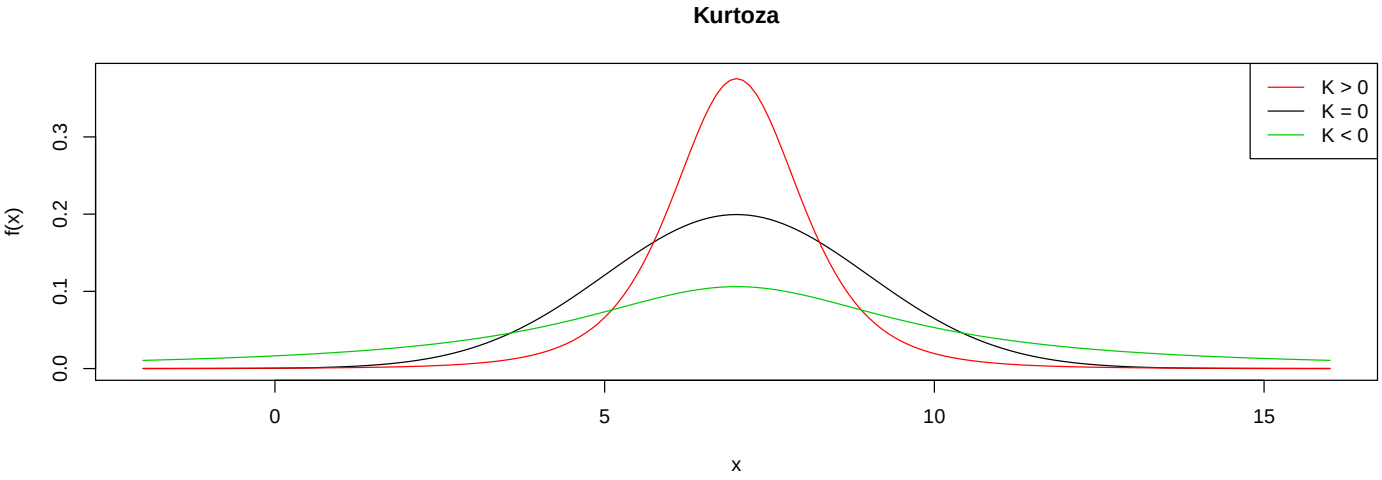


4.2 Miara koncentracji rozkładu

- kurtoza

$$K = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3$$

- Kurtoza jest miarą skupienia wartości zmiennej wokół średniej.
- Porównuje ona badany rozkład empiryczny z rozkładem normalnym i przyjmuje wartości większe niż -2.
- Im większa wartość K, tym większe skupienie wartości zmiennej wokół średniej.
- Kurtoza rozkładu normalnego wynosi zero.
- Jeśli $K < 0$, wówczas rozkład jest bardziej spłaszczony niż rozkład normalny, a jeśli $K > 0$ - bardziej smukły.



4.3 Przykłady

Przykład 1. Poniższe dane podają liczbę błędów w grupie 50 osób zdających egzamin testowy. Egzamin składał się z 18 pytań (można popełnić maksymalnie dwa błędy, aby zdać egzamin).

1	1	2	0	1	3	1	4	4	4	0	1	0	0	0	2	3
4	0	1	5	2	3	5	3	2	2	4	0	2	2	0	2	2
3	3	1	3	2	2	0	0	5	4	2	1	5	2	2	0	

Zmienna X to liczba błędów. Jest to dyskretna zmienna ilościowa.

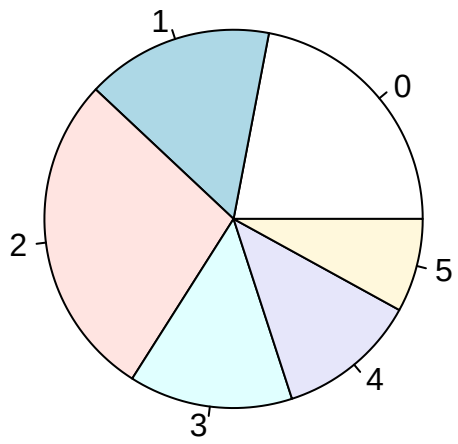
```
liczba_bledow <- c(1, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 4, 4, 4, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 3,
                   4, 0, 1, 5, 2, 3, 5, 3, 2, 2, 4, 0, 2, 2, 0, 2, 2,
                   3, 3, 1, 3, 2, 2, 0, 0, 5, 4, 2, 1, 5, 2, 2, 0)
# rozkład empiryczny opisany za pomocą szeregu rozdzielczego
data.frame(cbind(liczebnosc = table(liczba_bledow),
                 procent = prop.table(table(liczba_bledow))))
```

```
##   liczebnosc procent
## 0         11    0.22
## 1          8    0.16
## 2         14    0.28
## 3          7    0.14
## 4          6    0.12
## 5          4    0.08
```

```r
# wykres słupkowy
barplot(table(liczba_bledow),
        xlab = "Liczba błędów", ylab = "Liczebność",
        main = "Rozkład empiryczny liczby błędów")
```


```r
barplot(prop.table(table(liczba_bledow)),
        xlab = "Liczba błędów", ylab = "Prawdopodobieństwo",
        main = "Rozkład empiryczny liczby błędów")
```


```r
# wykres kołowy
pie(table(liczba_bledow))
```



```r
# średnia
mean(liczba_bledow)
```

```
## [1] 2.02
```

```r
# mediana
median(liczba_bledow)
```

```
## [1] 2
```

```r
# odchylenie standardowe
sd(liczba_bledow)
```

```
## [1] 1.558256
```

```r
# współczynnik zmienności
sd(liczba_bledow) / mean(liczba_bledow) * 100
```

```
## [1] 77.14141
```

Przykład 2. Badano czas oczekiwania na tramwaj, który kursuje w jednakowych odstępach czasu. Plik czas_oczek_tramwaj.RData zawiera dane dotyczące czasu oczekiwania na tramwaj (wyrażonego w minutach) 100 osób wybranych losowo. Zmienna X to czas oczekiwania na tramwaj. Jest to zmienna ilościowa ciągła.

```r
load(url("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/czas_oczek_tramwaj.RData"))
head(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1]  4.03 11.04  5.73 12.36 13.17  0.64
```

```r
data.frame(cbind(liczebnosc = table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = seq(0, 14, 2))),
                 procent = prop.table(table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = seq(0, 14, 2))))))
```

```
##         liczebnosc procent
## (0,2]           15    0.15
## (2,4]           13    0.13
## (4,6]           15    0.15
## (6,8]           15    0.15
## (8,10]          15    0.15
## (10,12]         12    0.12
## (12,14]         15    0.15
```

```r
(czas_oczek_tramwaj_hist <- hist(czas_oczek_tramwaj, plot = FALSE)$breaks)
```

```
## [1]  0  2  4  6  8 10 12 14
```

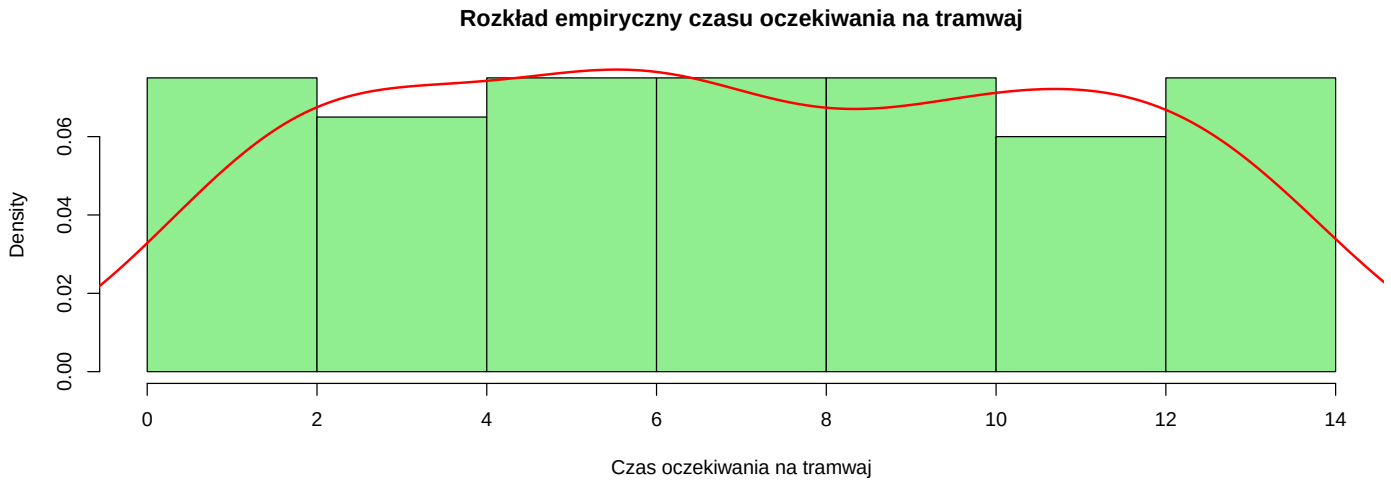
```r
data.frame(cbind(liczebnosc = table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = czas_oczek_tramwaj_hist)),
                 procent = prop.table(table(cut(czas_oczek_tramwaj, breaks = czas_oczek_tramwaj_his
```

```
##         liczebnosc procent
## (0,2]           15    0.15
## (2,4]           13    0.13
## (4,6]           15    0.15
## (6,8]           15    0.15
## (8,10]          15    0.15
## (10,12]         12    0.12
## (12,14]         15    0.15
```

Histogram - zestaw sąsiadujących prostokątów, których podstawy, równe rozpiętości przedziałów klasowych, znajdują się na osi odciętych, a wysokości są liczebnościami przedziałów.

```
# histogram
hist(czas_oczek_tramwaj,
     xlab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
     main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj")
rug(jitter(czas_oczek_tramwaj))
```


```
# histogram z estymatorem jądrowym gęstości
hist(czas_oczek_tramwaj,
     xlab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
     main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj",
     probability = TRUE,
     col = "lightgreen")
lines(density(czas_oczek_tramwaj), col = "red", lwd = 2)
```



Wykres ramkowy to metoda graficznego przedstawienia danych liczbowych za pomocą ich kwantyli. Tworzymy go poprzez umieszczenie na osi pionowej wartości niektórych parametrów rozkładu (kwantyli).

- Wewnątrz prostokąta znajduje się pogrubiona pozioma linia, która określa wartość mediany.
- Nad osią znajduje się prostokąt (ramka), którego dolny bok jest określony przez pierwszy kwartyl, a górny bok przez trzeci kwartyl. Wysokość pudełka odpowiada wartości rozstępu międzykwartylowego $(Q_3 - Q_1)$.
- Pudełko jest uzupełnione od góry i od dołu segmentami (wąsami). Dolny koniec dolnego segmentu

reprezentuje najmniejszą wartość w zestawie danych, zaś górny koniec górnego segmentu jest obserwacją największą. Wartości te muszą spełniać dodatkowy warunek, a mianowicie dolny koniec nie może być mniejszy niż $Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$, a górny większy niż $Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1)$. Jeśli istnieją obserwacje poza tym zakresem, są one zaznaczane na wykresie indywidualnie jako osobne punkty i są traktowane jako obserwacje odstające.

Wykres pudełkowy jako wskaźnik tendencji centralnej, dyspersji, symetrii, skośności i wielkości ogona:

- dyspersja - odstępy między różnymi częściami pudełka
- symetryczny - pogrubiona linia znajduje się blisko środka pudełka, a długości wąsów są takie same
- prawostronnie asymetryczny - górny wąs jest znacznie dłuższy niż dolny wąs, a linia jest bliższa dolnej części pudełka.
- lewostronnie asymetryczny - dolny wąs jest znacznie dłuższy niż górny wąs, a linia jest bliższa górnej części pudełka
- grube ogony - długość wąsów znacznie przekracza długość pudełka
- cieńkie ogony - długość wąsów jest krótsza niż długość pudełka
- bardzo krótkie ogony (populacja w kształcie litery U, z zanurzeniem w środku zamiast garbu) - wąsy są nieobecne

```r
# wykres ramkowy
boxplot(czas_oczek_tramwaj,
        ylab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
        main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj")
```

- statystyki opisowe

```r
# średnia
mean(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 6.9796
```

```r
# mediana
median(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 6.525
```

```r
# odchylenie standardowe
sd(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 3.989571
```

```r
# współczynnik zmienności
sd(czas_oczek_tramwaj) / mean(czas_oczek_tramwaj) * 100
```

```
## [1] 57.16046
```

```r
library(e1071)
# współczynnik asymetrii
skewness(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 0.03465377
```

```r
# kurtoza
kurtosis(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] -1.215931
```

4.4 Zadania

Zadanie 1. Zmienna `wynik` w pliku ankieta.txt opisuje wyniki badania działalności prezydenta pewnego miasta. Wybrano losowo 100 mieszkańców miasta i zadano im następujące pytanie: Jak oceniasz działalność prezydenta miasta? Dostępne były następujące odpowiedzi: zdecydowanie dobrze (`a`), dobrze (`b`), źle (`c`), zdecydowanie źle (`d`), nie mam zdania (`e`). Jakiego typu jest ta zmienna? Jakie są możliwe wartości tej zmiennej?

1. Zaimportuj dane z pliku ankieta.txt do zmiennej `ankieta`.

```
##   plec szkola wynik
## 1    m      p     d
## 2    m      s     e
## 3    m      w     a
## 4    m      s     d
## 5    m      p     c
## 6    m      w     c
```

```
## ...
```

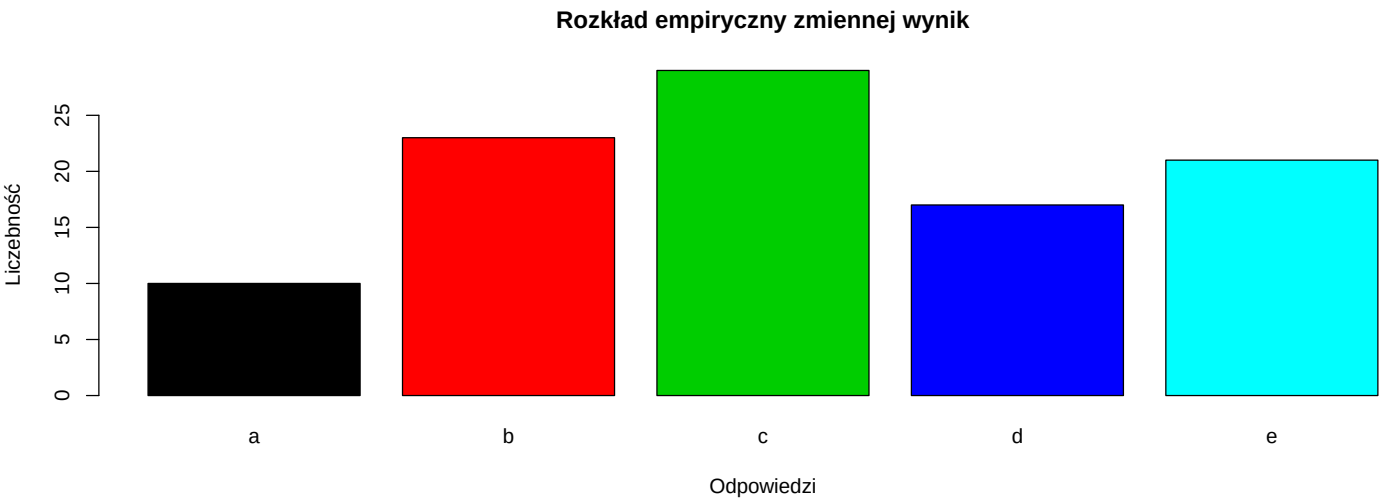
2. Przedstaw rozkład empiryczny zmiennej `wynik` za pomocą szeregu rozdzielczego.

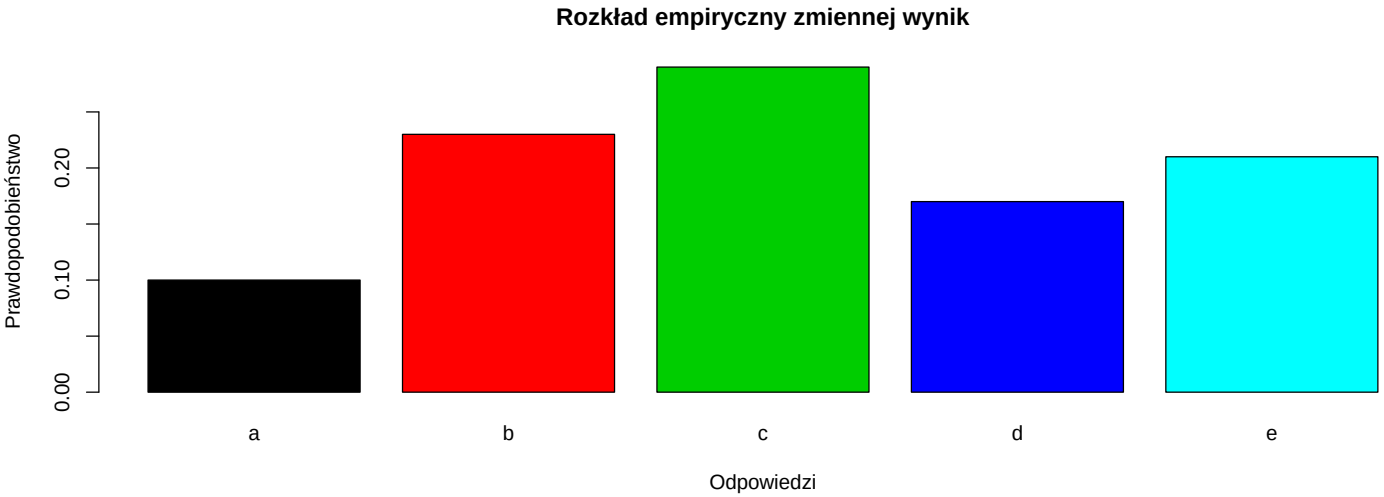
```
##   liczebnosc procent
## a         10    0.10
## b         23    0.23
## c         29    0.29
## d         17    0.17
## e         21    0.21
```

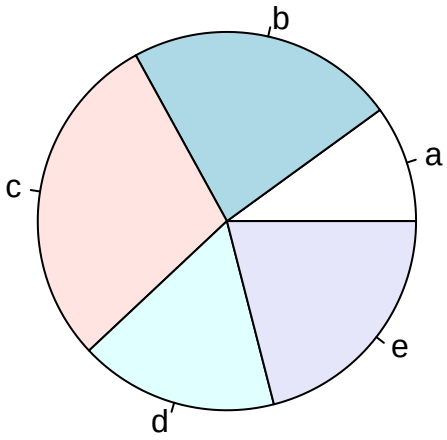
3. Przedstaw rozkład empiryczny zmiennej `wynik` tylko dla osób z wykształceniem podstawowym za pomocą szeregu rozdzielczego.

```
##   liczebnosc    procent
## a          2 0.11764706
## b          3 0.17647059
## c          4 0.23529412
## d          7 0.41176471
## e          1 0.05882353
```

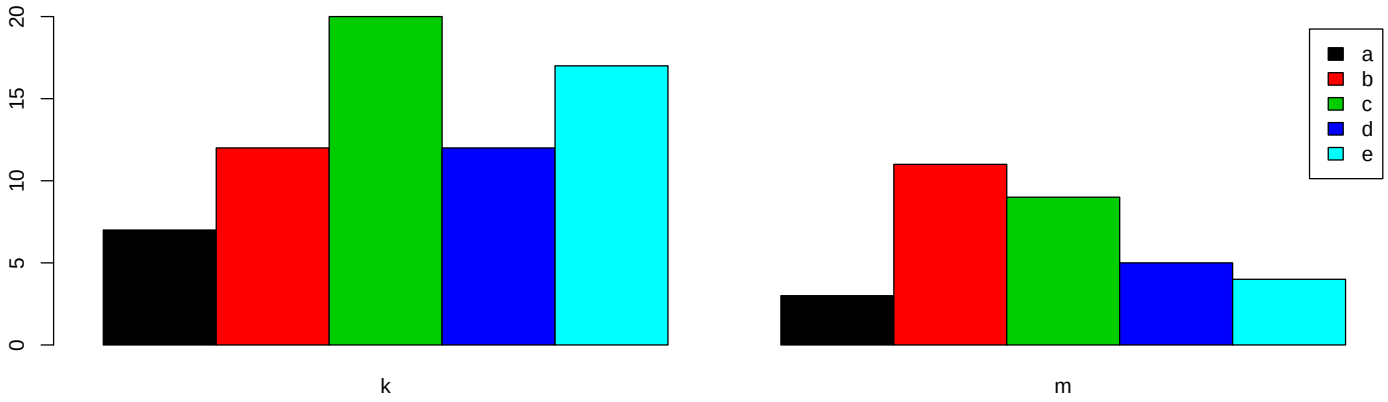
4. Zilustruj wyniki ankiety za pomocą wykresu słupkowego i kołowego.







5. Zilustruj wyniki ankiety za pomocą wykresu słupkowego z podziałem na kobiety i mężczyzn.



6. Zinterpretuj powyższe wyniki (tabelaryczne i graficzne).

Zadanie 2. Przebadano 200 losowo wybranych 5-sekundowych okresów pracy centrali telefonicznej. Rejestrowano liczbę zgłoszeń. Wyniki są zawarte w pliku Centrala.RData. Jakiego typu jest ta zmienna? Jakie są możliwe wartości tej zmiennej?

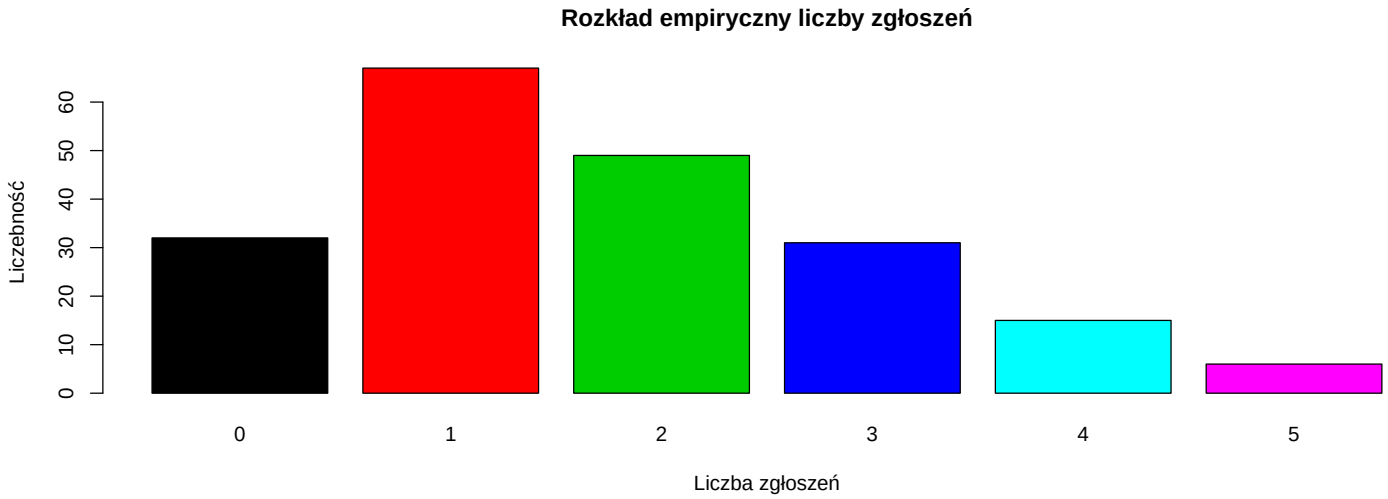
1. Zaimportuj dane z pliku Centrala.RData.

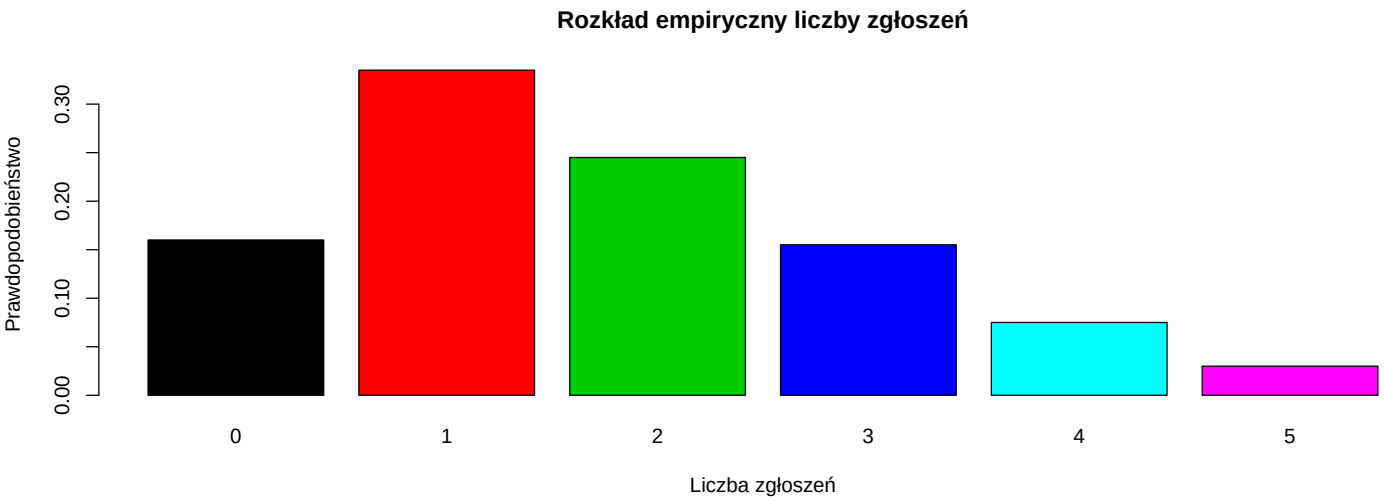
```
##   Liczba
## 1      0
## 2      0
## 3      5
## 4      1
## 5      1
## 6      2

## ...
```

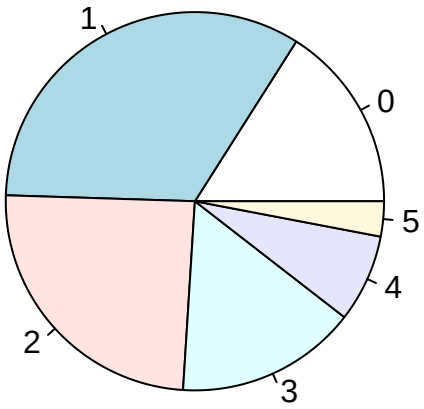
2. Przedstaw rozkład empiryczny liczby zgłoszeń za pomocą szeregu rozdzielczego.

```
##   liczebnosc procent
## 0         32   0.160
## 1         67   0.335
## 2         49   0.245
## 3         31   0.155
## 4         15   0.075
## 5          6   0.030
```

3. Zilustruj liczbę zgłoszeń za pomocą wykresu słupkowego i kołowego.







4. Obliczyć średnią z liczby zgłoszeń, medianę liczby zgłoszeń, odchylenie standardowe liczby zgłoszeń i współczynnik zmienności liczby zgłoszeń.

```
## [1] 1.74
```

```
## [1] 2
```

```
## [1] 1.28086
```

```
## [1] 73.61266
```

5. Zinterpretuj powyższe wyniki (tabelaryczne, graficzne i liczbowe).

Zadanie 3. Notowano pomiary średniej szybkości wiatru w odstępach 15 minutowych wokół nowo powstającej elektrowni wiatrowej. Wyniki są następujące:

0.9	6.2	2.1	4.1	7.3
1.0	4.6	6.4	3.8	5.0
2.7	9.2	5.9	7.4	3.0
4.9	8.2	5.0	1.2	10.1
12.2	2.8	5.9	8.2	0.5

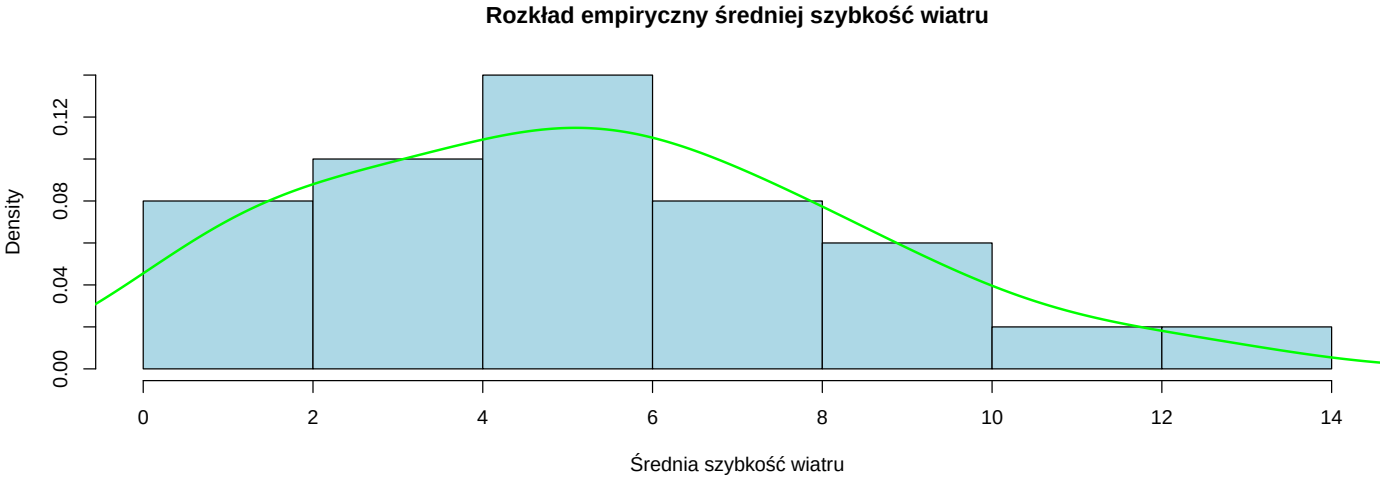
Jakiego typu jest ta zmienna? Jakie są możliwe wartości tej zmiennej?

1. Przedstaw rozkład empiryczny badanej zmiennej za pomocą szeregu rozdzielczego.

```
##         liczebnosc procent
## (0,2]            4    0.16
## (2,4]            5    0.20
## (4,6]            7    0.28
```

```
## (6,8]             4    0.16
## (8,10]            3    0.12
## (10,12]           1    0.04
## (12,14]           1    0.04
```

2. Zilustruj rozkład empiryczny średniej szybkości wiatru za pomocą histogramu i wykresu pudełkowego. Jakie są zalety i wady tych wykresów?



4. Obliczyć średnią, medianę, odchylenie standardowe, współczynnik zmienności, współczynnik asymetrii i kurtozę średniej szybkości wiatru.

```
## [1] 5.144
```

```
## [1] 5
```

```
## [1] 3.054925
## [1] 59.38812
## [1] 0.3422838
## [1] -0.665667
```

5. Zinterpretuj powyższe wyniki (tabelaryczne, graficzne i liczbowe).

Zadanie 4. Napisz funkcję `wspolczynnik_zmiennosci()`, która oblicza wartość współczynnika zmienności dla danego wektora obserwacji. Funkcja powinna mieć dwa argumenty:

- `x` - wektor zawierający dane,
- `na.rm` - wartość logiczna (domyślnie `FALSE`), która wskazuje czy braki danych (obiekty `NA`) mają być zignorowane.

Funkcja zwraca wartość współczynnika zmienności wyrażoną w procentach. Ponadto funkcja sprawdza, czy wektor `x` jest wektorem numerycznym. W przeciwnym razie zostanie zwrócony błąd z następującym komunikatem: „argument nie jest liczbą". Przykładowe wywołania i wyniki funkcji są następujące:

```
x <- c(1, NA, 3)
wspolczynnik_zmiennosci(x)
## [1] NA
wspolczynnik_zmiennosci(x, na.rm = TRUE)
## [1] 70.71068
wspolczynnik_zmiennosci()
## Error in wspolczynnik_zmiennosci() :
##   argument "x" is missing, with no default
wspolczynnik_zmiennosci(c("x", "y"))
## Error in wspolczynnik_zmiennosci(c("x", "y")) : argument nie jest liczbą
```

5 Model statystyczny i estymacja punktowa

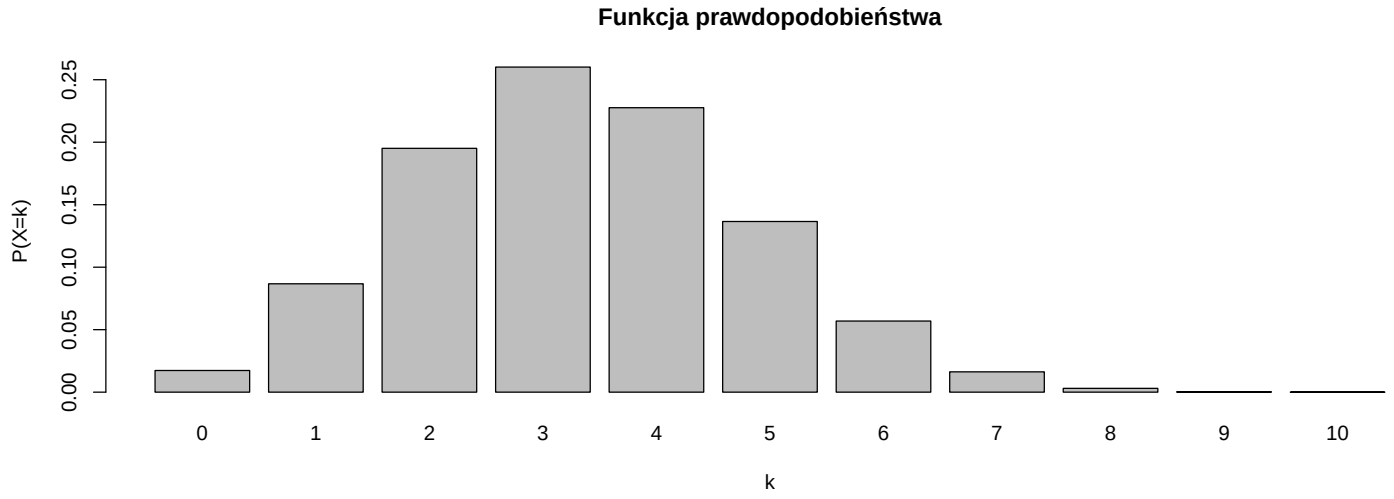
5.1 Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa

1. rozkład dwumianowy $b(m,p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \ k = 0, 1, \ldots, m$$

- Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej $X \sim b(10, 1/3)$

```r
barplot(dbinom(x = 0:10, size = 10, prob = 1 / 3), names.arg = 0:10,
        xlab = "k", ylab = "P(X=k)", main = "Funkcja prawdopodobieństwa")
```

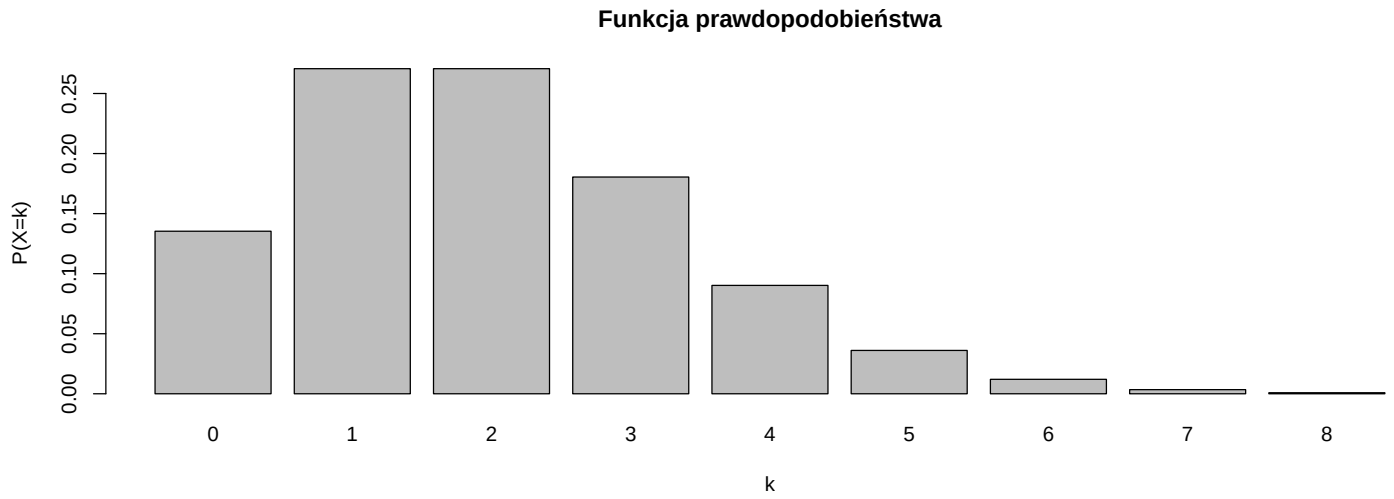


2. rozkład Poissona $\pi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots$$

- Funkcja prawdopodobieństwa zmiennej $X \sim \pi(2)$

```r
barplot(dpois(x = 0:8, lambda = 2), names.arg = 0:8,
        xlab = "k", ylab = "P(X=k)", main = "Funkcja prawdopodobieństwa")
```

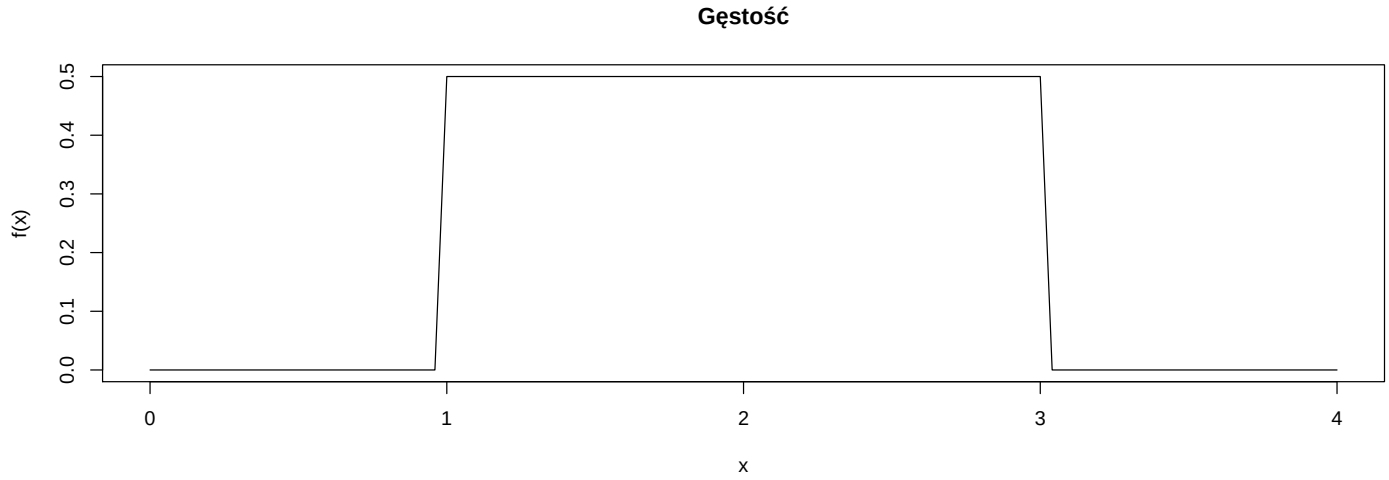


3. rozkład jednostajny $U(a, b)$, $a < b$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & dla\ x \in (a, b) \\ 0 & dla\ x \notin (a, b) \end{cases}$$

- Gęstość zmiennej $X \sim U(1, 3)$

```r
curve(dunif(x, min = 1, max = 3), 0, 4, ylab = "f(x)", main = "Gęstość")
```

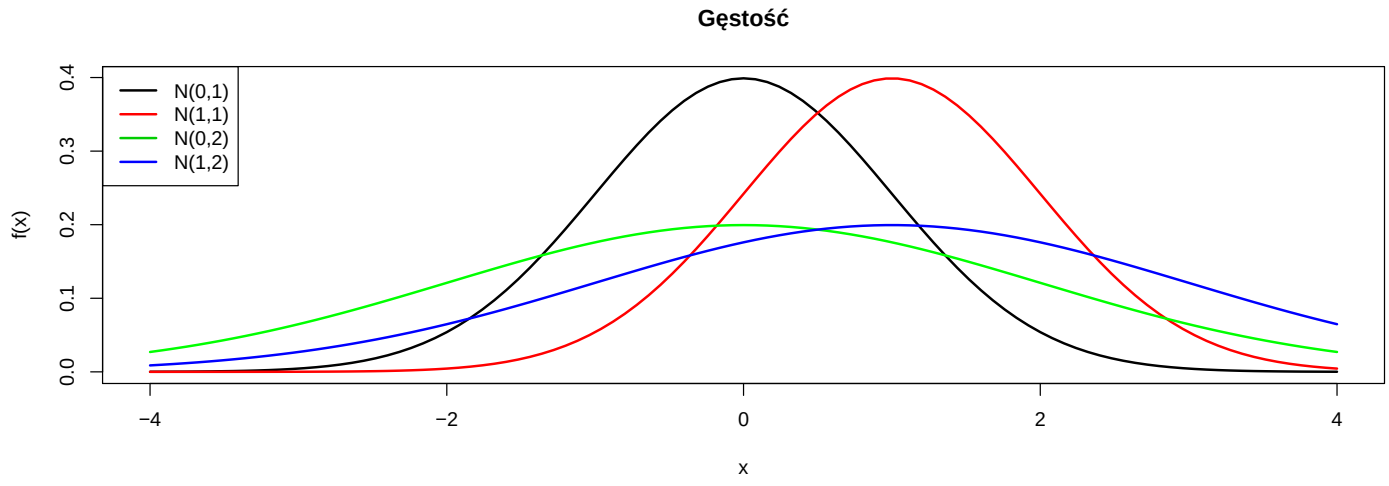


4. rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Gęstości rozkładów normalnych

```r
curve(dnorm, -4, 4, ylab = "f(x)", main = "Gęstość", lwd = 2)
curve(dnorm(x, mean = 1), col = "red", add = TRUE, lwd = 2)
curve(dnorm(x, sd = 2), col = "green", add = TRUE, lwd = 2)
curve(dnorm(x, mean = 1, sd = 2), col = "blue", add = TRUE, lwd = 2)
legend("topleft", lwd = 2, col = 1:4, legend = c("N(0,1)", "N(1,1)", "N(0,2)", "N(1,2)"))
```

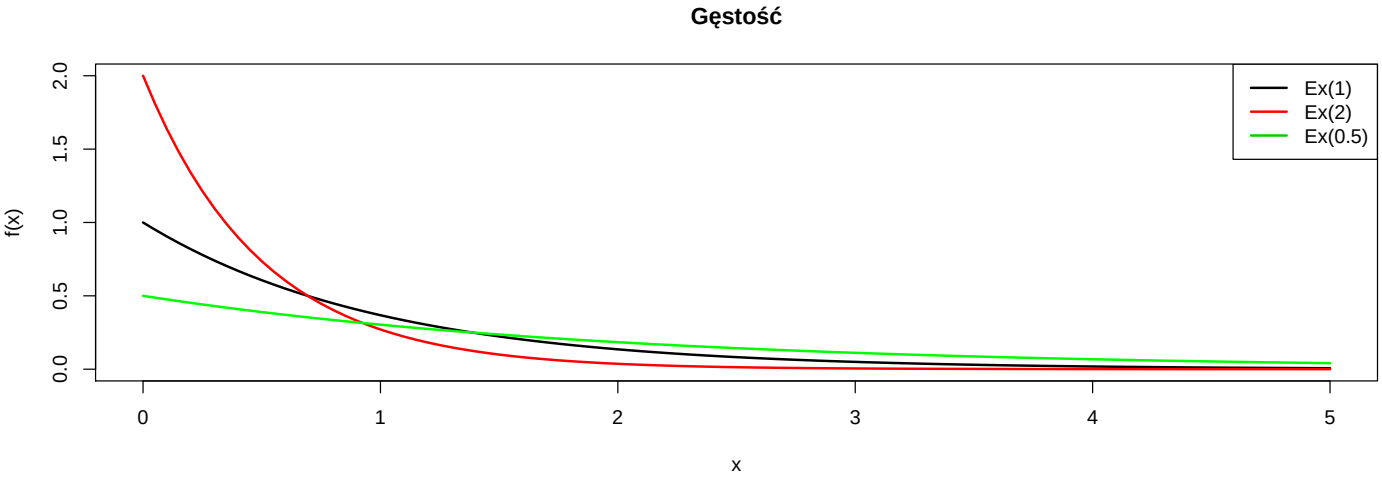


5. rozkład wykładniczy $Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & dla\ x > 0 \\ 0 & dla\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

- Gęstości rozkładów wykładniczych

```r
curve(dexp, 0, 5, ylim = c(0, 2), ylab = "f(x)", main = "Gęstość", lwd = 2)
curve(dexp(x, rate = 2), col = "red", add = TRUE, lwd = 2)
curve(dexp(x, rate = 0.5), col = "green", add = TRUE, lwd = 2)
legend("topright", lwd = 2, col = 1:3, legend = c("Ex(1)", "Ex(2)", "Ex(0.5)"))
```



6. rozkład Rayleigha $R(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda} x \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right) I_{(0,\infty)}(x)$$

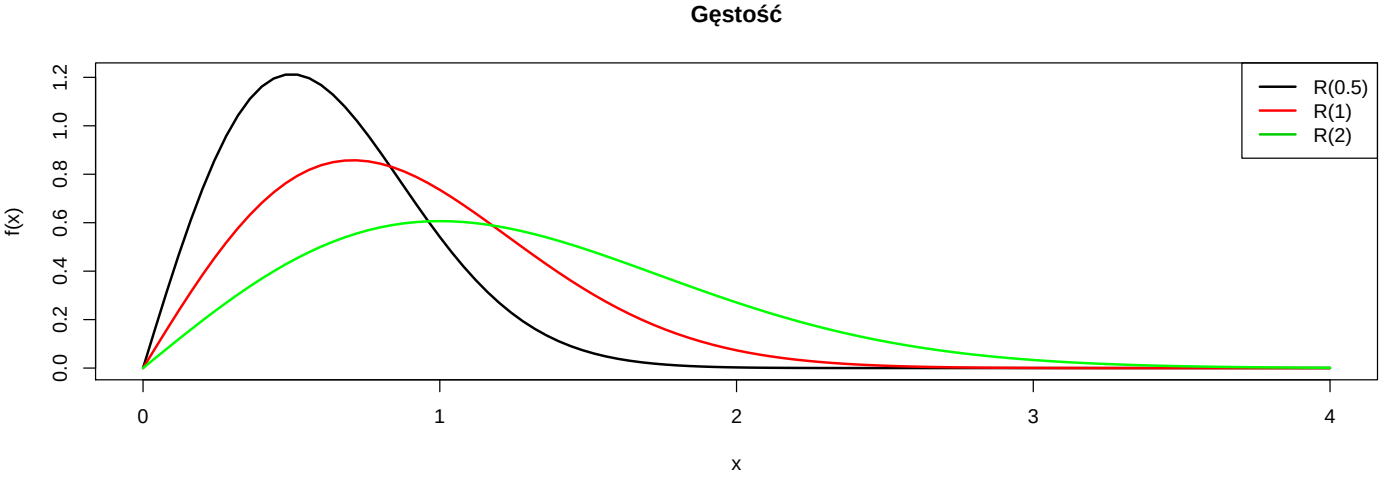
Uwaga. Rozkład Rayleigha jest zaimplementowany w pakiecie `VGAM` z następującą funkcją gęstości

$$f_\sigma(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) I_{(0,\infty)}(x),$$

więc w naszej notacji $\sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

- Gęstości rozkładów Rayleigha

```
lambda <- 0.5
curve(VGAM::drayleigh(x, sqrt(lambda / 2)),
      xlim = c(0, 4), ylab = "f(x)", main = "Gęstość", lwd = 2)
lambda <- 1
curve(VGAM::drayleigh(x, sqrt(lambda / 2)),
      col = "red", add = TRUE, lwd = 2)
lambda <- 2
curve(VGAM::drayleigh(x, sqrt(lambda / 2)),
      col = "green", add = TRUE, lwd = 2)
legend("topright", lwd = 2, col = 1:3, legend = c("R(0.5)", "R(1)", "R(2)"))
```



Rozkłady prawdopodobieństwa w programie R

Rozkład	Dystrybuanta	Gęstość/Funkcja prawd.	Kwantyl	Generator
dwumianowy	pbinom	dbinom	qbinom	rbinom
Poissona	ppois	dpois	qpois	rpois
ujemny dwumianowy	pnbinom	dnbinom	qnbinom	rnbinom
geometryczny	pgeom	dgeom	qgeom	rgeom
hipergeometryczny	phyper	dhyper	qhyper	rhyper
jednostajny	punif	dunif	qunif	runif
beta	pbeta	dbeta	qbeta	rbeta
wykładniczy	pexp	dexp	qexp	rexp
gamma	pgamma	dgamma	qgamma	rgamma
normalny	pnorm	dnorm	qnorm	rnorm
logarytmiczno-normalny	plnorm	dlnorm	qlnorm	rlnorm
Weibulla	pweibull	dweibull	qweibull	rweibull
chi-kwadrat	pchisq	dchisq	qchisq	rchisq
t-Studenta	pt	dt	qt	rt
Cauchy'ego	pcauchy	dcauchy	qcauchy	rcauchy
F-Snedecora	pf	df	qf	rf
Rayleigha	VGAM::prayleigh	VGAM::drayleigh	VGAM::qrayleigh	VGAM::rrayleigh

5.2 Przykłady

Przykład 1. Poniższe dane podają liczbę błędów w grupie 50 osób zdających egzamin testowy. Egzamin składał się z 18 pytań (można popełnić maksymalnie dwa błędy, aby zdać egzamin).

1	1	2	0	1	3	1	4	4	4	0	1	0	0	0	2	3
4	0	1	5	2	3	5	3	2	2	4	0	2	2	0	2	2
3	3	1	3	2	2	0	0	5	4	2	1	5	2	2	0	

Zmienna X to liczba błędów. Jest to dyskretna zmienna ilościowa.

```
liczba_bledow <- c(1, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 4, 4, 4, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 3,
                   4, 0, 1, 5, 2, 3, 5, 3, 2, 2, 4, 0, 2, 2, 0, 2, 2,
                   3, 3, 1, 3, 2, 2, 0, 0, 5, 4, 2, 1, 5, 2, 2, 0)
# wykres słupkowy
barplot(prop.table(table(liczba_bledow)),
        xlab = "Liczba błędów", ylab = "Prawdopodobieństwo",
        main = "Rozkład empiryczny liczby błędów")
```

- model: rozkład dwumianowy z $m = 18$
- $\mathcal{P} = \{b(18, p) : p \in (0, 1)\}$
- $\Theta = (0, 1)$ oraz $\theta = p$

```
liczba_bledow <- c(1, 1, 2, 0, 1, 3, 1, 4, 4, 4, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 3,
                   4, 0, 1, 5, 2, 3, 5, 3, 2, 2, 4, 0, 2, 2, 0, 2, 2,
                   3, 3, 1, 3, 2, 2, 0, 0, 5, 4, 2, 1, 5, 2, 2, 0)
m <- 18
# estymator
(p_est <- mean(liczba_bledow) / m)
```

```
## [1] 0.1122222
```

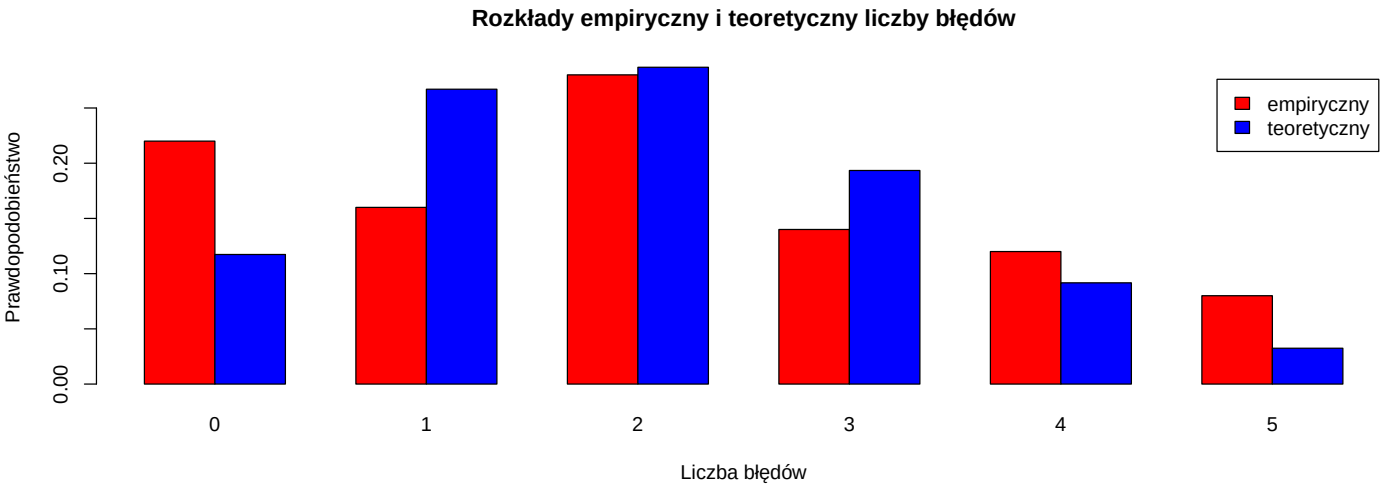
```
probs <- dbinom(sort(unique(liczba_bledow)), size = m, prob = p_est)
sum(probs)
```

```
## [1] 0.9887985
```

```
counts <- matrix(c(prop.table(table(liczba_bledow)), probs), nrow = 2, byrow = TRUE)
rownames(counts) <- c("empiryczny", "teoretyczny")
colnames(counts) <- sort(unique(liczba_bledow))
counts
```

```
##                     0         1         2         3          4          5
## empiryczny  0.2200000 0.1600000 0.2800000 0.1400000 0.12000000 0.08000000
## teoretyczny 0.1173483 0.2670078 0.2868914 0.1934153 0.09168466 0.03245109
```

```
barplot(counts,
        xlab = "Liczba błędów", ylab = "Prawdopodobieństwo",
        main = "Rozkłady empiryczny i teoretyczny liczby błędów",
        col = c("red", "blue"), legend = rownames(counts), beside = TRUE)
```

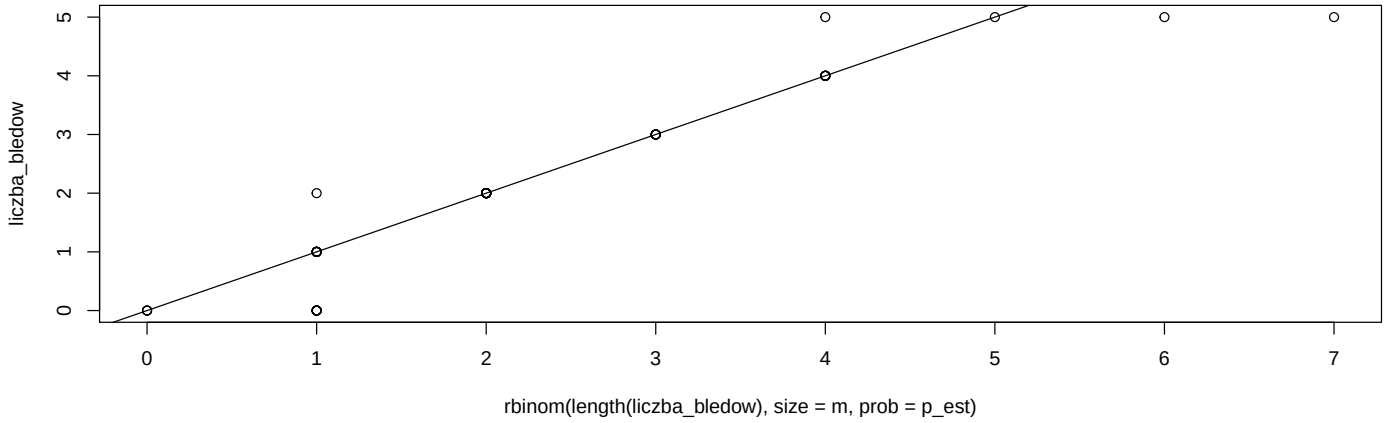


Wykres kwantyl-kwantyl

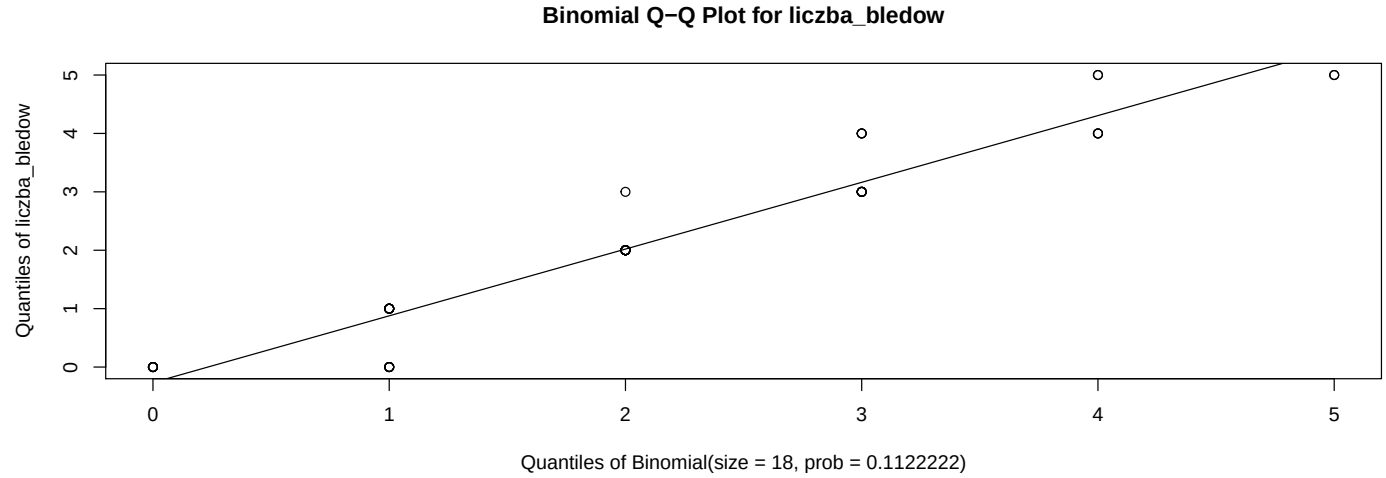
- Wykres kwantyl-kwantyl (Q-Q plot), jest wykresem zaobserwowanych statystyk porządkowych z losowej próby (kwantyle empiryczne) do odpowiadającym im (oszacowanym) wartościom średniej lub mediany w oparciu o założony rozkład lub w stosunku do empirycznych kwantyli innego zestawu danych.
- Wykresy kwantyl-kwantyl służą do oceny, czy dane pochodzą z określonego rozkładu lub czy dwa zestawy danych mają ten sam rozkład. Jeśli rozkłady mają ten sam kształt (ale niekoniecznie te same parametry położenia lub skali), wówczas wykres układa się mniej więcej na linii prostej. Jeśli rozkłady są dokładnie takie same, wówczas wykres układa się mniej więcej na linii prostej $y = x$.

- Najpierw wybiera się zbiór kwantyli pewnych rzędów. Punkt (x, y) na wykresie odpowiada jednemu z kwantyli drugiego rozkładu (współrzędna y) wykreślonemu względem kwantyla tego samego rzędu pierwszego rozkładu (współrzędna x).
- „qqline" dodaje linię do „teoretycznego" wykresu kwantyl-kwantyl, która przechodzi przez kwantyle rzędów `probs = c(0.25, 0.75)`, czyli domyślnie pierwszy i trzeci kwartyl.

```
# wykres kwantyl-kwantyl
qqplot(rbinom(length(liczba_bledow), size = m, prob = p_est), liczba_bledow)
qqline(liczba_bledow, distribution = function(probs) { qbinom(probs, size = m, prob = p_est) })
```




```
# lub
library(EnvStats)
EnvStats::qqPlot(liczba_bledow,
                 distribution = "binom",
                 param.list = list(size = m, prob = p_est),
                 add.line = TRUE)
```



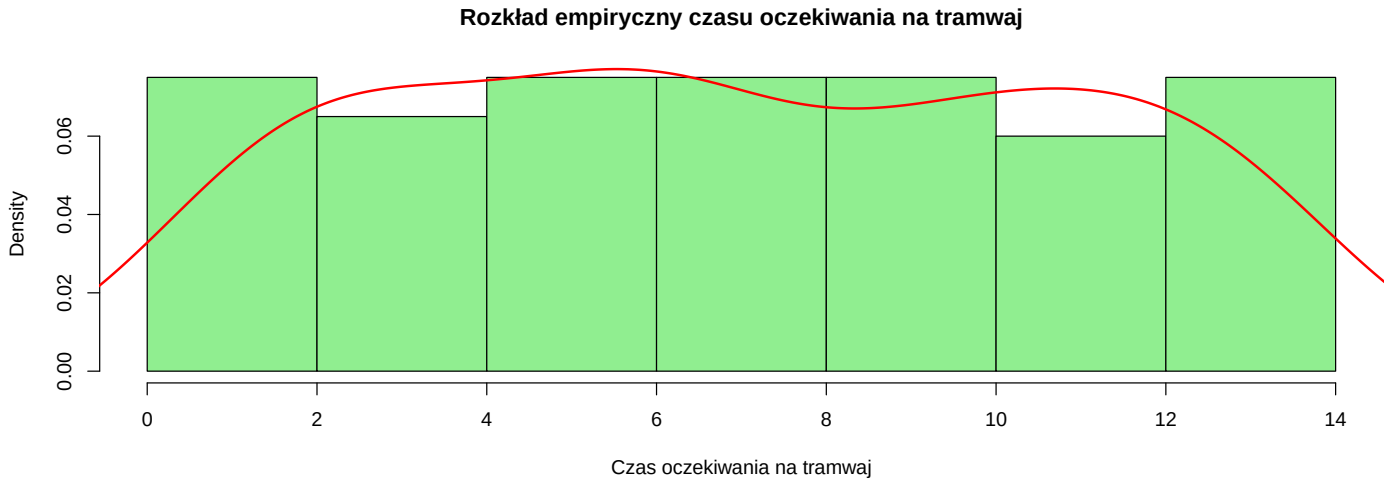
Przykład 2. Badano czas oczekiwania na tramwaj, który kursuje w jednakowych odstępach czasu. Plik czas_oczek_tramwaj.RData zawiera dane dotyczące czasu oczekiwania na tramwaj (wyrażonego w minutach) 100 osób wybranych losowo. Zmienna X to czas oczekiwania na tramwaj. Jest to zmienna ilościowa ciągła.

```
load(url("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/czas_oczek_tramwaj.RData"))
head(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1]  4.03 11.04  5.73 12.36 13.17  0.64
```

```
# histogram z estymatorem jądrowym gęstości
hist(czas_oczek_tramwaj,
```

```
     xlab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
     main = "Rozkład empiryczny czasu oczekiwania na tramwaj",
     probability = TRUE,
     col = "lightgreen")
lines(density(czas_oczek_tramwaj), col = "red", lwd = 2)
```



- model: rozkład jednostajny
- $\mathcal{P} = \{U(a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
- $\Theta = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$ oraz $\theta = (a,b)$

```
load(url("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/czas_oczek_tramwaj.RData"))
# estmatory
(a_est <- min(czas_oczek_tramwaj))
```

```
## [1] 0.01
```

```
(b_est <- max(czas_oczek_tramwaj))
```

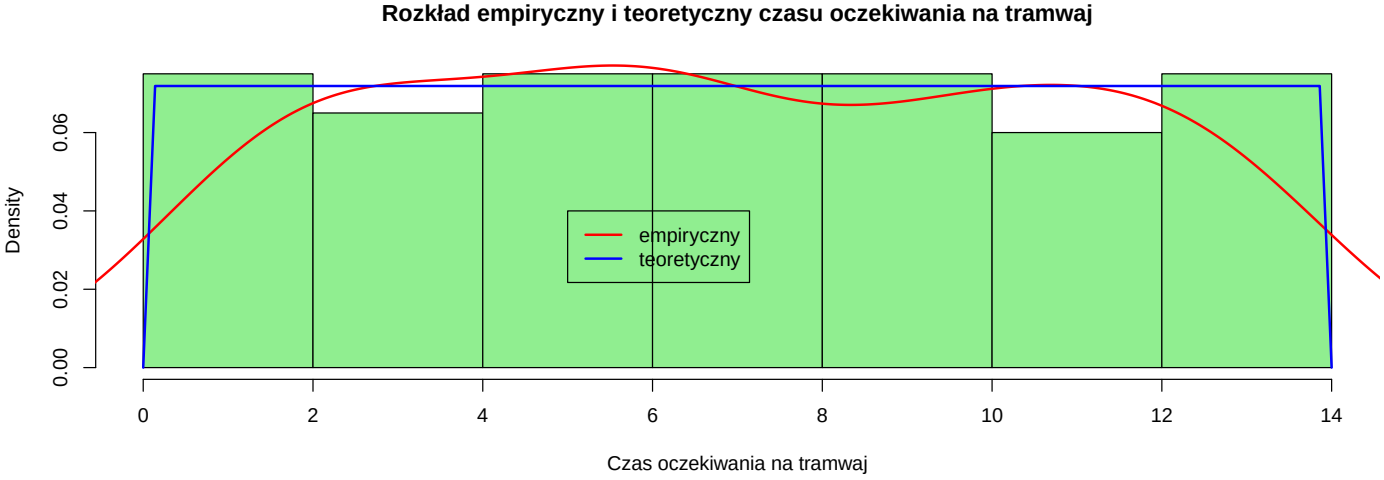
```
## [1] 13.92
```

```
library(EnvStats)
EnvStats::eunif(czas_oczek_tramwaj, method = "mle")
```

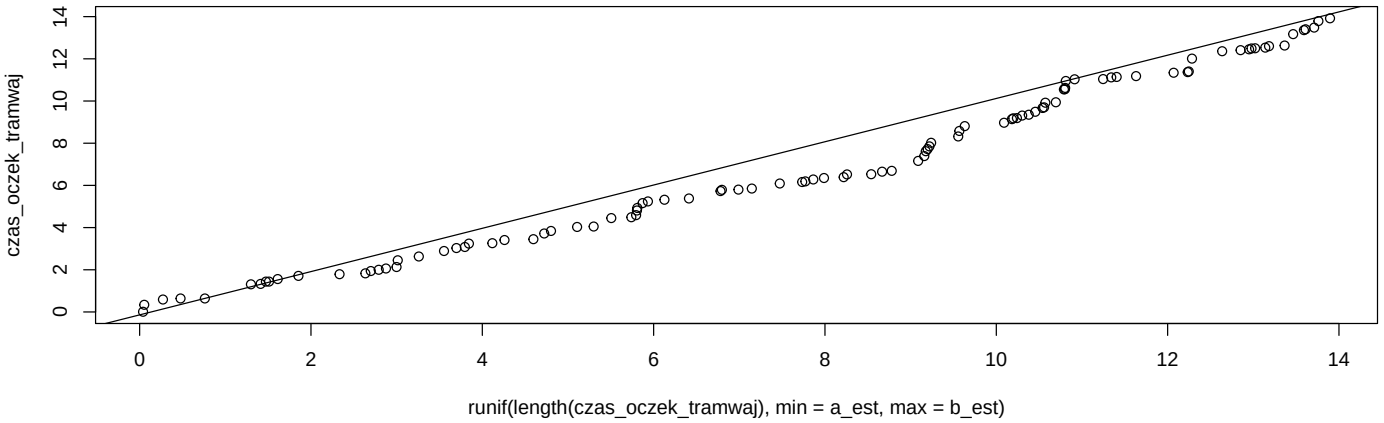
```
##
## Results of Distribution Parameter Estimation
## --------------------------------------------
##
## Assumed Distribution:            Uniform
##
## Estimated Parameter(s):          min =  0.01
##                                  max = 13.92
##
## Estimation Method:               mle
##
## Data:                            czas_oczek_tramwaj
##
## Sample Size:                     100
```

```
# histogram z estymatorem jądrowym gęstości
hist(czas_oczek_tramwaj,
```

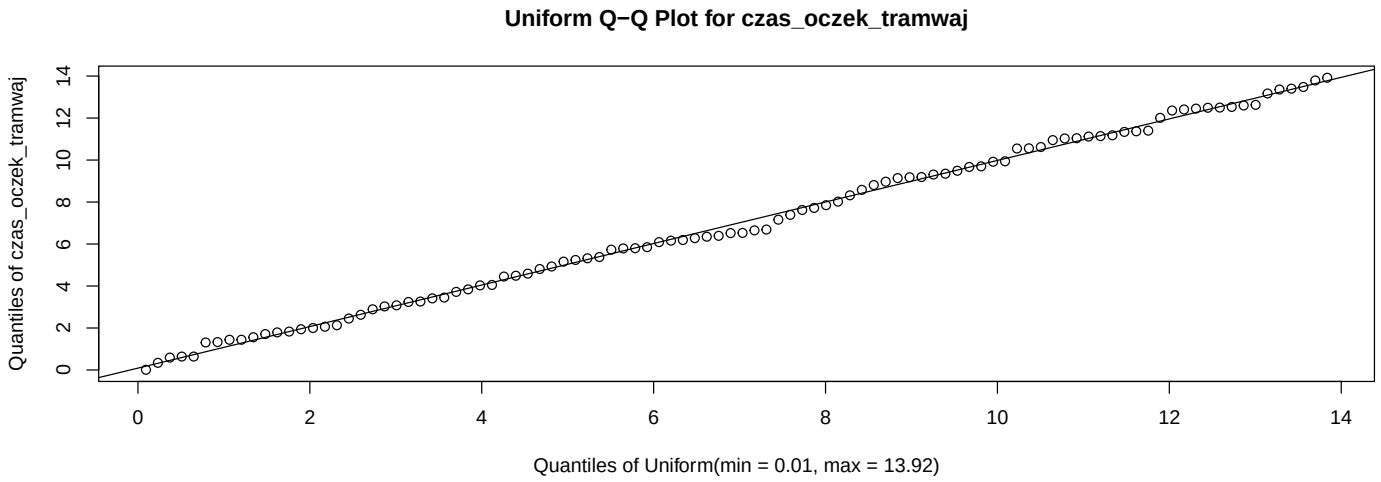
```
     xlab = "Czas oczekiwania na tramwaj",
     main = "Rozkład empiryczny i teoretyczny czasu oczekiwania na tramwaj",
     probability = TRUE,
     col = "lightgreen")
lines(density(czas_oczek_tramwaj), col = "red", lwd = 2)
curve(dunif(x, a_est, b_est),
      add = TRUE, col = "blue", lwd = 2)
legend(x = 5, y = 0.04, legend = c("empiryczny", "teoretyczny"), col = c("red", "blue"), lwd = 2)
```




```
# wykres kwantyl-kwantyl
qqplot(runif(length(czas_oczek_tramwaj), min = a_est, max = b_est), czas_oczek_tramwaj)
qqline(czas_oczek_tramwaj, distribution = function(probs) { qunif(probs, min = a_est, max = b_est)
```




```
# lub
library(EnvStats)
EnvStats::qqPlot(czas_oczek_tramwaj,
                 distribution = "unif",
                 param.list = list(min = a_est, max = b_est),
                 add.line = TRUE)
```



- Empiryczne i teoretyczne prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania na tramwaj jest większy niż 10 minut, można obliczyć w następujący sposób:

```
# empirycznie
mean(czas_oczek_tramwaj > 10)
```

```
## [1] 0.27
```

```
# teoretycznie: X ~ U(a_est, b_est) oraz P(X > 10) = 1 - P(X <= 10) = 1 - F(10)
1 - punif(10, min = a_est, max = b_est)
```

```
## [1] 0.2818116
```

5.3 Zadania

Zadanie 1. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ będzie próbą prostą z populacji o rozkładzie jednostajnym $U(a, b)$.

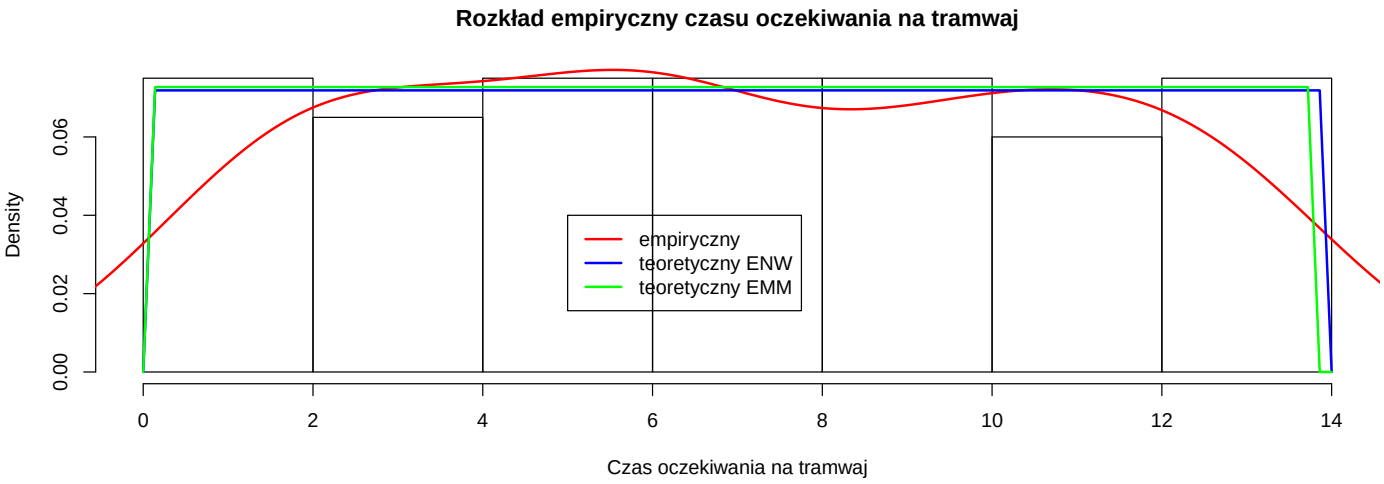
1. Pokaż, że estymatory metody momentów parametrów a i b w rozkładzie jednostajnym $U(a, b)$ są postaci:

$$\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\widetilde{S},\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\widetilde{S},$$

   gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ oraz $\widetilde{S} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$.
2. Oblicz wartości tych estymatorów dla danych z przykładu dotyczącego czasu oczekiwania na tramwaj.

```
##
## Results of Distribution Parameter Estimation
## ----------------------------------------------
##
## Assumed Distribution:           Uniform
##
## Estimated Parameter(s):         min =  0.1040974
##                                 max = 13.8551026
##
## Estimation Method:              mme
##
## Data:                           czas_oczek_tramwaj
##
## Sample Size:                    100
```

3. Zilustruj otrzymane teoretyczne funkcje gęstości korzystające z ENW i EMM na histogramie.



Zadanie 2. Przebadano 200 losowo wybranych 5-sekundowych okresów pracy centrali telefonicznej. Rejestrowano liczbę zgłoszeń. Wyniki są zawarte w pliku Centrala.RData.

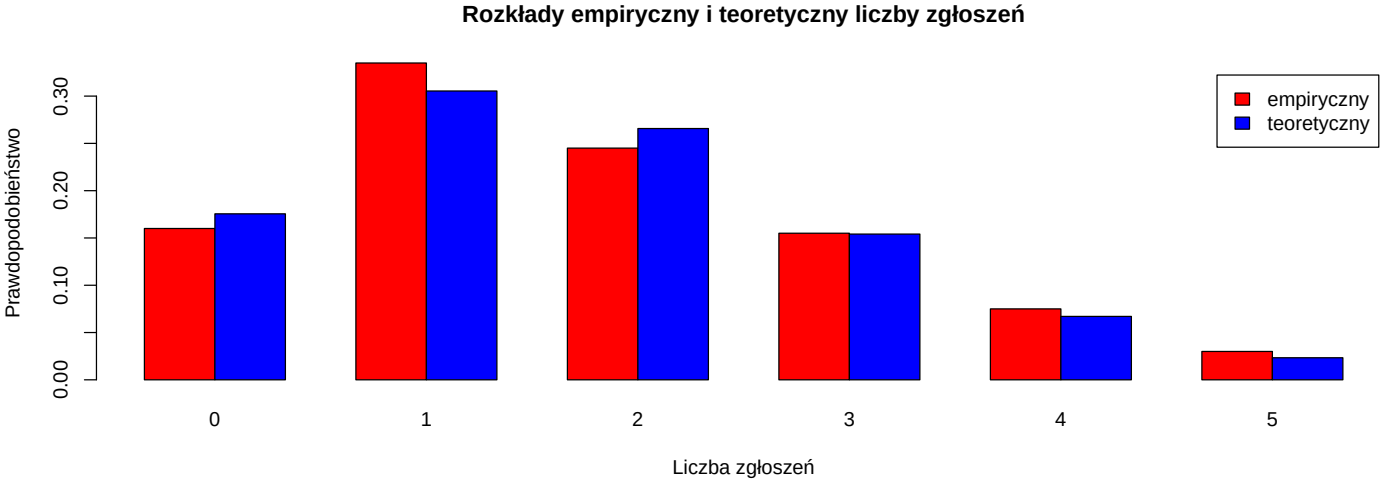
1. Zasugeruj rozkład teoretyczny badanej zmiennej.
2. Oblicz wartość estymatora parametru rozkładu teoretycznego.

```
## [1] 1.74
```

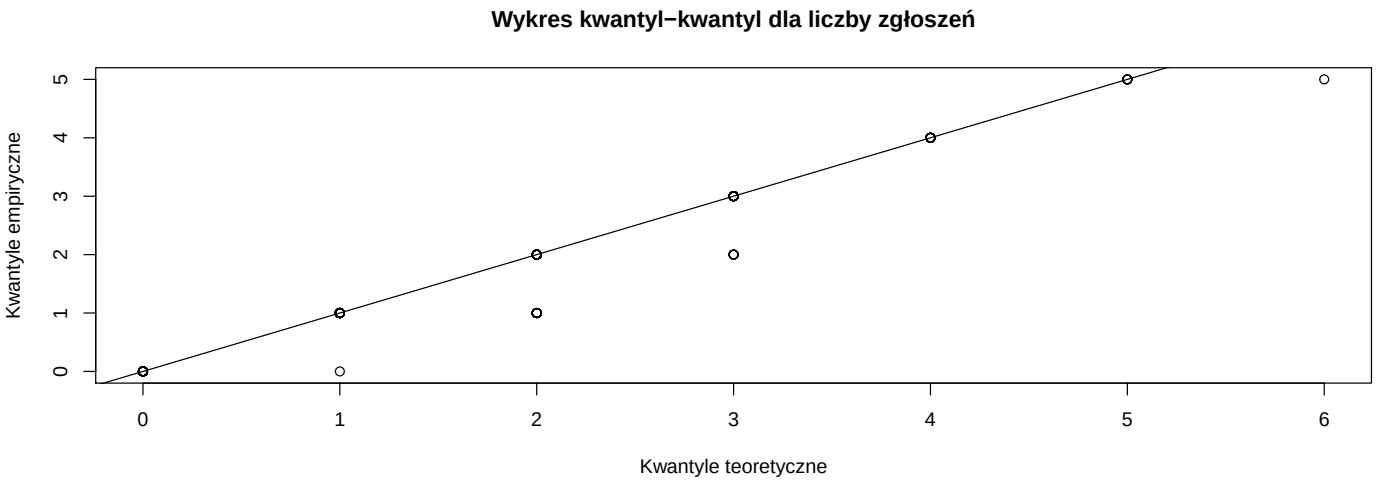
3. Porównaj empiryczne prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych wartości liczby zgłoszeń w próbie z wartościami teoretycznymi uzyskanymi na podstawie rozkładu teoretycznego.

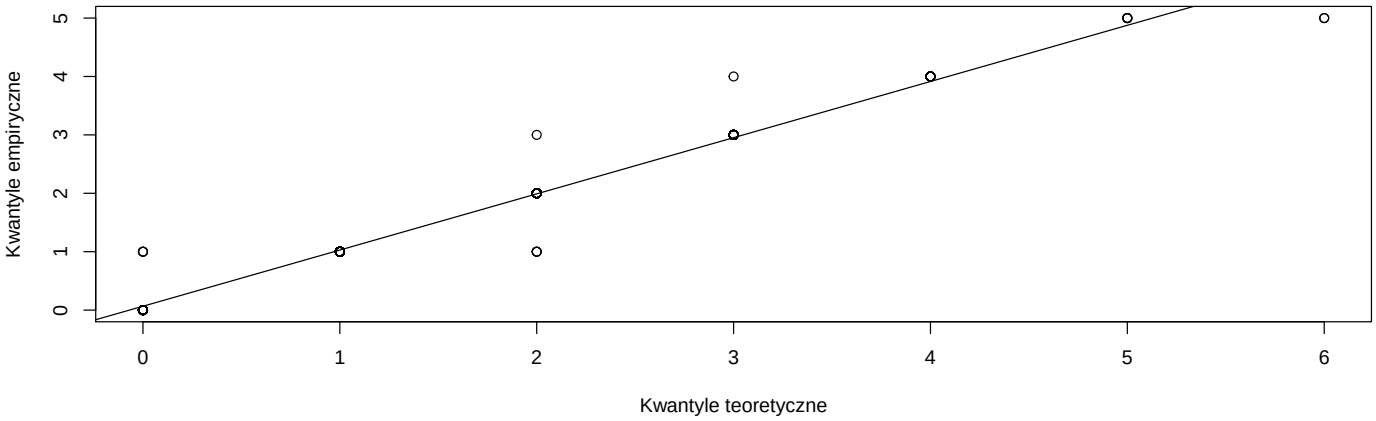
```
## [1] 0.9911019
```

```
##                       0         1         2         3          4          5
## empiryczny  0.1600000 0.3350000 0.2450000 0.1550000 0.07500000 0.03000000
## teoretyczny 0.1755204 0.3054055 0.2657028 0.1541076 0.06703681 0.02332881
```



4. Sprawdź dopasowanie rozkładu teoretycznego za pomocą wykresy kwantyl-kwantyl.





5. Czy na podstawie powyższych rozważań rozkład teoretyczny wydaje się odpowiedni?

6. Oblicz prawdopodobieństwo empiryczne i teoretyczne, że liczba zgłoszeń jest mniejsza niż 4.

```
## [1] 0.895
```

```
## [1] 0.9007363
```

Zadanie 3. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ będzie próbą prostą z rozkładu Rayleigha o gęstości:

$$f_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda} x \exp\left(-\frac{x^2}{\lambda}\right) I_{(0,\infty)}(x),\ \lambda > 0.$$

Pokaż, że ENW parametru λ jest postaci:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

W tym celu przeprowadź następujące kroki:

1. Pokaż, że funkcja wiarogodności wynosi:

$$L(\lambda; \mathbf{x}) = f_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

2. Wprowadź pomocniczą funkcję:

$$l = \ln L(\lambda; \mathbf{x}) = n \ln 2 - n \ln \lambda + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

3. Wyznacz pochodną funkcji l względem λ:

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n}{\lambda}.$$

4. Przyrównaj powyższą pochodną do zera i rozwiąż otrzymane równanie.

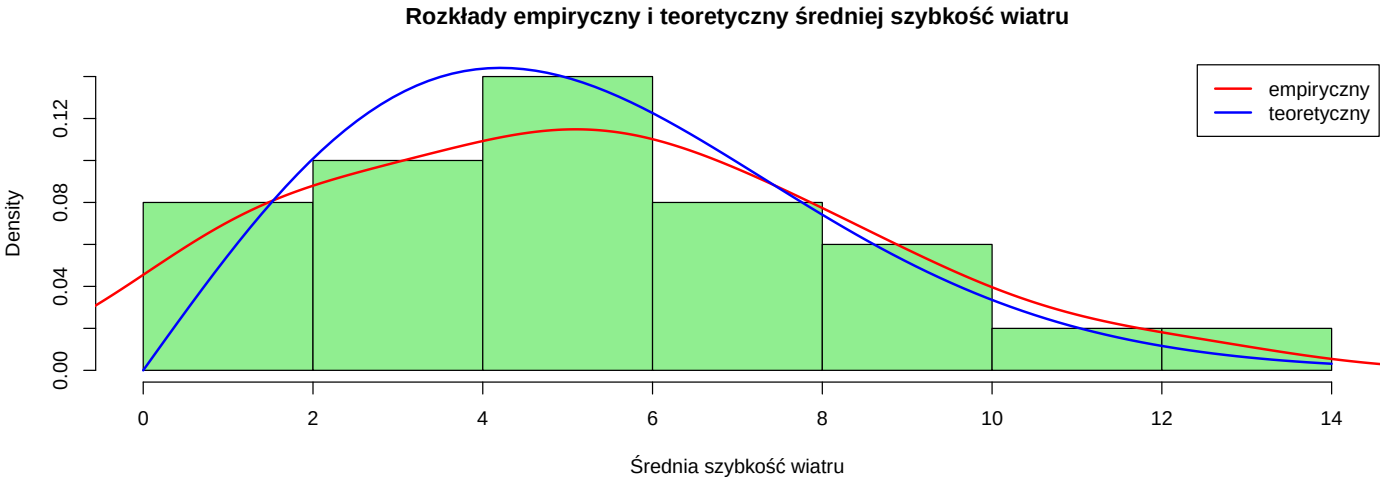
Zadanie 4. Notowano pomiary średniej szybkości wiatru w odstępach 15 minutowych wokół nowo powstającej elektrowni wiatrowej. Wyniki są następujące:

0.9	6.2	2.1	4.1	7.3
1.0	4.6	6.4	3.8	5.0
2.7	9.2	5.9	7.4	3.0
4.9	8.2	5.0	1.2	10.1
12.2	2.8	5.9	8.2	0.5

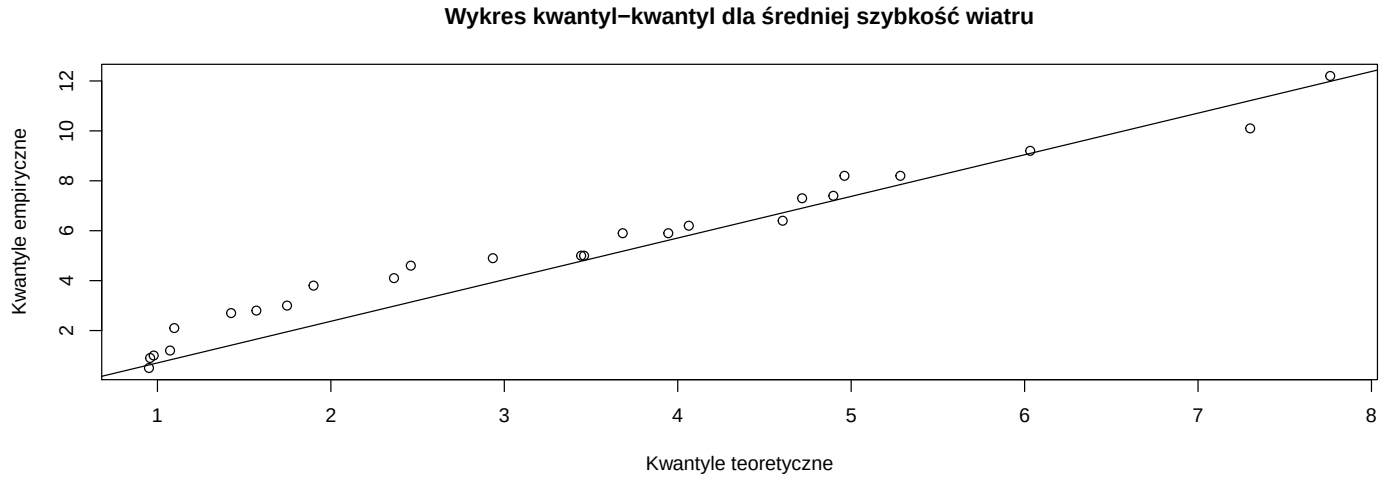
1. Zasugeruj rozkład teoretyczny badanej zmiennej.
2. Oblicz wartość ENW parametru rozkładu teoretycznego.

```
## [1] 35.42
```

3. Porównaj rozkład empiryczny wystąpienia poszczególnych wartości średniej szybkości wiatru w próbie z wartościami teoretycznymi uzyskanymi na podstawie rozkładu teoretycznego.



4. Sprawdź dopasowanie rozkładu teoretycznego za pomocą wykresy kwantyl-kwantyl.



5. Czy na podstawie powyższych rozważań rozkład teoretyczny wydaje się odpowiedni?

6. Oblicz empiryczne i teoretyczne prawdopodobieństwo, że średnia szybkość wiatru jest zawarta w przedziale $[4, 8]$.

```
## [1] 0.44
```

```
## [1] 0.3782218
```

7. Oblicz wartość ENW dla wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu teoretycznego.

```
## [1] 5.274353
```

```
## [1] 7.601197
```

6 Przedziały ufności

6.1 Przykład

Przykład. Badano czas oczekiwania na tramwaj, który kursuje w jednakowych odstępach czasu. Plik czas_oczek_tramwaj.RData zawiera dane dotyczące czasu oczekiwania na tramwaj (wyrażonego w minutach) 100 osób wybranych losowo. Zmienna X to czas oczekiwania na tramwaj. Jest to zmienna ilościowa ciągła.

- model: rozkład jednostajny
- $\mathcal{P} = \{U(0, b) : b \in (0, \infty)\}$
- $\Theta = (0, \infty)$ oraz $\theta = b$

Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ będzie próbą prostą z populacji o rozkładzie jednostajnym $U(0, b)$. $100(1 - \alpha)\%$ przedziałem ufności dla parametru b jest przedział losowy postaci:

$$\left(\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}}}, \frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}} \right).$$

```
load(url("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/czas_oczek_tramwaj.RData"))
# estmator b
(b_est <- max(czas_oczek_tramwaj))
```

```
## [1] 13.92
```

```
# przedział ufności dla b
b_conf_int <- function(x, conf_level = 0.95) {
  alpha <- 1 - conf_level
  n <- length(x)
  l <- max(x) / (1 - alpha / 2)^(1 / n)
  u <- max(x) / (alpha / 2)^(1 / n)
  return(c(l, u))
}
b_conf_int(czas_oczek_tramwaj)
```

```
## [1] 13.92352 14.44308
```

6.2 Zadania

Zadanie 1. Przebadano 200 losowo wybranych 5-sekundowych okresów pracy centrali telefonicznej. Rejestrowano liczbę zgłoszeń. Wyniki są zawarte w pliku Centrala.RData. Wykorzystując przyjęty wcześniej

model statystyczny dla tych danych, wyznacz (trzema metodami) przedział ufności dla parametru rozkładu teoretycznego.

```
##      LCL      UCL
## 1.561968 1.932765
```

```
##      LCL      UCL
## 1.561968 1.932765
```

```
##      LCL      UCL
## 1.557187 1.922813
```

Zadanie 2. Zmienna w pliku awarie.txt opisuje wyniki 50 pomiarów czasu bezawaryjnej pracy danego urządzenia (w godzinach). Wykorzystując przyjęty na wykładzie model statystyczny dla tych danych wyznacz granice przedziału ufności dla wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu teoretycznego.

```
##       UCL       LCL
##  850.0693 1483.8742
```

```
##       UCL       LCL
##  722617.9 2201882.5
```

Zadanie 3. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ będzie próbą prostą z populacji o rozładzie Rayleigha $R(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. Napisz funkcję `median_cint()`, która implementuje następujący przybliżony przedział ufności dla mediany $\sqrt{\lambda \ln 2}$ tego rozkładu:

$$\left(\sqrt{\ln(2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \left(1 - \frac{z(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}\right)}, \sqrt{\ln(2) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \left(1 + \frac{z(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}\right)} \right),$$

   gdzie $z(\beta)$ oznacza kwantyl rzędu β z rozkładu normalnego $N(0,1)$. Funkcja ta powinna mieć dwa argumenty: `x` - wektor zawierający dane, `conf_level` - poziom ufności. Funkcja zwraca obiekt typu `list` klasy `confint` o następujących elementach: `title` - nazwa estymowanej funkcji parametrycznej, `est` - wartość ENW funkcji parametrycznej, `l` - lewy kraniec przedziału ufności, `r` - prawy kraniec przedziału ufności, `conf_level` - poziom ufności.

2. Następujące dane to pomiary średniej szybkości wiatru w odstępach 15 minutowych odnotowane wokół nowo powstającej elektrowni wiatrowej:

0.9	6.2	2.1	4.1	7.3
1.0	4.6	6.4	3.8	5.0
2.7	9.2	5.9	7.4	3.0
4.9	8.2	5.0	1.2	10.1
12.2	2.8	5.9	8.2	0.5

   Teoretyczny rozkład średniej szybkości wiatru to rozkład Rayleigha $R(\lambda)$, $\lambda > 0$. Używając funkcji `median_cint()`, oblicz wartość ENW i krańce 95% przedziału ufności dla mediany średniej szybkości wiatru. **Wskazówka:** Przed wywołaniem funkcji `median_cint()`, najpierw załaduj następujące funkcje przeciążone `print()` i `summary()`:

```
print.confint <- function(x) {
  cat(x$conf_level * 100, "percent confidence interval:", "\n")
  cat(x$l, " ", x$r, "\n")
}

summary.confint <- function(x) {
  cat("\n", "Confidence interval of", x$title, "\n", "\n")
```

```
  cat(x$conf_level * 100, "percent confidence interval:", "\n")
  cat(x$l, " ", x$r, "\n")
  cat("sample estimate", "\n")
  cat(x$est, "\n")
}
```

```
## 95 percent confidence interval:
## 3.863593   5.845955
```

```
##
##  Confidence interval of mediana
##
## 95 percent confidence interval:
## 3.863593   5.845955
## sample estimate
## 4.954924
```

Zadanie 4. Dla danego wektora obserwacji i poziomu ufności napisz funkcję określającą granice przedziału ufności na poziomie ufności $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym. Domyślny poziom ufności powinien wynosić 0,95. Następnie przeprowadź symulacje (z liczbą powtórzeń `nr = 1000`) sprawdzając prawdopodobieństwo pokrycia tego przedziału ufności (tj. prawdopodobieństwo, że ten przedział ufności zawiera wartość oczekiwaną) dla rozkładów $N(1,3)$, $\chi^2(3)$ i $Ex(3)$ osobno. Rozważ liczby obserwacji $n = 10, 50, 100$. Zinterpretuj wyniki.

```
## n = 10
```

```
## [1] 0.959
```

```
## [1] 0.901
```

```
## [1] 0.899
```

```
## n = 50
```

```
## [1] 0.941
```

```
## [1] 0.944
```

```
## [1] 0.941
```

```
## n = 100
```

```
## [1] 0.946
```

```
## [1] 0.942
```

```
## [1] 0.946
```

7 Testowanie hipotez statystycznych

7.1 Przykłady

Test t-Studenta dla jednej próby

Przykład. Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze $250g$. Podczas kontroli technicznej pobrano 16-elementową próbę tabliczek czekolady otrzymując wyniki:

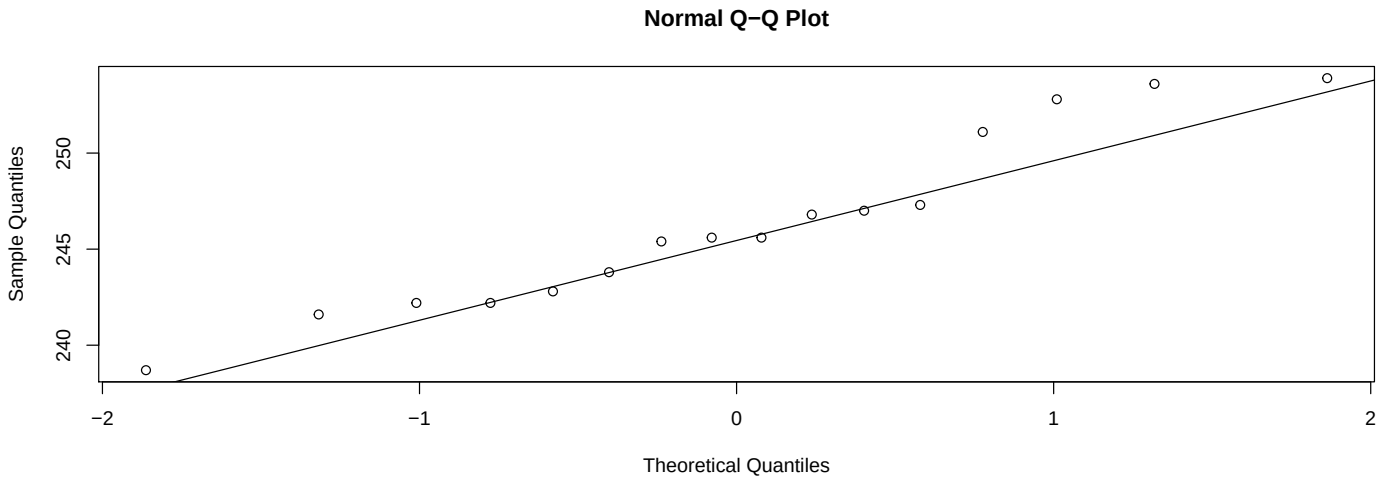
```
242.2 243.8 252.8 245.4 245.6 253.6 247.3 238.7 241.6 242.8 251.1 246.8 247 245.6 242.2 253.9
```

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikuj hipotezę, że automat rozlegulował się i produkuje tabliczki czekolady o istotnie różnej wadze od nominalnej wagi.

```
x <- c(242.2, 243.8, 252.8, 245.4, 245.6, 253.6, 247.3, 238.7,
       241.6, 242.8, 251.1, 246.8, 247.0, 245.6, 242.2, 253.9)
shapiro.test(x)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  x
## W = 0.93622, p-value = 0.3052
```

```
qqnorm(x)
qqline(x)
```




```
mean(x)
```

```
## [1] 246.275
```

```
t.test(x, mu = 250, alternative = "less")
```

```
##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = -3.2679, df = 15, p-value = 0.002595
## alternative hypothesis: true mean is less than 250
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf 248.2732
## sample estimates:
## mean of x
##   246.275
```

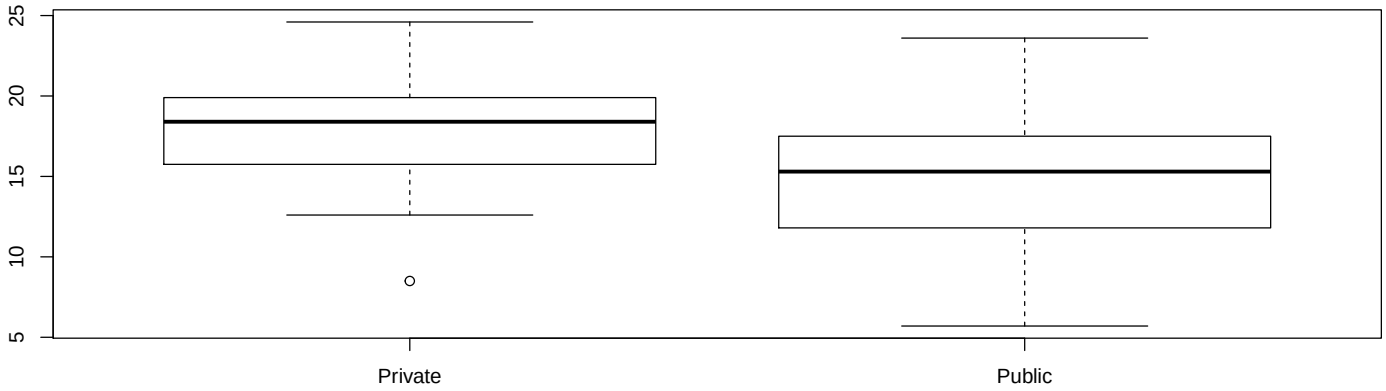
Test t-Studenta dla dwóch prób niezależnych i test F-Snedecora dla wariancji w dwóch próbach niezależnych

Przykład. Zbiór danych `homework` z pakietu `UsingR` zawiera informacje o ilości czasu poświęconego na odrabianie pracy domowej przez uczniów szkół prywatnych i publicznych. Naszym celem jest sprawdzenie, czy uczniowie obu typów szkół spędzają tyle samo czasu na odrabianiu zadań domowych.

```
library(UsingR)
head(homework)
```

```
##   Private Public
## 1    21.3   15.3
## 2    16.8   17.4
## 3     8.5   12.3
## 4    12.6   10.7
## 5    15.8   16.4
## 6    19.3   11.3
```

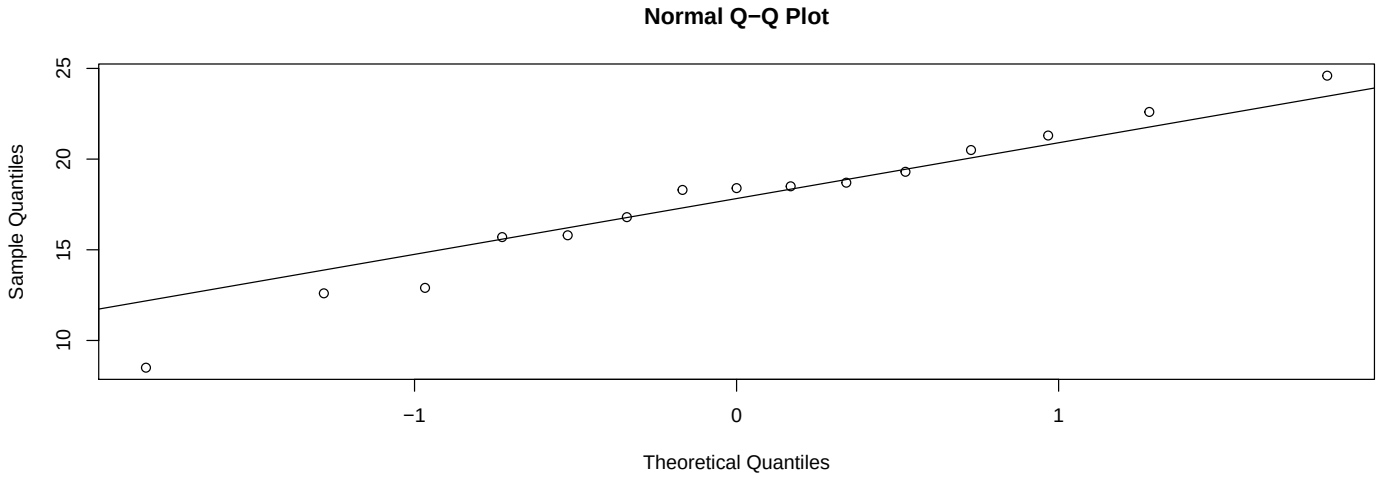
```
boxplot(homework)
```




```
shapiro.test(homework$Private)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  homework$Private
## W = 0.97017, p-value = 0.8606
```

```
qqnorm(homework$Private)
qqline(homework$Private)
```

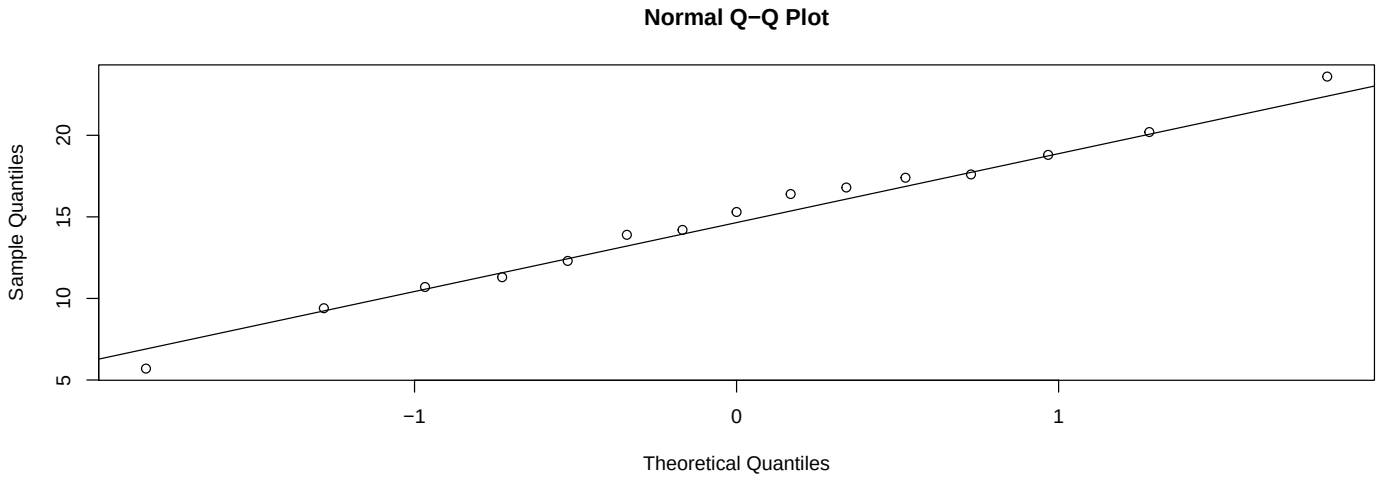



```
shapiro.test(homework$Public)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
```

```
## data:  homework$Public
## W = 0.99275, p-value = 0.9999
```

```
qqnorm(homework$Public)
qqline(homework$Public)
```




```
var(homework$Private)
```

```
## [1] 17.1081
```

```
var(homework$Public)
```

```
## [1] 20.87781
```

```
var.test(homework$Private, homework$Public, alternative = "less")
```

```
##
##  F test to compare two variances
##
## data:  homework$Private and homework$Public
## F = 0.81944, num df = 14, denom df = 14, p-value = 0.3573
## alternative hypothesis: true ratio of variances is less than 1
## 95 percent confidence interval:
##  0.000000 2.035262
## sample estimates:
## ratio of variances
##          0.8194392
```

```
mean(homework$Private)
```

```
## [1] 17.63333
```

```
mean(homework$Public)
```

```
## [1] 14.90667
```

```
t.test(homework$Private, homework$Public,
       var.equal = TRUE, alternative = 'greater')
```

```
##
##  Two Sample t-test
##
## data:  homework$Private and homework$Public
```

```
## t = 1.7134, df = 28, p-value = 0.04884
## alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.01957252        Inf
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  17.63333  14.90667
```

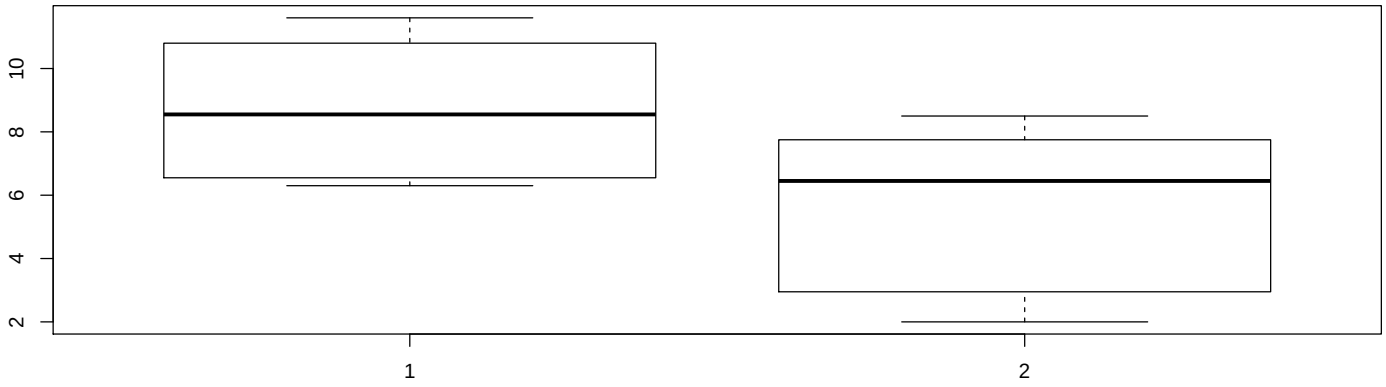
Test t-Studenta dla prób zależnych

Przykład. Badano wpływ hipnozy na redukcję bólu. Notowano poziom odczuwalnego bólu:

- przed hipnozą: 6.6, 6.5, 9.0, 10.3, 11.3, 8.1, 6.3, 11.6,
- po hipnozie: 6.8, 2.5, 7.4, 8.5, 8.1, 6.1, 3.4, 2.0.

Czy na poziomie istotności 0,05 możemy stwierdzić, że hipnoza redukuje poziom odczuwalnego bólu?

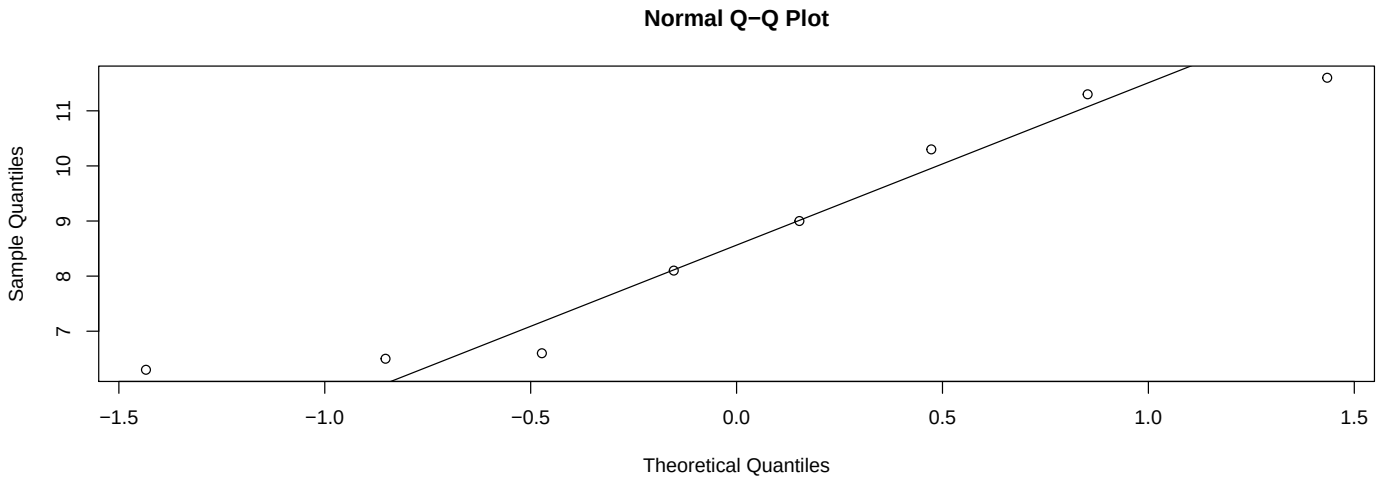
```
a <- c(6.6, 6.5, 9.0, 10.3, 11.3, 8.1, 6.3, 11.6)
b <- c(6.8, 2.5, 7.4, 8.5, 8.1, 6.1, 3.4, 2.0)
boxplot(a, b)
```




```
shapiro.test(a)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  a
## W = 0.88638, p-value = 0.2165
```

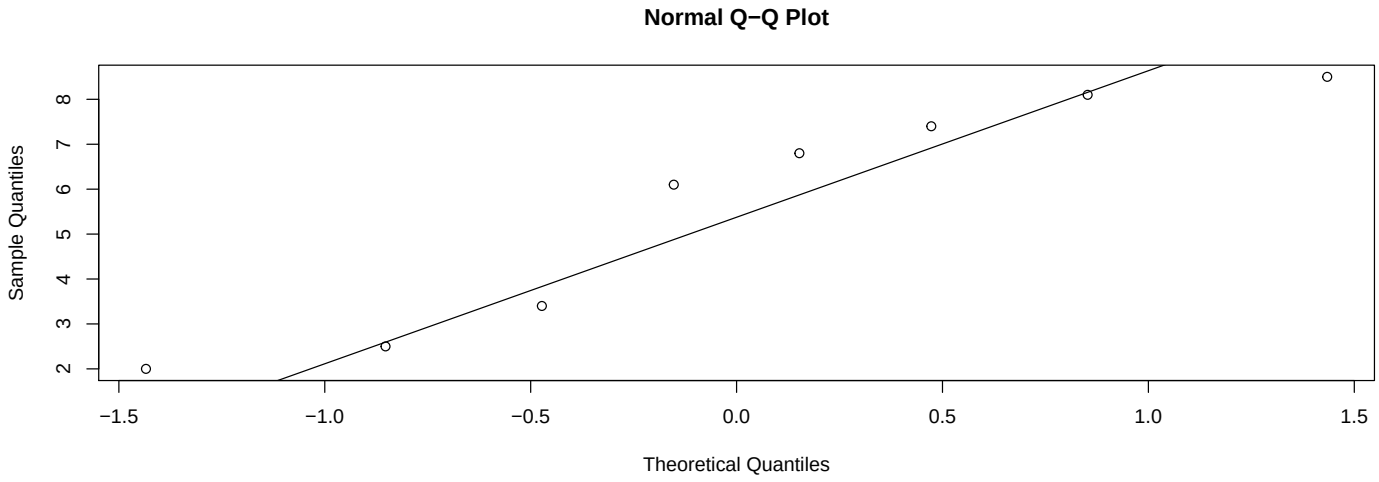
```
qqnorm(a)
qqline(a)
```




```
shapiro.test(b)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  b
## W = 0.88356, p-value = 0.2036
```

```
qqnorm(b)
qqline(b)
```




```
mean(a)
```

```
## [1] 8.7125
```

```
mean(b)
```

```
## [1] 5.6
```

```
t.test(a, b, alternative = 'greater', paired = TRUE)
```

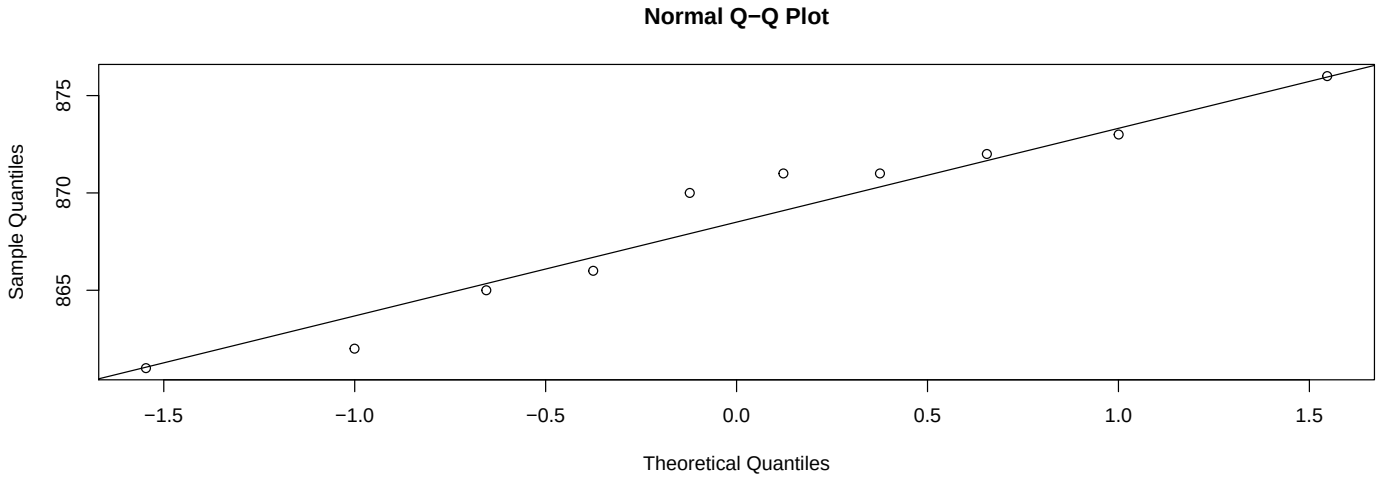
```
##
##  Paired t-test
##
## data:  a and b
## t = 3.0285, df = 7, p-value = 0.009577
## alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
```

```
## 95 percent confidence interval:
##  1.165386      Inf
## sample estimates:
## mean of the differences
##                  3.1125
```

7.2 Zadania

Zadanie 1. W pewnym regionie wykonano dziesięć niezależnych pomiarów głębokości morza i uzyskano następujące wyniki: 862, 870, 876, 866, 871, 865, 861, 873, 871, 872. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikuj hipotezę, że średnia głębokość morza w tym regionie wynosi $870m$.

```
## [1] 0.545861
```




```
## [1] 868.7
```

```
## [1] 0.2136555
```

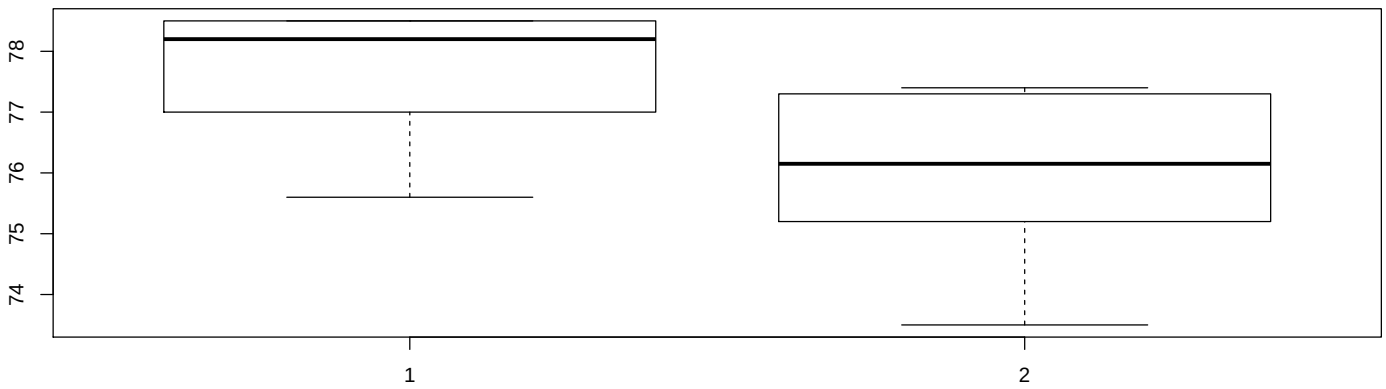
Zadanie 2. Producent proszku do prania A twierdzi, że jego produkt jest znacznie lepszy niż konkurencyjny proszek B. Aby zweryfikować to zapewnienie, CTA (Consumer Test Agency) przetestowało oba proszki do prania. W tym celu przeprowadzono pomiary stopnia wyprania 7 kawałków tkaniny z proszkiem A i uzyskano wyniki (w %):

$$78{,}2;\ 78{,}5;\ 75{,}6;\ 78{,}5;\ 78{,}5;\ 77{,}4;\ 76{,}6,$$

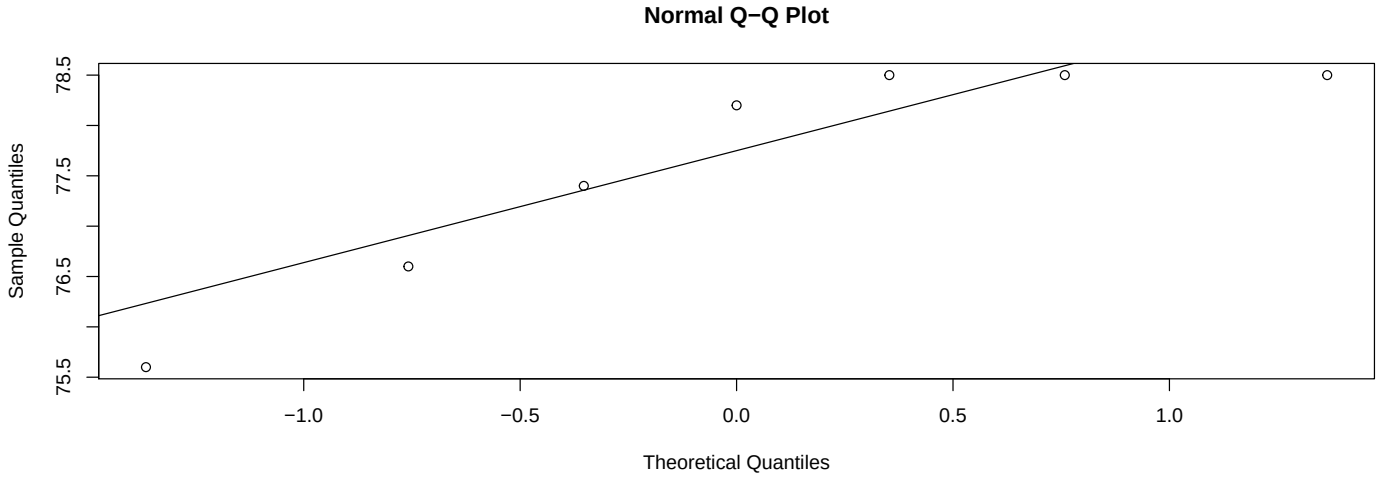
i 10 kawałków tkaniny z proszkiem B otrzymując wyniki (w %):

$$76{,}1;\ 75{,}2;\ 75{,}8;\ 77{,}3;\ 77{,}3;\ 77{,}0;\ 74{,}4;\ 76{,}2;\ 73{,}5;\ 77{,}4.$$

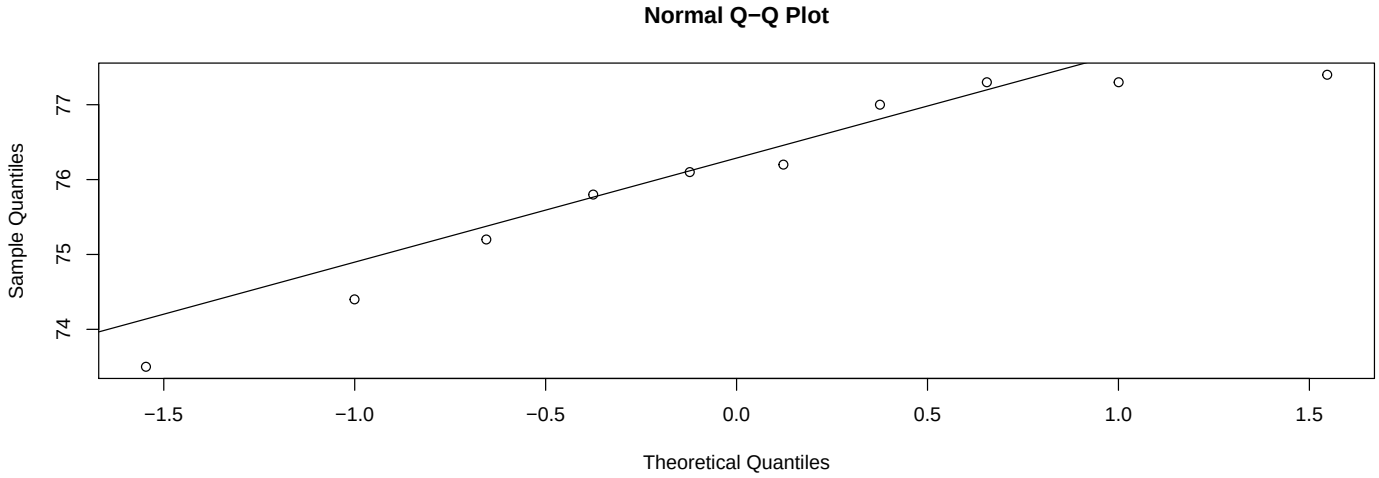
Jaki powinien być wniosek CTA na temat jakości tych proszków?



```
## [1] 0.06832755
```




```
## [1] 0.2558752
```

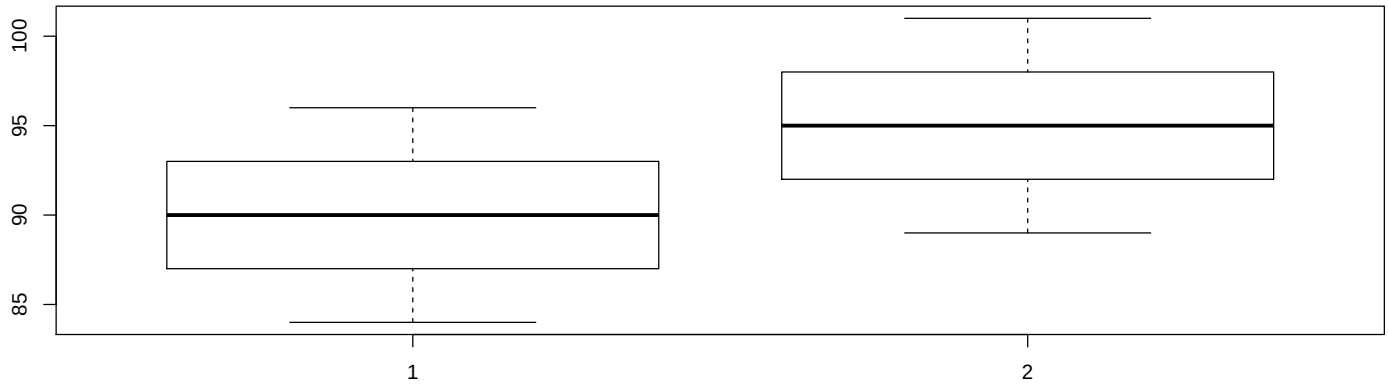



```
## [1] 1.304762
## [1] 1.764
## [1] 0.3683809
## [1] 77.61429
## [1] 76.02
## [1] 0.01059375
```

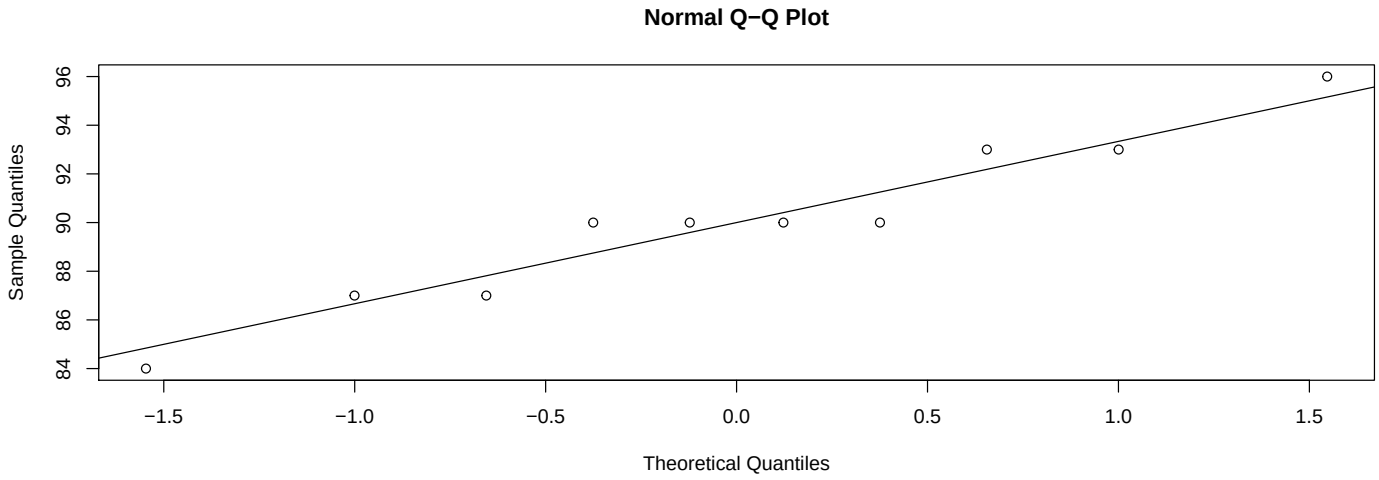
Zadanie 3. Grupa 10 osób została poddana badaniu mającym na celu zbadanie stosunku do szkół publicznych. Następnie grupa obejrzała film edukacyjny mający na celu poprawę podejścia do tego typu szkół. Wyniki są następujące (wyższa wartość oznacza lepsze podejście):

- przed: 84, 87, 87, 90, 90, 90, 90, 93, 93, 96,
- po: 89, 92, 98, 95, 95, 92, 95, 92, 98, 101.

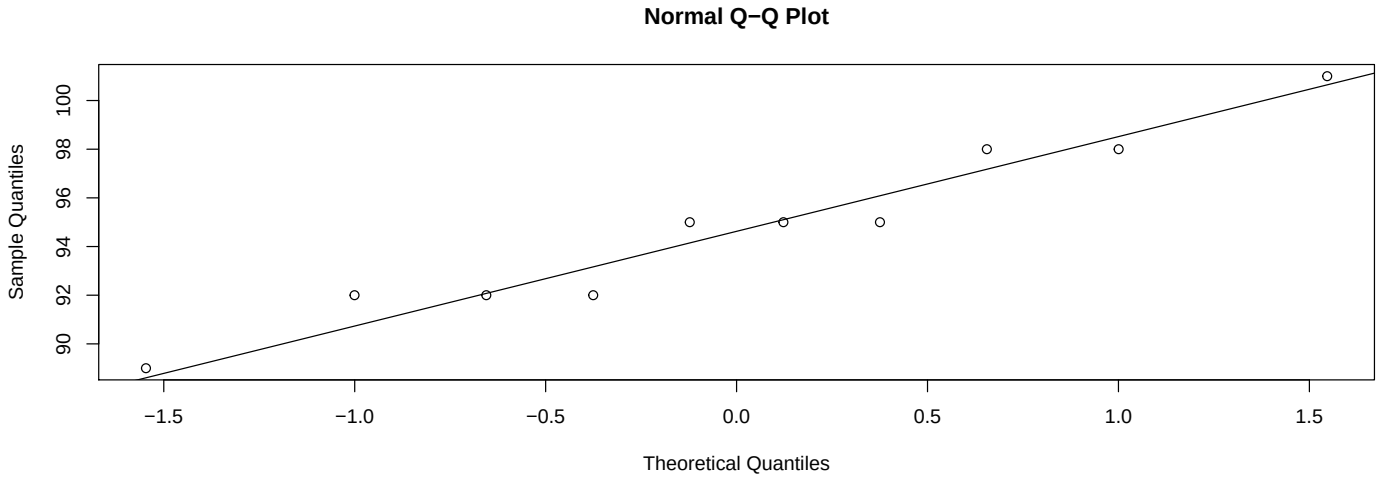
Zweryfikuj, czy film znacznie poprawia stosunek do szkół publicznych.




```
## [1] 0.7025892
```




```
## [1] 0.691489
```




```
## [1] 90
```

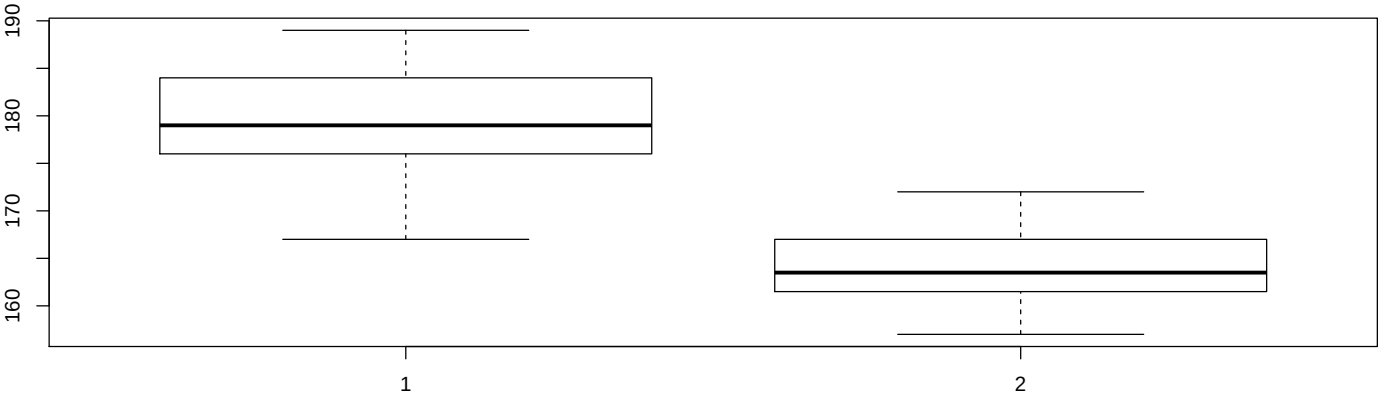
```
## [1] 94.7
```

```
## [1] 0.0003786878
```

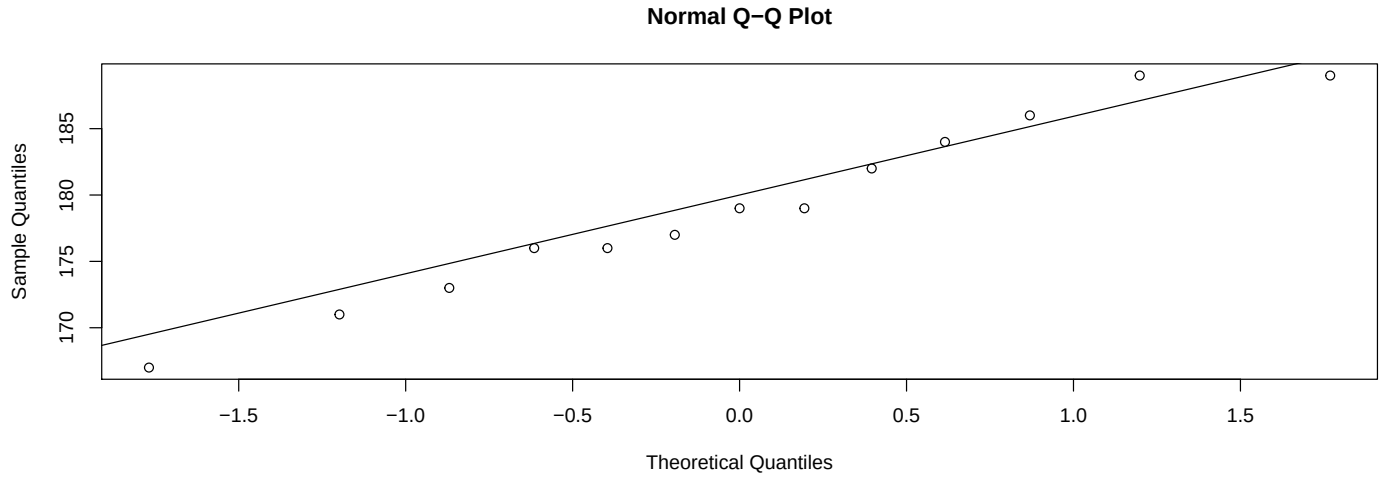
Zadanie 4. Zbadano wzrost 13 mężczyzn i 12 kobiet w pewnym centrum sportowym. Wyniki są następujące:

- mężczyźni: 171, 176, 179, 189, 176, 182, 173, 179, 184, 186, 189, 167, 177,
- kobiety: 161, 162, 163, 162, 166, 164, 168, 165, 168, 157, 161, 172.

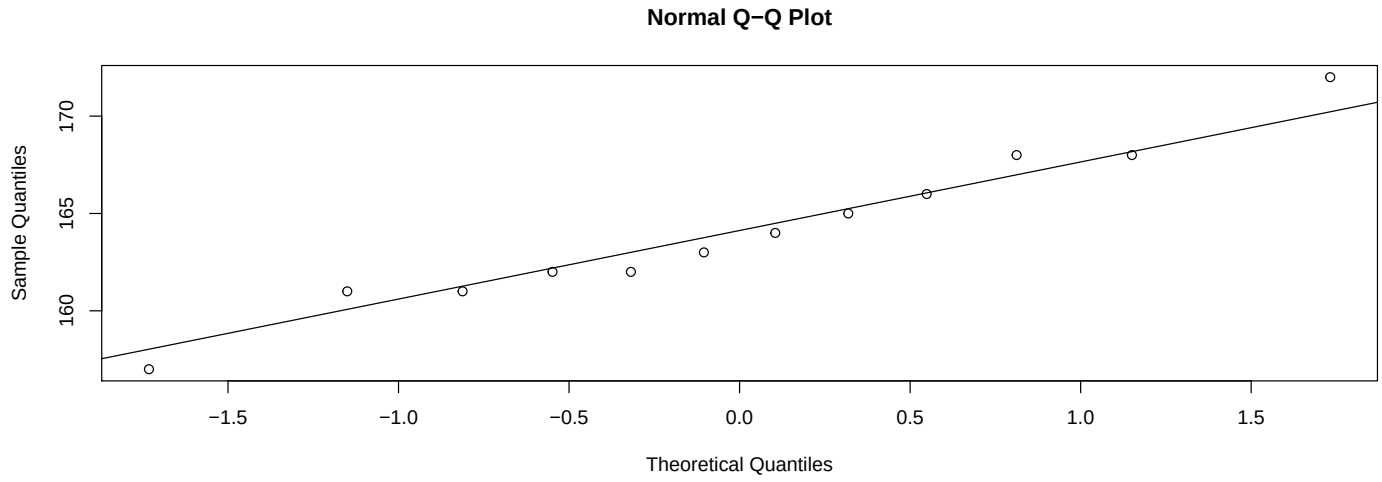
Czy możemy stwierdzić, że średni wzrost mężczyzn jest znacznie większy niż wzrost kobiet?




```
## [1] 0.8595396
```




```
## [1] 0.9447828
```




```
## [1] 45.74359
## [1] 16.08333
## [1] 0.04689163
## [1] 179.0769
## [1] 164.0833
## [1] 6.928802e-07
```

Zadanie 5.

(a) Napisz funkcję `w_test()` implementującą test χ^2 w modelu wykładniczym, który jest opisany we wskazówce. Funkcja ta powinna mieć trzy argumenty: `x` - wektor zawierający dane, `lambda_zero` - wartość λ_0 w hipotezie zerowej oraz `alternative` - typ hipotezy alternatywnej, która może mieć trzy możliwe wartości: `"two.sided"` (wartość domyślna), `"greater"`, `"less"`. Funkcja zwraca obiekt będący listą klasy `htest` o elementach: `statistic` - wartość statystyki testowej, `parameter` - liczba stopni swobody, `p.value` - p-wartość, `alternative` - wybrana hipoteza alternatywna, `method` - nazwa testu, `data.name` - nazwa zbioru danych (użyj `deparse(substitute(x))`). Dla obiektów klasy `htest` funkcja `print()` istnieje w programie R, więc nie trzeba jej tworzyć.

Wskazówka. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ będzie próbą prostą z populacji o rozkładzie wykładniczym $Ex(\lambda)$, gdzie $\lambda > 0$ jest nieznanym parametrem. Testy χ^2 w modelu wykładniczym weryfikują hipotezę zerową $H_0 : \lambda = \lambda_0$, gdzie $\lambda_0 > 0$ jest ustaloną liczbą. Ich obszary krytyczne są następujące:

1. dla $H_1^{(1)} : \lambda > \lambda_0$
$$R = \left\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \leqslant \chi^2(\alpha, 2n)\right\},$$
2. dla $H_1^{(2)} : \lambda < \lambda_0$
$$R = \left\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geqslant \chi^2(1-\alpha, 2n)\right\},$$
3. dla $H_1^{(3)} : \lambda \neq \lambda_0$
$$R = \left\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) \geqslant \chi^2(1-\alpha/2, 2n) \text{ or } T(\mathbf{x}) \leqslant \chi^2(\alpha/2, 2n)\right\},$$

gdzie

$$T(\mathbf{X}) = 2\lambda_0 n \bar{X}\Big|_{H_0} \sim \chi^2(2n)$$

jest statystyką testową, a $\chi^2(\beta, m)$ oznacza kwantyl rzędu β z rozkładu chi-kwadrat $\chi^2(m)$ z m stopniami swobody.

(b) Wykorzystując funkcję `w_test()` zastosuj test χ^2 w modelu wykładniczym do danych dotyczących czasu bezawarynej pracy dostępnych w pliku awarie.txt i hipotezy zerowej $H_0 : \lambda = 0.001$.

```
## [1] 0.0009079683
```

```
##
##  Test chi-kwadrat w modelu wykładniczym
##
## data:  awarie$V1
## T = 110.14, num df = 100, p-value = 0.2295
## alternative hypothesis: less
```

8 Analiza wariancji

8.1 Przykład

Przykład. Zbiór danych `vaccination` z pakietu `PBImisc` zawiera dane opisujące reakcję organizmu na zwalczanie wirusa po podaniu określonej dawki leku. Problem praktyczny dotyczy ustalenia, jaką najmniejszą możliwą dawkę leku należy podać, aby wywołać pożądaną reakcję organizmu (zagadnienie najmniejszej dawki leku). Rozważane jest również zagadnienie maksymalnej bezpiecznej dawki, którego celem jest określenie, jaka maksymalna dawka może być przyjmowana bez dużego ryzyka wystąpienia efektów ubocznych.

```
library(PBImisc)
head(vaccination)
```

```
##   response dose
## 1     88.9 0 ml
## 2    105.0 0 ml
## 3    138.4 0 ml
## 4     98.1 0 ml
## 5    107.2 0 ml
## 6     57.9 0 ml
```

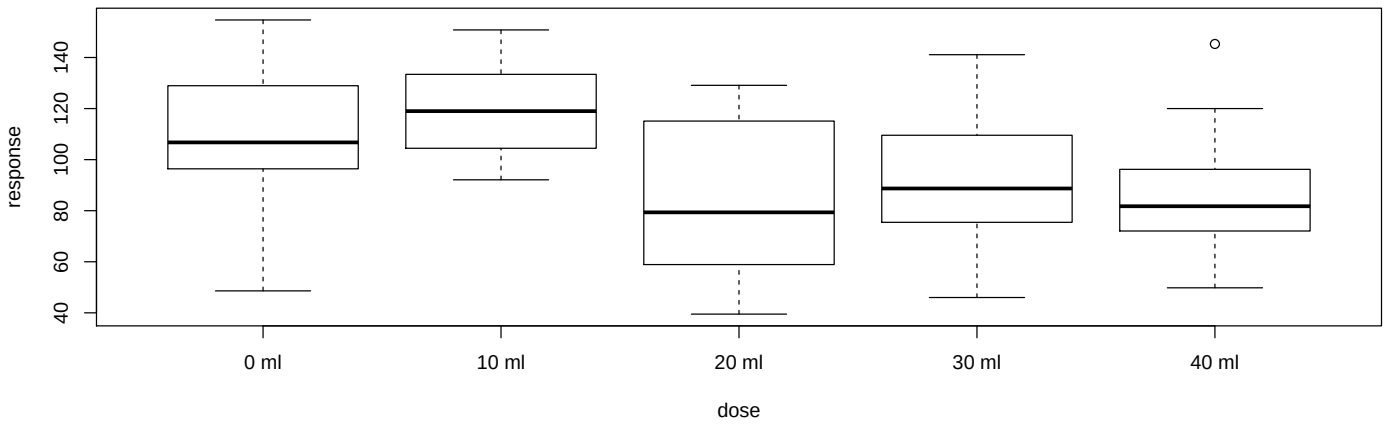
```r
summary(vaccination)
```

```
##     response         dose
##  Min.   : 39.50   0 ml :20
##  1st Qu.: 77.30   10 ml:20
##  Median : 99.25   20 ml:20
##  Mean   : 97.89   30 ml:20
##  3rd Qu.:117.70   40 ml:20
##  Max.   :154.70
```

```r
aggregate(vaccination$response,
          list(DOSE = vaccination$dose),
          FUN = mean)
```

```
##    DOSE       x
## 1  0 ml 108.570
## 2 10 ml 119.265
## 3 20 ml  84.025
## 4 30 ml  92.370
## 5 40 ml  85.220
```

```r
boxplot(response ~ dose, data = vaccination)
```




```r
summary(aov(response ~ dose, data = vaccination))
```

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## dose         4  19084    4771   7.929 1.47e-05 ***
## Residuals   95  57164     602
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
# założenia
shapiro.test(lm(response ~ dose, data = vaccination)$residuals)
```

```
##
```

```
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  lm(response ~ dose, data = vaccination)$residuals
## W = 0.99244, p-value = 0.8524
```

```
bartlett.test(response ~ dose, data = vaccination)
```

```
##
##  Bartlett test of homogeneity of variances
##
## data:  response by dose
## Bartlett's K-squared = 5.6387, df = 4, p-value = 0.2278
```

```
fligner.test(response ~ dose, data = vaccination)
```

```
##
##  Fligner-Killeen test of homogeneity of variances
##
## data:  response by dose
## Fligner-Killeen:med chi-squared = 4.8066, df = 4, p-value = 0.3077
```

```
library(car)
leveneTest(response ~ dose, data = vaccination)
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
##       Df F value Pr(>F)
## group  4  1.3679 0.2509
##       95
```

```
leveneTest(response ~ dose, data = vaccination, center = "mean")
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = "mean")
##       Df F value Pr(>F)
## group  4  1.6203 0.1755
##       95
```

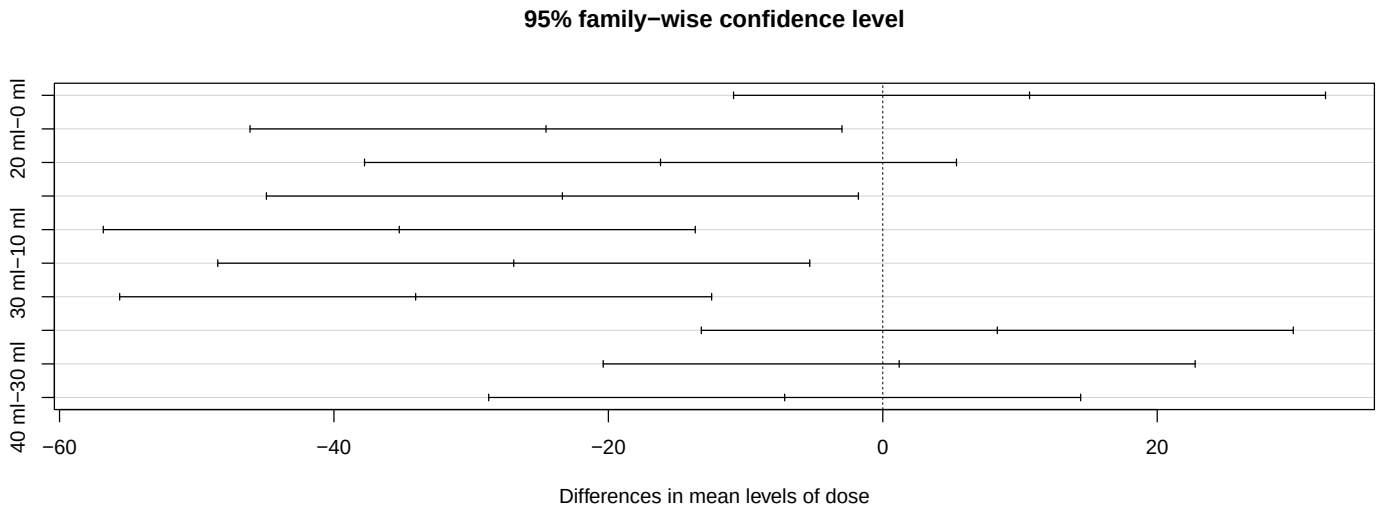
```
# testy post hoc
attach(vaccination)
pairwise.t.test(response, dose, data = vaccination)
```

```
##
##  Pairwise comparisons using t tests with pooled SD
##
## data:  response and dose
##
##       0 ml    10 ml   20 ml   30 ml
## 10 ml 0.68485 -       -       -
## 20 ml 0.01463 0.00016 -       -
## 30 ml 0.19718 0.00633 0.85424 -
## 40 ml 0.02007 0.00027 0.87790 0.85424
##
## P value adjustment method: holm
```

```
model_aov <- aov(response ~ dose, data = vaccination)
TukeyHSD(model_aov)
```

```
##   Tukey multiple comparisons of means
##     95% family-wise confidence level
##
## Fit: aov(formula = response ~ dose, data = vaccination)
##
## $dose
##                  diff       lwr        upr     p adj
## 10 ml-0 ml    10.695 -10.87643  32.266431 0.6426874
## 20 ml-0 ml   -24.545 -46.11643  -2.973569 0.0174170
## 30 ml-0 ml   -16.200 -37.77143   5.371431 0.2336465
## 40 ml-0 ml   -23.350 -44.92143  -1.778569 0.0270291
## 20 ml-10 ml -35.240 -56.81143 -13.668569 0.0001562
## 30 ml-10 ml -26.895 -48.46643  -5.323569 0.0069317
## 40 ml-10 ml -34.045 -55.61643 -12.473569 0.0002808
## 30 ml-20 ml   8.345 -13.22643  29.916431 0.8185005
## 40 ml-20 ml   1.195 -20.37643  22.766431 0.9998712
## 40 ml-30 ml  -7.150 -28.72143  14.421431 0.8878461
```

```
plot(TukeyHSD(model_aov))
```




```
library(agricolae)
HSD.test(model_aov, "dose", console = TRUE)
```

```
##
## Study: model_aov ~ "dose"
##
## HSD Test for response
##
## Mean Square Error:  601.7253
##
## dose,  means
##
##       response      std  r  Min   Max
## 0 ml   108.570 25.91789 20 48.6 154.7
## 10 ml  119.265 17.64743 20 92.1 150.8
## 20 ml   84.025 30.42350 20 39.5 129.1
## 30 ml   92.370 24.27206 20 46.0 141.1
## 40 ml   85.220 22.59946 20 49.8 145.3
```

```
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 95
## Critical Value of Studentized Range: 3.932736
##
## Minimun Significant Difference: 21.57143
##
## Treatments with the same letter are not significantly different.
##
##       response groups
## 10 ml  119.265      a
## 0 ml   108.570     ab
## 30 ml   92.370     bc
## 40 ml   85.220      c
## 20 ml   84.025      c
```

```
SNK.test(model_aov, "dose", console = TRUE)
```

```
##
## Study: model_aov ~ "dose"
##
## Student Newman Keuls Test
## for response
##
## Mean Square Error:  601.7253
##
## dose,  means
##
##       response      std  r  Min   Max
## 0 ml   108.570 25.91789 20 48.6 154.7
## 10 ml  119.265 17.64743 20 92.1 150.8
## 20 ml   84.025 30.42350 20 39.5 129.1
## 30 ml   92.370 24.27206 20 46.0 141.1
## 40 ml   85.220 22.59946 20 49.8 145.3
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 95
##
## Critical Range
##        2        3        4        5
## 15.39978 18.46964 20.28552 21.57143
##
## Means with the same letter are not significantly different.
##
##       response groups
## 10 ml  119.265      a
## 0 ml   108.570      a
## 30 ml   92.370      b
## 40 ml   85.220      b
## 20 ml   84.025      b
```

```
LSD.test(model_aov, "dose", p.adj = "holm", console = TRUE)
```

```
##
## Study: model_aov ~ "dose"
```

```
##
## LSD t Test for response
## P value adjustment method: holm
##
## Mean Square Error:  601.7253
##
## dose,  means and individual ( 95 %) CI
##
##       response      std  r       LCL       UCL  Min   Max
## 0 ml   108.570 25.91789 20  97.68071 119.45929 48.6 154.7
## 10 ml  119.265 17.64743 20 108.37571 130.15429 92.1 150.8
## 20 ml   84.025 30.42350 20  73.13571  94.91429 39.5 129.1
## 30 ml   92.370 24.27206 20  81.48071 103.25929 46.0 141.1
## 40 ml   85.220 22.59946 20  74.33071  96.10929 49.8 145.3
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 95
## Critical Value of t: 2.874073
##
## Minimum Significant Difference: 22.29446
##
## Treatments with the same letter are not significantly different.
##
##       response groups
## 10 ml  119.265      a
## 0 ml   108.570     ab
## 30 ml   92.370     bc
## 40 ml   85.220      c
## 20 ml   84.025      c
```

```r
scheffe.test(model_aov, "dose", console = TRUE)
```

```
##
## Study: model_aov ~ "dose"
##
## Scheffe Test for response
##
## Mean Square Error  : 601.7253
##
## dose,  means
##
##       response      std  r  Min   Max
## 0 ml   108.570 25.91789 20 48.6 154.7
## 10 ml  119.265 17.64743 20 92.1 150.8
## 20 ml   84.025 30.42350 20 39.5 129.1
## 30 ml   92.370 24.27206 20 46.0 141.1
## 40 ml   85.220 22.59946 20 49.8 145.3
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 95
## Critical Value of F: 2.467494
##
## Minimum Significant Difference: 24.37009
##
```

```
## Means with the same letter are not significantly different.
##
##       response groups
## 10 ml  119.265      a
## 0 ml   108.570     ab
## 30 ml   92.370     bc
## 40 ml   85.220     bc
## 20 ml   84.025      c
```

```
# analiza kontrastów
# przykładowe kontrasty wbudowane w programie R
contr.helmert(5)
```

```
##   [,1] [,2] [,3] [,4]
## 1   -1   -1   -1   -1
## 2    1   -1   -1   -1
## 3    0    2   -1   -1
## 4    0    0    3   -1
## 5    0    0    0    4
```

```
library(multcomp)
# kontrasty dla postepujących różnic
contr.sdif(5)
```

```
##    2-1  3-2  4-3  5-4
## 1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2
## 2  0.2 -0.6 -0.4 -0.2
## 3  0.2  0.4 -0.4 -0.2
## 4  0.2  0.4  0.6 -0.2
## 5  0.2  0.4  0.6  0.8
```

```
contrasts(vaccination$dose) <- contr.sdif(5)
vaccination$dose
```

```
##   [1] 0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml
##  [12] 0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  0 ml  10 ml 10 ml
##  [23] 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml
##  [34] 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 10 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml
##  [45] 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml
##  [56] 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 20 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml
##  [67] 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml 30 ml
##  [78] 30 ml 30 ml 30 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml
##  [89] 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml 40 ml
## [100] 40 ml
## attr(,"contrasts")
##        2-1  3-2  4-3  5-4
## 0 ml  -0.8 -0.6 -0.4 -0.2
## 10 ml  0.2 -0.6 -0.4 -0.2
## 20 ml  0.2  0.4 -0.4 -0.2
## 30 ml  0.2  0.4  0.6 -0.2
## 40 ml  0.2  0.4  0.6  0.8
## Levels: 0 ml 10 ml 20 ml 30 ml 40 ml
```

```
model.2 <- aov(response ~ dose, data = vaccination)
summary(model.2,
```

```
        split = list(dose = list('C1' = 1, 'C2' = 2, 'C3' = 3, 'C4' = 4)))
```

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## dose         4  19084    4771   7.929 1.47e-05 ***
##   dose: C1   1   2852    2852   4.739    0.032 *
##   dose: C2   1  15418   15418  25.622 2.03e-06 ***
##   dose: C3   1    303     303   0.504    0.479
##   dose: C4   1    511     511   0.850    0.359
## Residuals   95  57164     602
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

8.2 Zadania

Zadanie 1. Zadanie to zostało opracowane na podstawie eksperymentu Smitha (1979). Głównym jego celem było pokazanie, że bycie w tym samym kontekście psychicznym w czasie nauki i podczas jej sprawdzania (test, egzamin) daje lepsze wyniki niż bycie w odmiennych kontekstach. Podczas fazy uczącej uczniowie uczyli się 80 słów w pokoju pomalowanym na pomarańczowo, ozdobionym plakatami, obrazami i dużą ilością dodatkowych akcesoriów. Pierwszy sprawdzian pamięci został przeprowadzony aby dać uczniom wrażenie, że eksperyment się zakończył. Następnego dnia, uczniowie zostali niespodziewanie poddani testowi ponownie. Mieli napisać wszystkie słowa, które zapamiętali. Test został przeprowadzony w 5 różnych warunkach. 50 uczniów zostało losowo podzielonych na 5 równolicznych grup:

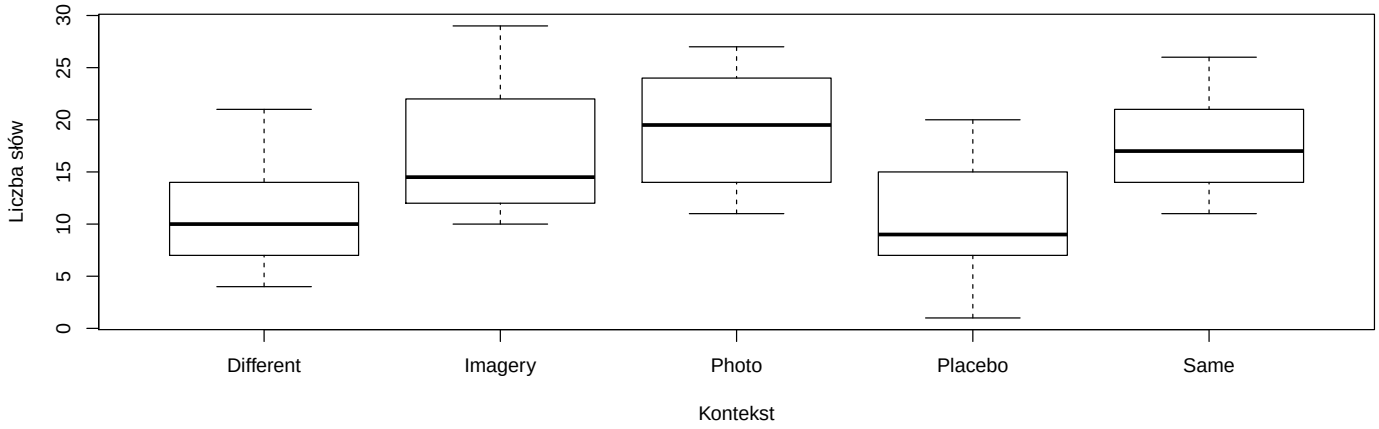
- „Same context" - test odbywał się w tym samym pokoju, w którym się uczyli.
- „Different context" - test odbywał się w bardzo odmiennym pomieszczeniu, w innej części kampusu, pomalowanym na szaro i wyglądającym bardzo surowo.
- „Imaginary context" - test odbywał się w tym samym pomieszczeniu, co w punkcie poprzednim. Dodatkowo, uczniowie mieli przypomnieć sobie pokój, w którym się uczyli. Aby im w tym pomóc badacz zadawał dodatkowe pytania o pokoju i jego wyposażeniu.
- „Photographed context" - test odbywał się w tych samych warunkach, co w punkcie poprzednim. Dodatkowo pokazano im zdjęcie pokoju, w którym się uczyli.
- „Placebo context" - test odbywał się w tym samych warunkach co grupy „Different context'". Dodatkowo uczniowie wykonali ćwiczenia „rozgrzewające" (przypominanie sobie swojego salonu).

Liczba zapamiętanych słów została zawarta w poniższej tabeli.

Same	Different	Imagery	Photo	Placebo
25	11	14	25	8
26	21	15	15	20
17	9	29	23	10
15	6	10	21	7
14	7	12	18	15
17	14	22	24	7
14	12	14	14	1
20	4	20	27	17
11	7	22	12	11
21	19	12	11	4

(1) Wyznacz średnie liczb zapamiętanych słów w grupach. Ponadto, przedstaw otrzymane dane za pomocą wykresu ramkowego dla każdej grupy z osobna.

```
##     CONTEXT  x
## 1 Different 11
## 2   Imagery 17
## 3     Photo 19
## 4   Placebo 10
## 5      Same 18
```

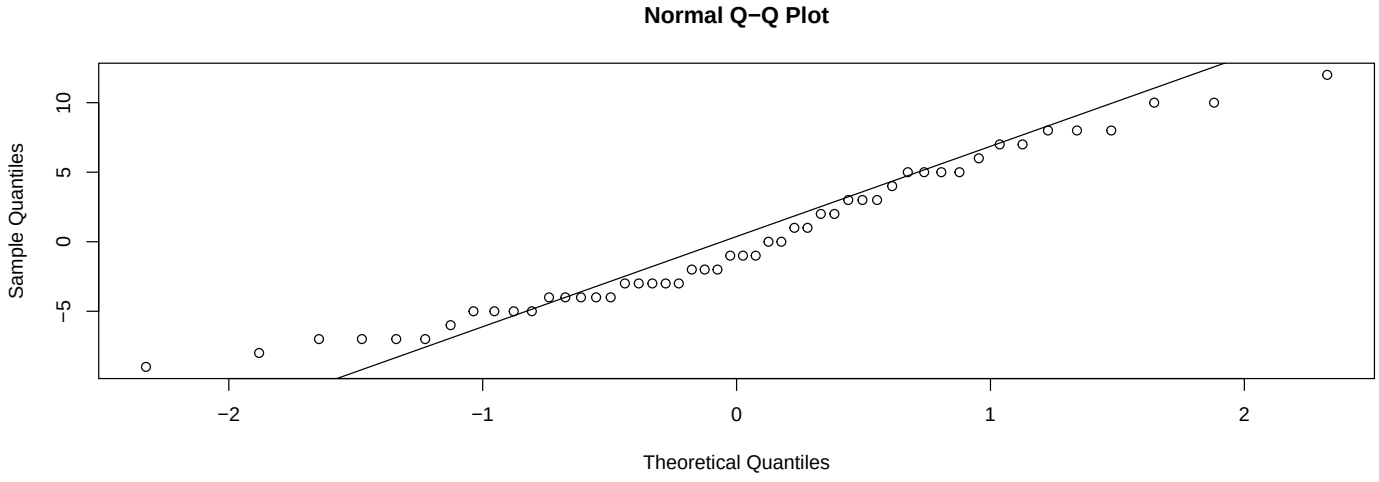


(2) Wykonaj test analizy wariancji w celu sprawdzenia, czy liczba zapamiętanych słów zależy od kontekstu sprawdzania wiedzy.

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## context      4    700     175   5.469 0.00112 **
## Residuals   45   1440      32
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

(3) Sprawdź założenia modelu jednoczynnikowej analizy wariancji.

```
## [1] 0.05635956
```




```
## [1] 0.9817694
```

```
## [1] 0.9759731
```

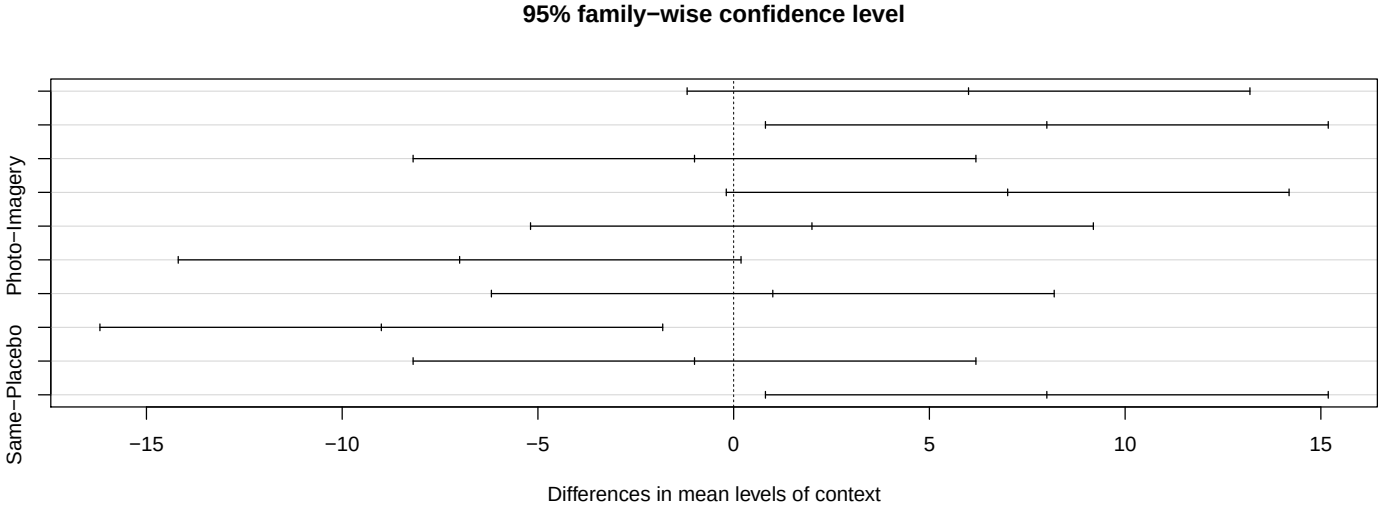
```
## [1] 0.9550502
```

```
## [1] 0.9281122
```

(4) Wykonaj testy post hoc w celu sprawdzenia, które konteksty sprawdzania wiedzy różnią się między sobą.

```
##
##  Pairwise comparisons using t tests with pooled SD
##
## data:  number and context
##
##         Different Imagery Photo Placebo
## Imagery 0.110     -       -     -
## Photo   0.025     1.000   -     -
## Placebo 1.000     0.057   0.009 -
## Same    0.057     1.000   1.000 0.025
##
## P value adjustment method: holm
```

```
##                    diff        lwr       upr      p adj
## Imagery-Different     6  -1.188363 13.188363 0.14198584
## Photo-Different       8   0.811637 15.188363 0.02232998
## Placebo-Different    -1  -8.188363  6.188363 0.99466042
## Same-Different        7  -0.188363 14.188363 0.05967870
## Photo-Imagery         2  -5.188363  9.188363 0.93203553
## Placebo-Imagery      -7 -14.188363  0.188363 0.05967870
## Same-Imagery          1  -6.188363  8.188363 0.99466042
## Placebo-Photo        -9 -16.188363 -1.811637 0.00759672
## Same-Photo           -1  -8.188363  6.188363 0.99466042
## Same-Placebo          8   0.811637 15.188363 0.02232998
```




```
##
## Study: model_aov ~ "context"
##
## HSD Test for number
##
## Mean Square Error:  32
##
## context,  means
##
##           number      std  r Min Max
## Different     11 5.617433 10   4  21
## Imagery       17 6.000000 10  10  29
## Photo         19 5.773503 10  11  27
```

```
## Placebo       10 5.906682 10   1  20
## Same          18 4.921608 10  11  26
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
## Critical Value of Studentized Range: 4.018417
##
## Minimun Significant Difference: 7.188363
##
## Treatments with the same letter are not significantly different.
##
##           number groups
## Photo         19      a
## Same          18     ab
## Imagery       17    abc
## Different     11     bc
## Placebo       10      c

##
## Study: model_aov ~ "context"
##
## Student Newman Keuls Test
## for number
##
## Mean Square Error:  32
##
## context,  means
##
##           number      std  r Min Max
## Different     11 5.617433 10   4  21
## Imagery       17 6.000000 10  10  29
## Photo         19 5.773503 10  11  27
## Placebo       10 5.906682 10   1  20
## Same          18 4.921608 10  11  26
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
##
## Critical Range
##        2        3        4        5
## 5.095323 6.131311 6.748805 7.188363
##
## Means with the same letter are not significantly different.
##
##           number groups
## Photo         19      a
## Same          18      a
## Imagery       17      a
## Different     11      b
## Placebo       10      b

##
## Study: model_aov ~ "context"
##
```

```
## LSD t Test for number
## P value adjustment method: holm
##
## Mean Square Error:  32
##
## context,  means and individual ( 95 %) CI
##
##           number      std  r       LCL      UCL Min Max
## Different     11 5.617433 10  7.397062 14.60294   4  21
## Imagery       17 6.000000 10 13.397062 20.60294  10  29
## Photo         19 5.773503 10 15.397062 22.60294  11  27
## Placebo       10 5.906682 10  6.397062 13.60294   1  20
## Same          18 4.921608 10 14.397062 21.60294  11  26
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
## Critical Value of t: 2.952079
##
## Minimum Significant Difference: 7.468235
##
## Treatments with the same letter are not significantly different.
##
##           number groups
## Photo         19      a
## Same          18     ab
## Imagery       17    abc
## Different     11     bc
## Placebo       10      c

##
## Study: model_aov ~ "context"
##
## Scheffe Test for number
##
## Mean Square Error  : 32
##
## context,  means
##
##           number      std  r Min Max
## Different     11 5.617433 10   4  21
## Imagery       17 6.000000 10  10  29
## Photo         19 5.773503 10  11  27
## Placebo       10 5.906682 10   1  20
## Same          18 4.921608 10  11  26
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
## Critical Value of F: 2.578739
##
## Minimum Significant Difference: 8.125006
##
## Means with the same letter are not significantly different.
##
##           number groups
```

```
## Photo         19      a
## Same          18     ab
## Imagery       17     ab
## Different     11     ab
## Placebo       10      b
```

(5) Chcemy przetestować następujące hipotezy szczegółowe:

a. Grupy o takim samym kontekście podczas uczenia i testowania („Same" lub „Imaginary" lub „Photographed'') wypadają lepiej od grup o różnym kontekście („Different" lub „Placebo").
b. Grupa „Same" różni się od grup „Imaginary" i „Photographed".
c. Grupa „Imaginary" różni się od grupy „Photographed".
d. Grupa „Different" różni się od grupy „Placebo".

W tym celu wykonaj następujące polecenia:

- Zapisz odpowiednie hipotezy.
- Wyraź je za pomocą kontrastów.
- Czy ten układ kontrastów jest ortogonalny?
- Przetestuj zaproponowane kontrasty.

```
##               Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## context        4    700     175   5.469  0.00112 **
##   context: C1  1    675     675  21.094 3.52e-05 ***
##   context: C2  1      0       0   0.000  1.00000
##   context: C3  1     20      20   0.625  0.43334
##   context: C4  1      5       5   0.156  0.69450
## Residuals     45   1440      32
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Zadanie 2. W 1974 roku Michael Eysenck opublikował w czasopiśmie Developmental Psychology wyniki badań dotyczących ubocznego uczenia werbalnego. W eksperymencie wzięło udział 100 osób, z czego połowę stanowili młodzi ludzie (w wieku studenckim), a drugą połowę osoby starsze (w wieku pięćdziesięciu i sześćdziesięciu lat). W obrębie każdej grupy wiekowej, pacjenci zostali przydzieleni do jednej z pięciu grup „Instrukcji". Następnie podano im listę słów i powiedziano, aby postępowali zgodnie z instrukcjami podanymi wcześniej. Instrukcje były następujące:

- Liczenie - liczenie liter w każdym wymienionym słowie,
- Rymowanie - pomyśleć o słowie, które rymuje się z wskazanym słowem,
- Przymiotnik - pomyśleć o przymiotniku, który mógłby zmodyfikować dane słowo,
- Wyobraźnia - wyobrazić sobie obraz obiektu opisanego przez wymienione słowo,
- Kontrola - pamiętaj wymienione słowa aby później je powtórzyć.

Każdy pacjent widział tę samą listę wyrazów trzy razy i powtarzał te instrukcje trzy razy. Instrukcje Liczenie i Rymowanie mają dać informację o powierzchownym poziomie przetwarzania semantycznego. Instrukcje Przymiotnik i Wyobraźnia mają informować o głębokim poziomie przetwarzania semantycznego, tj. liczenie i rymowanie nie wymagają od pacjenta znajomości sensu słów z listy, podczas gdy instrukcje Przymiotnik i Wyobraźnia wymagają znajomości znaczenia słów. Pacjenci w grupie kontrolnej mieli tylko zapamiętać słowa i ewentualnie później je powtórzyć. Dane zawarte w pliku Eysenck.txt dotyczą tylko pacjentów młodszych i zostały uzyskane w oparciu o średnie i błędy standardowe otrzymane w pracy Eysencka (1974).

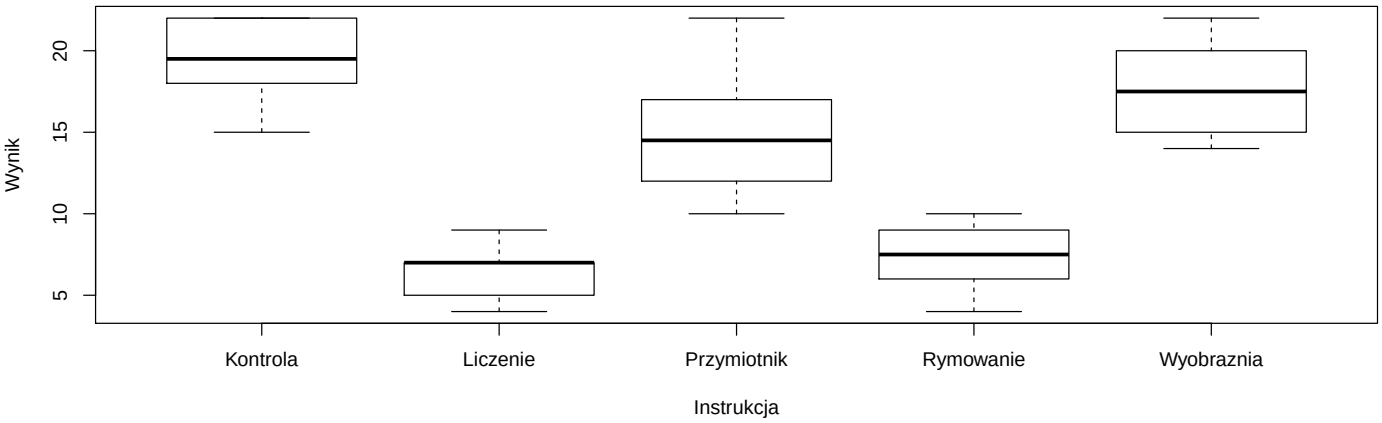
(1) Załaduj zbiór danych do programu R. Następnie usuń zbędną kolumnę.

```
##   Wynik Instrukcja
## 1     7   Liczenie
```

```
## 2     9   Liczenie
## 3     7   Liczenie
## 4     7   Liczenie
## 5     5   Liczenie
## 6     7   Liczenie
```

(2) Wyznacz średnie wartości cechy zależnej w grupach. Ponadto, przedstaw otrzymane dane za pomocą wykresu ramkowego dla każdej grupy z osobna.

```
##    Instrukcja    x
## 1    Kontrola 19.3
## 2    Liczenie  6.5
## 3 Przymiotnik 14.8
## 4   Rymowanie  7.6
## 5  Wyobraznia 17.6
```

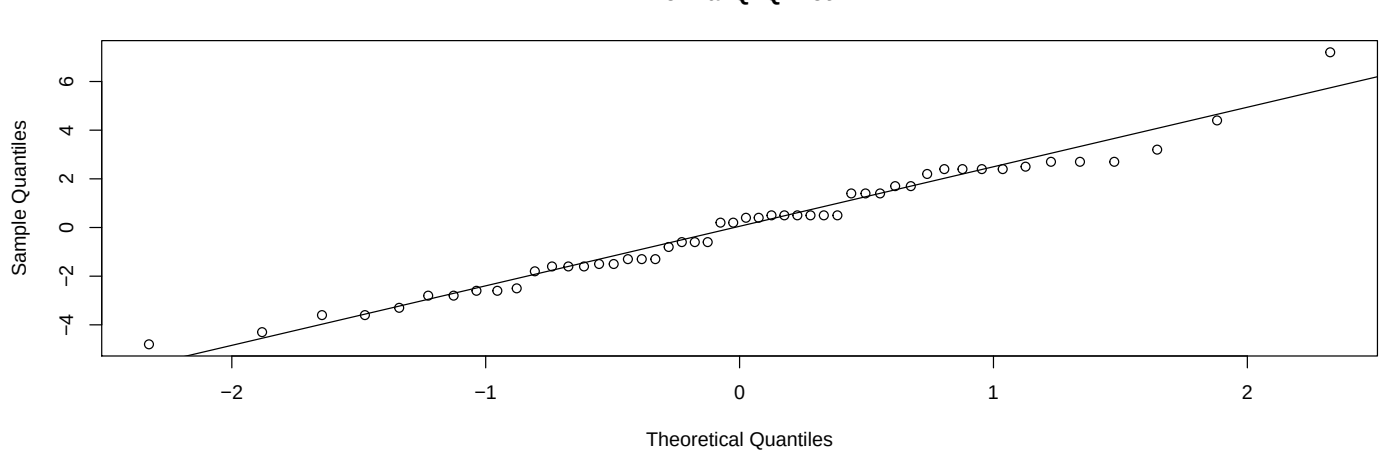


(3) Wykonaj test analizy wariancji w celu sprawdzenia, czy typ instrukcji ma istotny wpływ na badaną cechę zależną.

```
##             Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## Instrukcja   4   1354   338.4   53.06 <2e-16 ***
## Residuals   45    287     6.4
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

(4) Sprawdź założenia modelu jednoczynnikowej analizy wariancji.

```
## [1] 0.3756369
```



```
## [1] 0.1258206
```

```
## [1] 0.09922991
```

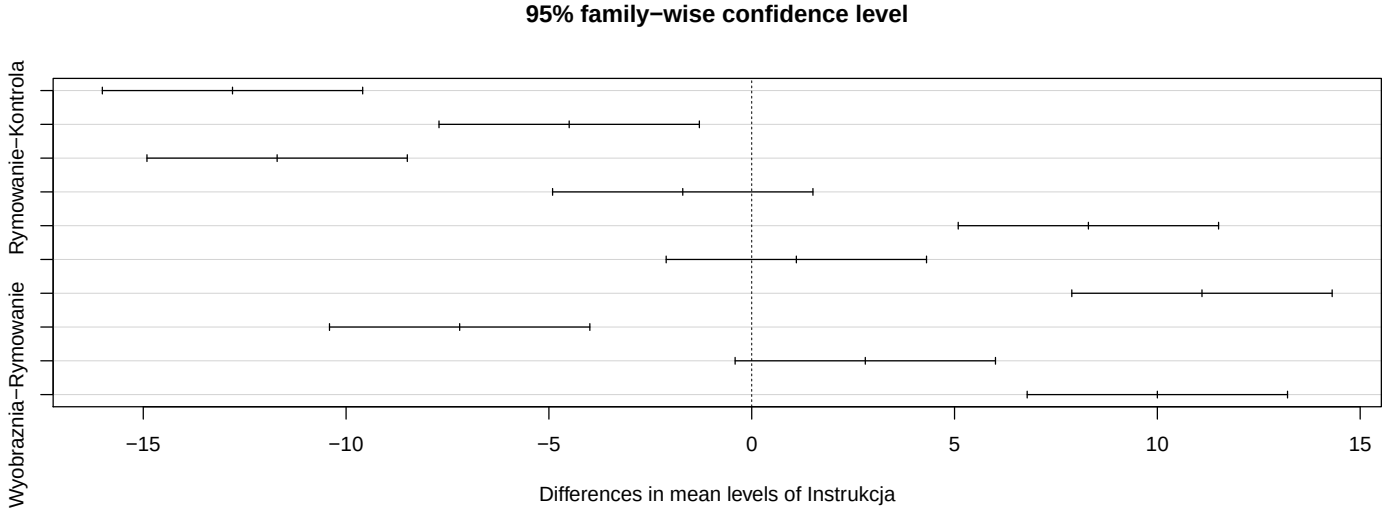
```
## [1] 0.07071935
```

```
## [1] 0.1059926
```

(5) Wykonaj testy post hoc w celu sprawdzenia, które typy instrukcji różnią się między sobą.

```
##
##  Pairwise comparisons using t tests with pooled SD
##
## data:  Wynik and Instrukcja
##
##             Kontrola Liczenie Przymiotnik Rymowanie
## Liczenie    8.9e-14  -        -           -
## Przymiotnik 0.00098  1.9e-08  -           -
## Rymowanie   1.5e-12  0.33528  4.3e-07     -
## Wyobraznia  0.27851  7.1e-12  0.05094     1.4e-10
##
## P value adjustment method: holm
```

```
##                         diff         lwr       upr        p adj
## Liczenie-Kontrola      -12.8 -16.0091477 -9.590852 3.528289e-13
## Przymiotnik-Kontrola    -4.5  -7.7091477 -1.290852 2.177062e-03
## Rymowanie-Kontrola     -11.7 -14.9091477 -8.490852 1.968870e-12
## Wyobraznia-Kontrola     -1.7  -4.9091477  1.509148 5.645617e-01
## Przymiotnik-Liczenie     8.3   5.0908523 11.509148 3.057657e-08
## Rymowanie-Liczenie       1.1  -2.1091477  4.309148 8.654520e-01
## Wyobraznia-Liczenie     11.1   7.8908523 14.309148 9.156453e-12
## Rymowanie-Przymiotnik   -7.2 -10.4091477 -3.990852 8.442959e-07
## Wyobraznia-Przymiotnik   2.8  -0.4091477  6.009148 1.136213e-01
## Wyobraznia-Rymowanie    10.0   6.7908523 13.209148 2.024079e-10
```




```
##
## Study: model_aov ~ "Instrukcja"
##
## HSD Test for Wynik
##
```

```
## Mean Square Error:  6.377778
##
## Instrukcja,  means
##
##             Wynik      std  r Min Max
## Kontrola     19.3 2.626785 10  15  22
## Liczenie      6.5 1.433721 10   4   9
## Przymiotnik  14.8 3.489667 10  10  22
## Rymowanie     7.6 1.955050 10   4  10
## Wyobraznia   17.6 2.633122 10  14  22
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
## Critical Value of Studentized Range: 4.018417
##
## Minimun Significant Difference: 3.209148
##
## Treatments with the same letter are not significantly different.
##
##             Wynik groups
## Kontrola     19.3      a
## Wyobraznia   17.6     ab
## Przymiotnik  14.8      b
## Rymowanie     7.6      c
## Liczenie      6.5      c

##
## Study: model_aov ~ "Instrukcja"
##
## Student Newman Keuls Test
## for Wynik
##
## Mean Square Error:  6.377778
##
## Instrukcja,  means
##
##             Wynik      std  r Min Max
## Kontrola     19.3 2.626785 10  15  22
## Liczenie      6.5 1.433721 10   4   9
## Przymiotnik  14.8 3.489667 10  10  22
## Rymowanie     7.6 1.955050 10   4  10
## Wyobraznia   17.6 2.633122 10  14  22
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
##
## Critical Range
##        2        3        4        5
## 2.274738 2.737241 3.012913 3.209148
##
## Means with the same letter are not significantly different.
##
##             Wynik groups
## Kontrola     19.3      a
```

```
## Wyobraznia   17.6      a
## Przymiotnik  14.8      b
## Rymowanie     7.6      c
## Liczenie      6.5      c
```

```
##
## Study: model_aov ~ "Instrukcja"
##
## LSD t Test for Wynik
## P value adjustment method: holm
##
## Mean Square Error:  6.377778
##
## Instrukcja,  means and individual ( 95 %) CI
##
##             Wynik      std  r       LCL       UCL Min Max
## Kontrola     19.3 2.626785 10 17.691517 20.908483  15  22
## Liczenie      6.5 1.433721 10  4.891517  8.108483   4   9
## Przymiotnik  14.8 3.489667 10 13.191517 16.408483  10  22
## Rymowanie     7.6 1.955050 10  5.991517  9.208483   4  10
## Wyobraznia   17.6 2.633122 10 15.991517 19.208483  14  22
##
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
## Critical Value of t: 2.952079
##
## Minimum Significant Difference: 3.334093
##
## Treatments with the same letter are not significantly different.
##
##             Wynik groups
## Kontrola     19.3      a
## Wyobraznia   17.6     ab
## Przymiotnik  14.8      b
## Rymowanie     7.6      c
## Liczenie      6.5      c
```

```
##
## Study: model_aov ~ "Instrukcja"
##
## Scheffe Test for Wynik
##
## Mean Square Error  : 6.377778
##
## Instrukcja,  means
##
##             Wynik      std  r Min Max
## Kontrola     19.3 2.626785 10  15  22
## Liczenie      6.5 1.433721 10   4   9
## Przymiotnik  14.8 3.489667 10  10  22
## Rymowanie     7.6 1.955050 10   4  10
## Wyobraznia   17.6 2.633122 10  14  22
##
```

```
## Alpha: 0.05 ; DF Error: 45
## Critical Value of F: 2.578739
##
## Minimum Significant Difference: 3.627299
##
## Means with the same letter are not significantly different.
##
##             Wynik groups
## Kontrola     19.3      a
## Wyobraznia   17.6     ab
## Przymiotnik  14.8      b
## Rymowanie     7.6      c
## Liczenie      6.5      c
```

(6) Przetestuj hipotezy szczegółowe związane z następującymi zagadnieniami:

- Porównaj dwie grupy powierzchownego uzyskiwania informacji z dwiema grupami głębokiego uzyskiwania informacji.
- Porównaj grupę kontrolną z pozostałymi czterema grupami.
- Porównaj dwie grupy powierzchownego uzyskiwania informacji między sobą.
- Porównaj dwie grupy głębokiego uzyskiwania informacji między sobą.

W tym celu wykonaj następujące polecenia:

- Zapisz odpowiednie hipotezy.
- Wyraź je za pomocą kontrastów.
- Czy ten układ kontrastów jest ortogonalny?
- Przetestuj zaproponowane kontrasty.

```
##                  Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## Instrukcja        4 1353.7   338.4  53.064  < 2e-16 ***
##   Instrukcja: C1  1  837.2   837.2 131.272 6.19e-15 ***
##   Instrukcja: C2  1  471.2   471.2  73.889 4.76e-11 ***
##   Instrukcja: C3  1    6.1     6.1   0.949    0.335
##   Instrukcja: C4  1   39.2    39.2   6.146    0.017 *
## Residuals        45  287.0     6.4
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

9 Regresja liniowa

9.1 Przykład

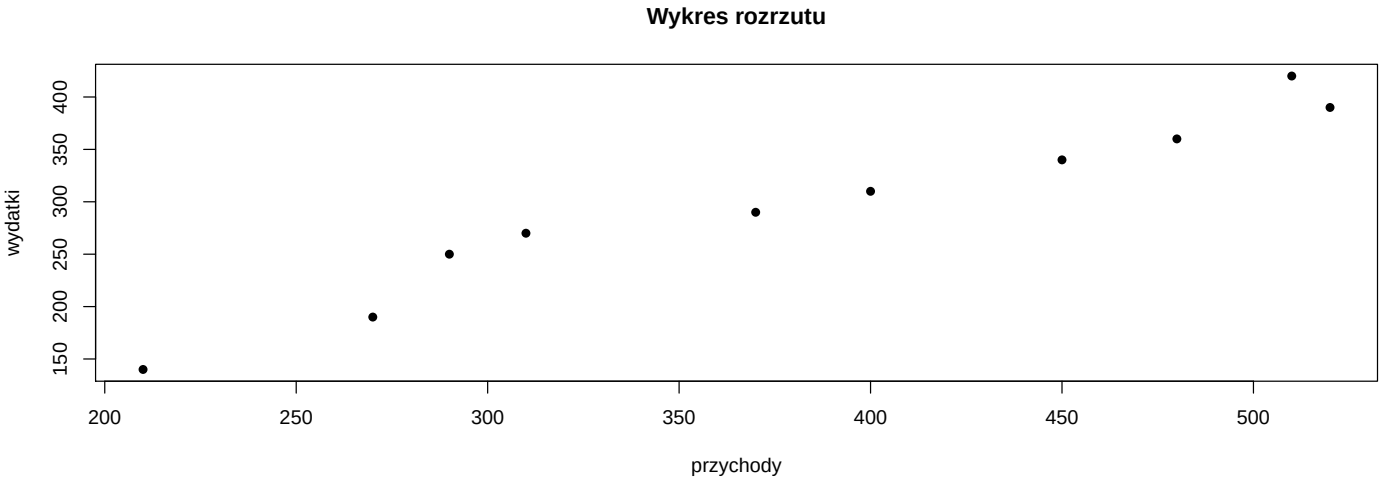
Przykład. Za pomocą regresji liniowej chcemy opisać związek między miesięcznym dochodem rodziny na jedną osobę a miesięczną wartością wydatków na jedną osobę. Dane dotyczące tych dwóch cech dla dziesięciu rodzin podano w poniższej tabeli.

rodzina	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
przychody	210	270	290	310	370	400	450	480	510	520
wydatki	140	190	250	270	290	310	340	360	420	390

```r
# dane
przychody <- c(210, 270, 290, 310, 370, 400, 450, 480, 510, 520)
wydatki <- c(140, 190, 250, 270, 290, 310, 340, 360, 420, 390)
data_set <- data.frame(przychody = przychody, wydatki = wydatki)
head(data_set)
```

```
##   przychody wydatki
## 1       210     140
## 2       270     190
## 3       290     250
## 4       310     270
## 5       370     290
## 6       400     310
```

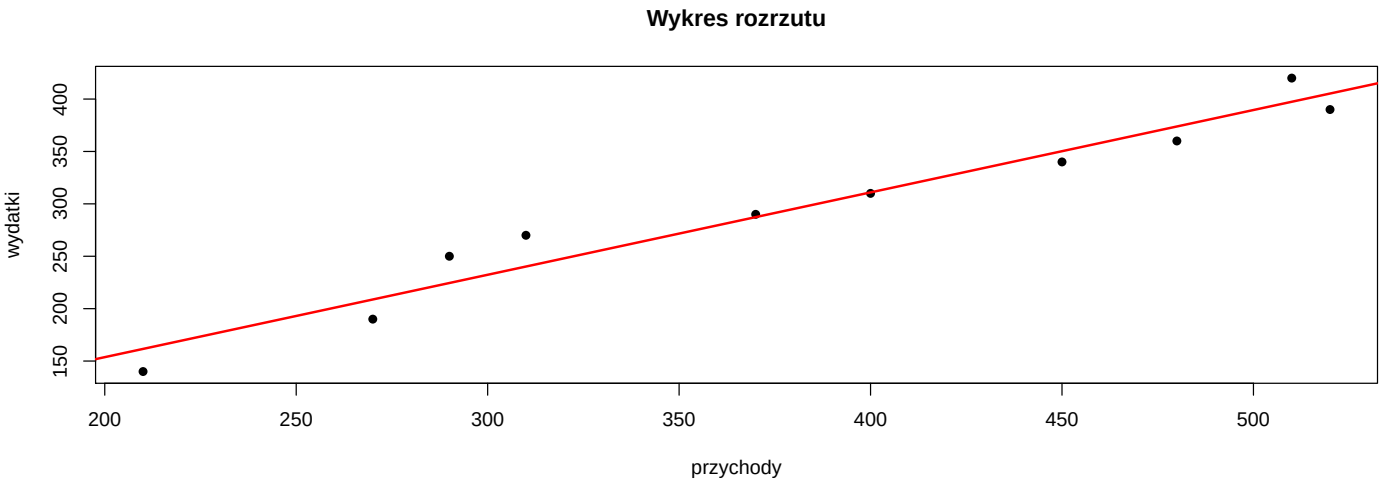
```r
# Wykres rozrzutu
plot(data_set, main = "Wykres rozrzutu", pch = 16)
```




```r
# model
model <- lm(wydatki ~ przychody, data = data_set)
model
```

```
##
## Call:
## lm(formula = wydatki ~ przychody, data = data_set)
##
## Coefficients:
## (Intercept)    przychody
##     -3.5036       0.7861
```

```r
plot(data_set, main = "Wykres rozrzutu", pch = 16)
abline(model, col = "red", lwd = 2)
```




```
# estymacja parametrów
coef(model)
```

```
## (Intercept)   przychody
##  -3.5036358   0.7860988
```

```
confint(model)
```

```
##                    2.5 %     97.5 %
## (Intercept) -61.2027257 54.1954540
## przychody     0.6398962  0.9323013
```

```
# podsumowanie modelu
# tj. reszty, estymacja punktowa, testy istotności dla współczynników regresji,
# R^2, test istnotności modelu
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = wydatki ~ przychody, data = data_set)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -21.577 -14.907  -5.588  17.607  29.813
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -3.5036    25.0212   -0.14    0.892
## przychody     0.7861     0.0634   12.40 1.67e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 20.63 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9505, Adjusted R-squared:  0.9444
## F-statistic: 153.7 on 1 and 8 DF,  p-value: 1.67e-06
```

```
# wartości dopasowane przez model
fitted(model)
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7        8
## 161.5771 208.7430 224.4650 240.1870 287.3529 310.9359 350.2408 373.8238
```

```
##        9       10
## 397.4067 405.2677
```

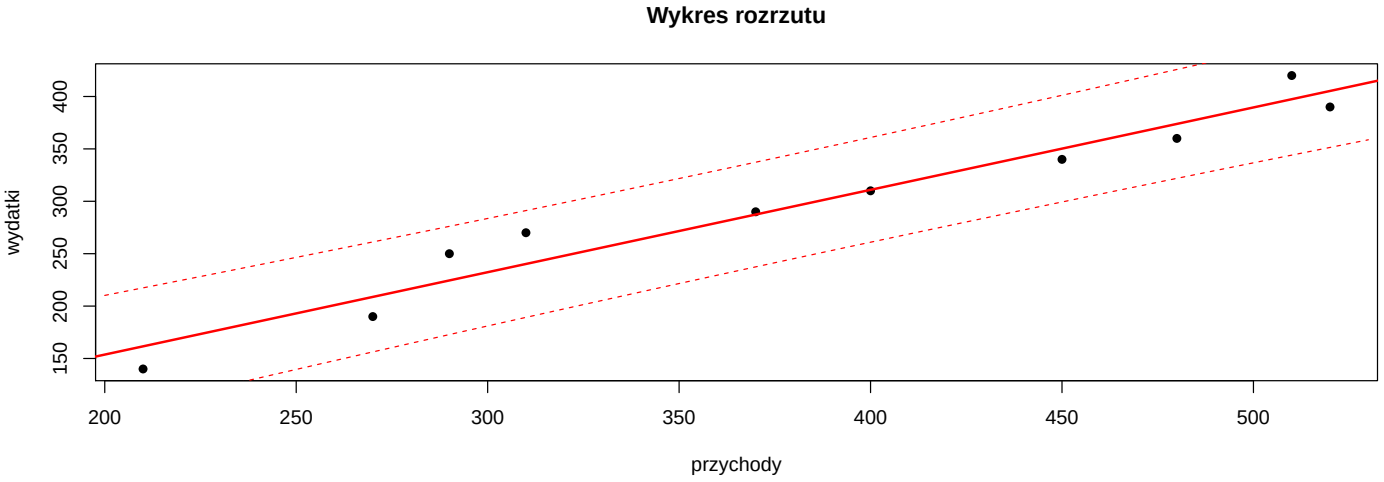
```r
# reszty
residuals(model)
```

```
##           1           2           3           4           5           6
## -21.5771083 -18.7430352  25.5349891  29.8130135   2.6470866  -0.9358769
##           7           8           9          10
## -10.2408159 -13.8237794  22.5932572 -15.2677307
```

```r
# sprawdzenie
wydatki - fitted(model)
```

```
##           1           2           3           4           5           6
## -21.5771083 -18.7430352  25.5349891  29.8130135   2.6470866  -0.9358769
##           7           8           9          10
## -10.2408159 -13.8237794  22.5932572 -15.2677307
```

```r
# przedziały ufności dla predykcji
temp_przychody <- data.frame(przychody = seq(min(data_set$przychody) - 10,
                                             max(data_set$przychody) + 10,
                                             length = 100))
pred <- predict(model, temp_przychody, interval = "prediction")
plot(data_set, main = "Wykres rozrzutu", pch = 16)
abline(model, col = "red", lwd = 2)
lines(temp_przychody$przychody, pred[, 2], lty = 2, col = "red")
lines(temp_przychody$przychody, pred[, 3], lty = 2, col = "red")
```




```r
# predykcja wydatków dla przychodu = 350
nowy_przychod <- data.frame(przychody = 350)
predict(model, nowy_przychod, interval = 'prediction')
```

```
##        fit     lwr      upr
## 1 271.6309 221.528 321.7338
```

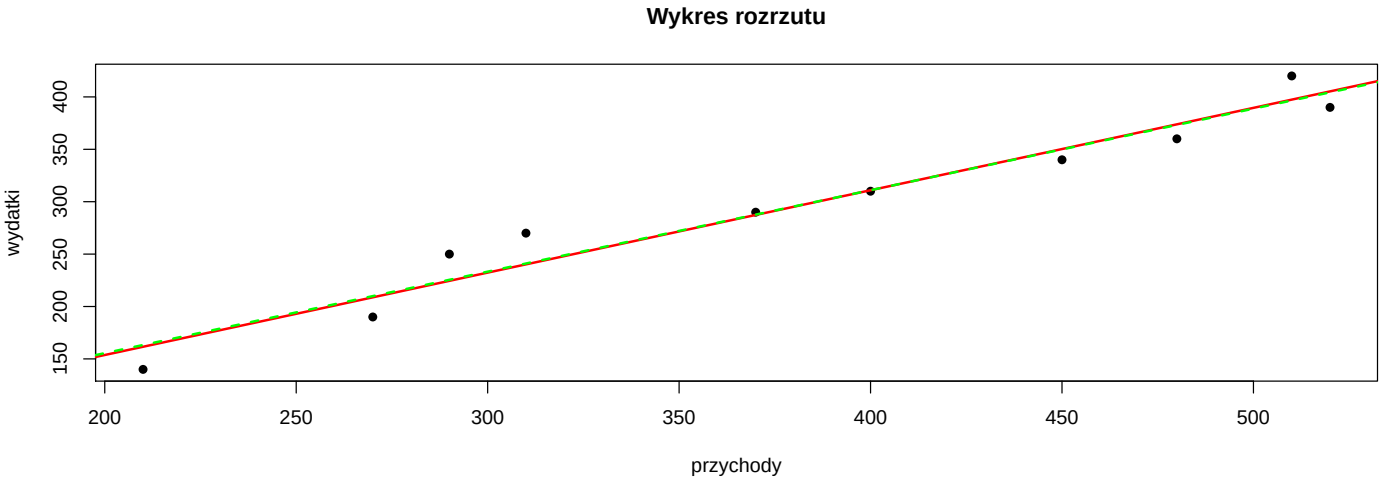
- model bez wyrazu wolnego

```r
model_bez_ww <- lm(wydatki ~ przychody - 1, data = data_set)
model_bez_ww
```

```
##
```

```
## Call:
## lm(formula = wydatki ~ przychody - 1, data = data_set)
##
## Coefficients:
## przychody
##    0.7775
```

```
plot(data_set, main = "Wykres rozrzutu", pch = 16)
abline(model, col = "red", lwd = 2)
abline(model_bez_ww, col = "green", lwd = 2, lty = 2)
```




```
coef(model_bez_ww)
```

```
## przychody
## 0.7775281
```

```
confint(model_bez_ww)
```

```
##                2.5 %   97.5 %
## przychody 0.7422271 0.812829
```

```
summary(model_bez_ww)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = wydatki ~ przychody - 1, data = data_set)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -23.281 -14.039  -5.449  18.174  28.966
##
## Coefficients:
##           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## przychody   0.7775     0.0156   49.83 2.65e-12 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 19.48 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9964, Adjusted R-squared:  0.996
## F-statistic:  2483 on 1 and 9 DF,  p-value: 2.651e-12
```

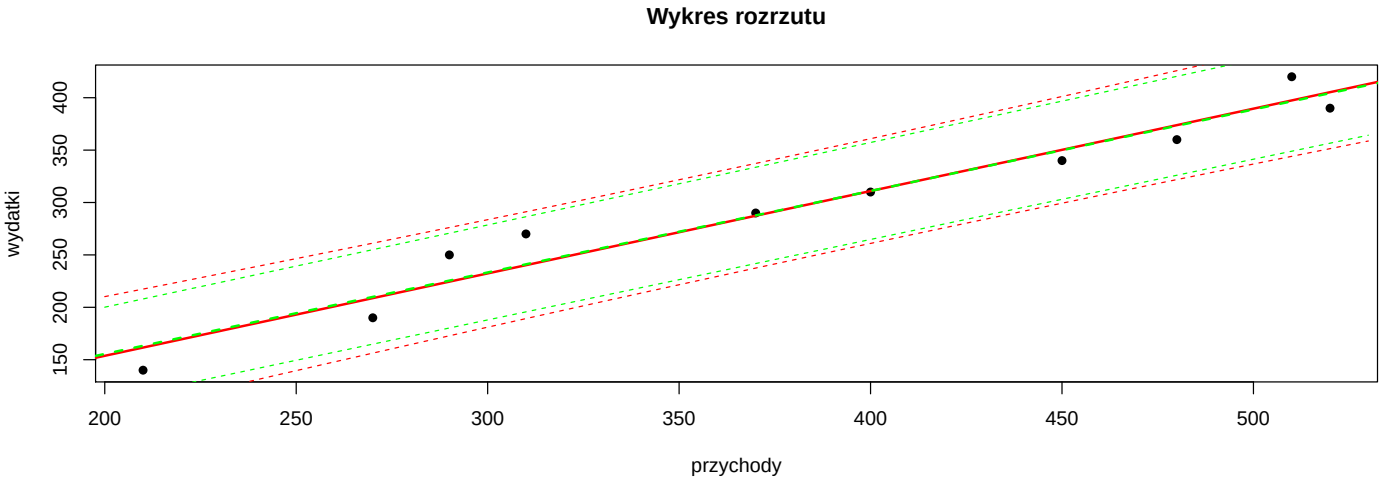
```r
fitted(model_bez_ww)
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7        8
## 163.2809 209.9326 225.4831 241.0337 287.6854 311.0112 349.8876 373.2135
##        9       10
## 396.5393 404.3146
```

```r
residuals(model_bez_ww)
```

```
##          1          2          3          4          5          6
## -23.280899 -19.932584  24.516854  28.966292   2.314607  -1.011236
##          7          8          9         10
##  -9.887640 -13.213483  23.460674 -14.314607
```

```r
temp_przychody <- data.frame(przychody = seq(min(data_set$przychody) - 10,
                                             max(data_set$przychody) + 10,
                                             length = 100))
pred1 <- predict(model_bez_ww, temp_przychody, interval = "prediction")
plot(data_set, main = "Wykres rozrzutu", pch = 16)
abline(model, col = "red", lwd = 2)
abline(model_bez_ww, col = "green", lwd = 2, lty = 2)
lines(temp_przychody$przychody, pred[, 2], lty = 2, col = "red")
lines(temp_przychody$przychody, pred[, 3], lty = 2, col = "red")
lines(temp_przychody$przychody, pred1[, 2], lty = 2, col = "green")
lines(temp_przychody$przychody, pred1[, 3], lty = 2, col = "green")
```




```r
nowy_przychod <- data.frame(przychody = 350)
predict(model_bez_ww, nowy_przychod, interval = 'prediction')
```

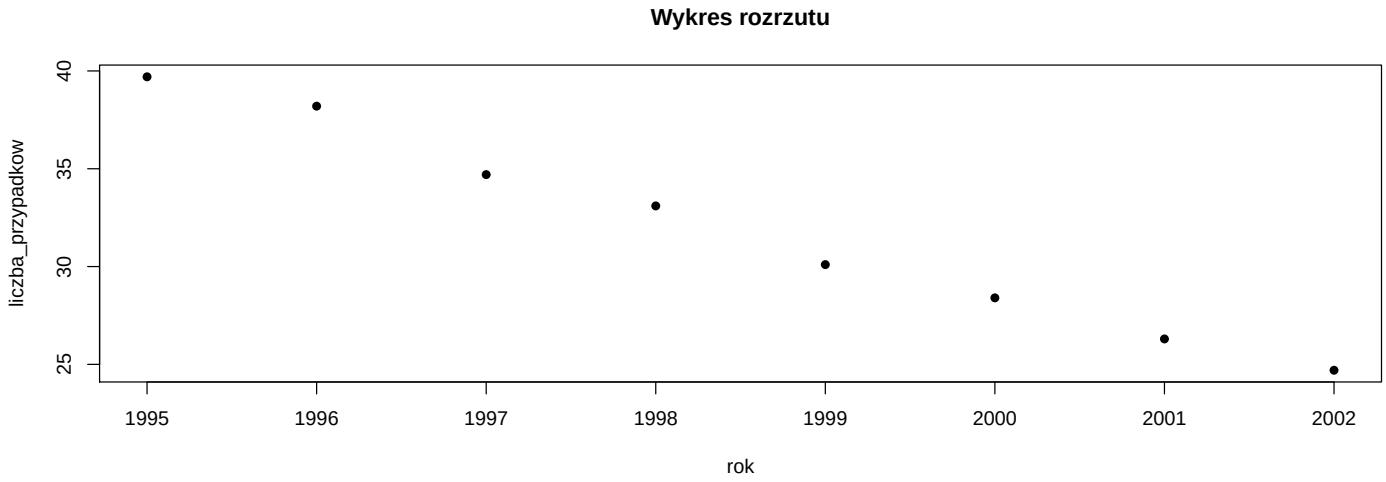
```
##        fit      lwr      upr
## 1 272.1348 226.3796 317.8901
```

9.2 Zadania

Zadanie 1. Poniższa tabela przedstawia liczbę przypadków gruźlicy układu oddechowego w latach 1995-2002. Podano liczbę przypadków na 100.000 ludności. Zakładając liniową zależność między rokiem a liczbą przypadków, wykonaj kompleksową analizę regresji.

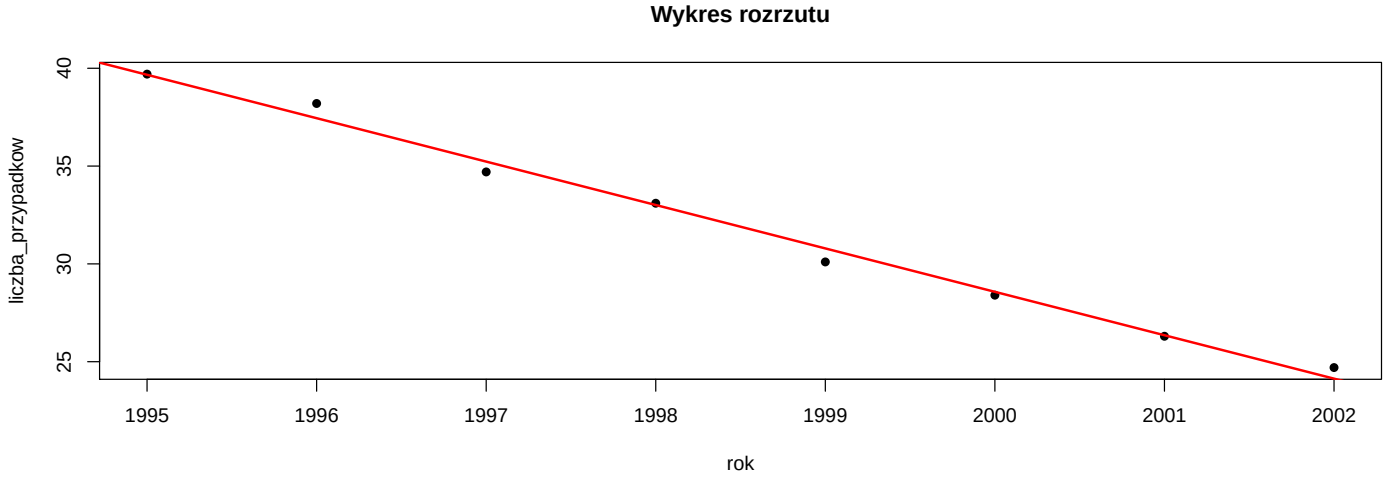
Dane								
rok	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
liczba przypadków	39.7	38.2	34.7	33.1	30.1	28.4	26.3	24.7

1. Przedstaw dane na wykresie rozrzutu. Czy model regresji liniowej wydaje się adekwatny?



2. Dopasuj model regresji liniowej do tych danych. Jakie są wartości estymatorów współczynników regresji i przedziały ufności? Narysuj uzyskaną prostą regresji na schemacie punktowym.

```
## (Intercept)         rok
## 4466.666667   -2.219048
```




```
## (Intercept)         rok
## 4466.666667   -2.219048
```

```
##                  2.5 %      97.5 %
## (Intercept) 4066.82158 4866.511749
## rok           -2.41912   -2.018975
```

3. Które współczynniki są istotne statystycznie w skonstruowanym modelu? Jakie jest dopasowanie modelu?

```
##
## Call:
## lm(formula = liczba_przypadkow ~ rok, data = data_set)
##
```

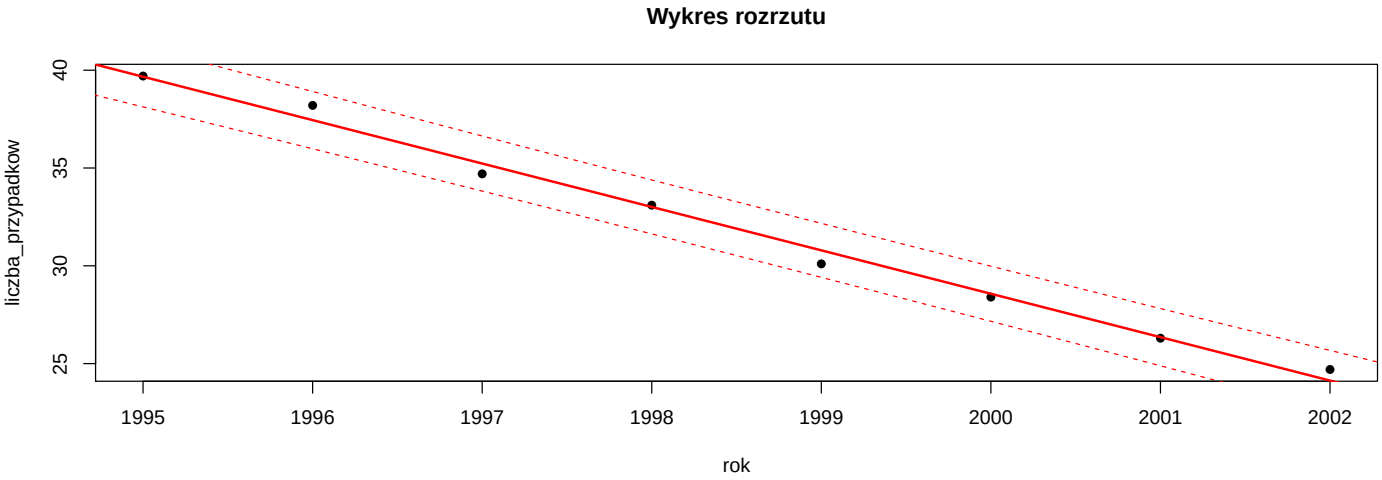
```
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.69048 -0.26071 -0.00952  0.20952  0.75238
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 4466.66667  163.40805   27.33 1.58e-07 ***
## rok           -2.21905    0.08177  -27.14 1.65e-07 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5299 on 6 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9919, Adjusted R-squared:  0.9906
## F-statistic: 736.5 on 1 and 6 DF,  p-value: 1.654e-07
```

4. Oblicz wartości dopasowane przez model, a także reszty.

```
##        1        2        3        4        5        6        7        8
## 39.66667 37.44762 35.22857 33.00952 30.79048 28.57143 26.35238 24.13333
```

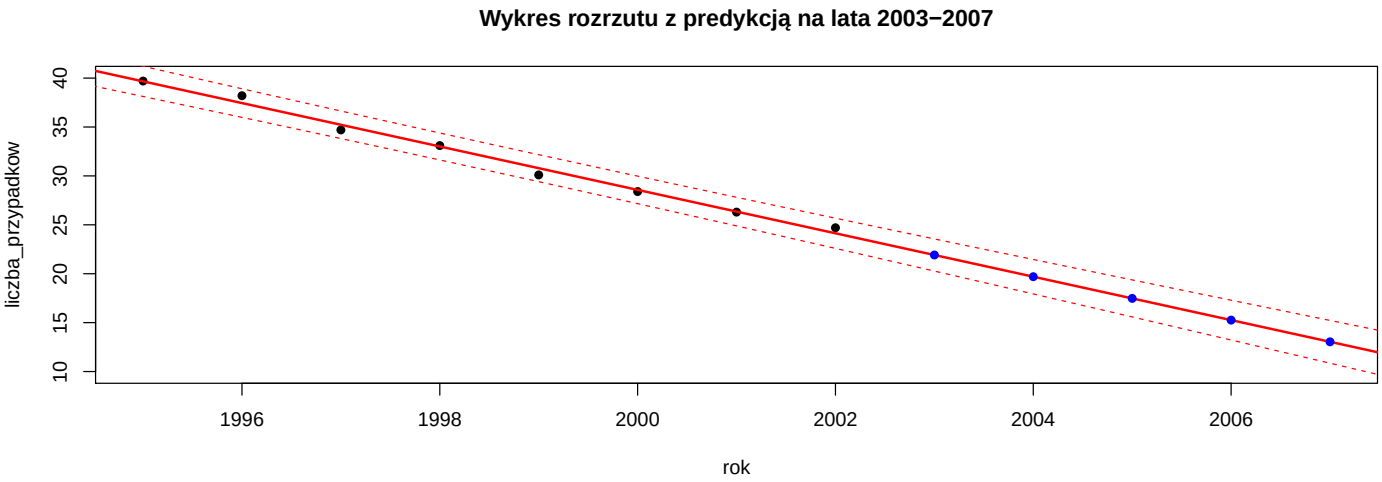
```
##           1           2           3           4           5           6
##  0.03333333  0.75238095 -0.52857143  0.09047619 -0.69047619 -0.17142857
##           7           8
## -0.05238095  0.56666667
```

5. Na wykresie rozrzutu przedstaw granice przedziału prognozy 95%.



6. Dokonaj predykcji liczby przypadków gruźlicy układu oddechowego w latach 2003-2007. Zilustruj wyniki na wykresie rozrzutu.

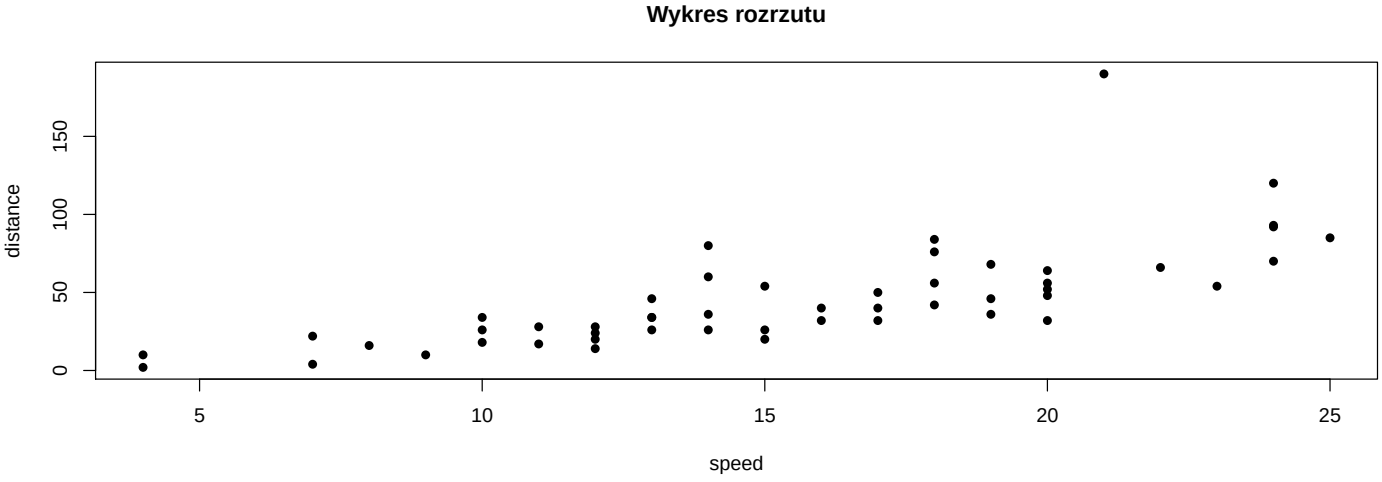
```
##        fit      lwr      upr
## 1 21.91429 20.27052 23.55805
## 2 19.69524 17.93392 21.45656
## 3 17.47619 15.58342 19.36896
## 4 15.25714 13.22171 17.29258
## 5 13.03810 10.85098 15.22521
```



7. Czy miałoby sens usunięcie wyrazu wolnego z modelu? Jeśli tak, wykonaj powyższe polecenia dla modelu regresji liniowej bez wyrazu losowego.

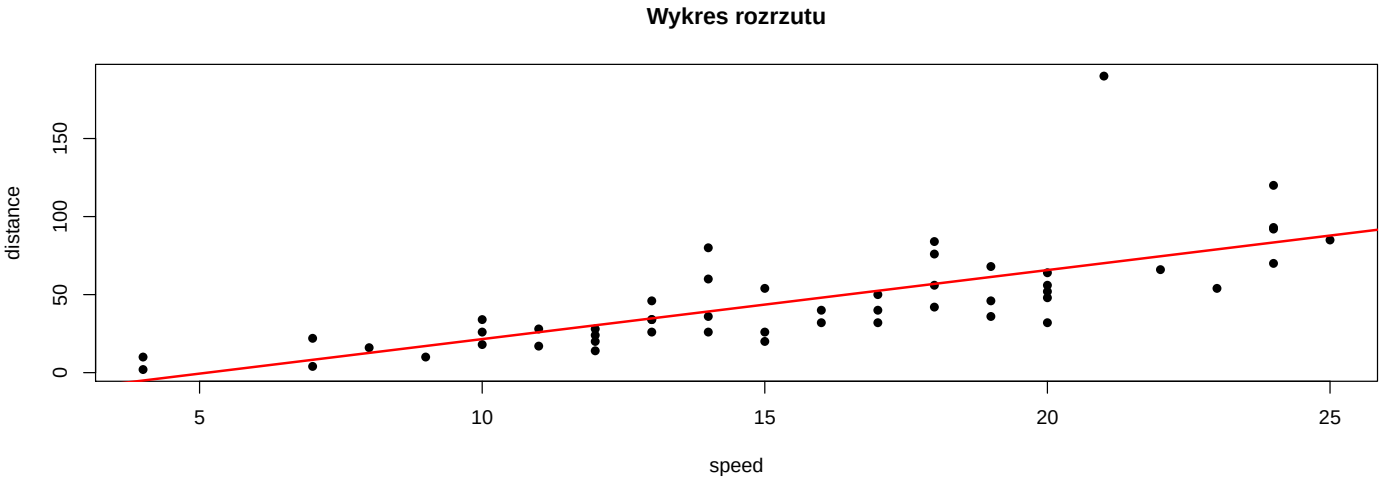
Zadanie 2. Zbiór danych zawarty w pliku braking.RData zawiera informacje o długości drogi hamowania przy danej prędkości określonego modelu samochodu. W tym zbiorze danych występuje obserwacja odstająca. Zidentyfikuj ją za pomocą wykresu rozrzutu. Korzystając z modelu regresji liniowej, opisz związek między długością drogi hamowania a prędkością przy użyciu pełnych danych i danych bez obserwacji odstającej. Jakie są wyniki dla obu modeli? Który model jest lepszy? Dokładniej, wykonaj polecenia 2-7 Zadania 1 dla każdego modelu osobno. W punkcie 6 przeprowadź predykcję długości drogi hamowania dla prędkości 30, 31, ..., 50.

```
##   speed distance
## 1     4        2
## 2     4       10
## 3     7        4
## 4     7       22
## 5     8       16
## 6     9       10
```



Model dla pełnych danych

2.




```
## (Intercept)       speed
##  -22.726854    4.422338
```

```
##                   2.5 %    97.5 %
## (Intercept) -43.105778 -2.347930
## speed         3.177543  5.667134
```

3.

```
##
## Call:
## lm(formula = distance ~ speed, data = braking)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -33.720 -13.298  -3.186   7.814 119.858
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -22.7269    10.1409  -2.241   0.0296 *
## speed         4.4223     0.6194   7.139 4.04e-09 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 23.18 on 49 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.5099, Adjusted R-squared:  0.4999
## F-statistic: 50.97 on 1 and 49 DF,  p-value: 4.037e-09
```

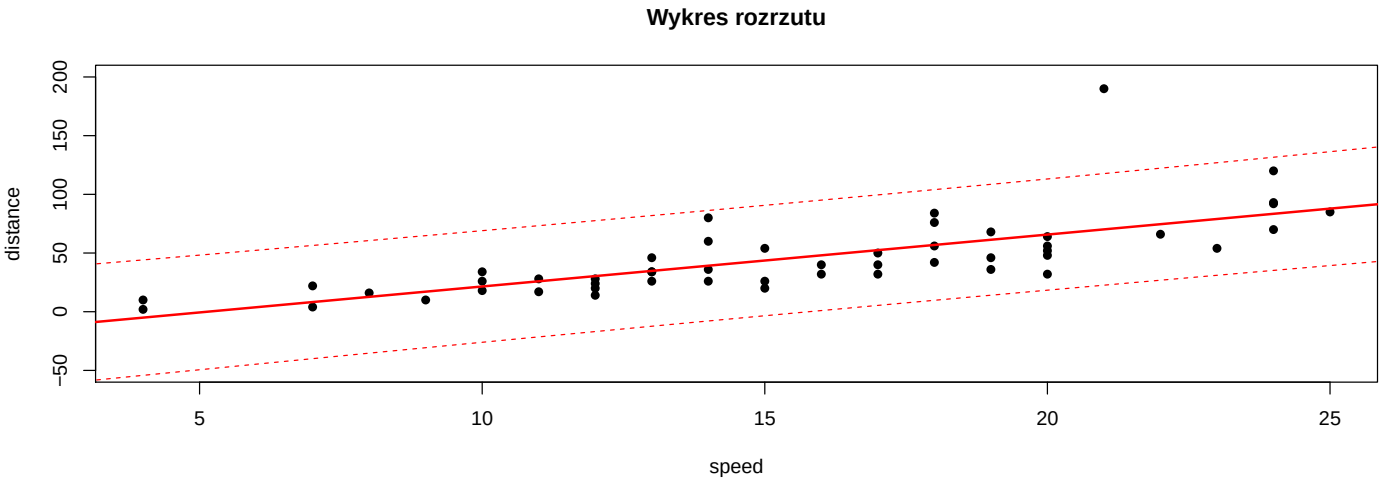
4.

```
##         1         2         3         4         5         6         7
## -5.037501 -5.037501  8.229514  8.229514 12.651852 17.074190 21.496528
##         8         9        10        11        12        13        14
## 21.496528 21.496528 25.918867 25.918867 30.341205 30.341205 30.341205
##        15        16        17        18        19        20        21
## 30.341205 34.763543 34.763543 34.763543 34.763543 39.185881 39.185881
##        22        23        24        25        26        27        28
## 39.185881 39.185881 43.608220 43.608220 43.608220 70.142249 48.030558
##        29        30        31        32        33        34        35
## 48.030558 52.452896 52.452896 52.452896 56.875234 56.875234 56.875234
```

```
##        36        37        38        39        40        41        42
## 56.875234 61.297573 61.297573 61.297573 65.719911 65.719911 65.719911
##        43        44        45        46        47        48        49
## 65.719911 65.719911 74.564587 78.986926 83.409264 83.409264 83.409264
##        50        51
## 83.409264 87.831602
```

```
##           1           2           3           4           5           6
##   7.0375010  15.0375010  -4.2295137  13.7704863   3.3481480  -7.0741902
##           7           8           9          10          11          12
##  -3.4965285   4.5034715  12.5034715  -8.9188667   2.0811333 -16.3412050
##          13          14          15          16          17          18
## -10.3412050  -6.3412050  -2.3412050  -8.7635432  -0.7635432  -0.7635432
##          19          20          21          22          23          24
##  11.2364568 -13.1858815  -3.1858815  20.8141185  40.8141185 -23.6082197
##          25          26          27          28          29          30
## -17.6082197  10.3917803 119.8577508 -16.0305580  -8.0305580 -20.4528962
##          31          32          33          34          35          36
## -12.4528962  -2.4528962 -14.8752345  -0.8752345  19.1247655  27.1247655
##          37          38          39          40          41          42
## -25.2975727 -15.2975727   6.7024273 -33.7199110 -17.7199110 -13.7199110
##          43          44          45          46          47          48
##  -9.7199110  -1.7199110  -8.5645875 -24.9869257 -13.4092640   8.5907360
##          49          50          51
##   9.5907360  36.5907360  -2.8316022
```

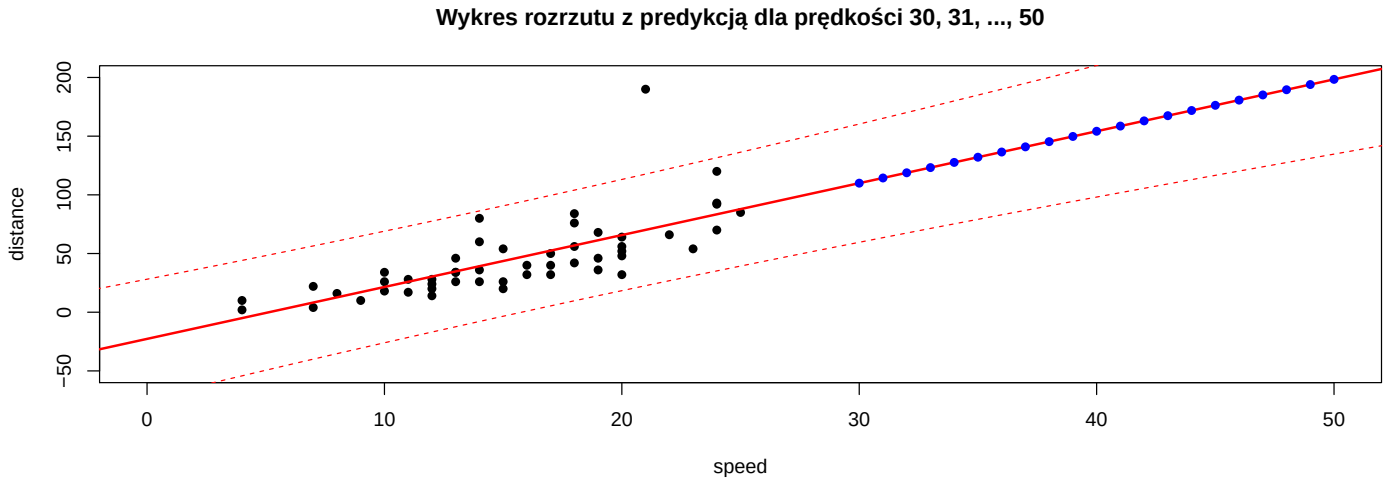
5.



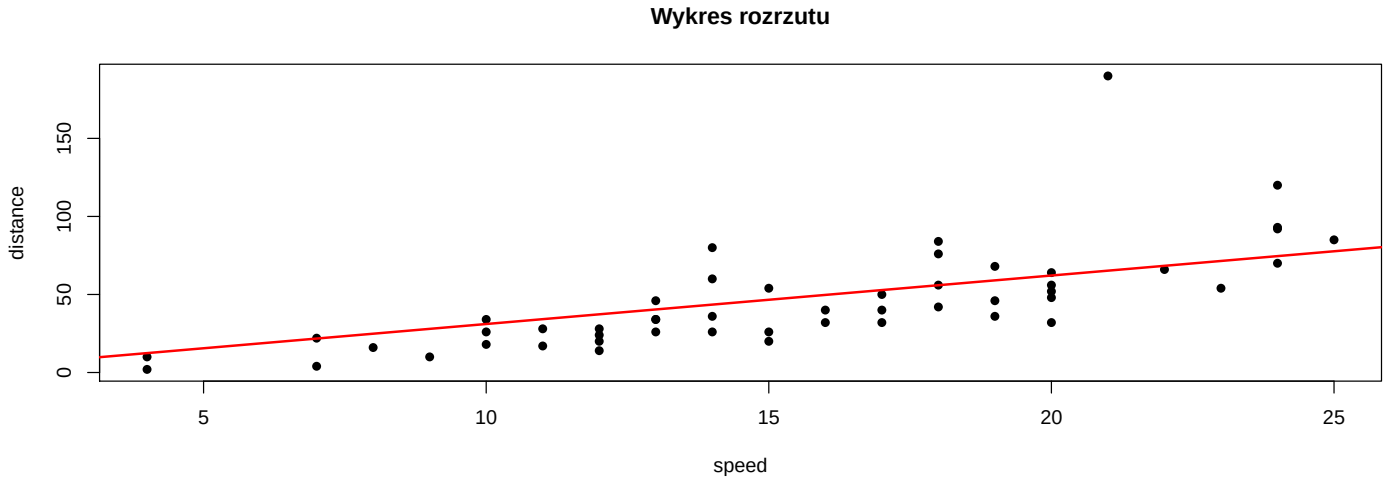
6.

```
##         fit       lwr      upr
## 1  109.9433  59.56096 160.3256
## 2  114.3656  63.52436 165.2069
## 3  118.7880  67.46167 170.1143
## 4  123.2103  71.37362 175.0470
## 5  127.6326  75.26095 180.0043
## 6  132.0550  79.12441 184.9856
## 7  136.4773  82.96475 189.9899
## 8  140.8997  86.78270 195.0166
## 9  145.3220  90.57902 200.0650
```

```
## 10 149.7443  94.35444 205.1342
## 11 154.1667  98.10968 210.2237
## 12 158.5890 101.84545 215.3326
## 13 163.0114 105.56245 220.4603
## 14 167.4337 109.26136 225.6060
## 15 171.8560 112.94285 230.7692
## 16 176.2784 116.60757 235.9492
## 17 180.7007 120.25614 241.1453
## 18 185.1230 123.88919 246.3569
## 19 189.5454 127.50730 251.5835
## 20 193.9677 131.11105 256.8244
## 21 198.3901 134.70099 262.0791
```



7.




```
##    speed
## 3.107177
```

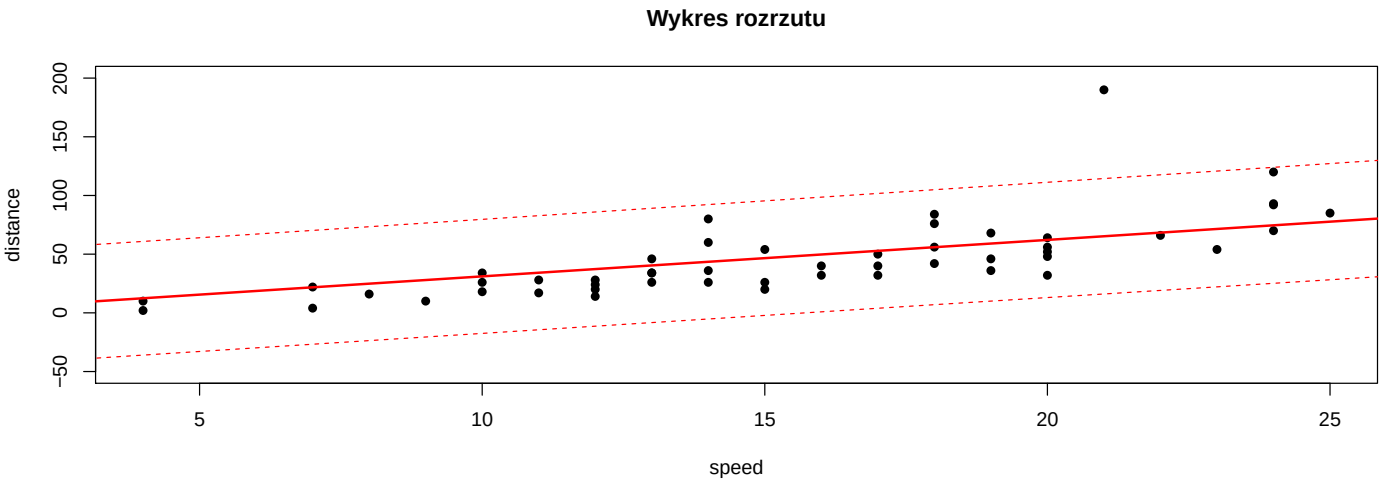
```
##          2.5 %   97.5 %
## speed 2.693185 3.521169
```

```
##
## Call:
## lm(formula = distance ~ speed - 1, data = braking)
##
## Residuals:
```

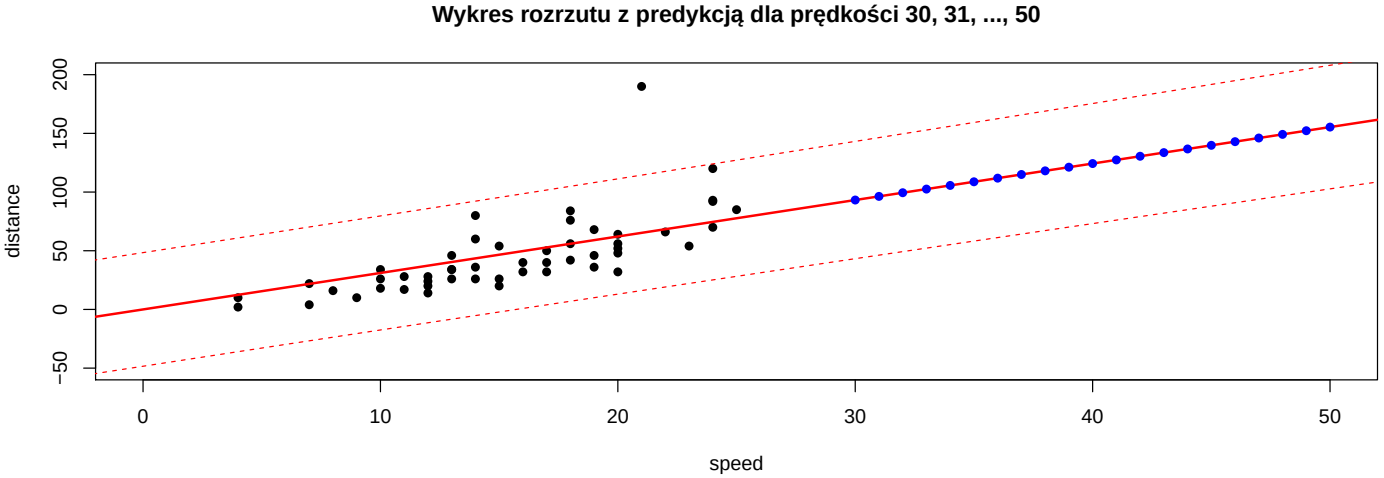
```
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -30.144 -15.786  -7.500   2.392 124.749
##
## Coefficients:
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## speed   3.1072     0.2061   15.07   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 24.1 on 50 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8197, Adjusted R-squared:  0.8161
## F-statistic: 227.3 on 1 and 50 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7        8
## 12.42871 12.42871 21.75024 21.75024 24.85741 27.96459 31.07177 31.07177
##        9       10       11       12       13       14       15       16
## 31.07177 34.17895 34.17895 37.28612 37.28612 37.28612 37.28612 40.39330
##       17       18       19       20       21       22       23       24
## 40.39330 40.39330 40.39330 43.50048 43.50048 43.50048 43.50048 46.60765
##       25       26       27       28       29       30       31       32
## 46.60765 46.60765 65.25071 49.71483 49.71483 52.82201 52.82201 52.82201
##       33       34       35       36       37       38       39       40
## 55.92918 55.92918 55.92918 55.92918 59.03636 59.03636 59.03636 62.14354
##       41       42       43       44       45       46       47       48
## 62.14354 62.14354 62.14354 62.14354 68.35789 71.46507 74.57224 74.57224
##       49       50       51
## 74.57224 74.57224 77.67942
```

```
##           1           2           3           4           5
## -10.42870729  -2.42870729 -17.75023776   0.24976224  -8.85741459
##           6           7           8           9          10
## -17.96459141 -13.07176823  -5.07176823   2.92823177 -17.17894506
##          11          12          13          14          15
##  -6.17894506 -23.28612188 -17.28612188 -13.28612188  -9.28612188
##          16          17          18          19          20
## -14.39329871  -6.39329871  -6.39329871   5.60670129 -17.50047553
##          21          22          23          24          25
##  -7.50047553  16.49952447  36.49952447 -26.60765235 -20.60765235
##          26          27          28          29          30
##   7.39234765 124.74928671 -17.71482918  -9.71482918 -20.82200600
##          31          32          33          34          35
## -12.82200600  -2.82200600 -13.92918282   0.07081718  20.07081718
##          36          37          38          39          40
##  28.07081718 -23.03635965 -13.03635965   8.96364035 -30.14353647
##          41          42          43          44          45
## -14.14353647 -10.14353647  -6.14353647   1.85646353  -2.35789012
##          46          47          48          49          50
## -17.46506694  -4.57224376  17.42775624  18.42775624  45.42775624
##          51
##   7.32057941
```

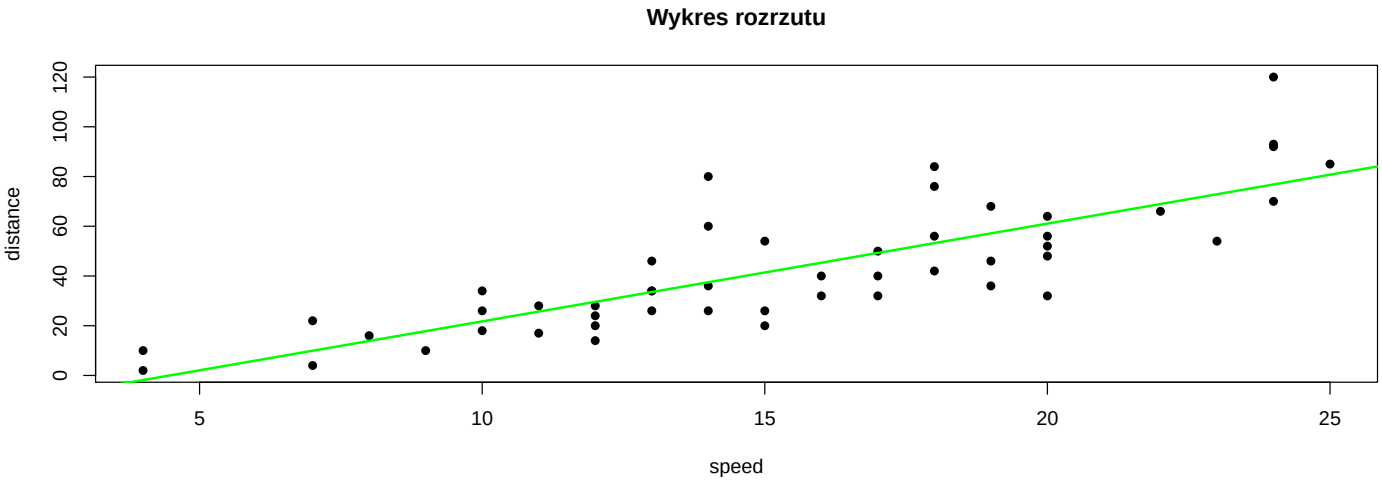



```
##          fit       lwr      upr
## 1   93.21530  43.24558 143.1850
## 2   96.32248  46.24826 146.3967
## 3   99.42966  49.24774 149.6116
## 4  102.53684  52.24404 152.8296
## 5  105.64401  55.23718 156.0508
## 6  108.75119  58.22719 159.2752
## 7  111.85837  61.21408 162.5026
## 8  114.96554  64.19789 165.7332
## 9  118.07272  67.17862 168.9668
## 10 121.17990  70.15631 172.2035
## 11 124.28707  73.13098 175.4432
## 12 127.39425  76.10265 178.6858
## 13 130.50143  79.07134 181.9315
## 14 133.60860  82.03708 185.1801
## 15 136.71578  84.99990 188.4317
## 16 139.82296  87.95981 191.6861
## 17 142.93013  90.91684 194.9434
## 18 146.03731  93.87102 198.2036
## 19 149.14449  96.82237 201.4666
## 20 152.25166  99.77092 204.7324
## 21 155.35884 102.71669 208.0010
```



Model dla zbioru danych bez obserwacji odstającej

2.




```
## (Intercept)       speed
##  -17.579095    3.932409
```

```
##                   2.5 %    97.5 %
## (Intercept) -31.167850 -3.990340
## speed         3.096964  4.767853
```

3.

```
##
## Call:
## lm(formula = distance ~ speed, data = braking_1)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -29.069  -9.525  -2.272   9.215  43.201
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -17.5791     6.7584  -2.601   0.0123 *
## speed         3.9324     0.4155   9.464 1.49e-12 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 15.38 on 48 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6511, Adjusted R-squared:  0.6438
## F-statistic: 89.57 on 1 and 48 DF,  p-value: 1.49e-12
```

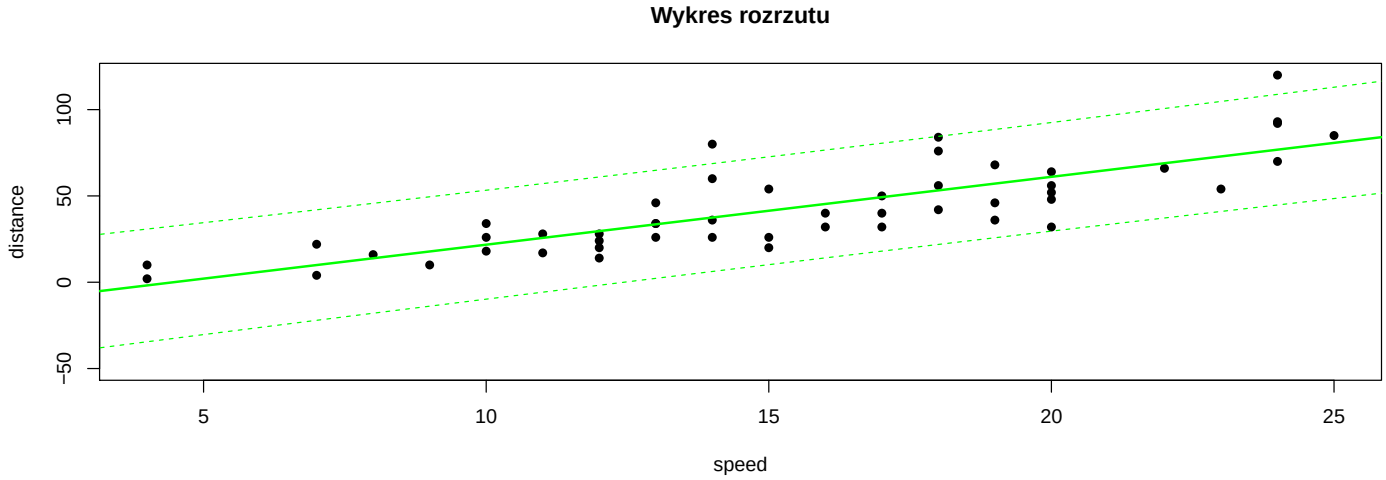
4.

```
##         1         2         3         4         5         6         7
## -1.849460 -1.849460  9.947766  9.947766 13.880175 17.812584 21.744993
##         8         9        10        11        12        13        14
## 21.744993 21.744993 25.677401 25.677401 29.609810 29.609810 29.609810
##        15        16        17        18        19        20        21
## 29.609810 33.542219 33.542219 33.542219 33.542219 37.474628 37.474628
##        22        23        24        25        26        28        29
## 37.474628 37.474628 41.407036 41.407036 41.407036 45.339445 45.339445
##        30        31        32        33        34        35        36
```

```
## 49.271854 49.271854 49.271854 53.204263 53.204263 53.204263 53.204263
##         37         38         39         40         41         42         43
## 57.136672 57.136672 57.136672 61.069080 61.069080 61.069080 61.069080
##         44         45         46         47         48         49         50
## 61.069080 68.933898 72.866307 76.798715 76.798715 76.798715 76.798715
##         51
## 80.731124
```

```
##           1           2           3           4           5           6
##    3.849460   11.849460   -5.947766   12.052234    2.119825   -7.812584
##           7           8           9          10          11          12
##   -3.744993    4.255007   12.255007   -8.677401    2.322599  -15.609810
##          13          14          15          16          17          18
##   -9.609810   -5.609810   -1.609810   -7.542219    0.457781    0.457781
##          19          20          21          22          23          24
##   12.457781  -11.474628   -1.474628   22.525372   42.525372  -21.407036
##          25          26          28          29          30          31
## -15.407036   12.592964  -13.339445   -5.339445  -17.271854   -9.271854
##          32          33          34          35          36          37
##    0.728146  -11.204263    2.795737   22.795737   30.795737  -21.136672
##          38          39          40          41          42          43
## -11.136672   10.863328  -29.069080  -13.069080   -9.069080   -5.069080
##          44          45          46          47          48          49
##    2.930920   -2.933898  -18.866307   -6.798715   15.201285   16.201285
##          50          51
##   43.201285    4.268876
```

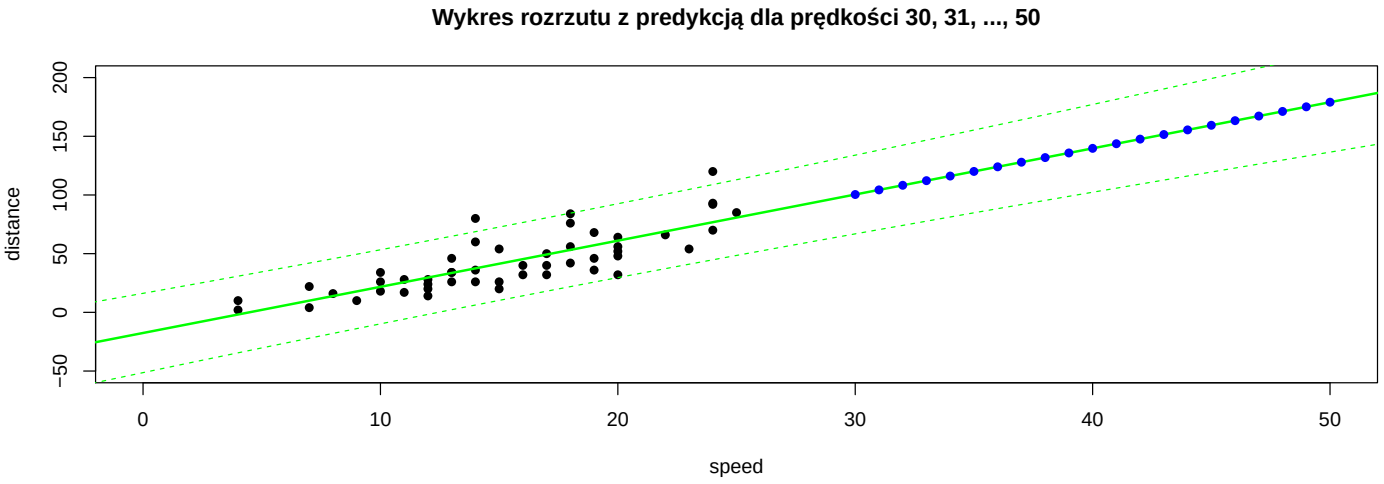
5.



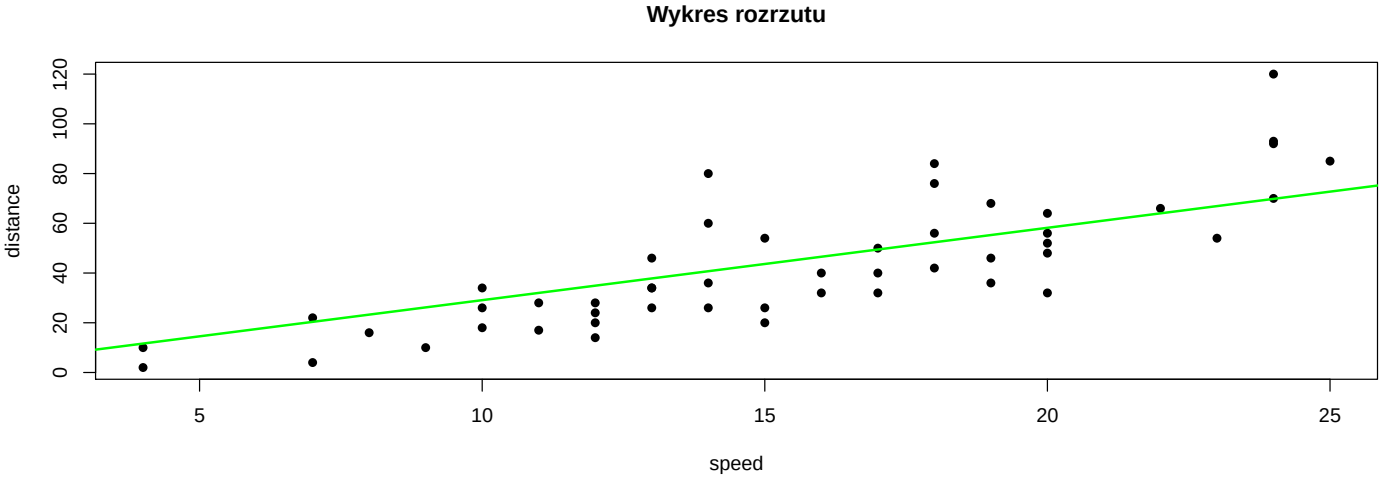
6.

```
##        fit       lwr      upr
## 1  100.3932  66.86529 133.9210
## 2  104.3256  70.48482 138.1663
## 3  108.2580  74.08678 142.4292
## 4  112.1904  77.67167 146.7091
## 5  116.1228  81.24002 151.0056
## 6  120.0552  84.79233 155.3181
## 7  123.9876  88.32911 159.6461
## 8  127.9200  91.85088 163.9892
```

```
## 9  131.8524  95.35814 168.3467
## 10 135.7848  98.85140 172.7183
## 11 139.7173 102.33114 177.1034
## 12 143.6497 105.79785 181.5015
## 13 147.5821 109.25201 185.9121
## 14 151.5145 112.69408 190.3349
## 15 155.4469 116.12452 194.7693
## 16 159.3793 119.54375 199.2148
## 17 163.3117 122.95222 203.6712
## 18 167.2441 126.35033 208.1379
## 19 171.1765 129.73848 212.6146
## 20 175.1089 133.11707 217.1008
## 21 179.0413 136.48646 221.5962
```



7.




```
##    speed
## 2.909132
```

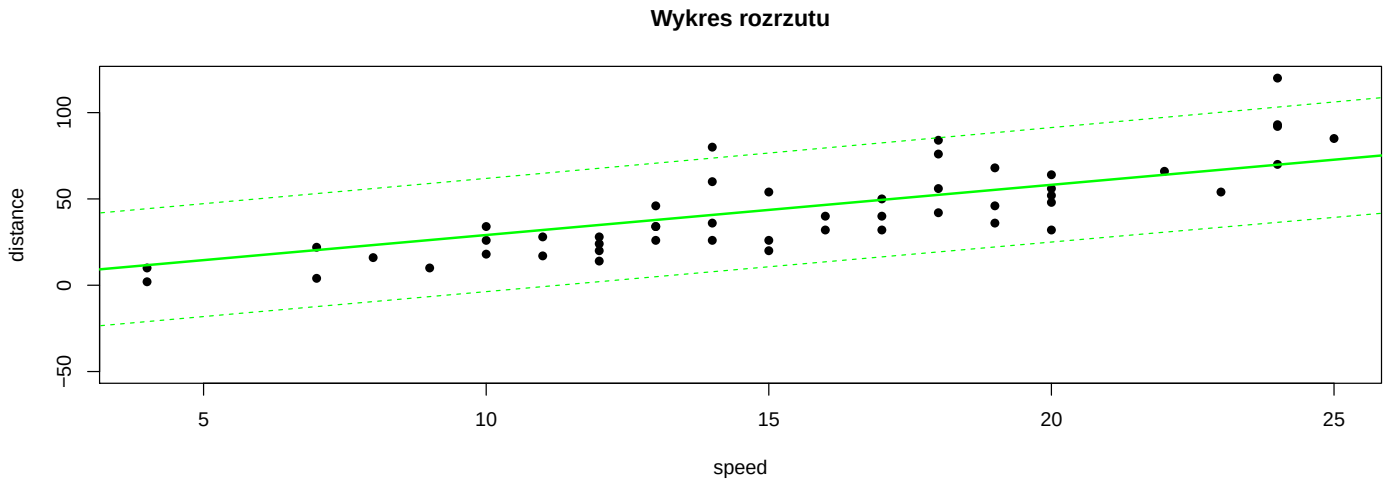
```
##          2.5 %   97.5 %
## speed 2.625041 3.193223
```

```
##
## Call:
## lm(formula = distance ~ speed - 1, data = braking_1)
##
```

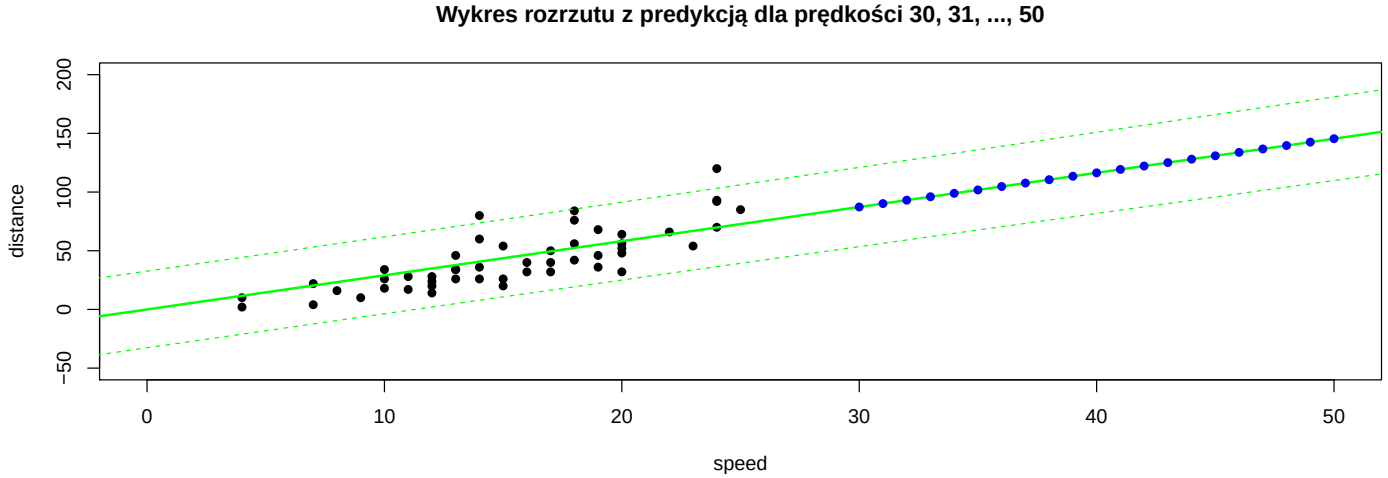
```
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -26.183 -12.637  -5.455   4.590  50.181
##
## Coefficients:
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## speed   2.9091     0.1414   20.58   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 16.26 on 49 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8963, Adjusted R-squared:  0.8942
## F-statistic: 423.5 on 1 and 49 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7        8
## 11.63653 11.63653 20.36393 20.36393 23.27306 26.18219 29.09132 29.09132
##        9       10       11       12       13       14       15       16
## 29.09132 32.00045 32.00045 34.90959 34.90959 34.90959 34.90959 37.81872
##       17       18       19       20       21       22       23       24
## 37.81872 37.81872 37.81872 40.72785 40.72785 40.72785 40.72785 43.63698
##       25       26       28       29       30       31       32       33
## 43.63698 43.63698 46.54611 46.54611 49.45525 49.45525 49.45525 52.36438
##       34       35       36       37       38       39       40       41
## 52.36438 52.36438 52.36438 55.27351 55.27351 55.27351 58.18264 58.18264
##       42       43       44       45       46       47       48       49
## 58.18264 58.18264 58.18264 64.00091 66.91004 69.81917 69.81917 69.81917
##       50       51
## 69.81917 72.72830
```

```
##           1           2           3           4           5           6
##  -9.6365286  -1.6365286 -16.3639250   1.6360750  -7.2730572 -16.1821893
##           7           8           9          10          11          12
## -11.0913214  -3.0913214   4.9086786 -15.0004536  -4.0004536 -20.9095857
##          13          14          15          16          17          18
## -14.9095857 -10.9095857  -6.9095857 -11.8187179  -3.8187179  -3.8187179
##          19          20          21          22          23          24
##   8.1812821 -14.7278500  -4.7278500  19.2721500  39.2721500 -23.6369822
##          25          26          28          29          30          31
## -17.6369822  10.3630178 -14.5461143  -6.5461143 -17.4552464  -9.4552464
##          32          33          34          35          36          37
##   0.5447536 -10.3643786   3.6356214  23.6356214  31.6356214 -19.2735107
##          38          39          40          41          42          43
##  -9.2735107  12.7264893 -26.1826429 -10.1826429  -6.1826429  -2.1826429
##          44          45          46          47          48          49
##   5.8173571   1.9990928 -12.9100393   0.1808285  22.1808285  23.1808285
##          50          51
##  50.1808285  12.2716964
```




```
##          fit       lwr      upr
## 1   87.27396  53.50656 121.0414
## 2   90.18310  56.34287 124.0233
## 3   93.09223  59.17696 127.0075
## 4   96.00136  62.00884 129.9939
## 5   98.91049  64.83853 132.9825
## 6  101.81963  67.66604 135.9732
## 7  104.72876  70.49138 138.9661
## 8  107.63789  73.31458 141.9612
## 9  110.54702  76.13565 144.9584
## 10 113.45615  78.95460 147.9577
## 11 116.36529  81.77146 150.9591
## 12 119.27442  84.58623 153.9626
## 13 122.18355  87.39894 156.9682
## 14 125.09268  90.20960 159.9758
## 15 128.00181  93.01824 162.9854
## 16 130.91095  95.82486 165.9970
## 17 133.82008  98.62948 169.0107
## 18 136.72921 101.43213 172.0263
## 19 139.63834 104.23282 175.0439
## 20 142.54748 107.03157 178.0634
## 21 145.45661 109.82839 181.0848
```



10 Regresja wielokrotna i krokowa

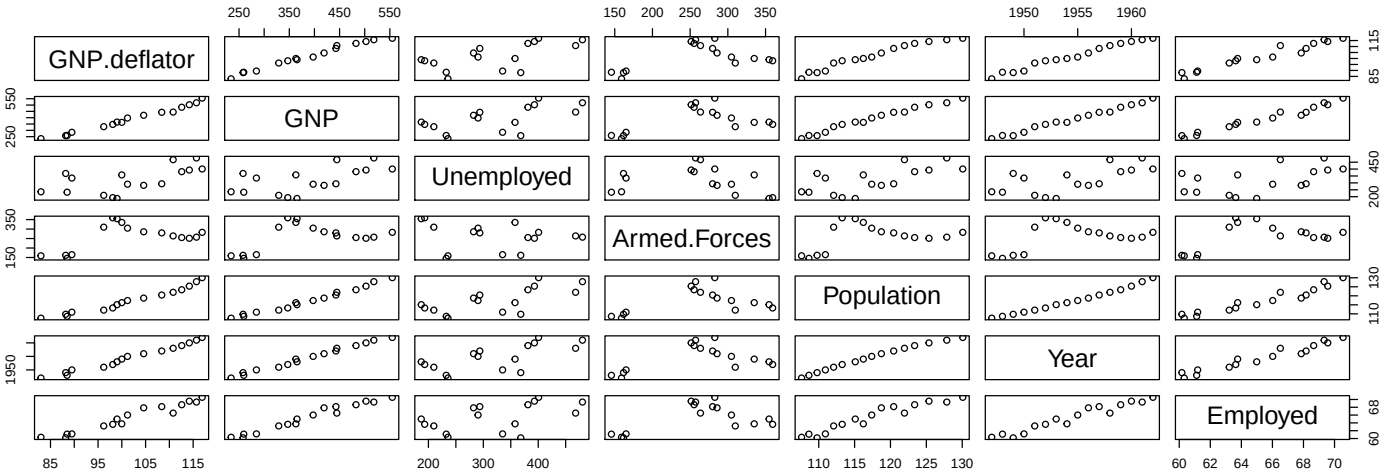
10.1 Przykład

Przykład. Zbiór danych `longley` zawiera 7 zmiennych makroekonomicznych. Chcemy modelować liczbę zatrudnionych za pomocą innych (niekoniecznie wszystkich) zmiennych przy użyciu modelu regresji wielokrotnej.

```
head(longley)
```

```
##      GNP.deflator     GNP Unemployed Armed.Forces Population Year Employed
## 1947         83.0 234.289      235.6        159.0    107.608 1947   60.323
## 1948         88.5 259.426      232.5        145.6    108.632 1948   61.122
## 1949         88.2 258.054      368.2        161.6    109.773 1949   60.171
## 1950         89.5 284.599      335.1        165.0    110.929 1950   61.187
## 1951         96.2 328.975      209.9        309.9    112.075 1951   63.221
## 1952         98.1 346.999      193.2        359.4    113.270 1952   63.639
```

```
pairs(longley)
```




```
# model pełny
model_1 <- lm(Employed ~ ., data = longley)
# model_1 <- lm(Employed ~ GNP.deflator + GNP + Unemployed +
#                          Armed.Forces + Population + Year + Employed,
#               data = longley)
model_1
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ ., data = longley)
##
## Coefficients:
##  (Intercept)  GNP.deflator           GNP    Unemployed  Armed.Forces
##   -3.482e+03     1.506e-02    -3.582e-02    -2.020e-02    -1.033e-02
##   Population          Year
##   -5.110e-02     1.829e+00
```

```
# estymacja parametrów
coef(model_1)
```

```
##   (Intercept)  GNP.deflator           GNP    Unemployed  Armed.Forces
## -3.482259e+03  1.506187e-02 -3.581918e-02 -2.020230e-02 -1.033227e-02
##    Population          Year
## -5.110411e-02  1.829151e+00
```

```
confint(model_1)
```

```
##                       2.5 %        97.5 %
## (Intercept)  -5.496529e+03 -1.467988e+03
## GNP.deflator -1.770290e-01  2.071528e-01
## GNP          -1.115811e-01  3.994274e-02
## Unemployed   -3.125067e-02 -9.153930e-03
## Armed.Forces -1.517949e-02 -5.485050e-03
## Population   -5.625172e-01  4.603090e-01
## Year          7.987875e-01  2.859515e+00
```

```
# podsumowanie modelu
# tj. reszty, estymacja punktowa, testy istotności dla współczynników regresji,
# R_adj^2, test istnotności modelu (test analizy wariancji w regresji)
summary(model_1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ ., data = longley)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.41011 -0.15767 -0.02816  0.10155  0.45539
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -3.482e+03  8.904e+02  -3.911 0.003560 **
## GNP.deflator  1.506e-02  8.492e-02   0.177 0.863141
## GNP          -3.582e-02  3.349e-02  -1.070 0.312681
## Unemployed   -2.020e-02  4.884e-03  -4.136 0.002535 **
## Armed.Forces -1.033e-02  2.143e-03  -4.822 0.000944 ***
## Population   -5.110e-02  2.261e-01  -0.226 0.826212
## Year          1.829e+00  4.555e-01   4.016 0.003037 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3049 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9955, Adjusted R-squared:  0.9925
## F-statistic: 330.3 on 6 and 9 DF,  p-value: 4.984e-10
```

```
# wartości dopasowane przez model
fitted(model_1)
```

```
##     1947     1948     1949     1950     1951     1952     1953     1954
## 60.05566 61.21601 60.12471 61.59711 62.91129 63.88831 65.15305 63.77418
##     1955     1956     1957     1958     1959     1960     1961     1962
## 66.00470 67.40161 68.18627 66.55206 68.81055 69.64967 68.98907 70.75776
```

```r
# reszty
residuals(model_1)
```

```
##        1947        1948        1949        1950        1951        1952
##  0.26734003 -0.09401394  0.04628717 -0.41011462  0.30971459 -0.24931122
##        1953        1954        1955        1956        1957        1958
## -0.16404896 -0.01318036  0.01430477  0.45539409 -0.01726893 -0.03905504
##        1959        1960        1961        1962
## -0.15554997 -0.08567131  0.34193151 -0.20675783
```

```r
# predykcja
new_data <- data.frame(GNP.deflator = 115.4,
                       GNP = 518.163,
                       Unemployed = 480.3,
                       Armed.Forces = 257.4,
                       Population = 127.857,
                       Year = 1963)
predict(model_1, new_data, interval = "prediction")
```

```
##        fit      lwr      upr
## 1 72.64695 70.55039 74.74351
```

```r
# redukcja modelu pełnego
summary(model_1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ ., data = longley)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.41011 -0.15767 -0.02816  0.10155  0.45539
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -3.482e+03  8.904e+02  -3.911 0.003560 **
## GNP.deflator  1.506e-02  8.492e-02   0.177 0.863141
## GNP          -3.582e-02  3.349e-02  -1.070 0.312681
## Unemployed   -2.020e-02  4.884e-03  -4.136 0.002535 **
## Armed.Forces -1.033e-02  2.143e-03  -4.822 0.000944 ***
## Population   -5.110e-02  2.261e-01  -0.226 0.826212
## Year          1.829e+00  4.555e-01   4.016 0.003037 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3049 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9955, Adjusted R-squared:  0.9925
## F-statistic: 330.3 on 6 and 9 DF,  p-value: 4.984e-10
```

```r
model_2 <- lm(Employed ~ Unemployed + Armed.Forces + Year, data = longley)
# model_2 <- update(model_1, . ~ . - GNP.deflator - GNP - Population)
summary(model_2)
```

```
##
```

```
## Call:
## lm(formula = Employed ~ Unemployed + Armed.Forces + Year, data = longley)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.57285 -0.11989  0.04087  0.13979  0.75303
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -1.797e+03  6.864e+01 -26.183 5.89e-12 ***
## Unemployed   -1.470e-02  1.671e-03  -8.793 1.41e-06 ***
## Armed.Forces -7.723e-03  1.837e-03  -4.204  0.00122 **
## Year          9.564e-01  3.553e-02  26.921 4.24e-12 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.3321 on 12 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9928, Adjusted R-squared:  0.9911
## F-statistic: 555.2 on 3 and 12 DF,  p-value: 3.916e-13
```

Regresja krokowa

- Istnieje również inna metoda konstrukcji modeli z dużą liczbą zmiennych objaśniających niż konstruowanie pełnego modelu i szacowanie jego parametrów (tak jak robimy to w regresji wielokrotnej).
- Jest to procedura regresji krokowej, w której możemy odrzucić lub dodać zmienną na każdym kroku.
- Powiedzmy, że zaczynamy od modelu zawierającego tylko stałą - „regresja w przód" (możemy też zacząć od pełnego modelu - „regresja w tył"). W następnym kroku dodajemy najlepszą zmienną w sensie kryterium (np. test istotności, AIC, BIC). W następnym dodamy ponownie, ale możemy również sprawdzić co się dzieje, jakbyśmy usunęli z modelu zmienną dodaną w poprzednim kroku, itd.

Przykład (cd.).

```r
model_1 <- lm(Employed ~ ., data = longley)
model_2 <- lm(Employed ~ Unemployed + Armed.Forces + Year, data = longley)
# AIC
AIC(model_1, model_2)
```

```
##         df      AIC
## model_1  8 14.18670
## model_2  5 15.52741
```

```r
# BIC
AIC(model_1, model_2, k = log(nrow(longley)))
```

```
##         df      AIC
## model_1  8 20.36741
## model_2  5 19.39035
```

```r
# regresja krokowa
step(model_1)
```

```
## Start:  AIC=-33.22
## Employed ~ GNP.deflator + GNP + Unemployed + Armed.Forces + Population +
##     Year
##
```

```
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## - GNP.deflator  1   0.00292 0.83935 -35.163
## - Population    1   0.00475 0.84117 -35.129
## - GNP           1   0.10631 0.94273 -33.305
## <none>                      0.83642 -33.219
## - Year          1   1.49881 2.33524 -18.792
## - Unemployed    1   1.59014 2.42656 -18.178
## - Armed.Forces  1   2.16091 2.99733 -14.798
##
## Step:  AIC=-35.16
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Population + Year
##
##                Df Sum of Sq    RSS     AIC
## - Population    1   0.01933 0.8587 -36.799
## <none>                      0.8393 -35.163
## - GNP           1   0.14637 0.9857 -34.592
## - Year          1   1.52725 2.3666 -20.578
## - Unemployed    1   2.18989 3.0292 -16.628
## - Armed.Forces  1   2.39752 3.2369 -15.568
##
## Step:  AIC=-36.8
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year
##
##                Df Sum of Sq    RSS     AIC
## <none>                      0.8587 -36.799
## - GNP           1    0.4647 1.3234 -31.879
## - Year          1    1.8980 2.7567 -20.137
## - Armed.Forces  1    2.3806 3.2393 -17.556
## - Unemployed    1    4.0491 4.9077 -10.908
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year,
##     data = longley)
##
## Coefficients:
##  (Intercept)           GNP    Unemployed  Armed.Forces          Year
##   -3.599e+03    -4.019e-02    -2.088e-02    -1.015e-02     1.887e+00
```

```r
# step(model_1, direction = "backward")
step(model_1, k = log(nrow(longley)))
```

```
## Start:  AIC=-27.81
## Employed ~ GNP.deflator + GNP + Unemployed + Armed.Forces + Population +
##     Year
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## - GNP.deflator  1   0.00292 0.83935 -30.528
## - Population    1   0.00475 0.84117 -30.493
## - GNP           1   0.10631 0.94273 -28.669
## <none>                      0.83642 -27.811
## - Year          1   1.49881 2.33524 -14.156
## - Unemployed    1   1.59014 2.42656 -13.542
```

```
## - Armed.Forces  1   2.16091 2.99733 -10.162
##
## Step:  AIC=-30.53
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Population + Year
##
##                Df Sum of Sq    RSS     AIC
## - Population    1   0.01933 0.8587 -32.936
## - GNP           1   0.14637 0.9857 -30.729
## <none>                      0.8393 -30.528
## - Year          1   1.52725 2.3666 -16.715
## - Unemployed    1   2.18989 3.0292 -12.765
## - Armed.Forces  1   2.39752 3.2369 -11.705
##
## Step:  AIC=-32.94
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year
##
##                Df Sum of Sq    RSS     AIC
## <none>                      0.8587 -32.936
## - GNP           1    0.4647 1.3234 -28.788
## - Year          1    1.8980 2.7567 -17.046
## - Armed.Forces  1    2.3806 3.2393 -14.466
## - Unemployed    1    4.0491 4.9077  -7.818
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year,
##     data = longley)
##
## Coefficients:
##  (Intercept)           GNP    Unemployed  Armed.Forces          Year
##   -3.599e+03    -4.019e-02    -2.088e-02    -1.015e-02     1.887e+00
```

```
model_0 <- lm(Employed ~ 1, data = longley)
step(model_0, direction = "forward", scope = formula(model_1))
```

```
## Start:  AIC=41.17
## Employed ~ 1
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## + GNP           1   178.973   6.036 -11.597
## + Year          1   174.552  10.457  -2.806
## + GNP.deflator  1   174.397  10.611  -2.571
## + Population    1   170.643  14.366   2.276
## + Unemployed    1    46.716 138.293  38.509
## + Armed.Forces  1    38.691 146.318  39.411
## <none>                      185.009  41.165
##
## Step:  AIC=-11.6
## Employed ~ GNP
##
##                Df Sum of Sq    RSS      AIC
## + Unemployed    1   2.45708 3.5791 -17.9598
## + Population    1   2.16178 3.8744 -16.6913
```

```
## + Year          1   1.12520 4.9109 -12.8980
## <none>                      6.0361 -11.5972
## + GNP.deflator  1   0.21194 5.8242 -10.1691
## + Armed.Forces  1   0.07665 5.9595  -9.8017
##
## Step:  AIC=-17.96
## Employed ~ GNP + Unemployed
##
##                Df Sum of Sq    RSS     AIC
## + Armed.Forces  1   0.82235 2.7567 -20.137
## <none>                      3.5791 -17.960
## + Year          1   0.33980 3.2393 -17.556
## + Population    1   0.09682 3.4822 -16.399
## + GNP.deflator  1   0.01884 3.5602 -16.044
##
## Step:  AIC=-20.14
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## + Year          1   1.89803 0.85868 -36.799
## + Population    1   0.39011 2.36660 -20.578
## <none>                      2.75671 -20.137
## + GNP.deflator  1   0.07288 2.68383 -18.566
##
## Step:  AIC=-36.8
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## <none>                      0.85868 -36.799
## + Population    1  0.019332 0.83935 -35.163
## + GNP.deflator  1  0.017507 0.84117 -35.129
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year,
##     data = longley)
##
## Coefficients:
##  (Intercept)           GNP    Unemployed  Armed.Forces          Year
##   -3.599e+03    -4.019e-02    -2.088e-02    -1.015e-02     1.887e+00
```

```
step(model_0, direction = "forward", scope = formula(model_1), k = log(nrow(longley)))
```

```
## Start:  AIC=41.94
## Employed ~ 1
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## + GNP           1   178.973   6.036 -10.052
## + Year          1   174.552  10.457  -1.261
## + GNP.deflator  1   174.397  10.611  -1.025
## + Population    1   170.643  14.366   3.822
## + Unemployed    1    46.716 138.293  40.054
## + Armed.Forces  1    38.691 146.318  40.956
```

```
## <none>                      185.009  41.938
##
## Step:  AIC=-10.05
## Employed ~ GNP
##
##                Df Sum of Sq    RSS      AIC
## + Unemployed    1   2.45708 3.5791 -15.6420
## + Population    1   2.16178 3.8744 -14.3736
## + Year          1   1.12520 4.9109 -10.5802
## <none>                      6.0361 -10.0520
## + GNP.deflator  1   0.21194 5.8242  -7.8513
## + Armed.Forces  1   0.07665 5.9595  -7.4839
##
## Step:  AIC=-15.64
## Employed ~ GNP + Unemployed
##
##                Df Sum of Sq    RSS     AIC
## + Armed.Forces  1   0.82235 2.7567 -17.046
## <none>                      3.5791 -15.642
## + Year          1   0.33980 3.2393 -14.466
## + Population    1   0.09682 3.4822 -13.308
## + GNP.deflator  1   0.01884 3.5602 -12.954
##
## Step:  AIC=-17.05
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## + Year          1   1.89803 0.85868 -32.936
## <none>                      2.75671 -17.046
## + Population    1   0.39011 2.36660 -16.715
## + GNP.deflator  1   0.07288 2.68383 -14.703
##
## Step:  AIC=-32.94
## Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year
##
##                Df Sum of Sq     RSS     AIC
## <none>                      0.85868 -32.936
## + Population    1  0.019332 0.83935 -30.528
## + GNP.deflator  1  0.017507 0.84117 -30.493
##
## Call:
## lm(formula = Employed ~ GNP + Unemployed + Armed.Forces + Year,
##     data = longley)
##
## Coefficients:
##  (Intercept)           GNP    Unemployed  Armed.Forces          Year
##   -3.599e+03    -4.019e-02    -2.088e-02    -1.015e-02     1.887e+00
```

10.2 Zadania

Zadanie 1. Zbiór danych w pliku Automobile.csv zawiera dane charakteryzujące różne typy samochodów.

```
##   symboling normalized.losses        make fuel.type aspiration
## 1         3                NA alfa-romero       gas        std
## 2         3                NA alfa-romero       gas        std
## 3         1                NA alfa-romero       gas        std
## 4         2               164        audi       gas        std
## 5         2               164        audi       gas        std
## 6         2                NA        audi       gas        std
##   num.of.doors  body.style drive.wheels engine.location wheel.base length
## 1          two convertible          rwd           front       88.6  168.8
## 2          two convertible          rwd           front       88.6  168.8
## 3          two   hatchback          rwd           front       94.5  171.2
## 4         four       sedan          fwd           front       99.8  176.6
## 5         four       sedan          4wd           front       99.4  176.6
## 6          two       sedan          fwd           front       99.8  177.3
##   width height curb.weight engine.type num.of.cylinders engine.size
## 1  64.1   48.8        2548        dohc             four         130
## 2  64.1   48.8        2548        dohc             four         130
## 3  65.5   52.4        2823        ohcv              six         152
## 4  66.2   54.3        2337         ohc             four         109
## 5  66.4   54.3        2824         ohc             five         136
## 6  66.3   53.1        2507         ohc             five         136
##   fuel.system bore stroke compression.ratio horsepower peak.rpm city.mpg
## 1        mpfi 3.47   2.68               9.0        111     5000       21
## 2        mpfi 3.47   2.68               9.0        111     5000       21
## 3        mpfi 2.68   3.47               9.0        154     5000       19
## 4        mpfi 3.19   3.40              10.0        102     5500       24
## 5        mpfi 3.19   3.40               8.0        115     5500       18
## 6        mpfi 3.19   3.40               8.5        110     5500       19
##   highway.mpg price
## 1          27 13495
## 2          27 16500
## 3          26 16500
## 4          30 13950
## 5          22 17450
## 6          25 15250
```

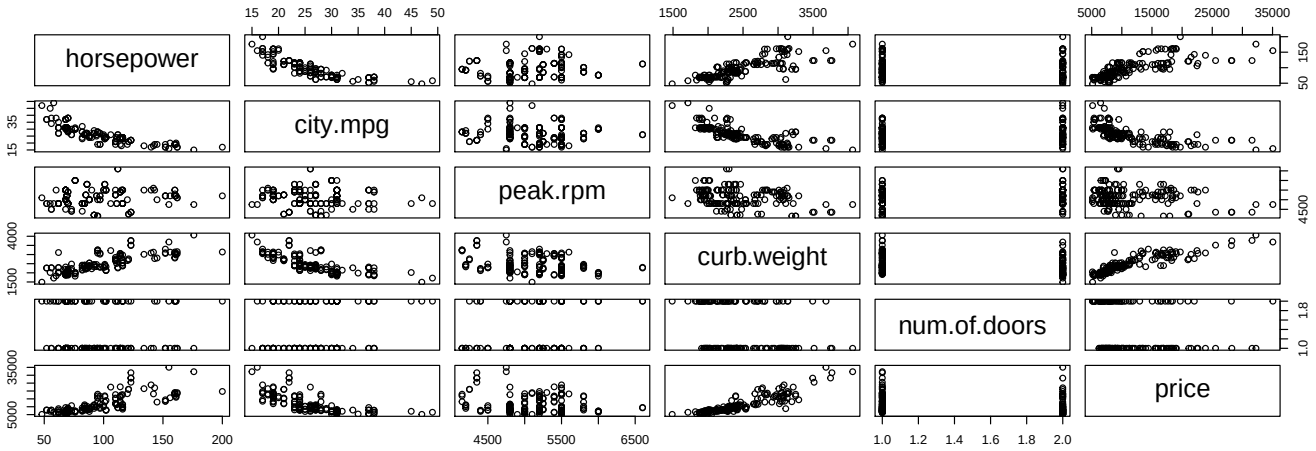
1. W tym zestawie danych występuja braki danych. Usuń wszystkie obserwacje, dla których nie mamy pełnych informacji o wszystkich zmiennych zawartych w zbiorze danych, używając funkcji `na.omit()`.

```
## wymiar nowych danych
```

```
## [1] 159  26
```

2. Interesuje nas zbudowanie modelu opisującego cenę samochodów w zależności od pewnych ich cech. Weźmy pod uwagę następujące zmienne: `horsepower`, `city.mpg`, `peak.rpm`, `curb.weight` i `num.of.doors` jako zmienne niezależne.

   - Dopasuj model regresji liniowej do tych danych.




```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight +
##     num.of.doors, data = auto_wna)
##
## Coefficients:
##     (Intercept)       horsepower         city.mpg         peak.rpm
##      -2.185e+04        2.743e+01        7.733e+01        4.847e-01
##     curb.weight  num.of.doorstwo
##       1.053e+01        5.516e+02
```

- Jakie są wartości estymatorów współczynników regresji i przedziały ufności? Które zmienne są stymulantami a które destymulantami?

```
##     (Intercept)      horsepower        city.mpg        peak.rpm
##   -2.185283e+04    2.742792e+01    7.732533e+01    4.847128e-01
##     curb.weight num.of.doorstwo
##    1.053105e+01    5.515964e+02
```

```
##                          2.5 %        97.5 %
## (Intercept)     -3.161301e+04 -12092.655361
## horsepower      -2.484962e+00     57.340811
## city.mpg        -5.460472e+01    209.255385
## peak.rpm        -5.605008e-01      1.529926
## curb.weight      8.731667e+00     12.330436
## num.of.doorstwo -3.595924e+02   1462.785120
```

- Które współczynniki są statystycznie istotne w skontruowanym modelu? Jakie jest dopasowanie modelu?

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight +
##     num.of.doors, data = auto_wna)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -8235.7 -1413.0   -89.7   937.4  9759.4
##
## Coefficients:
##                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
```

```
## (Intercept)     -2.185e+04  4.940e+03  -4.423 1.84e-05 ***
## horsepower       2.743e+01  1.514e+01   1.811    0.072 .
## city.mpg         7.733e+01  6.678e+01   1.158    0.249
## peak.rpm         4.847e-01  5.291e-01   0.916    0.361
## curb.weight      1.053e+01  9.108e-01  11.562  < 2e-16 ***
## num.of.doorstwo  5.516e+02  4.612e+02   1.196    0.234
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2597 on 153 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8109, Adjusted R-squared:  0.8048
## F-statistic: 131.2 on 5 and 153 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

- Oblicz wartości dopasowane przez model oraz wartości reszt.

```
##         4         5         7         9        11        12        13
## 10077.611 15098.844 15249.651 18466.353 11280.669 10729.073 14240.554
##        14        19        20        21        22        23        24
## 14268.165  1791.835  5909.721  5726.711  5847.073  5383.121  8428.218
##        25        26        27        29        30        31        32
##  5789.850  6021.533  6021.533 11536.412 16171.344  4444.837  5244.631
##        33        34        35        36        37        38        39
##  5294.264  6441.563  6610.060  6627.140  6774.575  9504.115 10062.260
##        40        41        42        43        48        51        52
##  9668.630 10384.741 11543.572 10188.311 29256.003  5210.874  5393.510
##        53        54        55        60        61        62        63
##  5446.165  5315.811  5368.466 10456.347 10168.027 10456.347 10168.027
##        65        66        68        69        70        71        73
## 10325.993 13449.171 22347.106 24821.903 22688.081 25032.524 25296.608
##        77        78        79        80        81        82        86
##  6289.377  6099.232  6731.096  8607.246 11283.398  9985.406  9823.459
##        87        88        89        90        91        92        93
## 10244.701 11079.326 11079.326  5402.039  7254.692  5707.439  5366.464
##        94        95        96        97        98        99       100
##  6272.134  6054.964  6865.855  5713.989  6409.038  6655.234  9890.130
##       101       102       103       104       105       106       107
##  9658.447 18744.853 20861.595 18530.917 19417.779 21076.356 20133.890
##       108       109       112       113       116       117       118
## 16504.197 18597.259 17028.549 19176.467 17083.405 19176.467 19110.371
##       119       120       121       122       123       124       126
##  6289.377  8428.218  5789.850  6021.533  8148.806 11536.412 16011.320
##       133       134       135       136       137       138       139
## 13875.944 13713.997 14391.966 14377.453 16793.526 16652.641  6952.124
##       140       141       142       143       144       145       146
##  7170.026  8433.753  7786.395  7757.106  9899.018  9695.244 11807.036
##       147       148       149       150       151       152       153
##  9004.096 11032.764  9986.506 13204.058  6336.440  6606.347  5791.474
##       154       155       156       157       158       159       160
##  8582.203  8378.212 17013.674  6628.622  6923.491  8451.542  8760.844
##       161       162       163       164       165       166       167
##  7384.128  6905.744  7095.303  8029.625  8398.212 10833.086 11201.673
##       168       169       170       171       172       173       174
```

```
## 12811.703 12769.579 12927.545 14275.519 14644.106 17392.711  9443.991
##       175       176       177       178       179       180       181
## 10767.381 10216.073 10216.073 10679.439 18522.082 18865.999 19465.659
##       183       184       185       186       187       188       189
##  9123.382  8925.756  8603.379  8405.753  9069.209  9476.020  9787.757
##       191       195       196       197       198       199       200
##  9078.471 16336.304 17621.093 16655.844 17782.666 18444.109 19623.587
##       201       202       203       204       205
## 16757.546 18682.970 17599.813 19270.000 17606.661
```

```
##           4           5           7           9          11          12
##  3872.38860  2351.15555  2460.34881  5408.64732  5149.33069  6195.92704
##          13          14          19          20          21          22
##  6729.44647  6836.83500  3359.16525   385.27925   848.28880  -275.07295
##          23          24          25          26          27          29
##   993.87903  -471.21802   439.14971   670.46658  1587.46658 -2615.41226
##          30          31          32          33          34          35
## -3207.34381  2034.16262  1610.36919   104.73611    87.43730   518.94048
##          36          37          38          39          40          41
##   667.86006   520.42534 -1609.11460  -967.26032  -823.62974   -89.74124
##          42          43          48          51          52          53
##  1401.42812   156.68902  2993.99694   -15.87397   701.49018  1348.83492
##          54          55          60          61          62          63
##  1379.18922  2026.53396 -1611.34731 -1673.02725   138.65269    76.97275
##          65          66          68          69          70          71
##   919.00698  4830.82889  3204.89401  3426.09694  5487.91869  6567.47591
##          73          77          78          79          80          81
##  9759.39224  -900.37711    89.76754   -62.09554  -918.24589 -1324.39806
##          82          86          87          88          89          90
## -1486.40630 -2834.45885 -2055.70091 -1800.32640 -1800.32640    96.96127
##          91          92          93          94          95          96
##  -155.69190   941.56078  1482.53610  1076.86568  1244.03608   933.14513
##          97          98          99         100         101         102
##  1785.01141  1589.96202  1593.76616  -941.13028  -109.44715 -5245.85340
##         103         104         105         106         107         108
## -6462.59473 -5031.91727 -2218.77858 -1377.35637 -1734.89007 -4604.19683
##         109         112         113         116         117         118
## -5397.25921 -1448.54881 -2276.46704  -453.40466 -1226.46704  -960.37140
##         119         120         121         122         123         124
##  -717.37711  -471.21802   439.14971   670.46658  -539.80580 -2615.41226
##         126         133         134         135         136         137
##  6006.68036 -2025.94445 -1543.99700   648.03403  1132.54676  1356.47410
##         138         139         140         141         142         143
##  1967.35945 -1834.12417  -117.02643  -830.75259  -660.39477    17.89435
##         144         145         146         147         148         149
##    60.98200  -462.24445  -548.03567 -1541.09590  -834.76357 -1973.50592
##         150         151         152         153         154         155
## -1510.05754  -988.44041  -268.34691   696.52572 -1664.20289  -480.21208
##         156         157         158         159         160         161
## -8235.67421   309.37827   274.50883  -553.54226  -972.84358   353.87195
##         162         163         164         165         166         167
##  1452.25582  2162.69690    28.37473  -160.21207 -1535.08600 -1663.67279
```

```
##         168         169         170         171         172         173
## -4362.70319 -3130.57898 -2938.54475 -3076.51933 -3095.10613   276.28947
##         174         175         176         177         178         179
##  -495.99066   -69.38117  -228.07252   681.92748   568.56122 -1964.08195
##         180         181         183         184         185         186
## -2867.99868 -3775.65894 -1348.38201  -950.75627  -608.37882  -210.75307
##         187         188         189         191         195         196
##  -574.20931    18.98040   207.24268   901.52930 -3396.30442 -4206.09269
##         197         198         199         200         201         202
##  -670.84394 -1267.66643   -24.10880  -673.58655    87.45352   362.02963
##         203         204         205
##  3885.18734  3199.99996  5018.33919
```

3. Spróbuj zredukować model korzystając z regresji krokowej ("backward", "forward", AIC, BIC).

```
## Start:  AIC=2506.06
## price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## - peak.rpm      1   5661937 1037719493 2504.9
## - city.mpg      1   9044038 1041101594 2505.4
## - num.of.doors  1   9647889 1041705445 2505.5
## <none>                      1032057556 2506.1
## - horsepower    1  22134795 1054192350 2507.4
## - curb.weight   1 901782660 1933840216 2603.9
##
## Step:  AIC=2504.93
## price ~ horsepower + city.mpg + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - city.mpg      1    6994707 1044714200 2504.0
## - num.of.doors  1    9518068 1047237561 2504.4
## <none>                       1037719493 2504.9
## - horsepower    1   32461892 1070181386 2507.8
## - curb.weight   1 1136974423 2174693916 2620.6
##
## Step:  AIC=2504
## price ~ horsepower + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - num.of.doors  1   12661847 1057376047 2503.9
## <none>                       1044714200 2504.0
## - horsepower    1   26482698 1071196898 2506.0
## - curb.weight   1 1155965636 2200679836 2620.5
##
## Step:  AIC=2503.91
## price ~ horsepower + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                      1057376047 2503.9
## - horsepower   1   42071205 1099447251 2508.1
## - curb.weight  1 1249455315 2306831362 2625.9
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + curb.weight, data = auto_wna)
##
## Coefficients:
## (Intercept)   horsepower  curb.weight
##  -14608.000       27.404        9.519
```

```
## Start:  AIC=2524.47
## price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## - peak.rpm      1   5661937 1037719493 2520.3
## - city.mpg      1   9044038 1041101594 2520.8
## - num.of.doors  1   9647889 1041705445 2520.9
## - horsepower    1  22134795 1054192350 2522.8
## <none>                      1032057556 2524.5
## - curb.weight   1 901782660 1933840216 2619.2
##
## Step:  AIC=2520.28
## price ~ horsepower + city.mpg + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - city.mpg      1    6994707 1044714200 2516.3
## - num.of.doors  1    9518068 1047237561 2516.7
## - horsepower    1   32461892 1070181386 2520.1
## <none>                       1037719493 2520.3
## - curb.weight   1 1136974423 2174693916 2632.8
##
## Step:  AIC=2516.27
## price ~ horsepower + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - num.of.doors  1   12661847 1057376047 2513.1
## - horsepower    1   26482698 1071196898 2515.2
## <none>                       1044714200 2516.3
## - curb.weight   1 1155965636 2200679836 2629.7
##
## Step:  AIC=2513.12
## price ~ horsepower + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                      1057376047 2513.1
## - horsepower   1   42071205 1099447251 2514.3
## - curb.weight  1 1249455315 2306831362 2632.1
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + curb.weight, data = auto_wna)
##
## Coefficients:
## (Intercept)   horsepower  curb.weight
```

```
##  -14608.000       27.404        9.519
```

```
## Start:  AIC=2760.9
## price ~ 1
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## + curb.weight   1 4359325314 1099447251 2508.1
## + horsepower    1 3151941203 2306831362 2625.9
## + city.mpg      1 2616073039 2842699526 2659.2
## + peak.rpm      1  161334765 5297437800 2758.1
## + num.of.doors  1  143528709 5315243857 2758.7
## <none>                       5458772565 2760.9
##
## Step:  AIC=2508.12
## price ~ curb.weight
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## + horsepower    1  42071205 1057376047 2503.9
## + num.of.doors  1  28250353 1071196898 2506.0
## + peak.rpm      1  21371766 1078075485 2507.0
## <none>                      1099447251 2508.1
## + city.mpg      1   1628352 1097818899 2509.9
##
## Step:  AIC=2503.91
## price ~ curb.weight + horsepower
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                      1057376047 2503.9
## + num.of.doors  1  12661847 1044714200 2504.0
## + city.mpg      1  10138486 1047237561 2504.4
## + peak.rpm      1   3133537 1054242509 2505.4
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ curb.weight + horsepower, data = auto_wna)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  curb.weight   horsepower
##  -14608.000        9.519       27.404
```

```
## Start:  AIC=2763.97
## price ~ 1
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## + curb.weight   1 4359325314 1099447251 2514.3
## + horsepower    1 3151941203 2306831362 2632.1
## + city.mpg      1 2616073039 2842699526 2665.3
## <none>                       5458772565 2764.0
## + peak.rpm      1  161334765 5297437800 2764.3
## + num.of.doors  1  143528709 5315243857 2764.8
##
## Step:  AIC=2514.26
## price ~ curb.weight
```

```
##
##                 Df Sum of Sq        RSS    AIC
## + horsepower     1  42071205 1057376047 2513.1
## <none>                       1099447251 2514.3
## + num.of.doors   1  28250353 1071196898 2515.2
## + peak.rpm       1  21371766 1078075485 2516.2
## + city.mpg       1   1628352 1097818899 2519.1
##
## Step:  AIC=2513.12
## price ~ curb.weight + horsepower
##
##                 Df Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                       1057376047 2513.1
## + num.of.doors   1  12661847 1044714200 2516.3
## + city.mpg       1  10138486 1047237561 2516.7
## + peak.rpm       1   3133537 1054242509 2517.7

##
## Call:
## lm(formula = price ~ curb.weight + horsepower, data = auto_wna)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  curb.weight   horsepower
##  -14608.000        9.519       27.404
```

4. Dokonaj redukcji modelu metodą eliminacji wstecznej, tak aby w kolejnych krokach z pełnego modelu stopniowo usuwać najmniej istotną zmienną niezależną, aż otrzymamy model ze wszystkimi istotnymi zmiennymi niezależnymi. Jakie było zachowanie odpowiedniego współczynnika determinacji w kolejnych modelach?

```
##                     Estimate   Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)     -18434.71356 3236.8236673 -5.695310 6.068463e-08
## horsepower          31.64419   14.4173920  2.194862 2.967071e-02
## city.mpg            67.03355   65.7941206  1.018838 3.098778e-01
## curb.weight         10.09671    0.7772917 12.989598 1.600643e-26
## num.of.doorstwo    547.85114  460.9648332  1.188488 2.364708e-01

## [1] 0.8049611

##                      Estimate   Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept)     -15395.704186 1257.0623108 -12.247368 1.496423e-24
## horsepower          22.757081   11.4806990   1.982203 4.922435e-02
## curb.weight          9.917956    0.7573256  13.096027 7.371627e-27
## num.of.doorstwo    623.608183  454.9840593   1.370615 1.724765e-01

## [1] 0.8049132

##                 Estimate   Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -14607.99973 1121.1401301 -13.02959 1.000781e-26
## horsepower      27.40398   10.9995177   2.49138 1.377104e-02
## curb.weight      9.51894    0.7011011  13.57713 3.237394e-28

## [1] 0.8038145
```

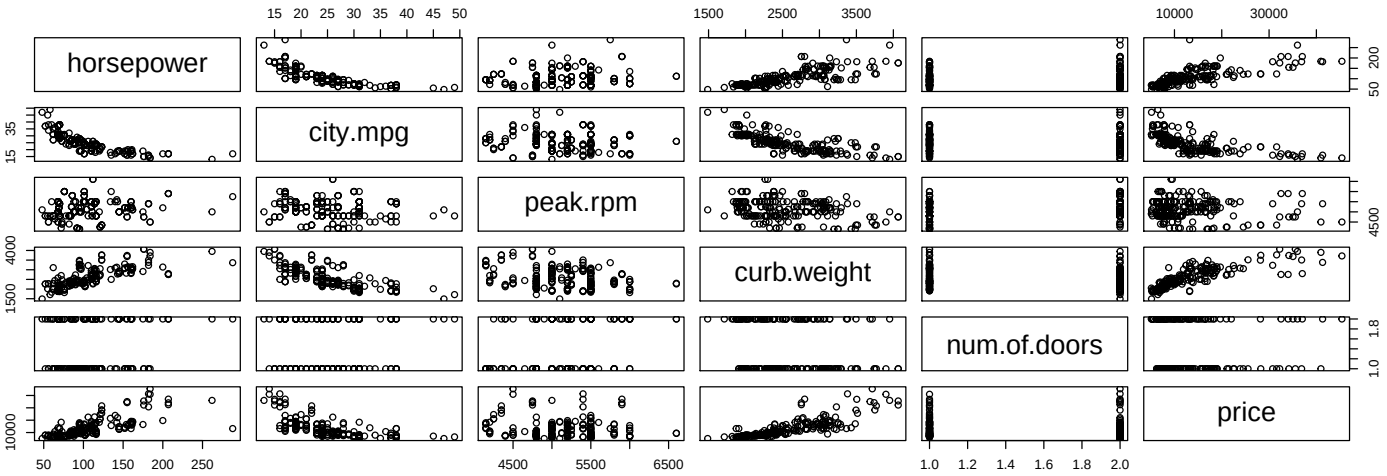
5. Zamiast usuwać obserwacje z brakującymi danymi, jak to zrobiliśmy w punkcie 1, uzupełnij je za pomocą średniej i mediany sąsiednich wartości dla zmiennych ilościowych i porządkowych, odpowiednio. Aby

to zrobić, użyj funkcji `impute()` dostępnej w pakiecie `Hmisc`. W przypadku takich danych postępuj zgodnie z instrukcjami w punktach 2-4.

```
##    horsepower       city.mpg        peak.rpm     curb.weight
##  Min.   : 48.0   Min.   :13.00   Min.   :4150   Min.   :1488
##  1st Qu.: 70.0   1st Qu.:19.00   1st Qu.:4800   1st Qu.:2145
##  Median : 95.0   Median :24.00   Median :5200   Median :2414
##  Mean   :104.3   Mean   :25.22   Mean   :5125   Mean   :2556
##  3rd Qu.:116.0   3rd Qu.:30.00   3rd Qu.:5500   3rd Qu.:2935
##  Max.   :288.0   Max.   :49.00   Max.   :6600   Max.   :4066
##  NA's   :2                       NA's   :2
##  num.of.doors     price
##  four:114     Min.   : 5118
##  two : 89     1st Qu.: 7775
##  NA's:  2     Median :10295
##               Mean   :13207
##               3rd Qu.:16500
##               Max.   :45400
##               NA's   :4
```

```
##    horsepower       city.mpg        peak.rpm     curb.weight
##  Min.   : 48.0   Min.   :13.00   Min.   :4150   Min.   :1488
##  1st Qu.: 70.0   1st Qu.:19.00   1st Qu.:4800   1st Qu.:2145
##  Median : 95.0   Median :24.00   Median :5200   Median :2414
##  Mean   :104.3   Mean   :25.22   Mean   :5125   Mean   :2556
##  3rd Qu.:116.0   3rd Qu.:30.00   3rd Qu.:5500   3rd Qu.:2935
##  Max.   :288.0   Max.   :49.00   Max.   :6600   Max.   :4066
##   num.of.doors       price
##  Min.   :1.000   Min.   : 5118
##  1st Qu.:1.000   1st Qu.: 7788
##  Median :1.000   Median :10595
##  Mean   :1.434   Mean   :13207
##  3rd Qu.:2.000   3rd Qu.:16500
##  Max.   :2.000   Max.   :45400
```

```
## 2.
```




```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight +
```

```
##     num.of.doors, data = auto_sel)
##
## Coefficients:
##  (Intercept)    horsepower      city.mpg      peak.rpm   curb.weight
##   -2.745e+04     6.722e+01     1.413e+02     6.572e-01     1.017e+01
## num.of.doors
##    5.050e+02
```

```
##   (Intercept)    horsepower      city.mpg      peak.rpm   curb.weight
## -2.744867e+04  6.721715e+01  1.413170e+02  6.572019e-01  1.017053e+01
##  num.of.doors
##  5.049619e+02
```

```
##                      2.5 %        97.5 %
## (Intercept)  -4.198964e+04 -12907.700033
## horsepower    3.717412e+01     97.260183
## city.mpg     -2.781769e+01    310.451628
## peak.rpm     -8.865075e-01      2.200911
## curb.weight   7.723371e+00     12.617692
## num.of.doors -7.993339e+02   1809.257683
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight +
##     num.of.doors, data = auto_sel)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -20128  -2083   -138   1379  16751
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -2.745e+04  7.374e+03  -3.722 0.000257 ***
## horsepower    6.722e+01  1.524e+01   4.412 1.68e-05 ***
## city.mpg      1.413e+02  8.577e+01   1.648 0.101007
## peak.rpm      6.572e-01  7.828e-01   0.840 0.402185
## curb.weight   1.017e+01  1.241e+00   8.196 3.00e-14 ***
## num.of.doors  5.050e+02  6.614e+02   0.763 0.446100
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4182 on 199 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7245, Adjusted R-squared:  0.7176
## F-statistic: 104.7 on 5 and 199 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
##         1         2         3         4         5         6         7
## 13190.535 13190.535 18595.135 10687.189 15666.159 12752.293 15674.800
##         8         9        10        11        12        13        14
## 16793.559 19869.950 21242.310 11770.668 11265.706 15017.431 15071.849
##        15        16        17        18        19        20        21
## 17879.986 23950.589 25981.131 26606.168  1915.053  6244.963  6095.970
##        22        23        24        25        26        27        28
##  6055.273  5207.372  9066.510  5627.928  5851.680  5851.680  9202.291
```

```
##        29        30        31        32        33        34        35
## 11431.313 17868.134  4961.068  5493.989  5262.202  6583.307  6746.035
##        36        37        38        39        40        41        42
##  6790.282  6932.669  9710.564 10249.602  9897.198 10588.794 12118.960
##        43        44        45        46        47        48        49
## 10751.530  8613.936  6244.963  6095.970 14094.645 31481.352 31481.352
##        50        51        52        53        54        55        56
## 36468.874  4879.841  5122.863  5173.716  5075.575  5126.428 10901.649
##        57        58        59        60        61        62        63
## 10901.649 10952.501 14266.179 10293.020 10042.321 10293.020 10042.321
##        64        65        66        67        68        69        70
## 10348.195 10194.879 14248.699 12497.433 23041.219 25431.293 23342.770
##        71        72        73        74        75        76        77
## 25634.704 26895.516 26841.098 30025.164 28648.577 20891.531  6482.436
##        78        79        80        81        82        83        84
##  5898.968  6509.199  9239.409 12327.501  9972.292 18091.886 18986.893
##        85        86        87        88        89        90        91
## 19037.745  9843.640 10250.461 12158.167 12158.167  5209.645  7285.990
##        92        93        94        95        96        97        98
##  5504.590  5203.039  6077.705  5840.218  6623.349  5538.667  6209.922
##        99       100       101       102       103       104       105
##  6419.938 10445.677 10221.925 20570.930 22615.206 20497.595 21652.170
##       106       107       108       109       110       111       112
## 24749.818 22343.766 16262.390 18641.371 18398.202 20587.154 16687.335
##       113       114       115       116       117       118       119
## 19200.750 18823.146 21146.533 16821.769 19200.750 20658.924  6482.436
##       120       121       122       123       124       125       126
##  9066.510  5627.928  5851.680  7906.127 11431.313 17939.328 17726.673
##       127       128       129       130       131       132       133
## 21785.066 21785.066 22232.570 33335.099 12912.585 12207.254 14406.377
##       134       135       136       137       138       139       140
## 14277.725 14904.733 14918.468 19174.481 19066.170  6649.940  6595.560
##       141       142       143       144       145       146       147
##  7816.024  8060.598  7690.124 10265.437  9370.990 12591.604  8970.057
##       148       149       150       151       152       153       154
## 11293.731  9585.642 13874.161  6017.883  6011.994  5252.769  7947.960
##       155       156       157       158       159       160       161
##  7484.397 15824.233  6320.445  6605.219  7720.595  8285.863  7583.197
##       162       163       164       165       166       167       168
##  6454.802  6637.872  7579.096  7935.065 12137.600 12493.569 13737.767
##       169       170       171       172       173       174       175
## 13697.085 13849.643 15151.471 15507.440 18161.948  9755.364 10382.977
##       176       177       178       179       180       181       182
## 10367.737 10367.737 10815.240 20894.504 21160.008 21629.888 21691.982
##       183       184       185       186       187       188       189
##  8435.412  9007.282  7960.962  8532.831  9173.575  9398.655 10459.079
##       190       191       192       193       194       195       196
##  9541.391  9205.763 13813.593 11477.725 12186.006 17134.813 18375.618
##       197       198       199       200       201       202       203
## 17510.052 18598.299 20668.854 21807.954 17541.634 20989.177 18855.344
##       204       205
```

```
## 19728.717 18095.125
```

1	2	3	4	5
304.46471	3309.46471	-2095.13493	3262.81115	1783.84136
6	7	8	9	10
2497.70662	2035.19953	2126.44112	4005.05039	-8035.18068
11	12	13	14	15
4659.33202	5659.29390	5952.56858	6033.15126	6685.01422
16	17	18	19	20
6809.41069	15333.86915	10273.83162	3235.94685	50.03666
21	22	23	24	25
479.02995	-483.27332	1169.62848	-1109.50973	601.07204
26	27	28	29	30
840.32035	1757.32035	-644.29131	-2510.31292	-4904.13419
31	32	33	34	35
1517.93247	1361.01059	136.79764	-54.30670	382.96480
36	37	38	39	40
504.71800	362.33057	-1815.56413	-1154.60228	-1052.19836
41	42	43	44	45
-293.79448	826.03976	-406.53002	-1828.93587	6962.16601
46	47	48	49	50
7111.15930	-3046.64478	768.64785	4068.64785	-468.87404
51	52	53	54	55
315.15897	972.13669	1621.28403	1619.42467	2268.57202
56	57	58	59	60
43.35142	943.35142	2692.49876	1378.82149	-1448.02008
61	62	63	64	65
-1547.32148	301.97992	202.67852	446.80464	1050.12055
66	67	68	69	70
4031.30137	5846.56664	2510.78150	2816.70670	4833.23024
71	72	73	74	75
5965.29608	7288.48419	8214.90152	10934.83623	16751.42259
76	77	78	79	80
-4388.53133	-1093.43563	290.03237	159.80051	-1550.40876
81	82	83	84	85
-2368.50141	-1473.29184	-5462.88588	-4117.89261	-4548.74526
86	87	88	89	90
-2854.63960	-2061.46085	-2879.16706	-2879.16706	289.35500
91	92	93	94	95
-186.98964	1144.40960	1645.96086	1271.29519	1458.78207
96	97	98	99	100
1175.65118	1960.33333	1789.07828	1829.06180	-1496.67652
101	102	103	104	105
-672.92483	-7071.92964	-8216.20638	-6998.59499	-4453.16993
106	107	108	109	110
-5050.81818	-3944.76604	-4362.39001	-5441.37080	-5958.20153
111	112	113	114	115
-6727.15363	-1107.33491	-2300.75000	-2128.14643	-4071.53284
116	117	118	119	120
-191.76922	-1250.75000	-2508.92444	-910.43563	-1109.50973
121	122	123	124	125
601.07204	840.32035	-297.12692	-2510.31292	-5175.32791

```
##          126          127          128          129          130
##   4291.32669  10742.93382  12242.93382  14795.43045 -20127.96980
##          131          132          133          134          135
##  -3617.58498  -2312.25366  -2556.37703  -2107.72480    135.26695
##          136          137          138          139          140
##    591.53174  -1024.48083   -446.16966  -1531.93993    457.44008
##          141          142          143          144          145
##   -213.02365   -934.59825     84.87648   -305.43659   -137.98996
##          146          147          148          149          150
##  -1332.60375  -1507.05739  -1095.73069  -1572.64158  -2180.16114
##          151          152          153          154          155
##   -669.88303    326.00563   1235.23079  -1029.95994    413.60262
##          156          157          158          159          160
##  -7046.23285    617.55549    592.78062    177.40529   -497.86258
##          161          162          163          164          165
##    154.80285   1903.19766   2620.12810    478.90385    302.93526
##          166          167          168          169          170
##  -2839.60004  -2955.56863  -5288.76733  -4058.08520  -3860.64317
##          171          172          173          174          175
##  -3952.47114  -3958.43973   -492.94834   -807.36385    315.02272
##          176          177          178          179          180
##   -379.73665    530.26335    432.75999  -4336.50360  -5162.00787
##          181          182          183          184          185
##  -5939.88827  -5941.98192   -660.41202  -1032.28159     34.03827
##          186          187          188          189          190
##   -337.83131   -678.57476     96.34520   -464.07883   2053.60918
##          191          192          193          194          195
##    774.23670   -518.59328   2367.27500    103.99429  -4194.81287
##          196          197          198          199          200
##  -4960.61766  -1525.05205  -2083.29888  -2248.85442  -2857.95390
##          201          202          203          204          205
##   -696.63411  -1944.17655   2629.65563   2741.28261   4529.87534
```

3.

```
## Start:  AIC=3424.69
## price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - num.of.doors  1   10192607 3490187999 3423.3
## - peak.rpm      1   12324997 3492320389 3423.4
## <none>                       3479995392 3424.7
## - city.mpg      1   47472671 3527468063 3425.5
## - horsepower    1  340402702 3820398094 3441.8
## - curb.weight   1 1174580109 4654575501 3482.3
##
## Step:  AIC=3423.29
## price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - peak.rpm     1   12030940 3502218939 3422.0
## <none>                      3490187999 3423.3
```

```
## - city.mpg     1   48682445 3538870444 3424.1
## - horsepower   1  440974262 3931162261 3445.7
## - curb.weight  1 1240381716 4730569715 3483.6
##
## Step:  AIC=3422
## price ~ horsepower + city.mpg + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                       3502218939 3422.0
## - city.mpg     1   38636782 3540855721 3422.2
## - horsepower   1  556659511 4058878450 3450.2
## - curb.weight  1 1750422882 5252641821 3503.1
##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + city.mpg + curb.weight, data = auto_sel)
##
## Coefficients:
## (Intercept)   horsepower     city.mpg  curb.weight
##  -21384.432       75.415      121.380        9.261
##
## Start:  AIC=3444.63
## price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight + num.of.doors
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - num.of.doors  1   10192607 3490187999 3439.9
## - peak.rpm      1   12324997 3492320389 3440.0
## - city.mpg      1   47472671 3527468063 3442.1
## <none>                       3479995392 3444.6
## - horsepower    1  340402702 3820398094 3458.4
## - curb.weight   1 1174580109 4654575501 3498.9
##
## Step:  AIC=3439.91
## price ~ horsepower + city.mpg + peak.rpm + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - peak.rpm     1   12030940 3502218939 3435.3
## - city.mpg     1   48682445 3538870444 3437.4
## <none>                      3490187999 3439.9
## - horsepower   1  440974262 3931162261 3459.0
## - curb.weight  1 1240381716 4730569715 3496.9
##
## Step:  AIC=3435.29
## price ~ horsepower + city.mpg + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## - city.mpg     1   38636782 3540855721 3432.2
## <none>                      3502218939 3435.3
## - horsepower   1  556659511 4058878450 3460.2
## - curb.weight  1 1750422882 5252641821 3513.1
##
## Step:  AIC=3432.22
```

```
## price ~ horsepower + curb.weight
##
##               Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                      3540855721 3432.2
## - horsepower   1  580023407 4120879128 3458.0
## - curb.weight  1 1834490017 5375345738 3512.5

##
## Call:
## lm(formula = price ~ horsepower + curb.weight, data = auto_sel)
##
## Coefficients:
## (Intercept)   horsepower  curb.weight
##  -15818.459       64.615        8.722

## Start:  AIC=3678.97
## price ~ 1
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## + curb.weight   1 8510293560 4.1209e+09 3451.3
## + horsepower    1 7255826951 5.3753e+09 3505.8
## + city.mpg      1 5627042447 7.0041e+09 3560.1
## + peak.rpm      1  128478511 1.2503e+10 3678.9
## <none>                       1.2631e+10 3679.0
## + num.of.doors  1   22223129 1.2609e+10 3680.6
##
## Step:  AIC=3451.35
## price ~ curb.weight
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## + horsepower    1 580023407 3540855721 3422.2
## + peak.rpm      1 188393930 3932485198 3443.8
## + num.of.doors  1 172156795 3948722333 3444.6
## + city.mpg      1  62000678 4058878450 3450.2
## <none>                      4120879128 3451.3
##
## Step:  AIC=3422.25
## price ~ curb.weight + horsepower
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## + city.mpg      1  38636782 3502218939 3422.0
## <none>                      3540855721 3422.2
## + num.of.doors  1  11184104 3529671617 3423.6
## + peak.rpm      1   1985277 3538870444 3424.1
##
## Step:  AIC=3422
## price ~ curb.weight + horsepower + city.mpg
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                      3502218939 3422.0
## + peak.rpm      1  12030940 3490187999 3423.3
## + num.of.doors  1   9898550 3492320389 3423.4
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ curb.weight + horsepower + city.mpg, data = auto_sel)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  curb.weight   horsepower     city.mpg
##  -21384.432        9.261       75.415      121.380
```

```
## Start:  AIC=3682.29
## price ~ 1
##
##                Df  Sum of Sq        RSS    AIC
## + curb.weight   1 8510293560 4.1209e+09 3458.0
## + horsepower    1 7255826951 5.3753e+09 3512.5
## + city.mpg      1 5627042447 7.0041e+09 3566.7
## <none>                       1.2631e+10 3682.3
## + peak.rpm      1  128478511 1.2503e+10 3685.5
## + num.of.doors  1   22223129 1.2609e+10 3687.3
##
## Step:  AIC=3457.99
## price ~ curb.weight
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## + horsepower    1 580023407 3540855721 3432.2
## + peak.rpm      1 188393930 3932485198 3453.7
## + num.of.doors  1 172156795 3948722333 3454.6
## <none>                      4120879128 3458.0
## + city.mpg      1  62000678 4058878450 3460.2
##
## Step:  AIC=3432.22
## price ~ curb.weight + horsepower
##
##                Df Sum of Sq        RSS    AIC
## <none>                      3540855721 3432.2
## + city.mpg      1  38636782 3502218939 3435.3
## + num.of.doors  1  11184104 3529671617 3436.9
## + peak.rpm      1   1985277 3538870444 3437.4
```

```
##
## Call:
## lm(formula = price ~ curb.weight + horsepower, data = auto_sel)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  curb.weight   horsepower
##  -15818.459        8.722       64.615
```

```
## 4.
```

```
##                   Estimate   Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -2.635706e+04 7226.3754586 -3.6473412 3.379537e-04
## horsepower   7.139625e+01   14.2029379  5.0268648 1.104343e-06
## city.mpg     1.430558e+02   85.6502655  1.6702319 9.643773e-02
## curb.weight  9.855041e+00    1.1689345  8.4307899 6.749078e-15
```

```
## peak.rpm     6.492573e-01    0.7819454  0.8303102 4.073535e-01
```

```
## [1] 0.7181583
```

```
##                   Estimate   Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -21384.431936 4040.8655146 -5.292042 3.151748e-07
## horsepower      75.415001   13.3424794  5.652248 5.374600e-08
## city.mpg       121.380259   81.5119348  1.489110 1.380257e-01
## curb.weight      9.261327    0.9240072 10.023003 1.962328e-19
```

```
## [1] 0.7185938
```

```
##                  Estimate   Std. Error    t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) -15818.45917 1540.0560178 -10.271353 3.508074e-20
## horsepower      64.61495   11.2328166   5.752337 3.223308e-08
## curb.weight      8.72178    0.8525618  10.230085 4.645579e-20
```

```
## [1] 0.7168977
```

6. Korzystając z ostatecznych modeli uzyskanych dla obu zbiorów danych, wykonaj prognozę ceny samochodu, dla którego zmienne `curb.weight` i `horsepower` są równe 2823 i 154, odpowiednio. Który model daje lepszą prognozę, gdyby cena tego samochodu wynosiła 1650? Jak możemy to wyjaśnić?

```
##        fit      lwr      upr
## 1 16484.18 11243.94 21724.42
```

```
##        fit      lwr      upr
## 1 18753.83 10437.85 27069.81
```

```
## [1] 0.8038145
```

```
## [1] 0.7168977
```

11 Regresja logistyczna i Poissona

11.1 Przykłady

Regresja logistyczna

Przykład. Rozważmy przykład dotyczący badania szansy ponownego ataku serca w ciągu roku od pierwszego ataku, w zależności od *treatment of anger* oraz *trait anxiety*. Zmienna zależna ma wartość 1, jeśli nastąpił ponowny atak, a 0 w przeciwnym razie.

```
y <- c(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
x1 <- c(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)
x2 <- c(70, 80, 50, 60, 40, 65, 75, 80, 70, 60, 65, 50, 45, 35, 40, 50, 55, 45, 50, 60)
data_set <- data.frame(y, x1, x2)
head(data_set)
```

```
##   y x1 x2
## 1 1  1 70
## 2 1  1 80
## 3 1  1 50
## 4 1  0 60
## 5 1  0 40
## 6 1  0 65
```

```r
# model logistyczny
model_1 <- glm(y ~ x1 + x2, data = data_set, family = 'binomial')
model_1
```

```
##
## Call:  glm(formula = y ~ x1 + x2, family = "binomial", data = data_set)
##
## Coefficients:
## (Intercept)           x1           x2
##      -6.363       -1.024        0.119
##
## Degrees of Freedom: 19 Total (i.e. Null);  17 Residual
## Null Deviance:       27.73
## Residual Deviance: 18.82     AIC: 24.82
```

```r
# podsumowanie modelu
# tj. reszty, estymacja punktowa, testy istotności dla współczynników regresji, AIC
summary(model_1)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = y ~ x1 + x2, family = "binomial", data = data_set)
##
## Deviance Residuals:
##      Min        1Q    Median        3Q       Max
## -1.52106  -0.68746   0.00424   0.70625   1.88960
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -6.36347    3.21362  -1.980   0.0477 *
## x1          -1.02411    1.17101  -0.875   0.3818
## x2           0.11904    0.05497   2.165   0.0304 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 27.726  on 19  degrees of freedom
## Residual deviance: 18.820  on 17  degrees of freedom
## AIC: 24.82
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

```r
# zredukowany model logistyczny
model_2 <- glm(y ~ x2, data = data_set, family = 'binomial')
summary(model_2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = y ~ x2, family = "binomial", data = data_set)
##
## Deviance Residuals:
##      Min        1Q    Median        3Q       Max
```

```
## -1.62461  -0.83983  -0.01232   0.64540   2.10801
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  -7.0925     3.1709  -2.237   0.0253 *
## x2            0.1246     0.0553   2.254   0.0242 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 27.726  on 19  degrees of freedom
## Residual deviance: 19.601  on 18  degrees of freedom
## AIC: 23.601
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

```
# regresja krokowa
AIC(model_1, model_2)
```

```
##         df      AIC
## model_1  3 24.82037
## model_2  2 23.60052
```

```
step(model_1)
```

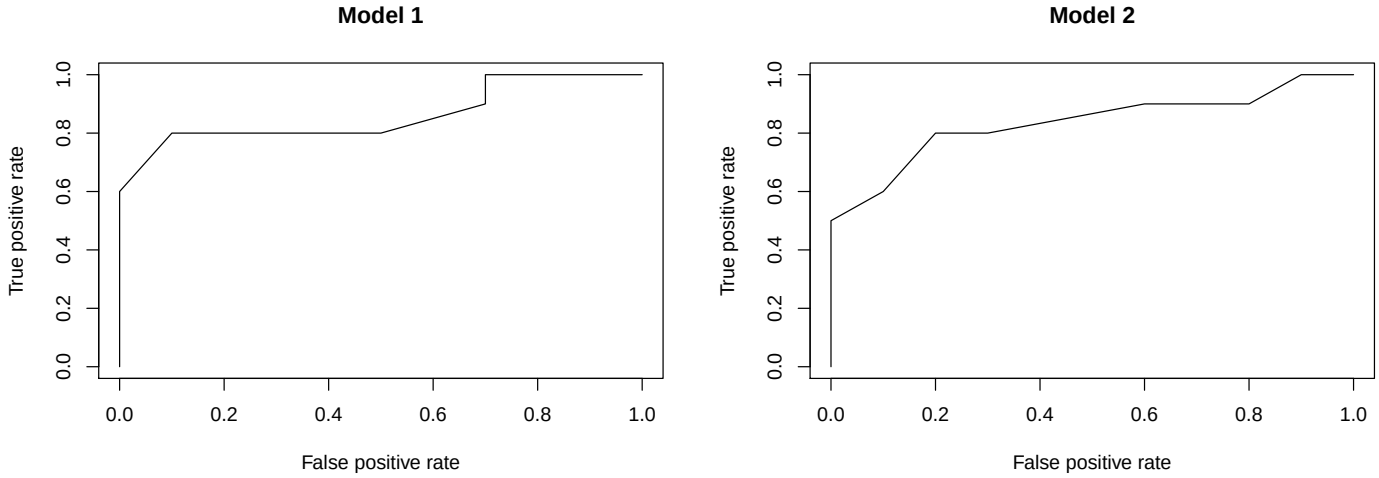
```
## Start:  AIC=24.82
## y ~ x1 + x2
##
##        Df Deviance    AIC
## - x1    1   19.601 23.601
## <none>      18.820 24.820
## - x2    1   25.878 29.878
##
## Step:  AIC=23.6
## y ~ x2
##
##        Df Deviance    AIC
## <none>      19.601 23.601
## - x2    1   27.726 29.726
```

```
##
## Call:  glm(formula = y ~ x2, family = "binomial", data = data_set)
##
## Coefficients:
## (Intercept)           x2
##     -7.0925       0.1246
##
## Degrees of Freedom: 19 Total (i.e. Null);  18 Residual
## Null Deviance:       27.73
## Residual Deviance: 19.6  AIC: 23.6
```

```
# iloraz szans (ręcznie)
exp(coef(model_2)[2])
```

```
##       x2
## 1.132734
```

```
# Wartość ta oznacza, że wraz ze wzrostem wartości zmiennej x2 o jedną jednostkę,
# przewidywane ryzyko ponownego zawału serca wzrasta o 13%.
# do krzywych ROC
library(ROCR)
pred_1 <- prediction(model_1$fitted, y)
pred_2 <- prediction(model_2$fitted, y)
# krzywe ROC
par(mfrow = c(1, 2))
plot(performance(pred_1, 'tpr', 'fpr'), main = "Model 1")
plot(performance(pred_2, 'tpr', 'fpr'), main = "Model 2")
```




```
par(mfrow = c(1, 1))
# AUC
performance(pred_1, 'auc')@y.values
```

```
## [[1]]
## [1] 0.86
```

```
performance(pred_2, 'auc')@y.values
```

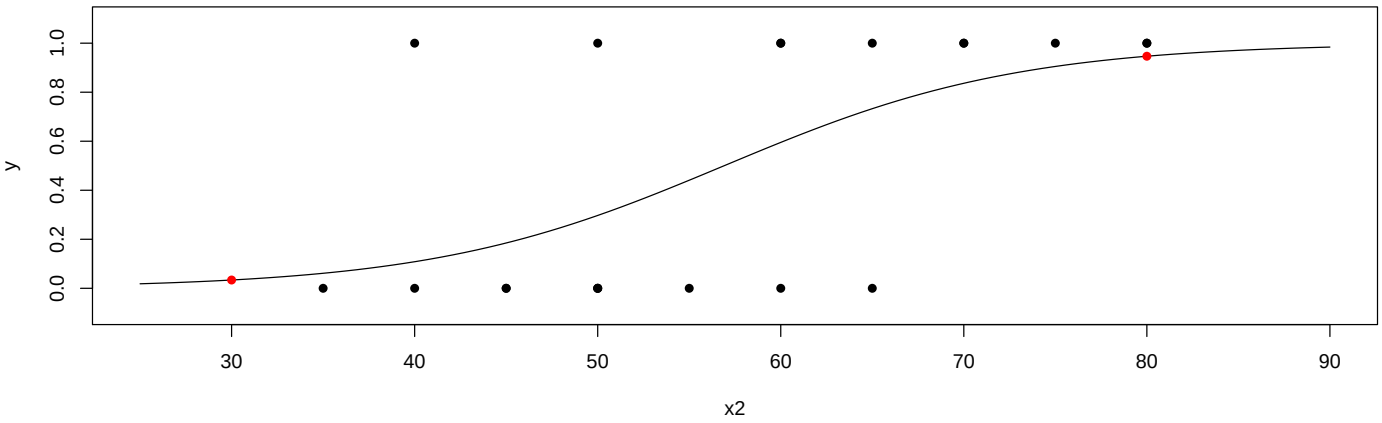
```
## [[1]]
## [1] 0.835
```

```
# predykcja
(predict_glm <- predict(model_2,
                        data.frame(x2 = c(30, 80)),
                        type = 'response'))
```

```
##          1          2
## 0.03378247 0.94676209
```

```
# Uwzględniamy argument type = 'response' w celu uzyskania przewidywanego prawdopodobieństwa, że y
# Domyślne przewidywane są zlogarytmowane ilorazy szans (prawdopodobieństwa w skali logitowej).
x_temp <- seq(min(x2) - 10, max(x2) + 10, length.out = 100)
y_temp <- exp(coef(model_2)[1] + coef(model_2)[2] * x_temp) /
  (1 + exp(coef(model_2)[1] + coef(model_2)[2] * x_temp))
plot(x_temp, y_temp, type = "l", xlab = "x2", ylab = "y", ylim = c(-0.1, 1.1))
points(x2, y, pch = 16)
```

```
points(c(30, 80), predict_glm, pch = 16, col = "red")
```



Regresja Poissona

Nie zawsze interesuje nas prawdopodobieństwo sukcesu. Dość często jesteśmy zainteresowani liczbą sukcesów (ogólnie liczebnościami). W tej sytuacji najbardziej popularny jest model Poissona, który zakłada, że zmienna zależna ma rozkład Poissona i

$$h(x) = \ln(x), \quad E(Y) = \exp(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

Przykład. W zbiorze danych student_award.RData, zmienna `num_awards` podaje liczbę nagród zdobytych przez uczniów szkoły średniej przez rok, zmienna `math` jest zmienną ciągłą i reprezentuje wyniki uczniów na końcowym egzaminie z matematyki, a zmienna `prog` jest zmienną jakościową z trzema poziomami wskazującymi rodzaj programu, ma który uczniowie byli zapisani ("General" - ogólny, "Academic" - akademicki, "Vocational" - zawodowy). Chcemy opisać związek między liczbą nagród a wynikiem egzaminu z matematyki i programem.

```
load(url("http://ls.home.amu.edu.pl/data_sets/student_award.RData"))
head(student_award)
```

```
##   num_awards math       prog
## 1          0   41 Vocational
## 2          0   41    General
## 3          0   44 Vocational
## 4          0   42 Vocational
## 5          0   40 Vocational
## 6          0   42    General
```

```
model_1 <- glm(num_awards ~ math + prog, data = student_award, family = "poisson")
model_1
```

```
##
## Call:  glm(formula = num_awards ~ math + prog, family = "poisson", data = student_award)
##
## Coefficients:
##    (Intercept)            math    progAcademic  progVocational
##       -5.24712         0.07015         1.08386         0.36981
##
## Degrees of Freedom: 199 Total (i.e. Null);  196 Residual
## Null Deviance:       287.7
## Residual Deviance: 189.4     AIC: 373.5
```

```r
summary(model_1)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = num_awards ~ math + prog, family = "poisson", data = student_award)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.2043  -0.8436  -0.5106   0.2558   2.6796
##
## Coefficients:
##                Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)    -5.24712    0.65845  -7.969 1.60e-15 ***
## math            0.07015    0.01060   6.619 3.63e-11 ***
## progAcademic    1.08386    0.35825   3.025  0.00248 **
## progVocational  0.36981    0.44107   0.838  0.40179
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 287.67  on 199  degrees of freedom
## Residual deviance: 189.45  on 196  degrees of freedom
## AIC: 373.5
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

```r
# Możemy również przetestować ogólny efekt programu, porównując pełny model
# z modelem bez zmiennej program. Test chi-kwadrat wskazuje, że program,
# jest statystycznie istotnym predyktorem liczby nagród.
model_2 <- update(model_1, . ~ . - prog)
anova(model_1, model_2, test = "Chisq")
```

```
## Analysis of Deviance Table
##
## Model 1: num_awards ~ math + prog
## Model 2: num_awards ~ math
##   Resid. Df Resid. Dev Df Deviance  Pr(>Chi)
## 1       196     189.45
## 2       198     204.02 -2  -14.572 0.0006852 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
AIC(model_1, model_2)
```

```
##         df      AIC
## model_1  4 373.5045
## model_2  2 384.0762
```

```r
step(model_1)
```

```
## Start:  AIC=373.5
## num_awards ~ math + prog
##
```

```
##        Df Deviance    AIC
## <none>      189.45 373.50
## - prog  2   204.02 384.08
## - math  1   234.46 416.51
```

```
##
## Call:  glm(formula = num_awards ~ math + prog, family = "poisson", data = student_award)
##
## Coefficients:
##    (Intercept)            math    progAcademic  progVocational
##       -5.24712         0.07015         1.08386         0.36981
##
## Degrees of Freedom: 199 Total (i.e. Null);  196 Residual
## Null Deviance:       287.7
## Residual Deviance: 189.4     AIC: 373.5
```

```
(data_new <- data.frame(math = mean(student_award$math),
                        prog = factor(1:3, levels = 1:3,
                                      labels = levels(student_award$prog))))
```

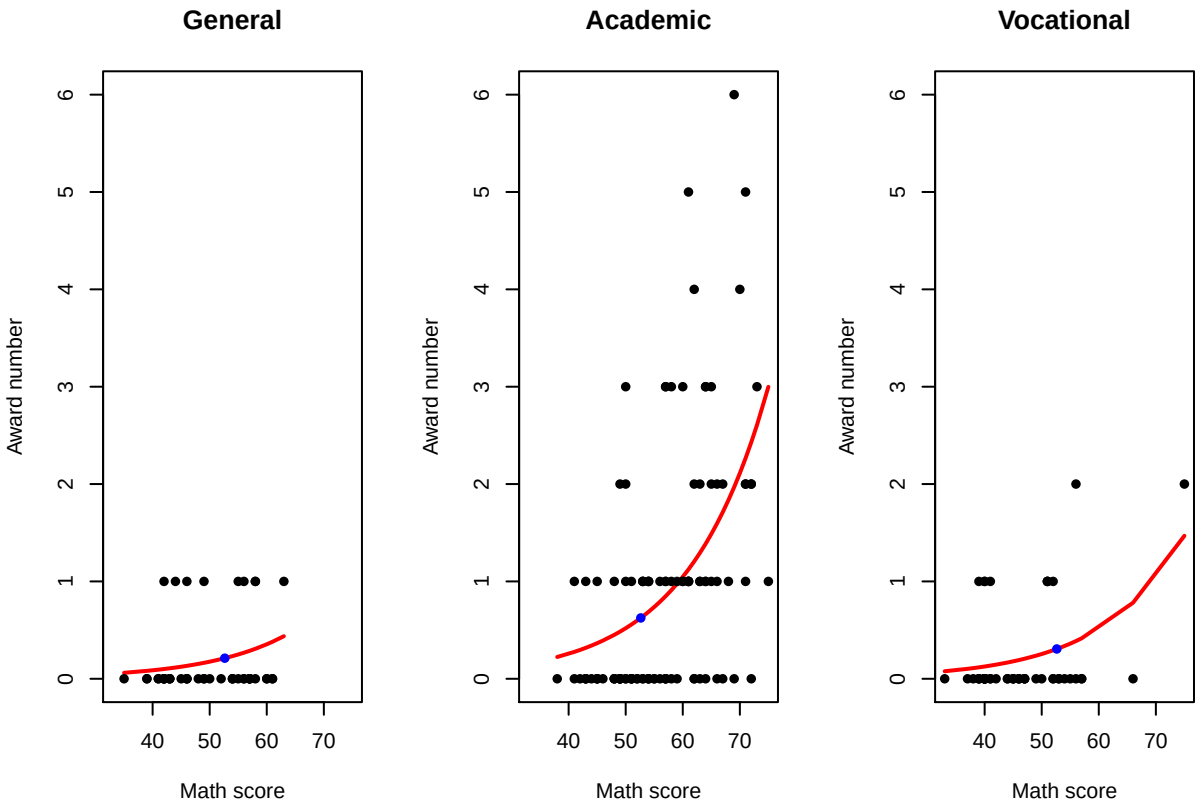
```
##     math       prog
## 1 52.645    General
## 2 52.645   Academic
## 3 52.645 Vocational
```

```
(pred <- predict(model_1, data_new, type = "response"))
```

```
##         1         2         3
## 0.2114109 0.6249446 0.3060086
```

```
student_award$num_award_hat <- predict(model_1, type = "response")
# sortowanie według programu, a następnie według wyniku z matematyki
student_award <- student_award[with(student_award, order(prog, math)), ]
par(mfrow = c(1, 3))
plot(student_award$math[student_award$prog == "General"],
     student_award$num_award_hat[student_award$prog == "General"],
     type = "l", lwd = 2, col = "red",
     xlim = c(min(student_award$math), max(student_award$math)), ylim = c(0, 6),
     xlab = "Math score", ylab = "Award number", main = "General")
points(student_award$math[student_award$prog == "General"],
       student_award$num_awards[student_award$prog == "General"], pch = 16)
points(mean(student_award$math), pred[1], pch = 16, col = "blue", lwd = 4)
plot(student_award$math[student_award$prog == "Academic"],
     student_award$num_award_hat[student_award$prog == "Academic"],
     type = "l", lwd = 2, col = "red",
     xlim = c(min(student_award$math), max(student_award$math)), ylim = c(0, 6),
     xlab = "Math score", ylab = "Award number", main = "Academic")
points(student_award$math[student_award$prog == "Academic"],
       student_award$num_awards[student_award$prog == "Academic"], pch = 16)
points(mean(student_award$math), pred[2], pch = 16, col = "blue", lwd = 4)
plot(student_award$math[student_award$prog == "Vocational"],
     student_award$num_award_hat[student_award$prog == "Vocational"],
     type = "l", lwd = 2, col = "red",
     xlim = c(min(student_award$math), max(student_award$math)), ylim = c(0, 6),
```

```
     xlab = "Math score", ylab = "Award number", main = "Vocational")
points(student_award$math[student_award$prog == "Vocational"],
       student_award$num_awards[student_award$prog == "Vocational"], pch = 16)
points(mean(student_award$math), pred[3], pch = 16, col = "blue", lwd = 4)
```




```
par(mfrow = c(1, 1))
```

11.2 Zadania

Zadanie 1. W jednym badaniu klinicznym oceniono wpływ poziomów enzymu LDH i zmian poziomów bilirubiny na zdrowie pacjentów z przewlekłym zapaleniem wątroby. Uzyskane wyniki są zawarte w pliku liver_data.RData. Zmienne to: `bilirubin` - zmiana stężenia bilirubiny we krwi, `ldh` - stężenie enzymu LDH w ciele pacjenta, `condition` - zmiana stanu pacjenta (`Yes` - pogorszenie, `No` - brak pogorszenia).

```
##   bilirubin ldh condition
## 1       0.9  75        No
## 2       0.8 150        No
## 3       0.6 250        No
## 4       0.8 375       Yes
## 5       3.2 160       Yes
## 6       1.7 106        No
```

1. Dopasuj model regresji logistycznej do tych danych. Jakie są wartości estymatorów współczynników regresji?

```
##
## Call:  glm(formula = condition ~ bilirubin + ldh, family = "binomial",
##     data = liver_data)
##
```

```
## Coefficients:
## (Intercept)    bilirubin          ldh
##    -8.13113      2.88050      0.02464
##
## Degrees of Freedom: 38 Total (i.e. Null);  36 Residual
## Null Deviance:       54.04
## Residual Deviance: 33.11     AIC: 39.11
```

2. Które współczynniki są statystycznie istotne w skontruowanym modelu? Jakie jest dopasowanie modelu?

```
##
## Call:
## glm(formula = condition ~ bilirubin + ldh, family = "binomial",
##     data = liver_data)
##
## Deviance Residuals:
##      Min        1Q    Median        3Q       Max
## -2.05593  -0.79191   0.04353   0.57765   2.11829
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -8.131132   2.639959  -3.080  0.00207 **
## bilirubin    2.880497   1.105836   2.605  0.00919 **
## ldh          0.024635   0.008764   2.811  0.00494 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 54.040  on 38  degrees of freedom
## Residual deviance: 33.114  on 36  degrees of freedom
## AIC: 39.114
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

3. Czy model ten może być zredukowany za pomocą regresji krokowej?

```
## Start:  AIC=39.11
## condition ~ bilirubin + ldh
##
##             Df Deviance    AIC
## <none>           33.114 39.114
## - ldh        1   46.989 50.989
## - bilirubin  1   48.726 52.726

##
## Call:  glm(formula = condition ~ bilirubin + ldh, family = "binomial",
##     data = liver_data)
##
## Coefficients:
## (Intercept)    bilirubin          ldh
##    -8.13113      2.88050      0.02464
##
## Degrees of Freedom: 38 Total (i.e. Null);  36 Residual
```

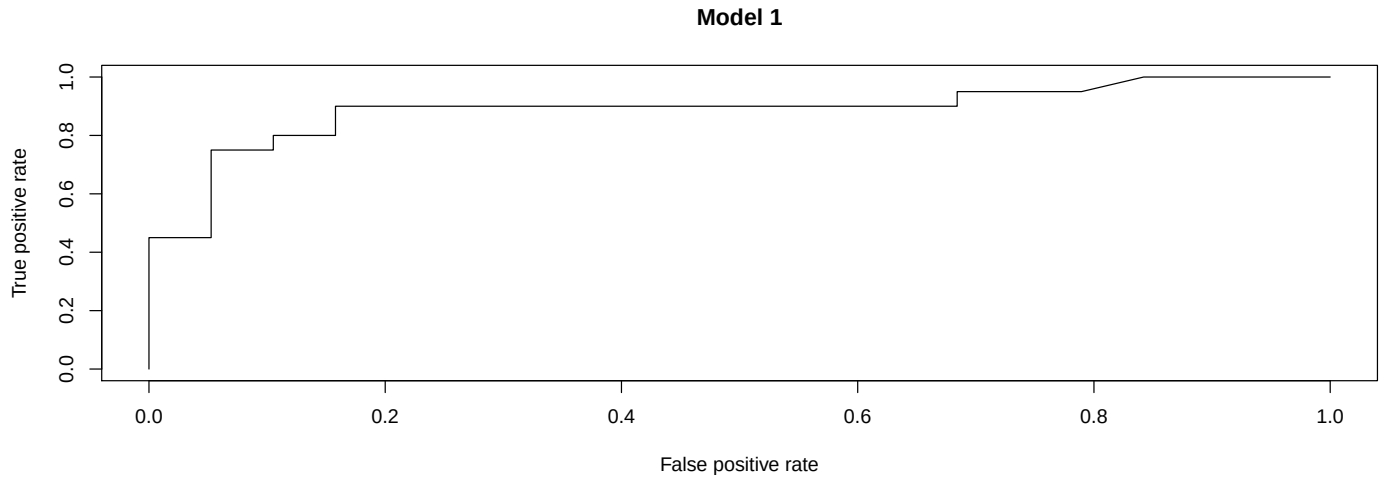
```
## Null Deviance:       54.04
## Residual Deviance: 33.11     AIC: 39.11
```

4. Zinterpretuj współczynniki modelu.

```
## bilirubin
##  17.82313
```

```
##      ldh
## 1.024941
```

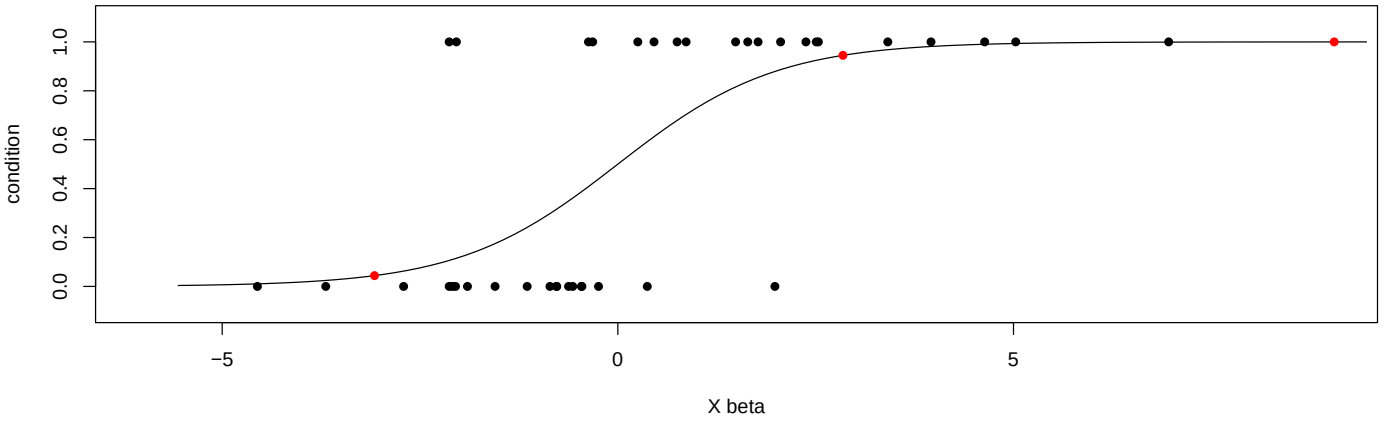
5. Narysuj krzywą ROC i oblicz AUC dla modelu.




```
## [[1]]
## [1] 0.8881579
```

6. Dokonaj przedykcji zmiennej `condition` dla trzech pacjentów scharakteryzonych następująco: (`bilirubin`, `ldh`) = (0.9, 100), (2.1, 200), (3.4, 300). Zilustruj wyniki na wykresie.

```
##          1          2          3
## 0.04414365 0.94505776 0.99988299
```



7. Powyższy wykres pokazuje, że istnieją dwie obserwacje odstające dla pacjentów z pogorszeniem i jedna obserwacja odstająca dla pacjentów bez pogorszenia. Zidentyfikuj je i wykonaj powyższą analizę dla danych bez tych trzech wartości odstających. Jak zmieniają się wyniki?

1.

```
##
## Call:  glm(formula = condition ~ bilirubin + ldh, family = "binomial",
##     data = liver_data_wo)
```

```
##
## Coefficients:
## (Intercept)    bilirubin          ldh
##    -72.7256      30.2781       0.1947
##
## Degrees of Freedom: 35 Total (i.e. Null);  33 Residual
## Null Deviance:       49.91
## Residual Deviance: 6.207     AIC: 12.21
```

2.

```
##
## Call:
## glm(formula = condition ~ bilirubin + ldh, family = "binomial",
##     data = liver_data_wo)
##
## Deviance Residuals:
##      Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.93161  -0.01879   0.00000   0.00047   1.89807
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -72.7256    45.3298  -1.604    0.109
## bilirubin    30.2781    18.9417   1.598    0.110
## ldh           0.1947     0.1235   1.577    0.115
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 49.9066  on 35  degrees of freedom
## Residual deviance:  6.2068  on 33  degrees of freedom
## AIC: 12.207
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 10
```

3.

```
## Start:  AIC=12.21
## condition ~ bilirubin + ldh
##
##             Df Deviance    AIC
## <none>            6.207 12.207
## - ldh        1   38.422 42.422
## - bilirubin  1   44.216 48.216

##
## Call:  glm(formula = condition ~ bilirubin + ldh, family = "binomial",
##     data = liver_data_wo)
##
## Coefficients:
## (Intercept)    bilirubin          ldh
##    -72.7256      30.2781       0.1947
##
## Degrees of Freedom: 35 Total (i.e. Null);  33 Residual
## Null Deviance:       49.91
```

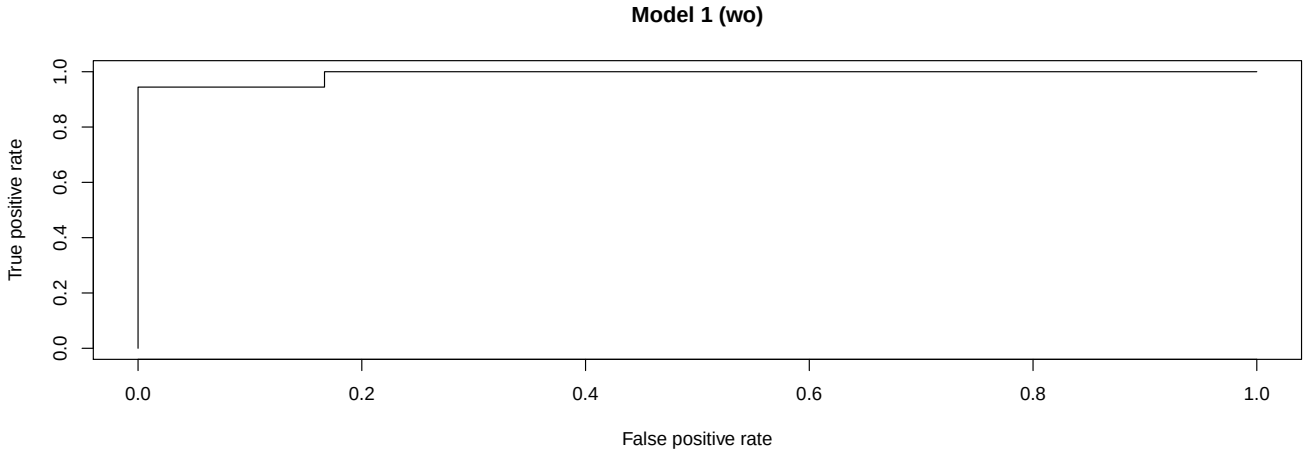
```
## Residual Deviance: 6.207     AIC: 12.21
```

4.

```
##    bilirubin
## 1.411294e+13
```

```
##      ldh
## 1.214999
```

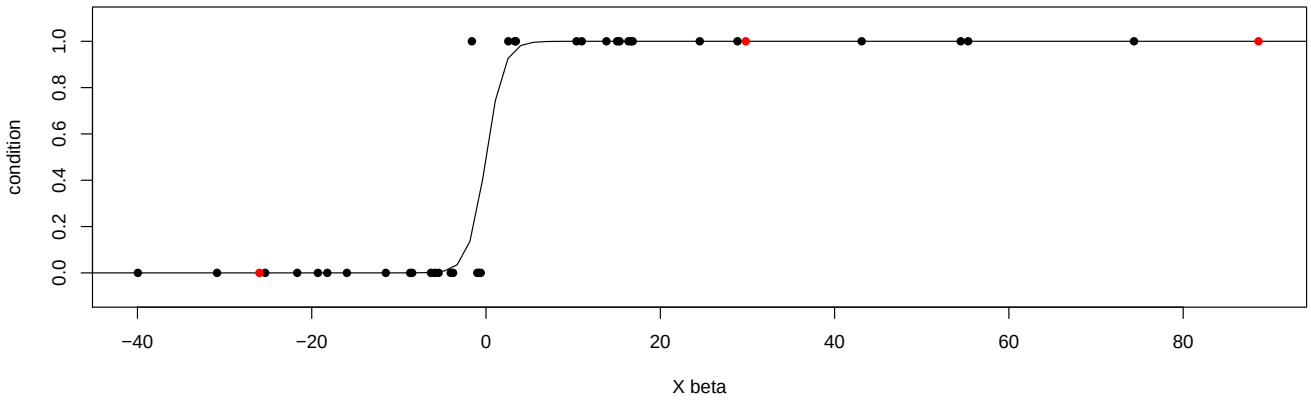
5.




```
## [[1]]
## [1] 0.9907407
```

6.

```
##            1            2            3
## 5.104082e-12 1.000000e+00 1.000000e+00
```



Zadanie 2. Użyj modelu regresji Poissona do zestawu danych `moths` (wpływ siedliska na liczbę moli) z pakietu `DAAG`. Użyj zlogarytmowanej zmiennej `meters` jako zmiennej objaśniającej, a liczby moli `A` jako zmiennej objaśnianej.

```
##   meters A  P   habitat
## 1     25 9  8    NWsoak
## 2     37 3 20    SWsoak
## 3    109 7  9 Lowerside
## 4     10 0  2 Lowerside
## 5    133 9  1 Upperside
## 6     26 3 18 Disturbed
```

1. Dopasuj model regresji Poissona do tych danych. Jakie są wartości estymatorów współczynników regresji?

```
##
## Call:  glm(formula = A ~ log(meters), family = "poisson", data = moths)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  log(meters)
##      1.2058       0.1506
##
## Degrees of Freedom: 40 Total (i.e. Null);  39 Residual
## Null Deviance:       257.1
## Residual Deviance: 248.3     AIC: 367
```

2. Które współczynniki są statystycznie istotne w skontruowanym modelu? Jakie jest dopasowanie modelu?

```
##
## Call:
## glm(formula = A ~ log(meters), family = "poisson", data = moths)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.4366  -1.7754  -1.1501   0.7331   9.2711
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)  1.20577    0.17814   6.769  1.3e-11 ***
## log(meters)  0.15065    0.05068   2.972  0.00295 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 257.11  on 40  degrees of freedom
## Residual deviance: 248.25  on 39  degrees of freedom
## AIC: 366.97
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

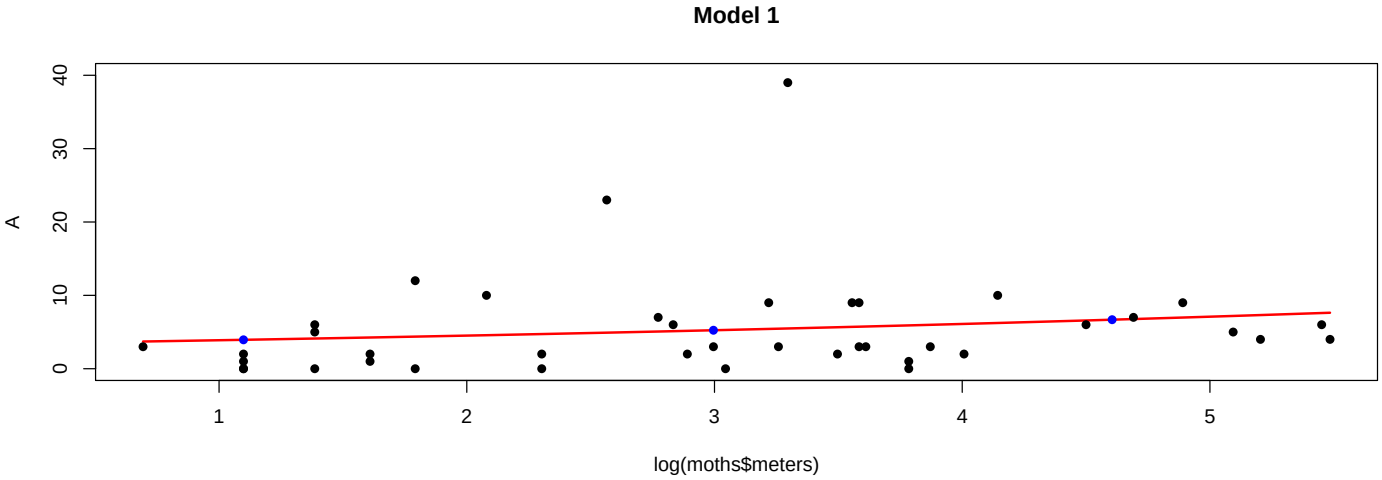
3. Czy model ten może być zredukowany za pomocą regresji krokowej?

```
## Start:  AIC=366.97
## A ~ log(meters)
##
##               Df Deviance    AIC
## <none>             248.25 366.97
## - log(meters)  1   257.11 373.83

##
## Call:  glm(formula = A ~ log(meters), family = "poisson", data = moths)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  log(meters)
##      1.2058       0.1506
```

```
##
## Degrees of Freedom: 40 Total (i.e. Null);  39 Residual
## Null Deviance:       257.1
## Residual Deviance: 248.3     AIC: 367
```

4. Dokonaj predykcji zmiennej `A` dla `meters = 3, 20, 100`. Zilustruj wyniki na wykresie.

```
##        1        2        3
## 3.940363 5.243913 6.682717
```



5. Wykonaj powyższą analizę dla zmiennej `P` jako zmiennej zależnej.

```
## 1.
```

```
##
## Call:  glm(formula = P ~ log(meters), family = "poisson", data = moths)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  log(meters)
##      0.8643       0.1372
##
## Degrees of Freedom: 40 Total (i.e. Null);  39 Residual
## Null Deviance:       217.8
## Residual Deviance: 212.8     AIC: 309
```

```
## 2.
```

```
##
## Call:
## glm(formula = P ~ log(meters), family = "poisson", data = moths)
##
## Deviance Residuals:
##     Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.8679  -2.3492  -1.1408   0.6247   5.7649
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)   0.8643     0.2145   4.030 5.58e-05 ***
## log(meters)   0.1372     0.0614   2.234   0.0255 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
##
## (Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)
##
##     Null deviance: 217.82  on 40  degrees of freedom
## Residual deviance: 212.82  on 39  degrees of freedom
## AIC: 309.05
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

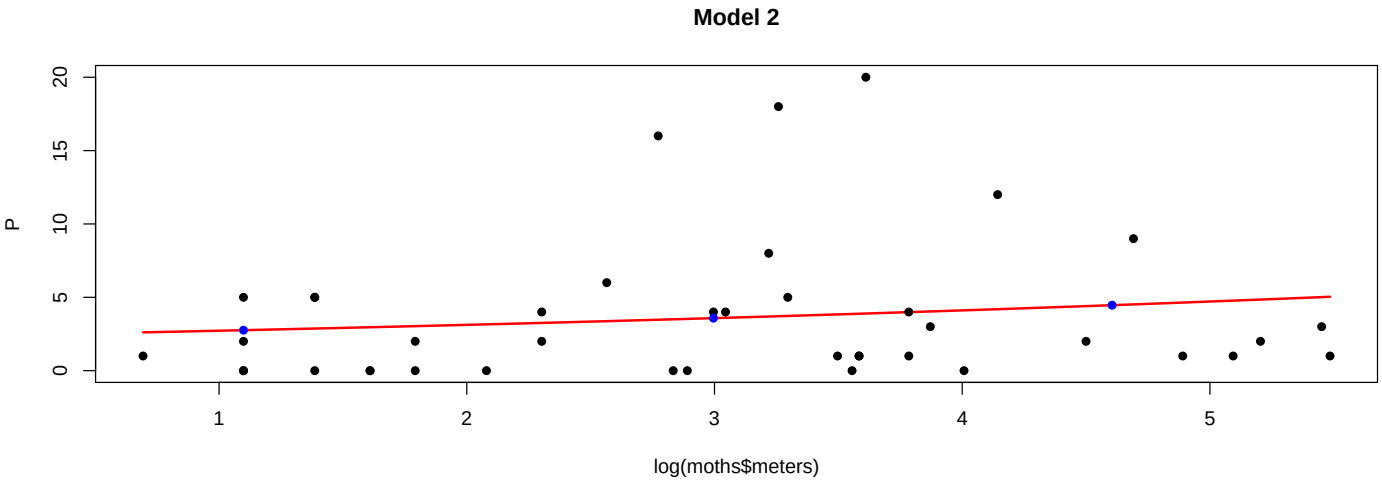
```
## 3.
```

```
## Start:  AIC=309.05
## P ~ log(meters)
##
##               Df Deviance    AIC
## <none>             212.82 309.05
## - log(meters)  1   217.82 312.04
```

```
##
## Call:  glm(formula = P ~ log(meters), family = "poisson", data = moths)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  log(meters)
##      0.8643       0.1372
##
## Degrees of Freedom: 40 Total (i.e. Null);  39 Residual
## Null Deviance:       217.8
## Residual Deviance: 212.8     AIC: 309
```

```
## 4.
```

```
##        1        2        3
## 2.759453 3.579565 4.463761
```



12 Analiza korelacji

12.1 Przykład

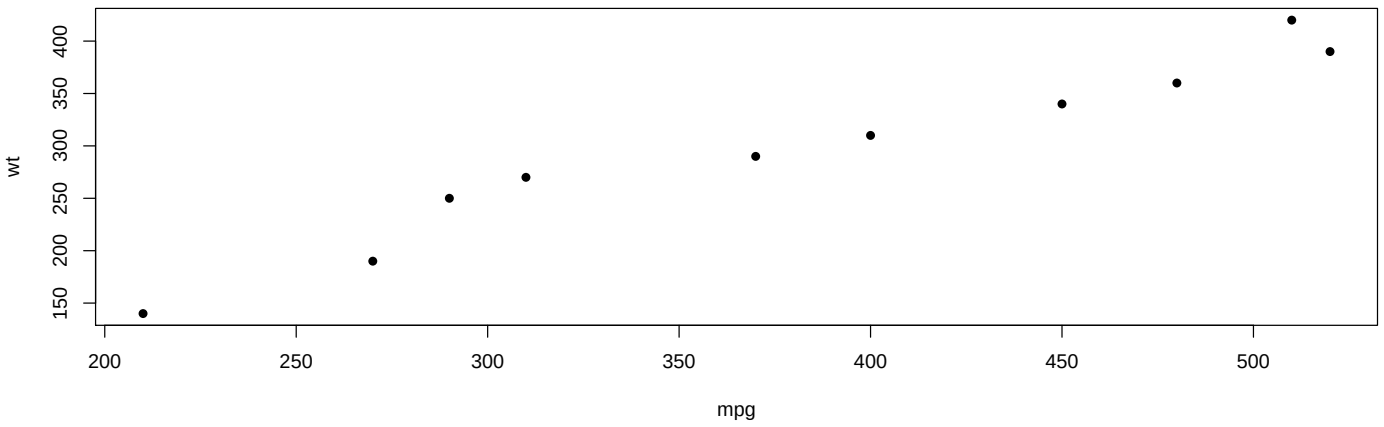
Przykład. Chcemy zbadać, czy istnieje zależność między miesięcznym dochodem rodziny na jedną osobę a miesięczną wartością wydatków na jedną osobę. Dane dotyczące tych dwóch cech dla dziesięciu rodzin podano w poniższej tabeli.

rodzina	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
przychody	210	270	290	310	370	400	450	480	510	520
wydatki	140	190	250	270	290	310	340	360	420	390

```
przychody <- c(210, 270, 290, 310, 370, 400, 450, 480, 510, 520)
wydatki <- c(140, 190, 250, 270, 290, 310, 340, 360, 420, 390)
data_set <- data.frame(przychody = przychody, wydatki = wydatki)
head(data_set)
```

```
##   przychody wydatki
## 1       210     140
## 2       270     190
## 3       290     250
## 4       310     270
## 5       370     290
## 6       400     310
```

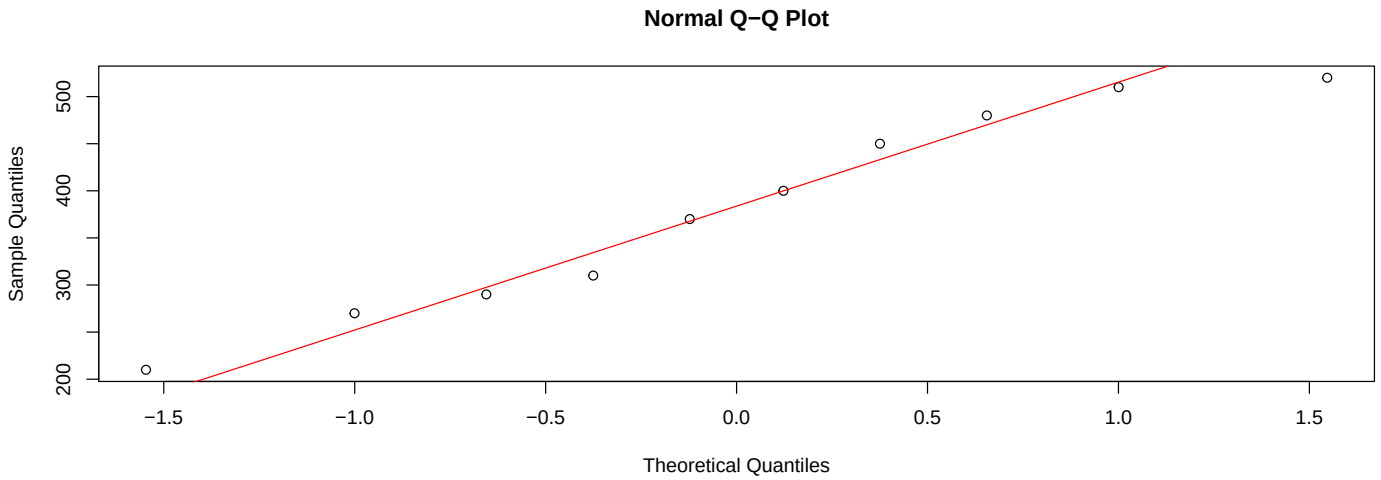
```
# wykres rozrzutu
plot(data_set$przychody, data_set$wydatki, xlab = "mpg", ylab = "wt", pch = 16)
```




```
# założenia
shapiro.test(data_set$przychody)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  data_set$przychody
## W = 0.94256, p-value = 0.5819
```

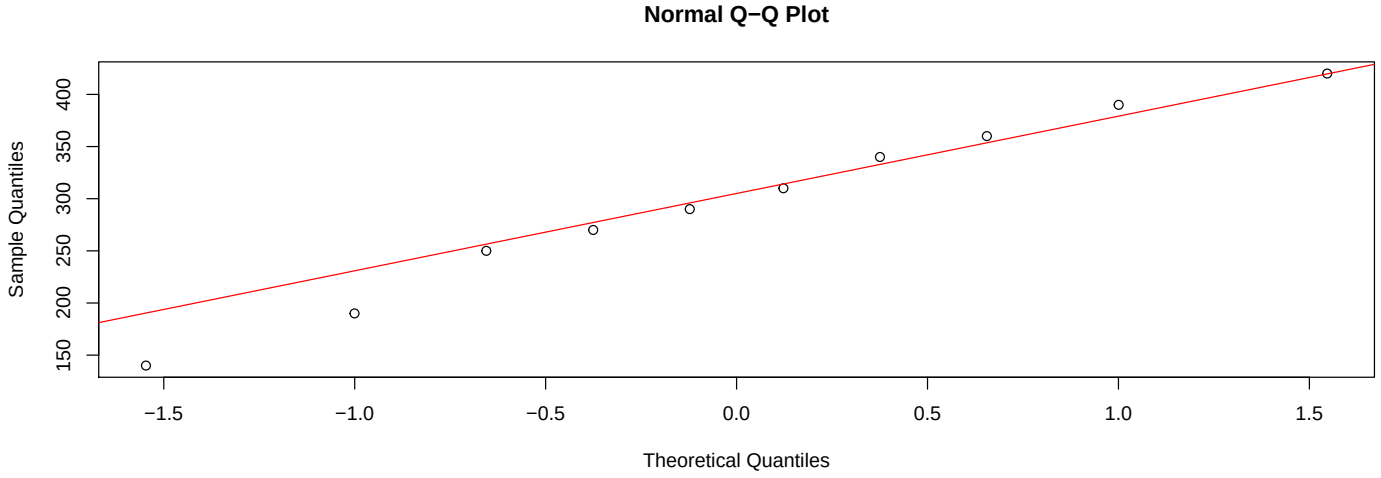
```
qqnorm(data_set$przychody)
qqline(data_set$przychody, col = "red")
```




```
shapiro.test(data_set$wydatki)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  data_set$wydatki
## W = 0.97753, p-value = 0.9506
```

```
qqnorm(data_set$wydatki)
qqline(data_set$wydatki, col = "red")
```




```
# testy
cor.test(data_set$przychody, data_set$wydatki, method = "pearson")
```

```
##
##  Pearson's product-moment correlation
##
## data:  data_set$przychody and data_set$wydatki
## t = 12.399, df = 8, p-value = 1.67e-06
## alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.8942997 0.9942521
## sample estimates:
##       cor
## 0.9749541
```

```r
cor.test(data_set$przychody, data_set$wydatki, method = "kendall")
```

```
##
##  Kendall's rank correlation tau
##
## data:  data_set$przychody and data_set$wydatki
## T = 44, p-value = 5.511e-06
## alternative hypothesis: true tau is not equal to 0
## sample estimates:
##       tau
## 0.9555556
```

```r
cor.test(data_set$przychody, data_set$wydatki, method = "spearman")
```

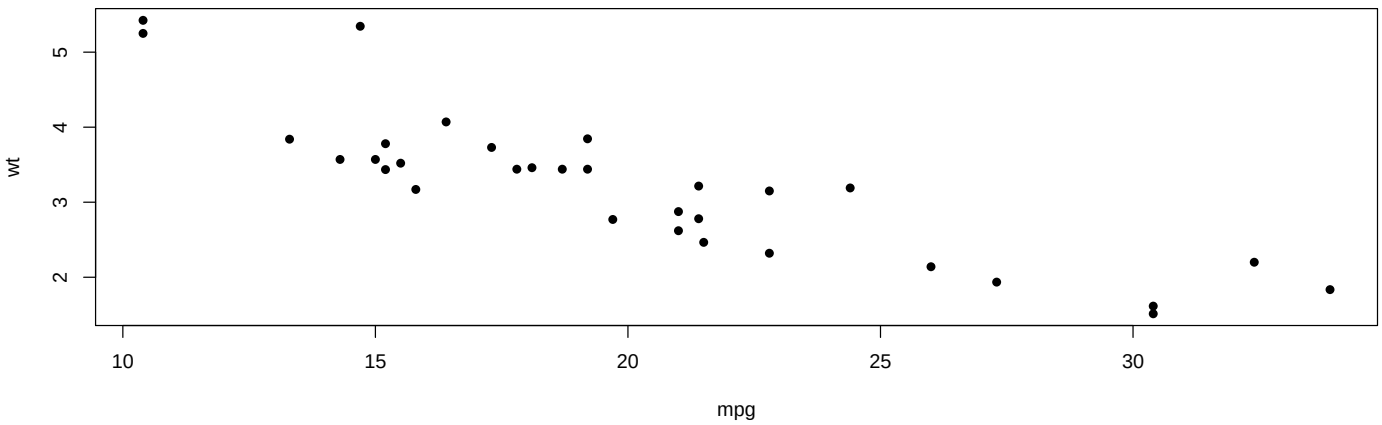
```
##
##  Spearman's rank correlation rho
##
## data:  data_set$przychody and data_set$wydatki
## S = 2, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
## sample estimates:
##       rho
## 0.9878788
```

12.2 Zadania

Zadanie 1. Zbiór danych `mtcars` zawiera dane dotyczące pewnych cech samochodów. Interesuje nas zbadanie korelacji między zmiennymi `mpg` i `wg`.

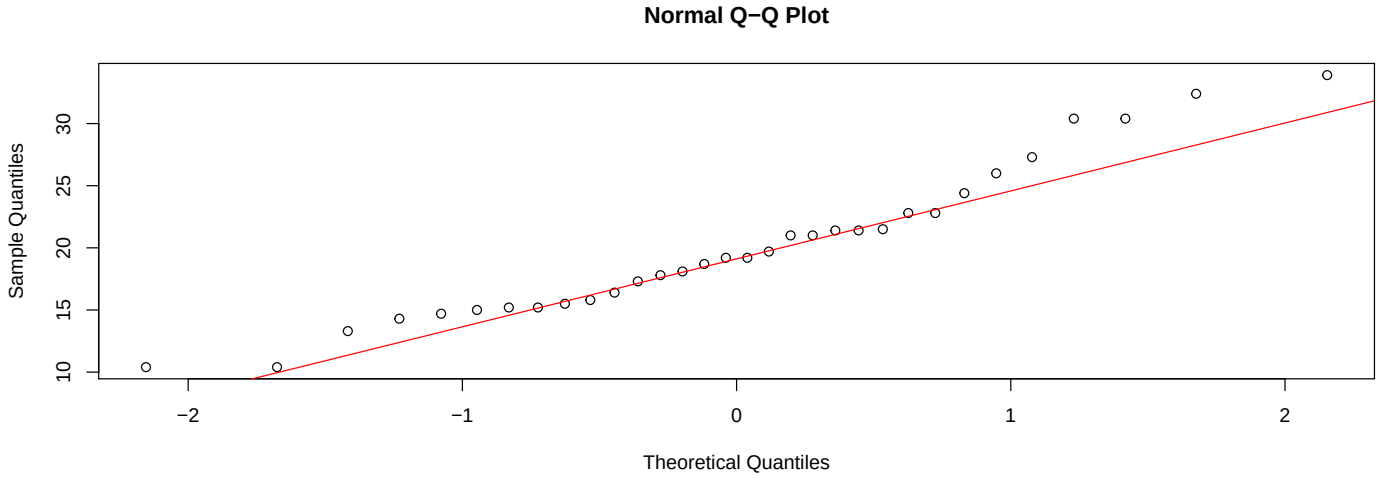
```
##                   mpg cyl disp  hp drat    wt  qsec vs am gear carb
## Mazda RX4         21.0   6  160 110 3.90 2.620 16.46  0  1    4    4
## Mazda RX4 Wag     21.0   6  160 110 3.90 2.875 17.02  0  1    4    4
## Datsun 710        22.8   4  108  93 3.85 2.320 18.61  1  1    4    1
## Hornet 4 Drive    21.4   6  258 110 3.08 3.215 19.44  1  0    3    1
## Hornet Sportabout 18.7   8  360 175 3.15 3.440 17.02  0  0    3    2
## Valiant           18.1   6  225 105 2.76 3.460 20.22  1  0    3    1
```

1. Wykonaj wykres rozrzutu dla badanych cech.

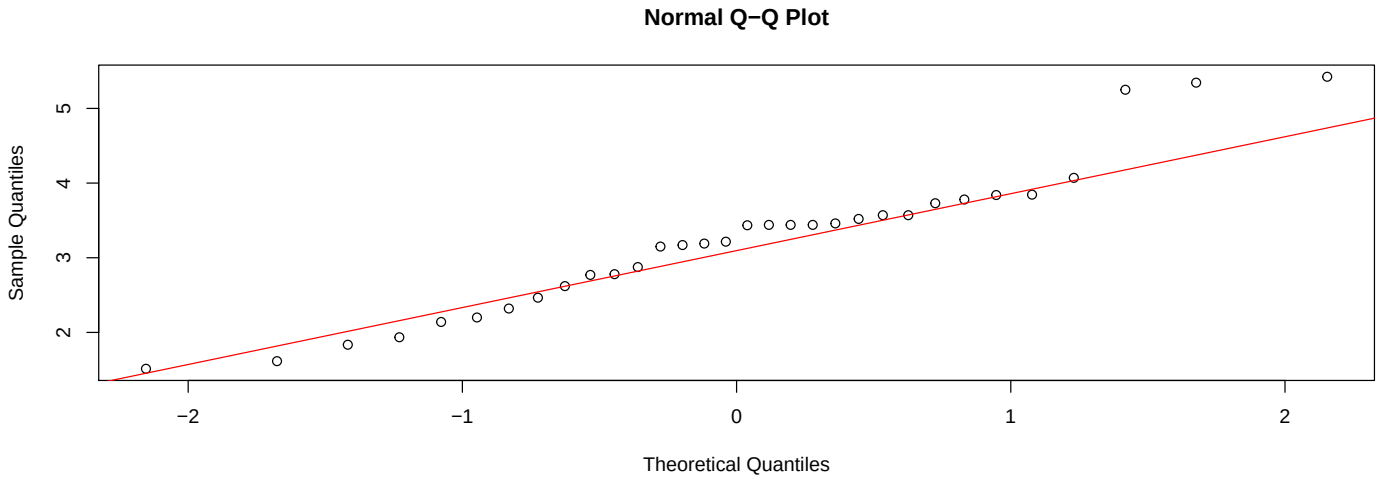


2. Sprawdź założenia testu istotności dla współczynnika korelacji.

```
## [1] 0.1228814
```




```
## [1] 0.09265499
```



3. Wykonaj test istotności dla współczynnika korelacji dla zmiennych `mpg` i `wg`. Oszacuj punktowo i przedziałowo współczynnik korelacji.

```
## [1] 1.293959e-10
```

```
##        cor
## -0.8676594
```

```
## [1] -0.9338264 -0.7440872
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.95
```

4. Wykonaj polecenie punktu 3 korzystając ze wpółczynników Kendalla i Spearmana.

```
## [1] 6.70577e-09
```

```
##        tau
## -0.7278321
```

```
## [1] 1.487595e-11
```

```
##       rho
## -0.886422
```

13 Analiza składowych głównych

13.1 Przykład

Przykład. Zbiór danych `USArrests` zawiera informacje dotyczące liczby morderstw, napadów, gwałtów przypadających na 100,000 osób w poszczególnych stanach USA w roku 1973 oraz procent ludności mieszkającej w miastach. Chcielibyśmy się dowiedzieć, czy stany są do siebie w pewien sposób zbliżone oraz spróbować zwizualizować je na płaszczyźnie.

```
head(USArrests)
```

```
##            Murder Assault UrbanPop Rape
## Alabama      13.2     236       58 21.2
## Alaska       10.0     263       48 44.5
## Arizona       8.1     294       80 31.0
## Arkansas      8.8     190       50 19.5
## California    9.0     276       91 40.6
## Colorado      7.9     204       78 38.7
```

```
dim(USArrests)
```

```
## [1] 50  4
```

- przygotowanie danych do analizy składowych głównych

```
# sprawdzamy czy wariancje (,,zmienności'') zmiennych są bardzo zróżnicowane
var(USArrests)
```

```
##              Murder   Assault   UrbanPop      Rape
## Murder    18.970465  291.0624   4.386204  22.99141
## Assault  291.062367 6945.1657 312.275102 519.26906
## UrbanPop   4.386204  312.2751 209.518776  55.76808
## Rape      22.991412  519.2691  55.768082  87.72916
```

```
# tak są, więc centrujemy i skalujemy funkcją scale
USArrests_scale <- scale(USArrests)
var(USArrests_scale)
```

```
##              Murder   Assault   UrbanPop      Rape
## Murder   1.00000000 0.8018733 0.06957262 0.5635788
## Assault  0.80187331 1.0000000 0.25887170 0.6652412
## UrbanPop 0.06957262 0.2588717 1.00000000 0.4113412
## Rape     0.56357883 0.6652412 0.41134124 1.0000000
```

- model analizy składowych głównych w R i procent wyjaśnianej wariancji zmiennych oryginalnych przez poszczególne składowe główne

```
pca <- prcomp(USArrests, scale = TRUE)
# lub
# pca <- prcomp(USArrests_scale)
pca
```

```
## Standard deviations (1, .., p=4):
## [1] 1.5748783 0.9948694 0.5971291 0.4164494
##
## Rotation (n x k) = (4 x 4):
```

```
##                 PC1        PC2        PC3         PC4
## Murder   -0.5358995  0.4181809 -0.3412327  0.64922780
## Assault  -0.5831836  0.1879856 -0.2681484 -0.74340748
## UrbanPop -0.2781909 -0.8728062 -0.3780158  0.13387773
## Rape     -0.5434321 -0.1673186  0.8177779  0.08902432
```

```
# bez skalowania
prcomp(USArrests)
```

```
## Standard deviations (1, .., p=4):
## [1] 83.732400 14.212402  6.489426  2.482790
##
## Rotation (n x k) = (4 x 4):
##                 PC1         PC2         PC3         PC4
## Murder   0.04170432 -0.04482166  0.07989066 -0.99492173
## Assault  0.99522128 -0.05876003 -0.06756974  0.03893830
## UrbanPop 0.04633575  0.97685748 -0.20054629 -0.05816914
## Rape     0.07515550  0.20071807  0.97408059  0.07232502
```

```
summary(pca)
```

```
## Importance of components:
##                           PC1    PC2     PC3     PC4
## Standard deviation     1.5749 0.9949 0.59713 0.41645
## Proportion of Variance 0.6201 0.2474 0.08914 0.04336
## Cumulative Proportion  0.6201 0.8675 0.95664 1.00000
```

- wyniki (ang. *scores*) - współrzędne obserwacji w nowym układzie współrzędnych utworzonym przez składowe główne (to one najczęściej podlegają wizualizacji)

```
head(pca$x)
```

```
##                   PC1        PC2         PC3          PC4
## Alabama    -0.9756604  1.1220012 -0.43980366  0.154696581
## Alaska     -1.9305379  1.0624269  2.01950027 -0.434175454
## Arizona    -1.7454429 -0.7384595  0.05423025 -0.826264240
## Arkansas    0.1399989  1.1085423  0.11342217 -0.180973554
## California -2.4986128 -1.5274267  0.59254100 -0.338559240
## Colorado   -1.4993407 -0.9776297  1.08400162  0.001450164
```

- ładunki (ang. *loadings*) - współczynniki pokazujące wkład poszczególnych zmiennych bazowych w tworzenie składowych głównych (im wartość bezwzględna z ładunku jest większa, tym zmienna ma większy wkład w budowę składowej głównej)

```
pca$rotation
```

```
##                 PC1        PC2        PC3         PC4
## Murder   -0.5358995  0.4181809 -0.3412327  0.64922780
## Assault  -0.5831836  0.1879856 -0.2681484 -0.74340748
## UrbanPop -0.2781909 -0.8728062 -0.3780158  0.13387773
## Rape     -0.5434321 -0.1673186  0.8177779  0.08902432
```

- wykres osypiska (piargowy, ang. *scree plot*) - wykres wariancji poszczególnych składowych głównych

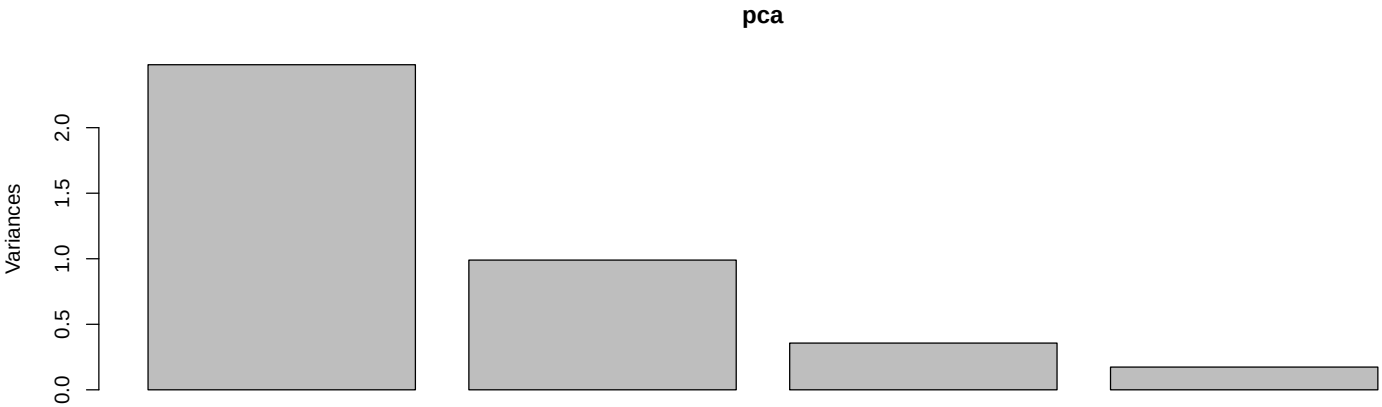
```
pca$sdev^2
```

```
## [1] 2.4802416 0.9897652 0.3565632 0.1734301
```

```
apply(pca$x, 2, var)
```

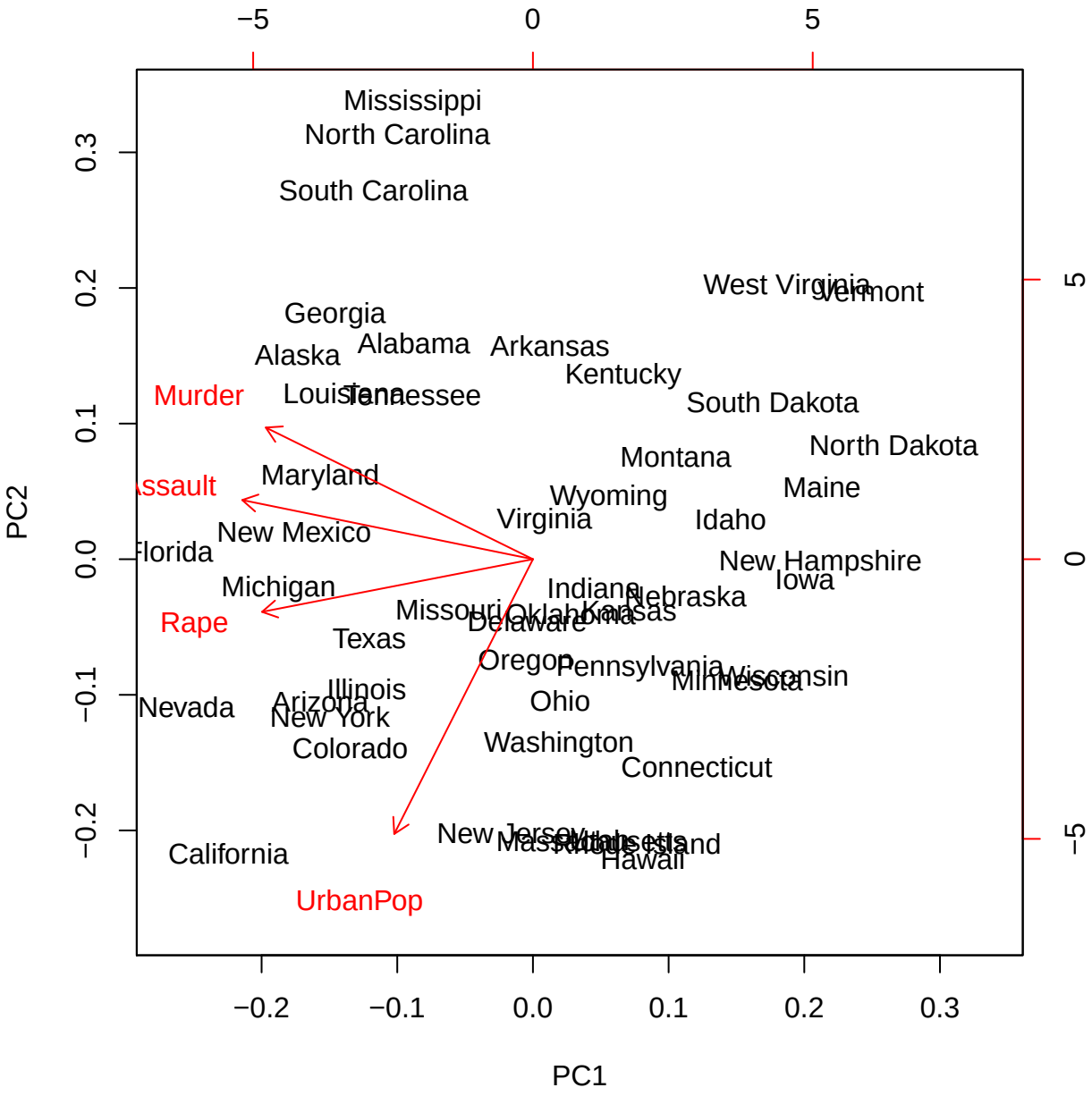
```
##       PC1       PC2       PC3       PC4
## 2.4802416 0.9897652 0.3565632 0.1734301
```

```
plot(pca)
```



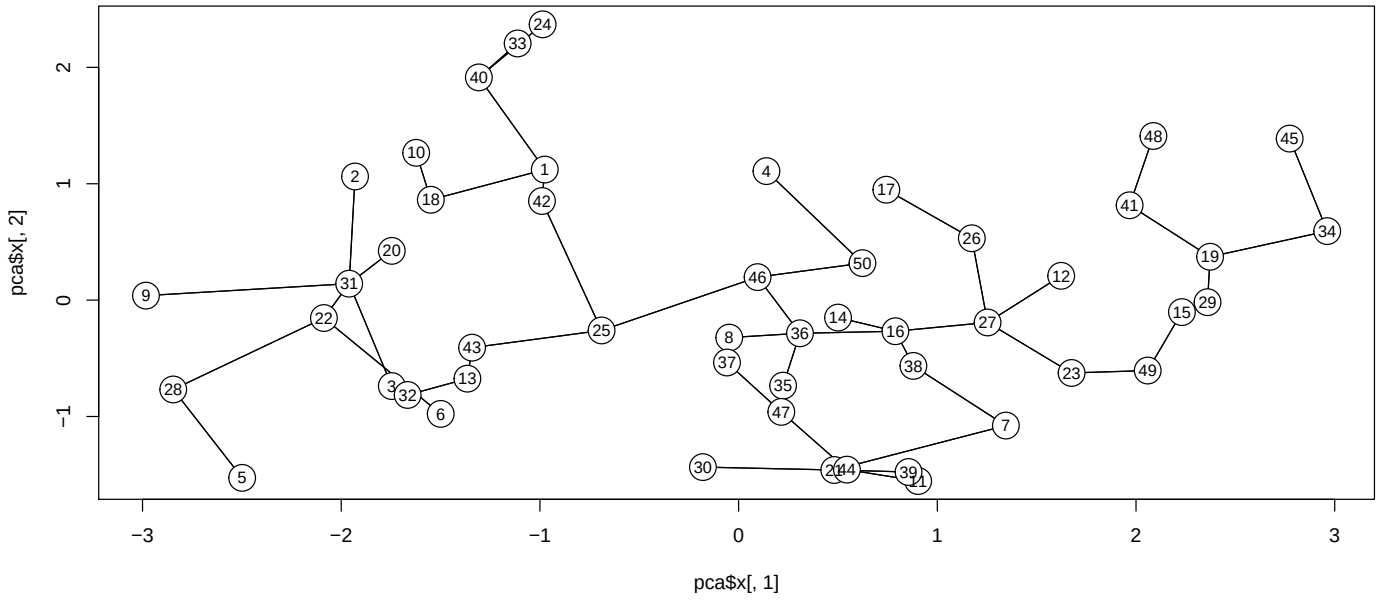
- biplot (ang. *biplot*) - wykres, na którym punkty przedstawiają poszczególne obserwacje w nowym układzie dwóch pierwszych składowych głównych, a strzałki oznaczają zmienne. Kierunek strzałek pokazuje wpływ tych zmiennych odpowiednio na pierwszą i drugą składową główną. Kąt przecięcia strzałek jest proporcjonalny do zależności pomiędzy zmiennymi, a ich długość odzwierciedla odchylenie standardowe.

```
biplot(pca)
```



- Żeby stwierdzić, czy taki wykres jest adekwatnym odzwierciedleniem położenia oryginalnych punktów, można na niego nanieść minimalne drzewo rozpinające (MST). MST to graf, którego wierzchołkami są obserwacje, dwa punkty połączone są dokładnie jedną ścieżką, a suma krawędzi jest minimalna. Punkty połączone krawędziami powinny być blisko siebie na wykresie.

```
library(ape)
plot(mst(dist(USArrests_scale)), x1 = pca$x[, 1], x2 = pca$x[, 2])
```




```
# odczytywanie nazw obserwacji
row.names(USArrests_scale[c(24, 33),])
```

```
## [1] "Mississippi"    "North Carolina"
```

13.2 Zadania

Zadanie 1. W powyższym przykładzie do analizy składowych głównych zostały wykorzystane wszystkie zmienne. Jednak jedna z nich jest bardzo słabo skorelowana z pozostałymi. Ustal tę zmienną, a następnie wykonaj poniższe polecenia bez jej uzwględnienia:

1. Dokonaj analizy składowych głównych.

```
## Standard deviations (1, .., p=3):
## [1] 1.5357670 0.6767949 0.4282154
##
## Rotation (n x k) = (3 x 3):
##                PC1        PC2        PC3
## Murder  -0.5826006  0.5339532 -0.6127565
## Assault -0.6079818  0.2140236  0.7645600
## Rape    -0.5393836 -0.8179779 -0.1999436
```

2. Jaki procent wariancji tłumaczony jest przez poszczególne składowe?

```
## Importance of components:
##                           PC1    PC2     PC3
## Standard deviation     1.5358 0.6768 0.42822
## Proportion of Variance 0.7862 0.1527 0.06112
## Cumulative Proportion  0.7862 0.9389 1.00000
```

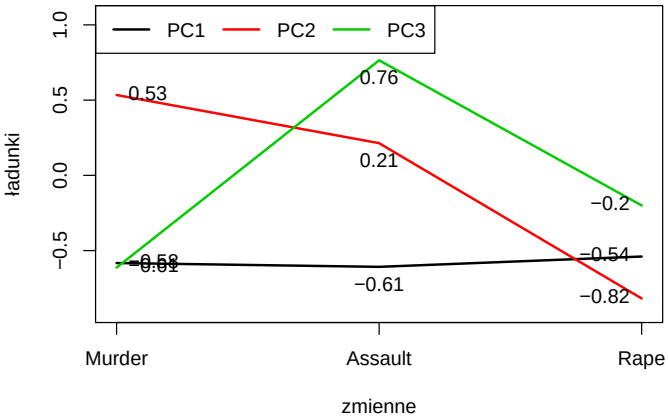
3. Wyznacz współrzędne obserwacji w nowym układzie współrzędnych utworzonym przez składowe główne.

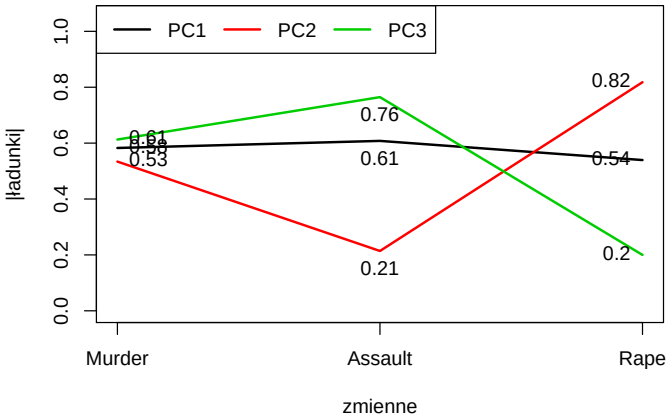
```
##                   PC1        PC2         PC3
## Alabama    -1.1980278  0.8338118 -0.16217848
## Alaska     -2.3087473 -1.5239622  0.03833574
## Arizona    -1.5033307 -0.4983038  0.87822311
## Arkansas   -0.1759894  0.3247326  0.07111174
```

```
## California -2.0452358 -1.2725770  0.38153933
## Colorado   -1.2634133 -1.4264063 -0.08369314
## ...
```

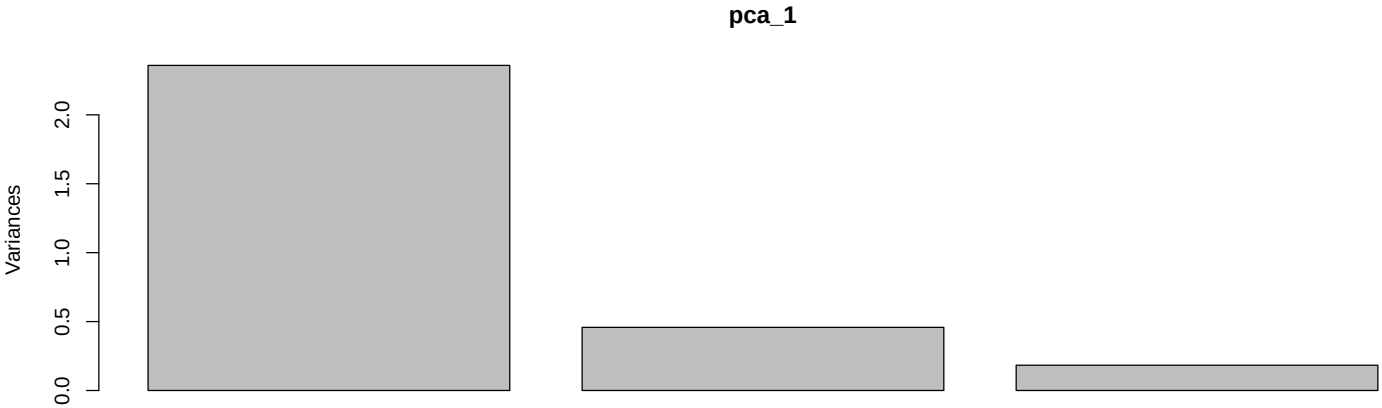
4. Dokonaj interpretacji ładunków i zilustruj je na wykresie.

```
##                PC1        PC2        PC3
## Murder  -0.5826006  0.5339532 -0.6127565
## Assault -0.6079818  0.2140236  0.7645600
## Rape    -0.5393836 -0.8179779 -0.1999436
```



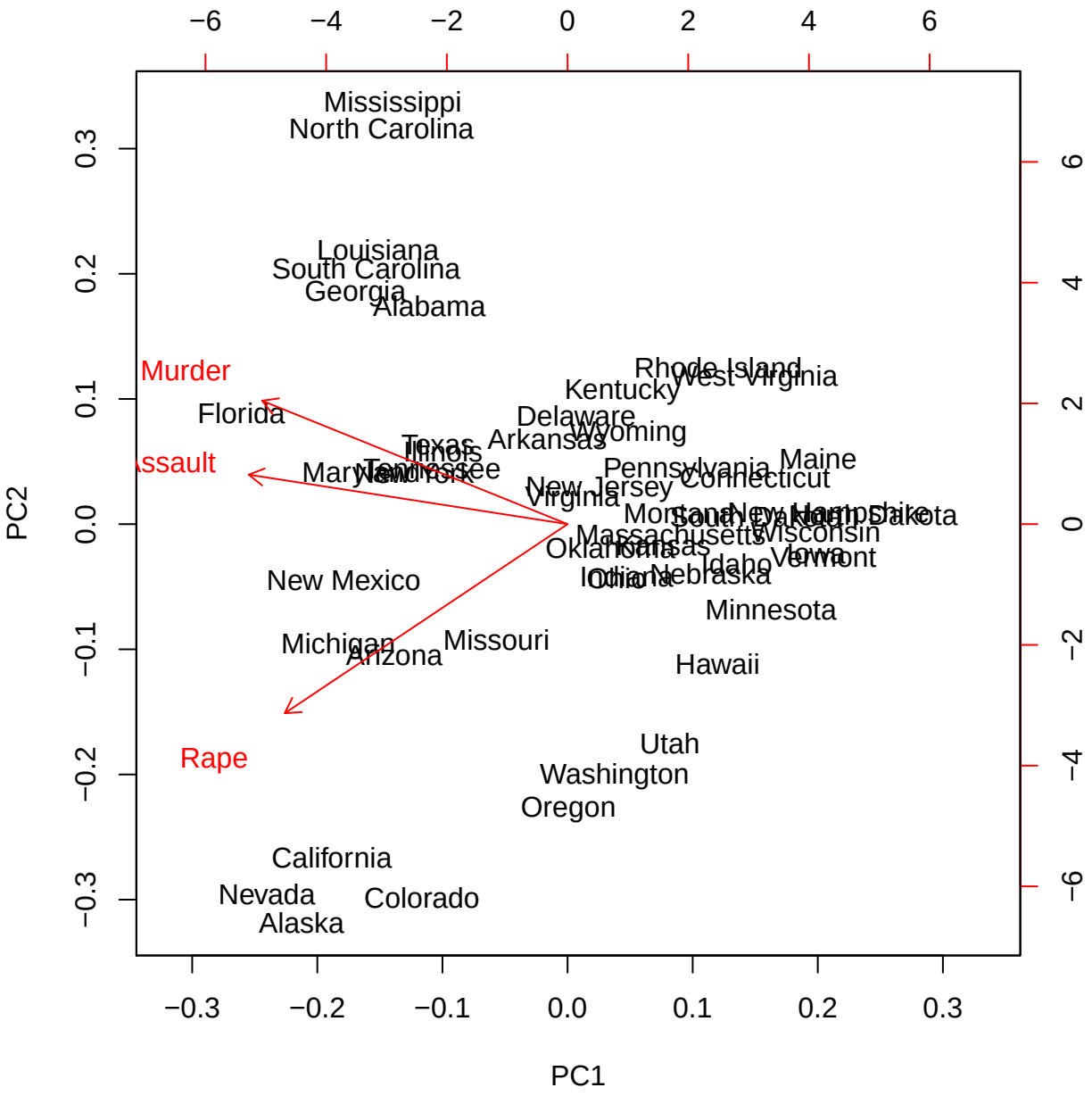


5. Narysuj wykres osypiska i zaproponuj optymalną liczbę składowych głównych w oparciu o trzy kryteria.

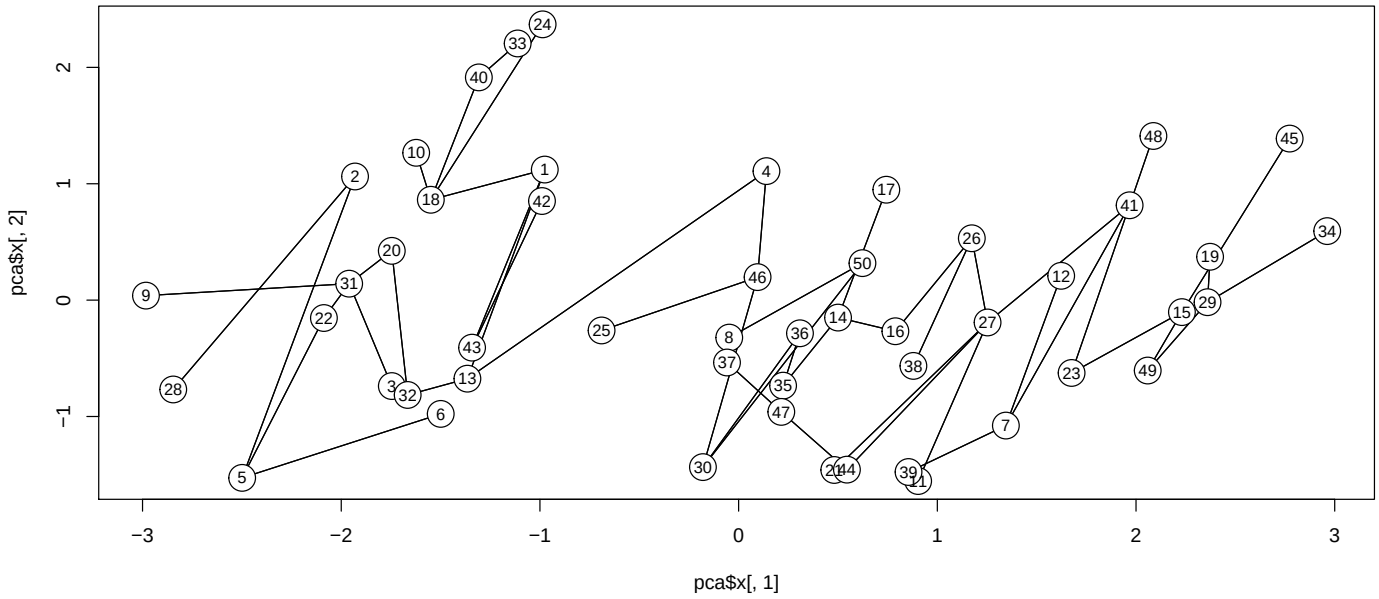



```
## 1 lub 2
```

6. Przedstaw stany w układzie dwóch pierwszych składowych głównych (dokładniej narysuj biplot i dokonaj jego interpretacji).



7. Przedstaw stany za pomocą minimalnego drzewa rozpinającego.



Zadanie 2. Zbiór danych `mtcars` zawiera informacje na temat 32 samochodów z roku 1974.

1. Dokonaj analizy składowych głównych biorąc pod uwagę cechy: `mpg`, `disp`, `hp`, `drat`, `wt`, `qsec`.

```
## Standard deviations (1, .., p=6):
## [1] 2.0463129 1.0714999 0.5773705 0.3928874 0.3532648 0.2279872
##
## Rotation (n x k) = (6 x 6):
##              PC1         PC2         PC3        PC4        PC5         PC6
## mpg  -0.4586835  0.05867609 -0.19479235 0.78205878 -0.1111533 -0.35249327
## disp  0.4660354 -0.06065296  0.09688406 0.60001871  0.2946297  0.56825752
## hp    0.4258534  0.36147576  0.14613554 0.12301873 -0.8057408 -0.04771555
## drat -0.3670963  0.43652537  0.80049152 0.02259258  0.1437714  0.11277675
## wt    0.4386179 -0.29953457  0.41776208 0.10438337  0.2301541 -0.69246040
## qsec -0.2528320 -0.76284877  0.34059066 0.04268124 -0.4218755  0.24152663
```

2. Jaki procent wariancji tłumaczony jest przez poszczególne składowe?

```
## Importance of components:
##                            PC1    PC2     PC3     PC4    PC5     PC6
## Standard deviation     2.0463 1.0715 0.57737 0.39289 0.3533 0.22799
## Proportion of Variance 0.6979 0.1913 0.05556 0.02573 0.0208 0.00866
## Cumulative Proportion  0.6979 0.8892 0.94481 0.97054 0.9913 1.00000
```

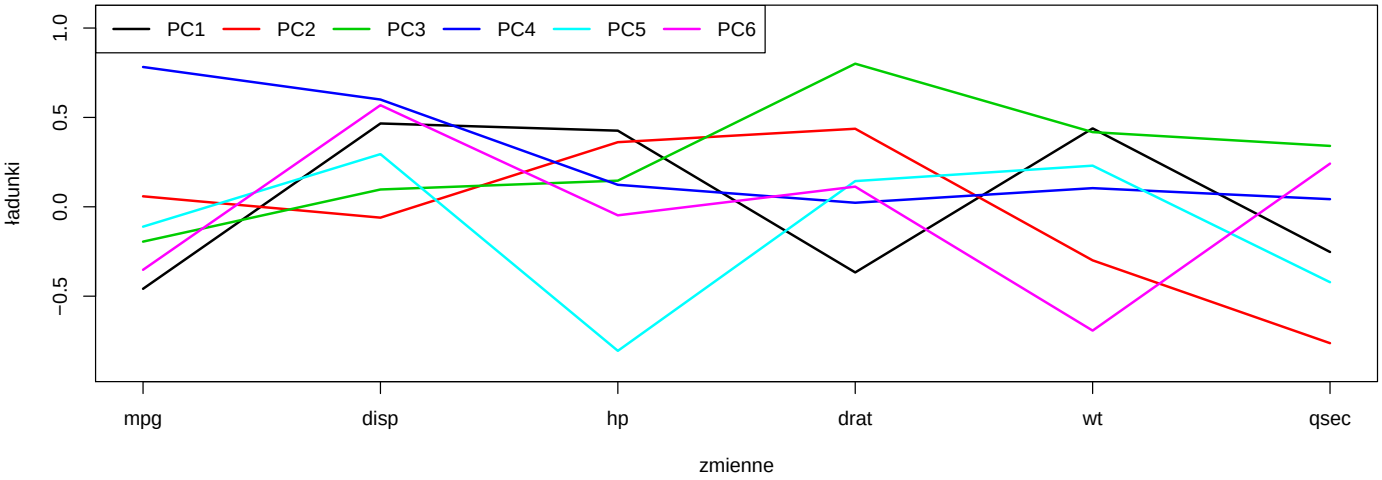
3. Wyznacz współrzędne obserwacji w nowym układzie współrzędnych utworzonym przez składowe główne.

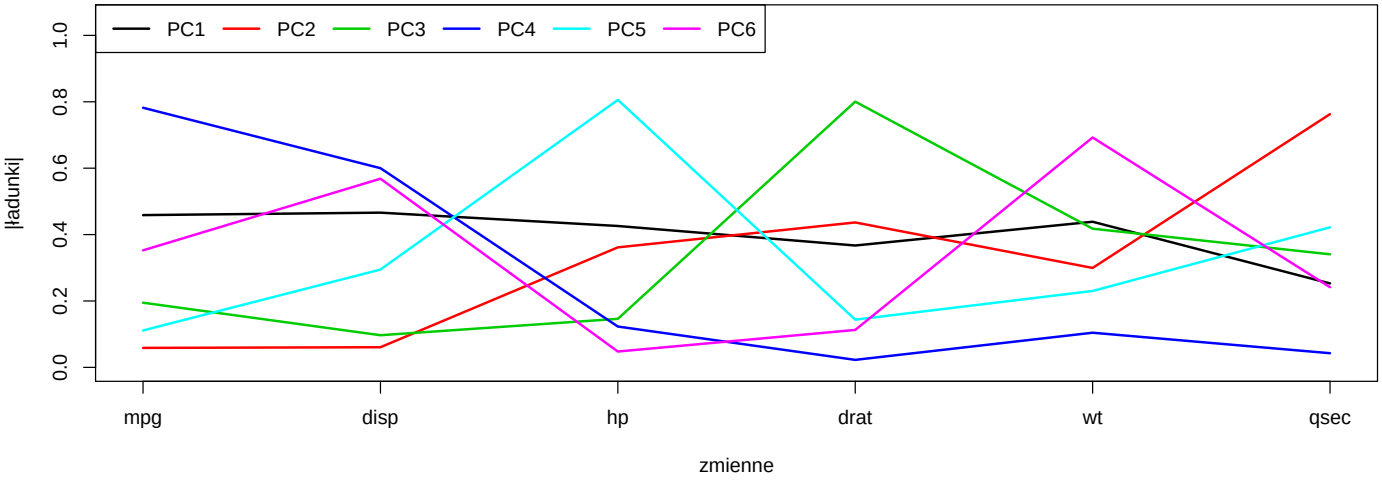
```
##                           PC1          PC2        PC3        PC4
## Mazda RX4         -0.8425806  0.873469391 -0.2282783 -0.3742725
## Mazda RX4 Wag     -0.8075041  0.556341552 -0.0126678 -0.3336931
## Datsun 710        -1.6850448 -0.040006569 -0.1564937 -0.4057157
## Hornet 4 Drive    -0.0964443 -1.294377904 -0.5702297  0.2520788
## Hornet Sportabout  1.2915096 -0.006516693 -0.5250741  0.4813192
## Valiant            0.2187309 -2.005957905 -0.7258399 -0.3136170
##                           PC5         PC6
## Mazda RX4          0.51522641 -0.05293884
## Mazda RX4 Wag      0.44299870 -0.15771326
## Datsun 710        -0.03340433  0.10756126
```

```
## Hornet 4 Drive    -0.04326023  0.18173489
## Hornet Sportabout  0.12822104  0.29051949
## Valiant           -0.21465335  0.09145688
## ...
```

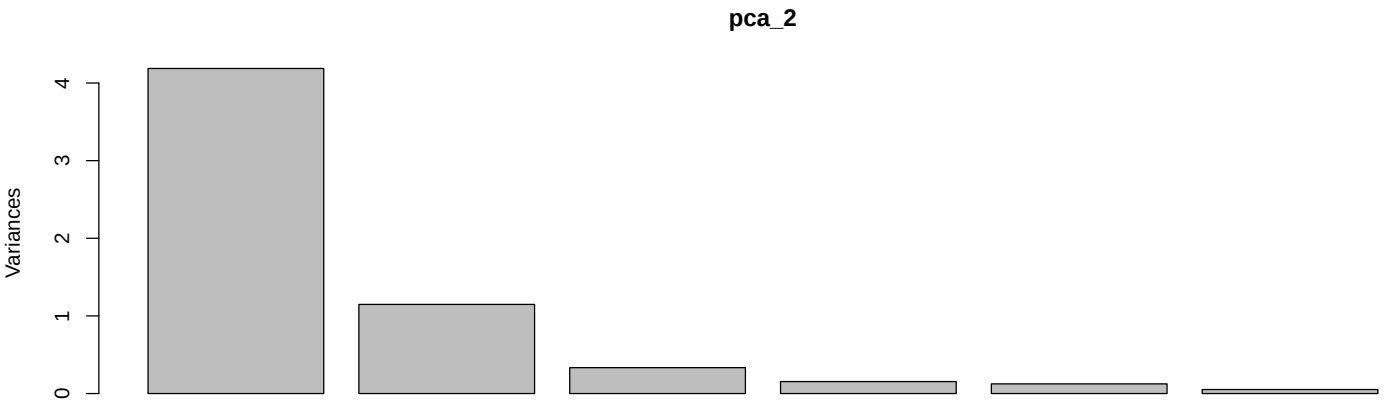
4. Dokonaj interpretacji ładunków i zilustruj je na wykresie.

```
##              PC1         PC2         PC3        PC4         PC5         PC6
## mpg  -0.4586835  0.05867609 -0.19479235 0.78205878 -0.1111533 -0.35249327
## disp  0.4660354 -0.06065296  0.09688406 0.60001871  0.2946297  0.56825752
## hp    0.4258534  0.36147576  0.14613554 0.12301873 -0.8057408 -0.04771555
## drat -0.3670963  0.43652537  0.80049152 0.02259258  0.1437714  0.11277675
## wt    0.4386179 -0.29953457  0.41776208 0.10438337  0.2301541 -0.69246040
## qsec -0.2528320 -0.76284877  0.34059066 0.04268124 -0.4218755  0.24152663
```



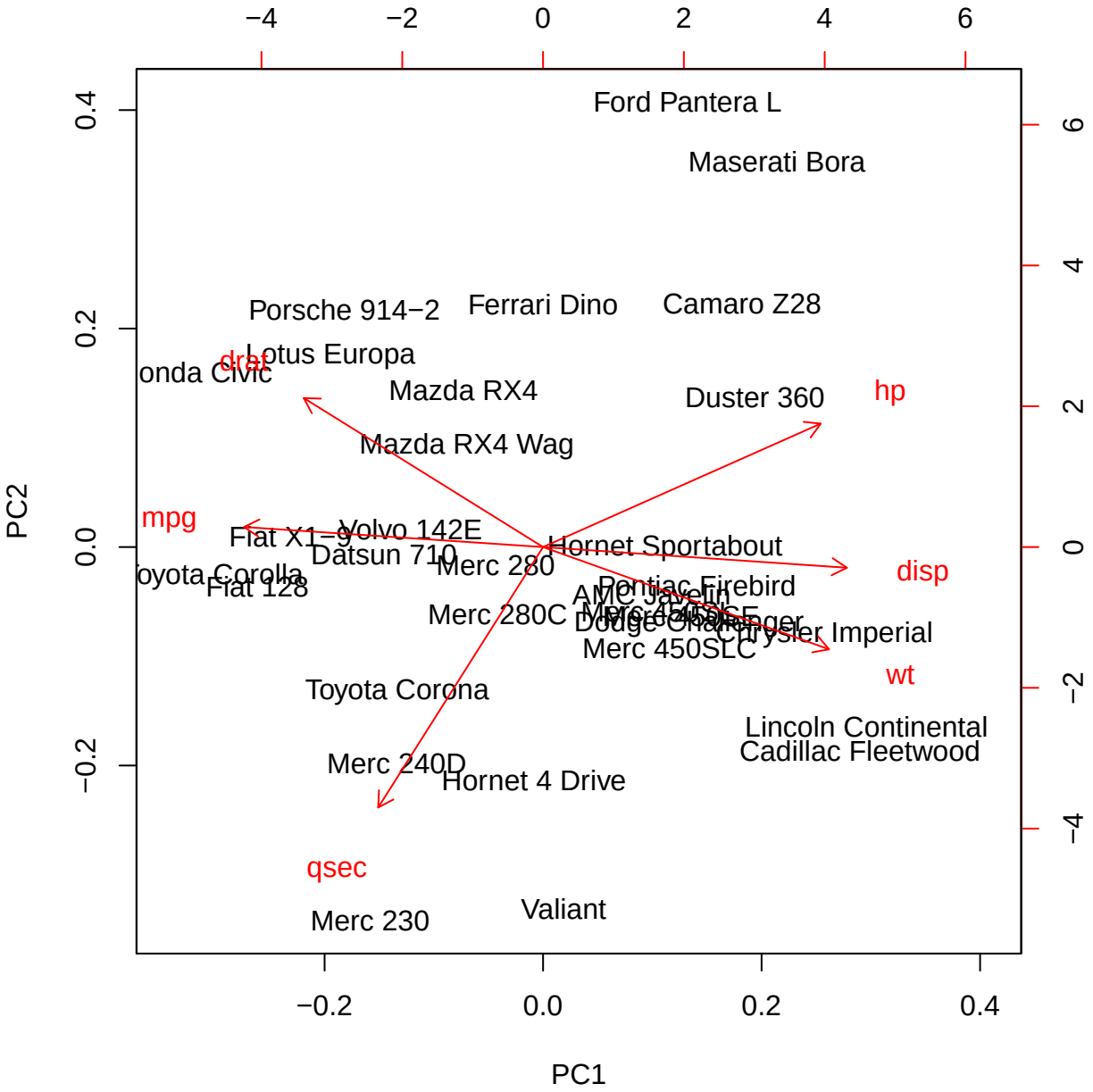


5. Narysuj wykres osypiska i zaproponuj optymalną liczbę składowych głównych w oparciu o trzy kryteria.

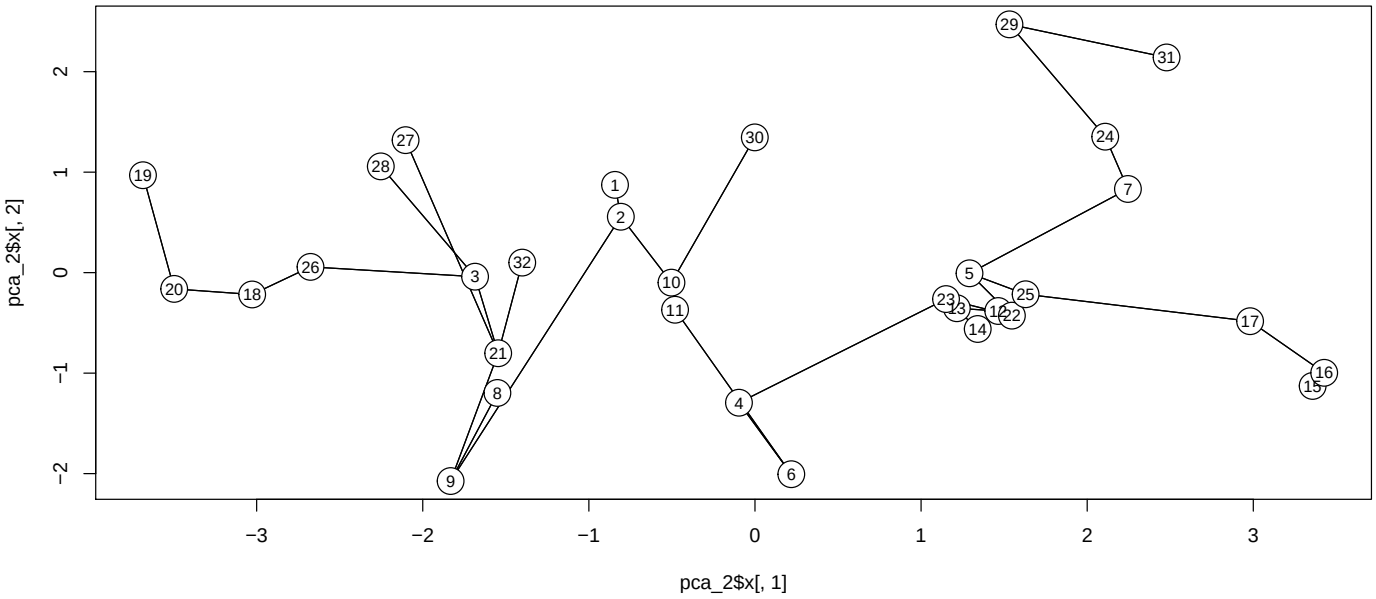



```
## 2 lub 3
```

6. Przedstaw samochody w układzie dwóch pierwszych składowych głównych (dokładniej narysuj biplot i dokonaj jego interpretacji).



7. Przedstaw samochody za pomocą minimalnego drzewa rozpinającego.



8. Jak bardzo będą różniły się wyniki, jeśli nie wykonamy skalowania danych?

Ad. 1

```
## Standard deviations (1, .., p=6):
## [1] 310.0207637  40.8471739  15.7168252   2.1068823   0.3894500   0.2969505
##
## Rotation (n x k) = (6 x 6):
##              PC1          PC2         PC3          PC4          PC5
## mpg  -0.05193468  0.121255352 -0.82446804  0.540735371 -0.064362234
## disp -0.85253108 -0.522102198 -0.00915689  0.022137483  0.001587345
## hp   -0.51734213  0.841835388  0.15361995 -0.004990023 -0.006795464
## drat -0.01010286  0.021298587 -0.10869056 -0.033506518  0.982931599
## wt   -0.01067910  0.001369032 -0.04162846 -0.192177061  0.129755288
## qsec -0.05132793  0.059700171 -0.53199901 -0.817945952 -0.113215907
##                PC6
## mpg   0.0794678281
## disp -0.0048593900
## hp   -0.0003699391
## drat -0.1426655136
## wt    0.9717935462
## qsec -0.1700734209
```

Ad. 2.

```
## Importance of components:
##                             PC1      PC2      PC3     PC4    PC5   PC6
## Standard deviation     310.0208 40.84717 15.71683 2.10688 0.3895 0.297
## Proportion of Variance   0.9804  0.01702  0.00252 0.00005 0.0000 0.000
## Cumulative Proportion    0.9804  0.99743  0.99995 1.00000 1.0000 1.000
```

Ad. 3.

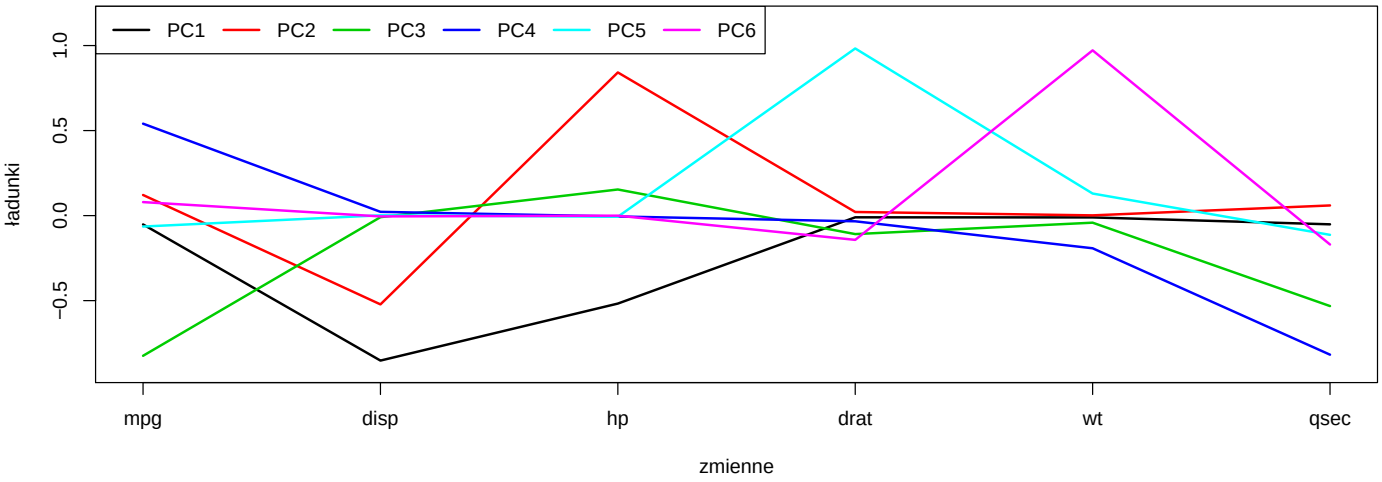
```
##                        PC1       PC2        PC3        PC4         PC5
## Mazda RX4         -195.3155  12.68122 -11.170400  0.2509678  0.46472555
## Mazda RX4 Wag     -195.3469  12.71500 -11.478935 -0.2560871  0.43441224
## Datsun 710        -142.3892  25.86447 -15.915699 -1.5412826  0.05036709
```

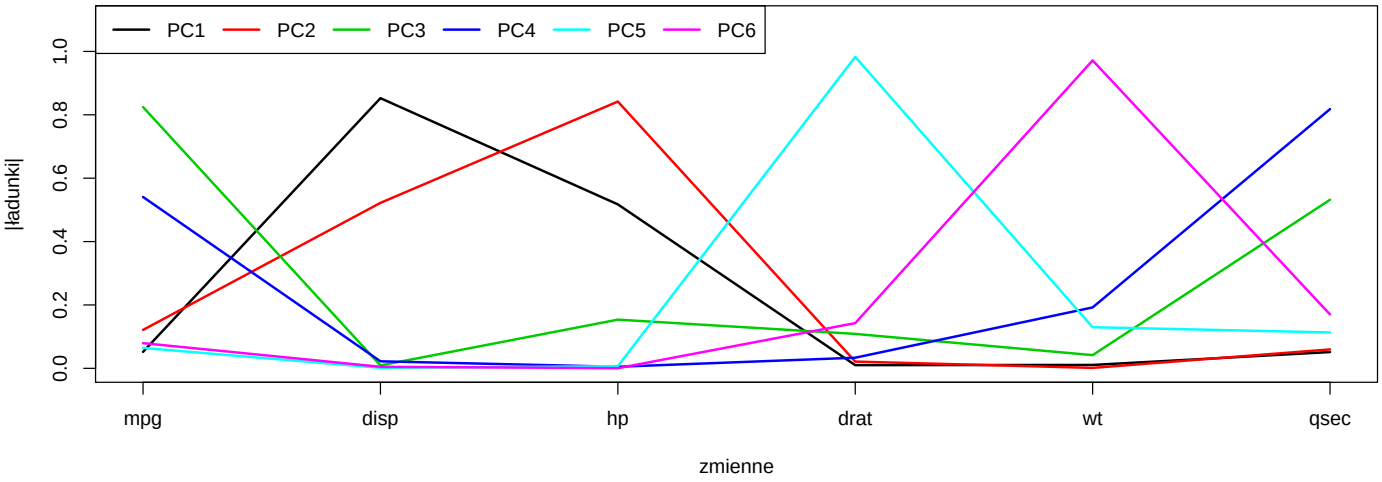
```
## Hornet 4 Drive    -279.0353 -38.27504 -13.918563  0.1123864 -0.47164240
## Hornet Sportabout -399.3594 -37.28023  -1.370742  2.5199166 -0.20567766
## Valiant           -248.1831 -25.61490 -12.054118 -3.0519863 -0.64870858
##                          PC6
## Mazda RX4           0.04092377
## Mazda RX4 Wag       0.19349001
## Datsun 710         -0.20711953
## Hornet 4 Drive     -0.21512523
## Hornet Sportabout  -0.32914754
## Valiant            -0.16407438
```

```
## ...
```

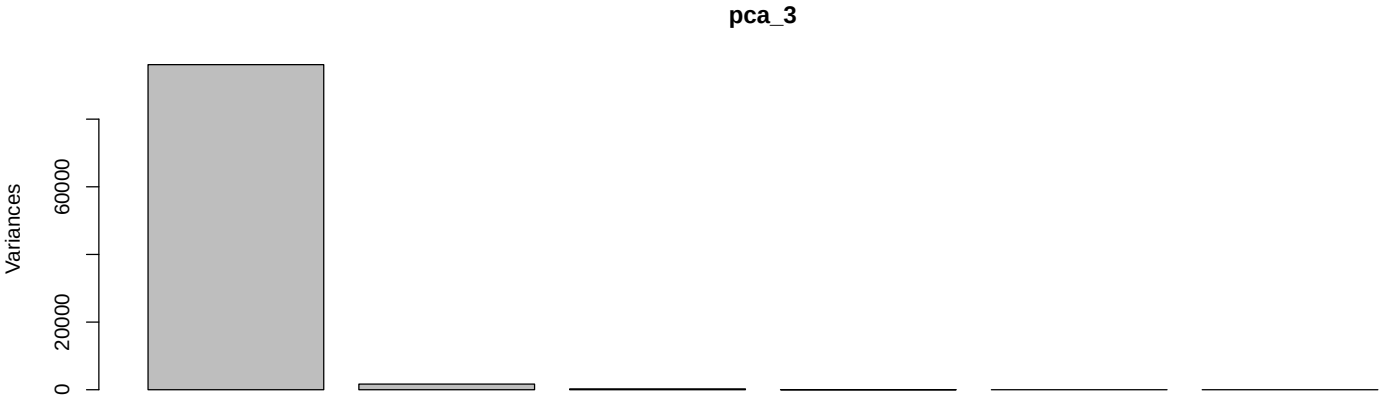
Ad. 4.

```
##               PC1          PC2         PC3          PC4          PC5
## mpg  -0.05193468  0.121255352 -0.82446804  0.540735371 -0.064362234
## disp -0.85253108 -0.522102198 -0.00915689  0.022137483  0.001587345
## hp   -0.51734213  0.841835388  0.15361995 -0.004990023 -0.006795464
## drat -0.01010286  0.021298587 -0.10869056 -0.033506518  0.982931599
## wt   -0.01067910  0.001369032 -0.04162846 -0.192177061  0.129755288
## qsec -0.05132793  0.059700171 -0.53199901 -0.817945952 -0.113215907
##                PC6
## mpg   0.0794678281
## disp -0.0048593900
## hp   -0.0003699391
## drat -0.1426655136
## wt    0.9717935462
## qsec -0.1700734209
```


PC1
PC2
PC3
PC4
PC5
PC6
ładunki
1.0
0.5
0.0
−0.5
mpg
disp
hp
drat
wt
qsec
zmienne

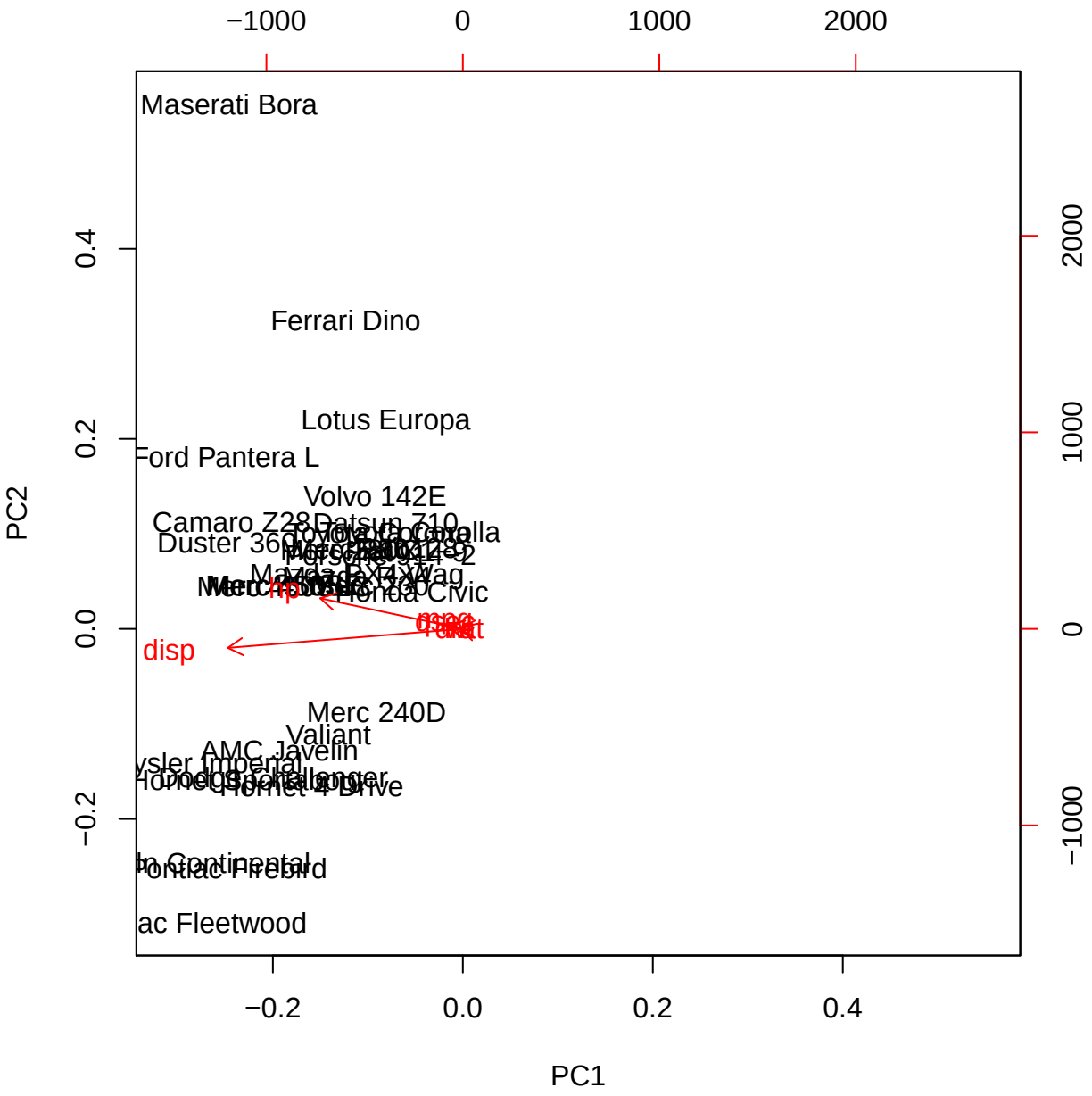

PC1
PC2
PC3
PC4
PC5
PC6
|ładunki|
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
mpg
disp
hp
drat
wt
qsec
zmienne

Ad. 5.

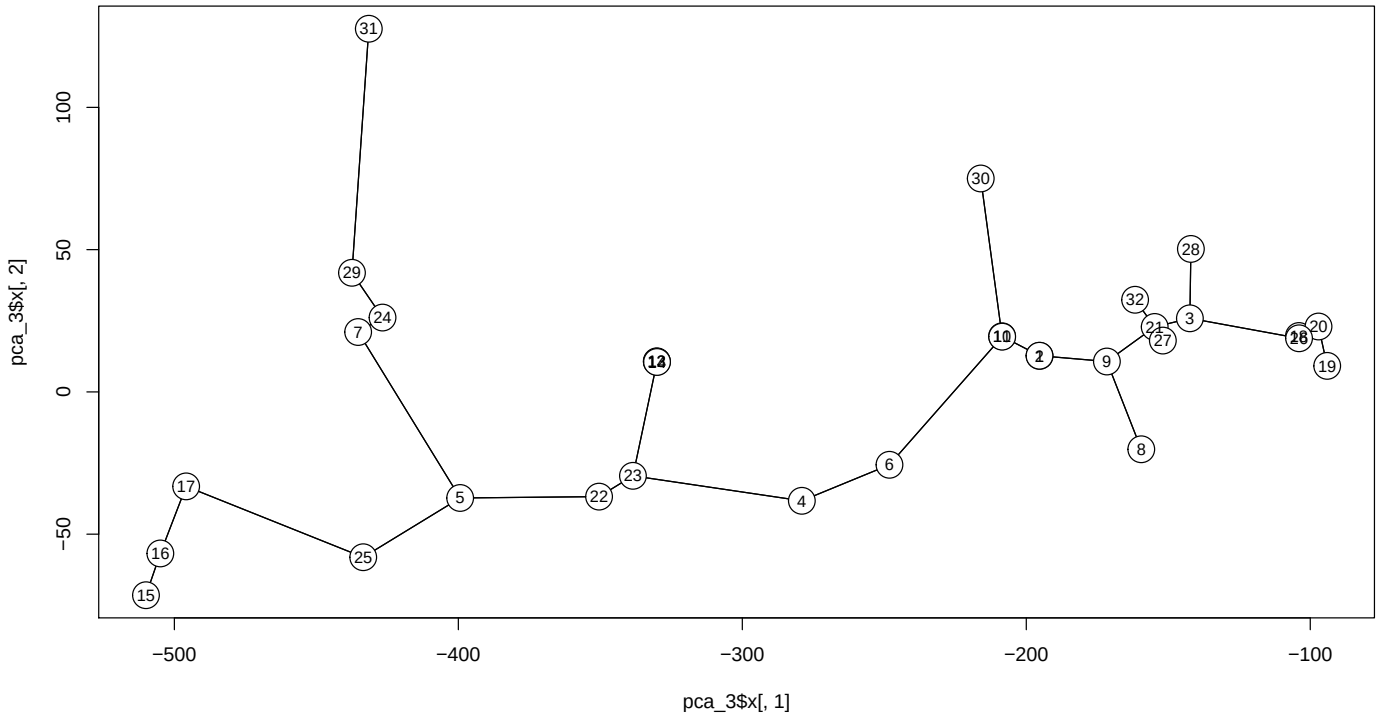

pca_3
Variances
60000
20000
0

```
## 1
```

Ad. 6.


−1000
0
1000
2000
Maserati Bora
Ferrari Dino
Lotus Europa
Ford Pantera L
Volvo 142E
Camaro Z28
Datsun 710
Duster 360
Honda Civic
disp
Merc 240D
Valiant
AMC Javelin
Hornet 4 Drive
Pontiac Firebird
ac Fleetwood
0.4
0.2
0.0
−0.2
2000
1000
0
−1000
PC2
−0.2
0.0
0.2
0.4
PC1

Ad. 7.



14 Analiza skupień

14.1 Przykład

Przykład. Zbiór danych `USArrests` zawiera informacje dotyczące liczby morderstw, napadów, gwałtów przypadających na 100,000 osób w poszczególnych stanach USA w roku 1973 oraz procent ludności mieszkającej w miastach. Chcielibyśmy się dowiedzieć, czy i które stany są do siebie w pewien sposób zbliżone.

```
head(USArrests)
```

```
##            Murder Assault UrbanPop Rape
## Alabama      13.2     236       58 21.2
## Alaska       10.0     263       48 44.5
## Arizona       8.1     294       80 31.0
## Arkansas      8.8     190       50 19.5
## California    9.0     276       91 40.6
## Colorado      7.9     204       78 38.7
```

```
dim(USArrests)
```

```
## [1] 50  4
```

1. metoda hierarchiczna

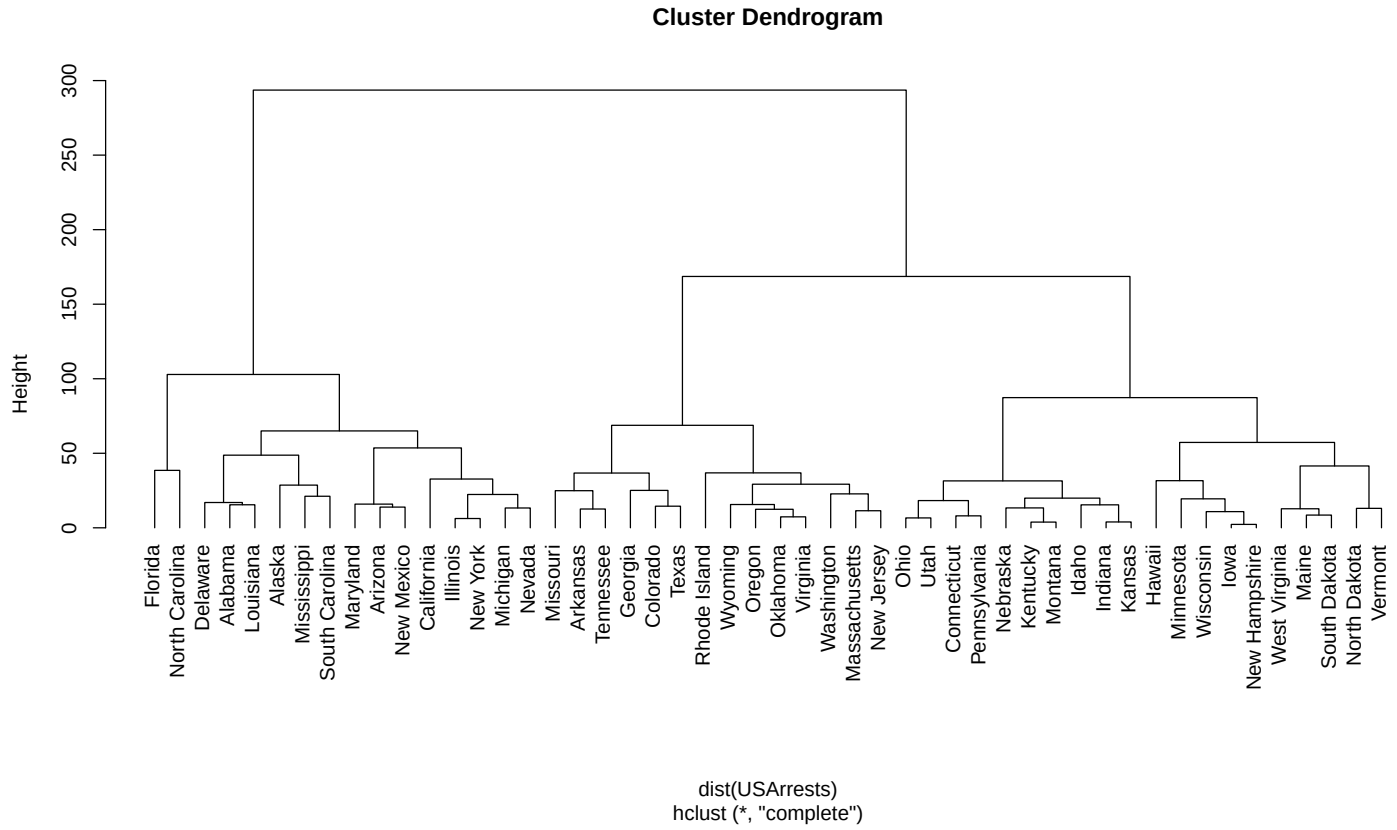
```
(skupienia_1 <- hclust(dist(USArrests)))
```

```
##
## Call:
## hclust(d = dist(USArrests))
##
## Cluster method   : complete
```

```
## Distance         : euclidean
## Number of objects: 50
```

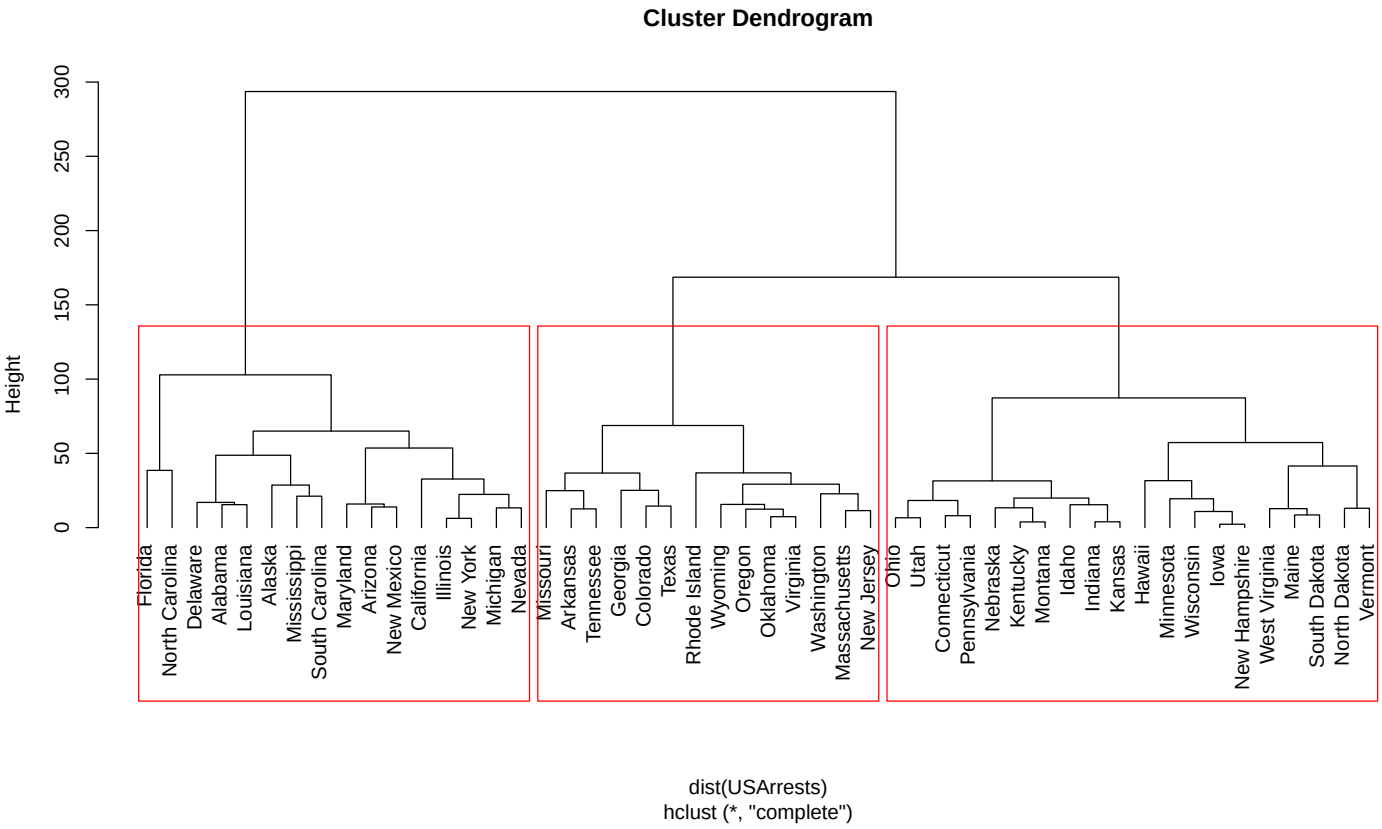
- dendrogram

```
plot(skupienia_1, hang = -1)
```



- automatyczny podział na skupienia i nanoszenie ich na dendrogram

```
plot(skupienia_1, hang = -1)
(podzial_1 <- rect.hclust(skupienia_1, k = 3))
```



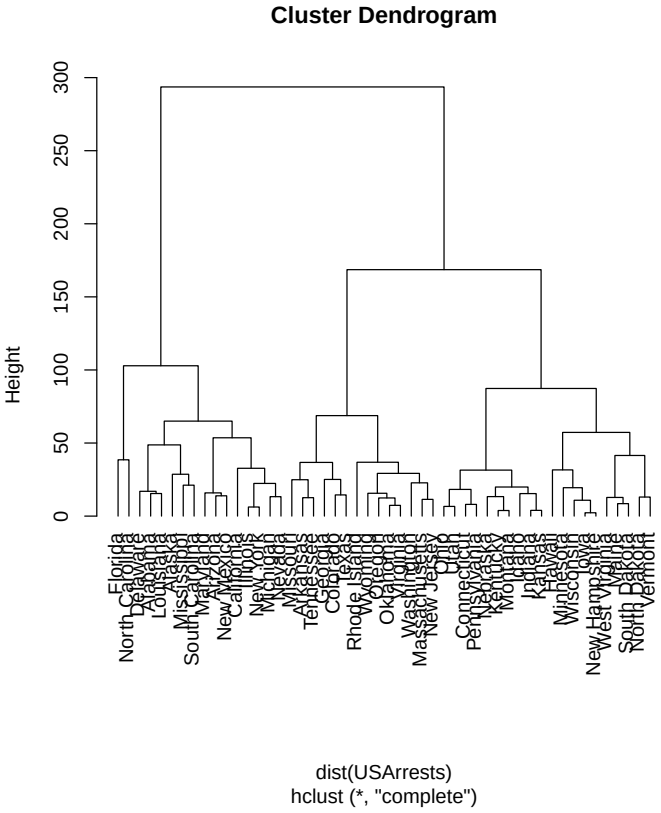

```
## [[1]]
##        Alabama         Alaska        Arizona     California       Delaware
##              1              2              3              5              8
##        Florida       Illinois      Louisiana       Maryland       Michigan
##              9             13             18             20             22
##    Mississippi         Nevada     New Mexico       New York North Carolina
##             24             28             31             32             33
## South Carolina
##             40
##
## [[2]]
##       Arkansas       Colorado        Georgia Massachusetts       Missouri
##              4              6             10             21             25
##     New Jersey       Oklahoma         Oregon   Rhode Island      Tennessee
##             30             36             37             39             42
##          Texas       Virginia     Washington        Wyoming
##             43             46             47             50
##
## [[3]]
##    Connecticut         Hawaii          Idaho        Indiana           Iowa
##              7             11             12             14             15
##         Kansas       Kentucky          Maine      Minnesota        Montana
##             16             17             19             23             26
##       Nebraska New Hampshire   North Dakota           Ohio   Pennsylvania
##             27             29             34             35             38
##   South Dakota           Utah        Vermont  West Virginia      Wisconsin
##             41             44             45             48             49
```

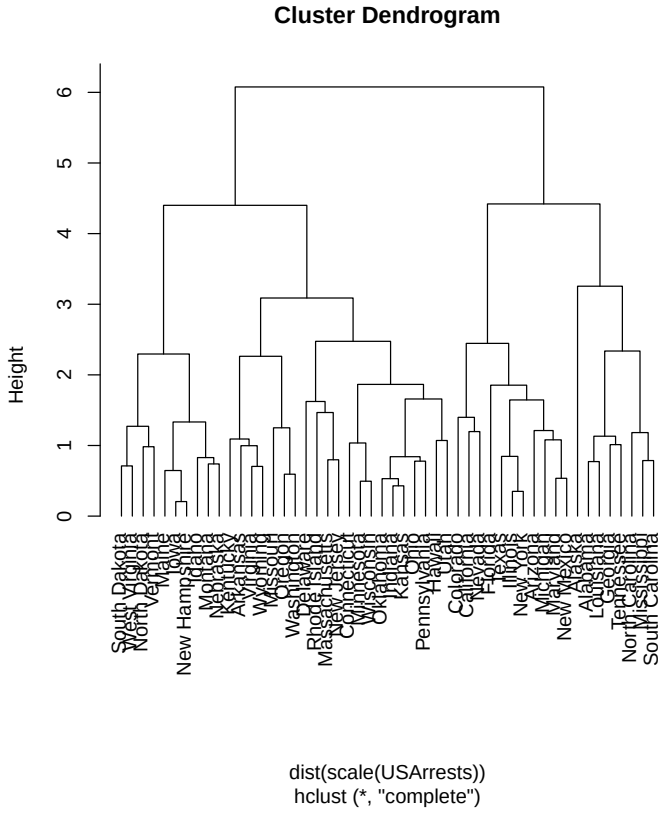
```
(podzial_2 <- cutree(skupienia_1, k = 3))
```

```
##        Alabama         Alaska        Arizona       Arkansas     California
##              1              1              1              2              1
##       Colorado    Connecticut       Delaware        Florida        Georgia
##              2              3              1              1              2
##         Hawaii          Idaho       Illinois        Indiana           Iowa
##              3              3              1              3              3
##         Kansas       Kentucky      Louisiana          Maine       Maryland
##              3              3              1              3              1
##  Massachusetts       Michigan      Minnesota    Mississippi       Missouri
##              2              1              3              1              2
##        Montana       Nebraska         Nevada  New Hampshire     New Jersey
##              3              3              1              3              2
##     New Mexico       New York North Carolina   North Dakota           Ohio
##              1              1              1              3              3
##       Oklahoma         Oregon   Pennsylvania   Rhode Island South Carolina
##              2              2              3              2              1
##   South Dakota      Tennessee          Texas           Utah        Vermont
##              3              2              2              3              3
##       Virginia     Washington  West Virginia      Wisconsin        Wyoming
##              2              2              3              3              2
```

- zmiana skali ma wpływ na analizę skupień

```
par(mfrow = c(1, 2))
plot(hclust(dist(USArrests)), hang = -1)
plot(hclust(dist(scale(USArrests))), hang = -1)
```





```r
par(mfrow = c(1, 1))
```

- parametry metody hierarchicznej

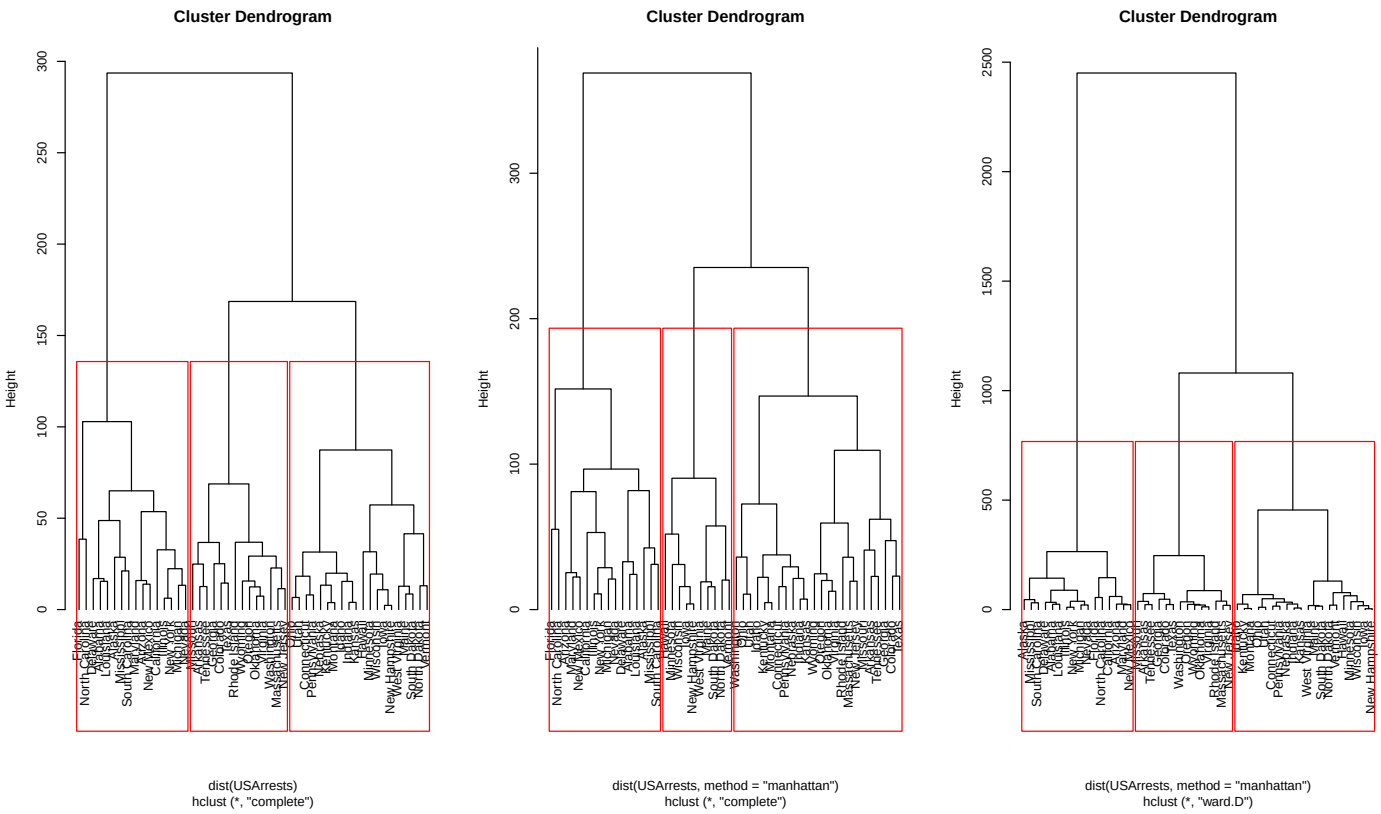
```r
# inna miara niepodobieństwa
(skupienia_2 <- hclust(dist(USArrests, method = 'manhattan')))
```

```
##
## Call:
## hclust(d = dist(USArrests, method = "manhattan"))
##
## Cluster method   : complete
## Distance         : manhattan
## Number of objects: 50
```

```r
# inna miara niepodobieństwa i inna metoda wiązania skupień
(skupienia_3 <- hclust(dist(USArrests, method = 'manhattan'), 'ward.D'))
```

```
##
## Call:
## hclust(d = dist(USArrests, method = "manhattan"), method = "ward.D")
##
## Cluster method   : ward.D
## Distance         : manhattan
## Number of objects: 50
```

```r
# porównianie dendrogramów
par(mfrow = c(1, 3))
plot(skupienia_1, hang = -1)
rect.hclust(skupienia_1, k = 3)
plot(skupienia_2, hang = -1)
rect.hclust(skupienia_2, k = 3)
plot(skupienia_3, hang = -1)
rect.hclust(skupienia_3, k = 3)
```




```
par(mfrow = c(1, 1))
```

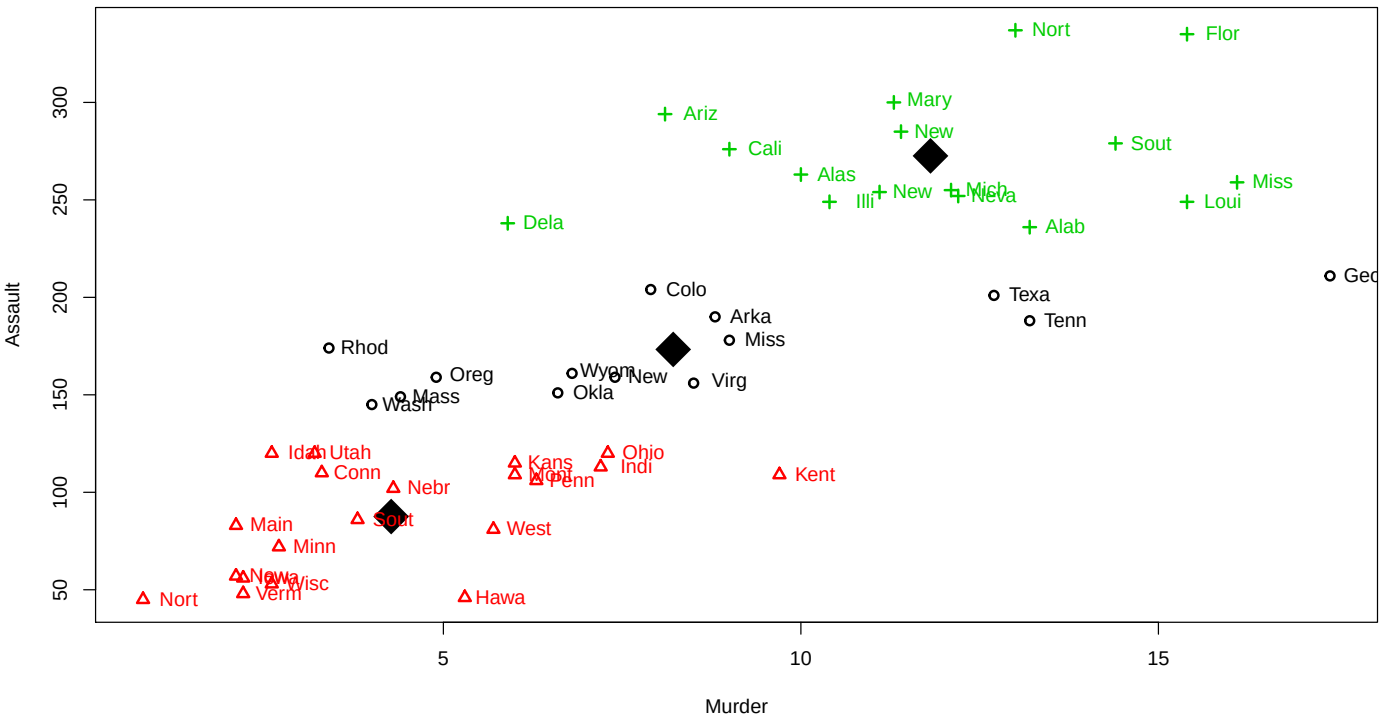
2. metoda K-średnich

```
set.seed(1234)
(skupienia_4 <- kmeans(USArrests, centers = 3, nstart = 1000))
```

```
## K-means clustering with 3 clusters of sizes 14, 20, 16
##
## Cluster means:
##      Murder  Assault UrbanPop     Rape
## 1  8.214286 173.2857 70.64286 22.84286
## 2  4.270000  87.5500 59.75000 14.39000
## 3 11.812500 272.5625 68.31250 28.37500
##
## Clustering vector:
##        Alabama         Alaska        Arizona       Arkansas     California
##              3              3              3              1              3
##       Colorado    Connecticut       Delaware        Florida        Georgia
##              1              2              3              3              1
##         Hawaii          Idaho       Illinois        Indiana           Iowa
##              2              2              3              2              2
##         Kansas       Kentucky      Louisiana          Maine       Maryland
##              2              2              3              2              3
##  Massachusetts       Michigan      Minnesota    Mississippi       Missouri
##              1              3              2              3              1
##        Montana       Nebraska         Nevada  New Hampshire     New Jersey
##              2              2              3              2              1
##     New Mexico       New York North Carolina   North Dakota           Ohio
##              3              3              3              2              2
```

```
##       Oklahoma         Oregon   Pennsylvania   Rhode Island South Carolina
##              1              1              2              1              3
##   South Dakota      Tennessee          Texas           Utah        Vermont
##              2              1              1              2              2
##       Virginia     Washington  West Virginia      Wisconsin        Wyoming
##              1              1              2              2              1
##
## Within cluster sum of squares by cluster:
## [1]  9136.643 19263.760 19563.863
##  (between_SS / total_SS =  86.5 %)
##
## Available components:
##
## [1] "cluster"      "centers"      "totss"        "withinss"
## [5] "tot.withinss" "betweenss"    "size"         "iter"
## [9] "ifault"
```

```
# wykres danych w układzie Murder-Assault z podziałem na
# otrzymane skupienia i centrami skupień
plot(USArrests[, 1:2], pch = skupienia_4$cluster,
     col = skupienia_4$cluster, lwd = 2)
points(skupienia_4$centers, pch = 18, cex = 4)
text(USArrests[, 1:2] + 0.5, substring(row.names(USArrests), 1, 4),
     col = skupienia_4$cluster)
```



- metoda K-średnich z wyborem optymalnej liczby skupień poprzez indeks Calińskiego-Harabasza

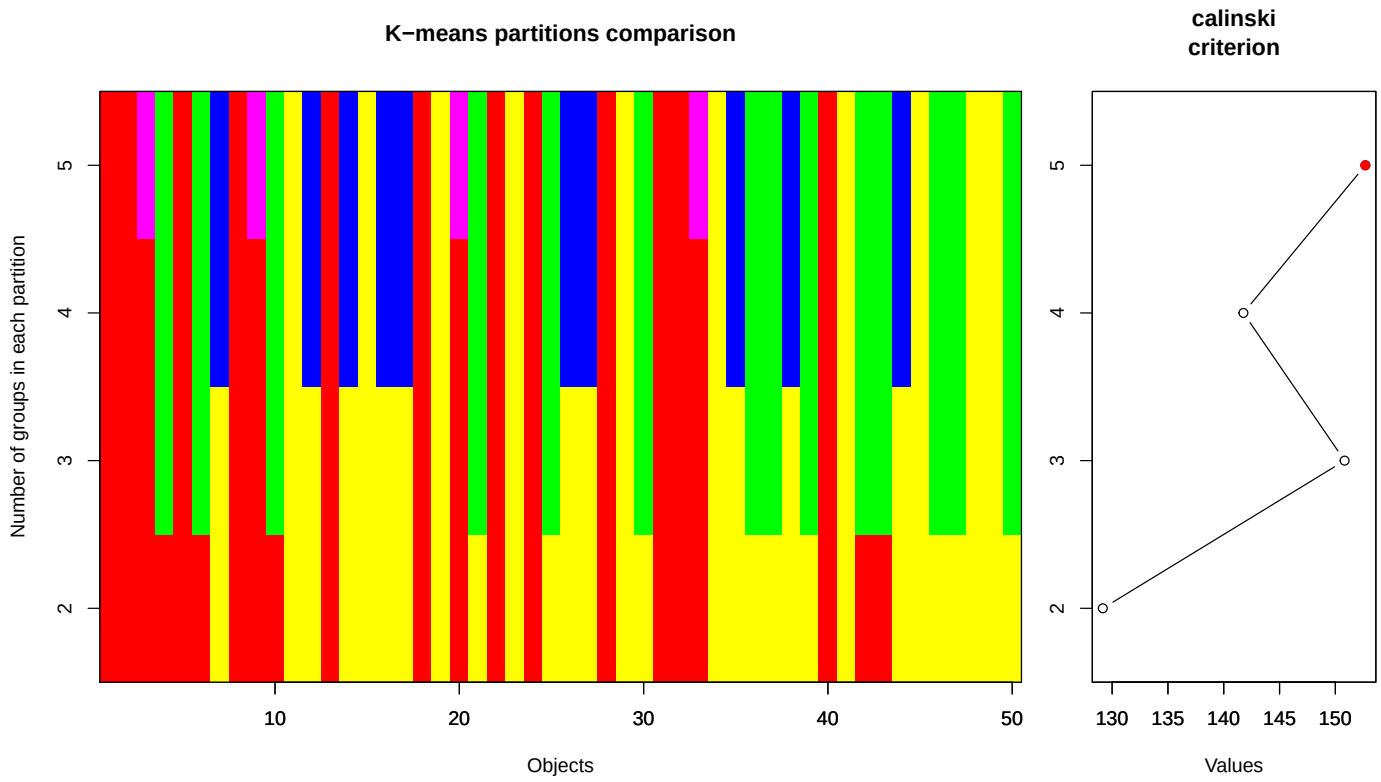
```
library(vegan)
set.seed(1234)
(model <- cascadeKM(USArrests, 2, 5))
```

```
## $partition
##               2 groups 3 groups 4 groups 5 groups
```

```
## Alabama              1       1       2       1
## Alaska               1       1       2       1
## Arizona              1       1       2       3
## Arkansas             1       3       3       4
## California           1       1       2       1
## Colorado             1       3       3       4
## Connecticut          2       2       4       5
## Delaware             1       1       2       1
## Florida              1       1       2       3
## Georgia              1       3       3       4
## Hawaii               2       2       1       2
## Idaho                2       2       4       5
## Illinois             1       1       2       1
## Indiana              2       2       4       5
## Iowa                 2       2       1       2
## Kansas               2       2       4       5
## Kentucky             2       2       4       5
## Louisiana            1       1       2       1
## Maine                2       2       1       2
## Maryland             1       1       2       3
## Massachusetts        2       3       3       4
## Michigan             1       1       2       1
## Minnesota            2       2       1       2
## Mississippi          1       1       2       1
## Missouri             2       3       3       4
## Montana              2       2       4       5
## Nebraska             2       2       4       5
## Nevada               1       1       2       1
## New Hampshire        2       2       1       2
## New Jersey           2       3       3       4
## New Mexico           1       1       2       1
## New York             1       1       2       1
## North Carolina       1       1       2       3
## North Dakota         2       2       1       2
## Ohio                 2       2       4       5
## Oklahoma             2       3       3       4
## Oregon               2       3       3       4
## Pennsylvania         2       2       4       5
## Rhode Island         2       3       3       4
## South Carolina       1       1       2       1
## South Dakota         2       2       1       2
## Tennessee            1       3       3       4
## Texas                1       3       3       4
## Utah                 2       2       4       5
## Vermont              2       2       1       2
## Virginia             2       3       3       4
## Washington           2       3       3       4
## West Virginia        2       2       1       2
## Wisconsin            2       2       1       2
## Wyoming              2       3       3       4
##
```

```
## $results
##            2 groups   3 groups   4 groups   5 groups
## SSE      96399.0281 47964.2654 34728.6294 24417.0235
## calinski   129.1675   150.8274   141.7624   152.6864
##
## $criterion
## [1] "calinski"
##
## $size
##         2 groups 3 groups 4 groups 5 groups
## Group 1       21       16       10       12
## Group 2       29       20       16       10
## Group 3       NA       14       14        4
## Group 4       NA       NA       10       14
## Group 5       NA       NA       NA       10
##
## attr(,"class")
## [1] "cascadeKM"
```

```r
# wykres podziału na grupy
# (na osi x obserwacje, na osi y liczba skupień, kolory oznaczają skupienia)
# oraz wykres wartości indeksu Calińskiego-Harabasza dla
# poszczególnych liczb skupień (czerwona kropka oznacza
# optymalną liczbę skupień według tego kryterium)
plot(model)
```



14.2 Zadania

Zadanie 1. Plik wojewodztwa.txt zawiera wina dotyczące następujących cech województw w Polsce: współczynnik aktywności zawodowej (w %), wskaźnik zatrudnienia (w %), stopa bezrobocia rejestrowanego (w %), śmiertelność niemowląt (na 1000 urodzeń żywych), oczekiwana dalsza długość życia w momencie narodzin, gęstość zaludnienia (osoby na 1 km kwadratowy), produkt krajowy brutto na mieszkańca. Celem badania jest wyznaczenie podobieństw w województwach Polski.

```
##         wojewodztwo wspaktzaw wskzatr bezrobrej smniemowl lifeexp
## 1      Dolnoslaskie      54.3    41.5      20.6       6.9    74.6
## 2 KujawskoPomorskie      56.2    45.1      22.3       6.6    74.8
## 3         Lubelskie      56.1    48.7      17.0       7.3    74.9
## 4          Lubuskie      53.2    42.2      23.0       6.2    74.6
## 5           Lodzkie      55.9    45.7      17.9       6.1    73.5
## 6       Malopolskie      54.8    46.1      13.8       5.8    76.2
##   gestzaludn pkbcap
## 1      144.8  26620
## 2      115.1  22474
## 3       86.8  17591
## 4       72.1  23241
## 5      141.5  23666
## 6      215.0  21989
```

```
## ...
```

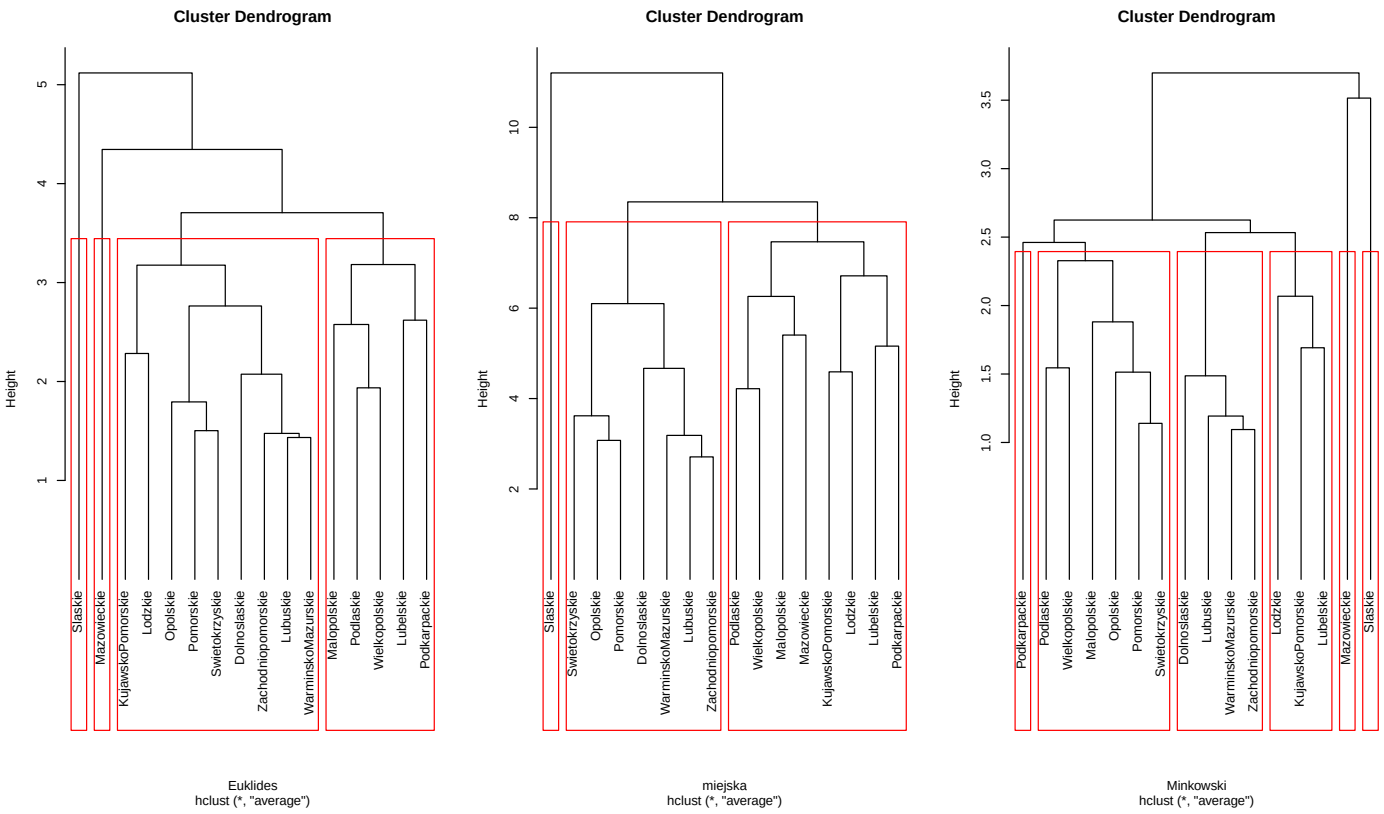
```
## [1] 16  8
```

1. Zauważmy, że jedna ze zmiennych przyjmuje znacznie większe wartości niż pozostałe zmienne. Czy w takim przypadku powinniśmy dokonać standaryzacji wszystkich zmiennych?

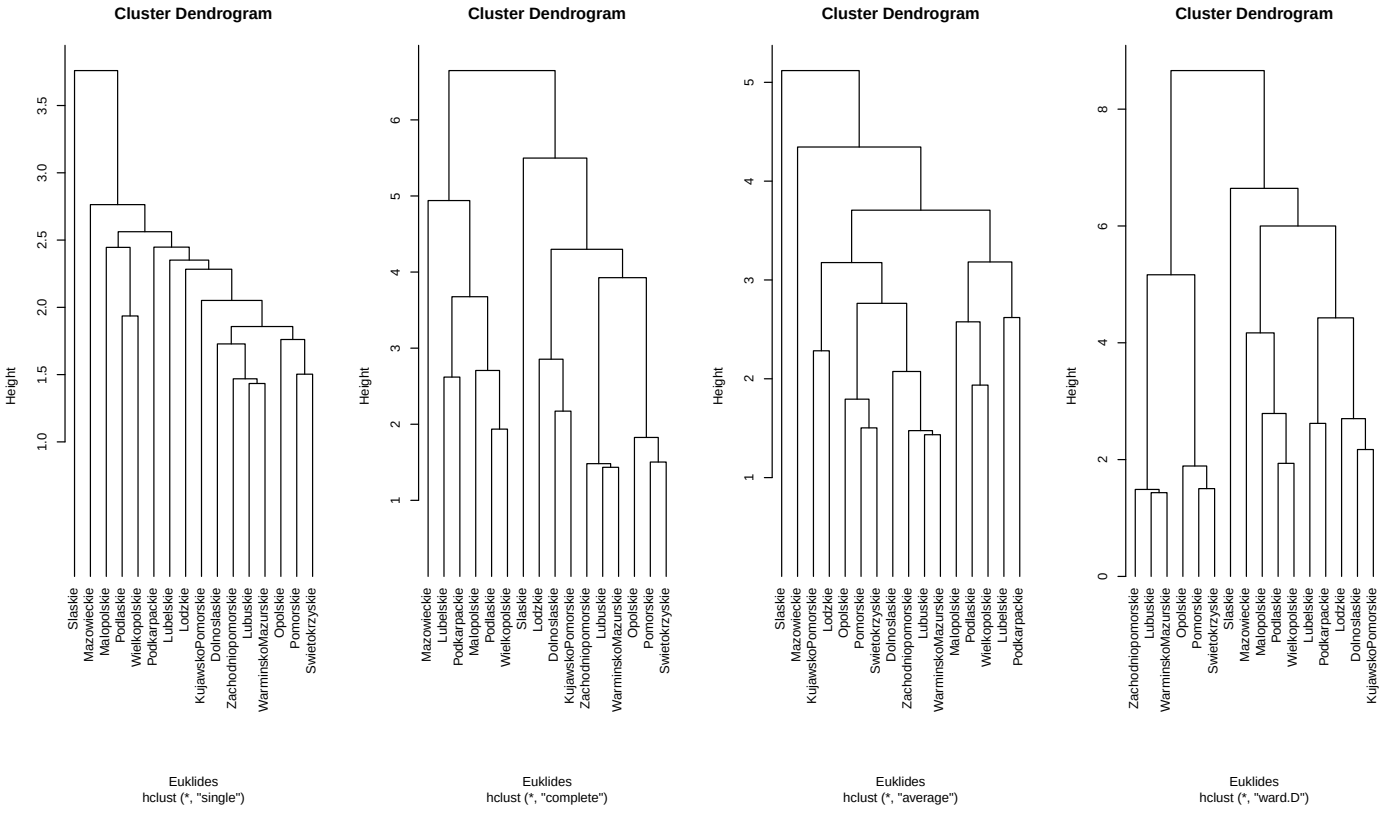
```
##         wojewodztwo   wspaktzaw    wskzatr  bezrobrej  smniemowl
## 1      Dolnoslaskie -0.08925698 -1.1278399  0.3969181  0.7935138
## 2 KujawskoPomorskie  1.20284403  0.2602707  0.8170027  0.3703064
## 3         Lubelskie  1.13483871  1.6483813 -0.4926727  1.3577903
## 4          Lubuskie -0.83731545 -0.8579295  0.9899787 -0.1939700
## 5           Lodzkie  0.99882808  0.4916225 -0.2702750 -0.3350392
## 6       Malopolskie  0.25076960  0.6458570 -1.2834201 -0.7582465
##      lifeexp gestzaludn       pkbcap
## 1 -0.7398300  0.2031423  0.530348302
## 2 -0.4613058 -0.1799261 -0.206399582
## 3 -0.3220437 -0.5449373 -1.074113021
## 4 -0.7398300 -0.7345368 -0.070103001
## 5 -2.2717134  0.1605792  0.005419877
## 6  1.4883640  1.1085766 -0.292584513
```

```
## ...
```

2. Wykorzystując odległości euklidesową, miejską i Minkowskiego z potęgą cztery jako miary niepodobieństwa oraz metodę średniego wiązania skupień wykonaj hierarchiczną analizę skupień. Narysuj dendrogramy. Przy ich pomocy określ jaka liczba skupień wydaje się najbardziej sensowna. Zaznacz te skupienia na wykresie.



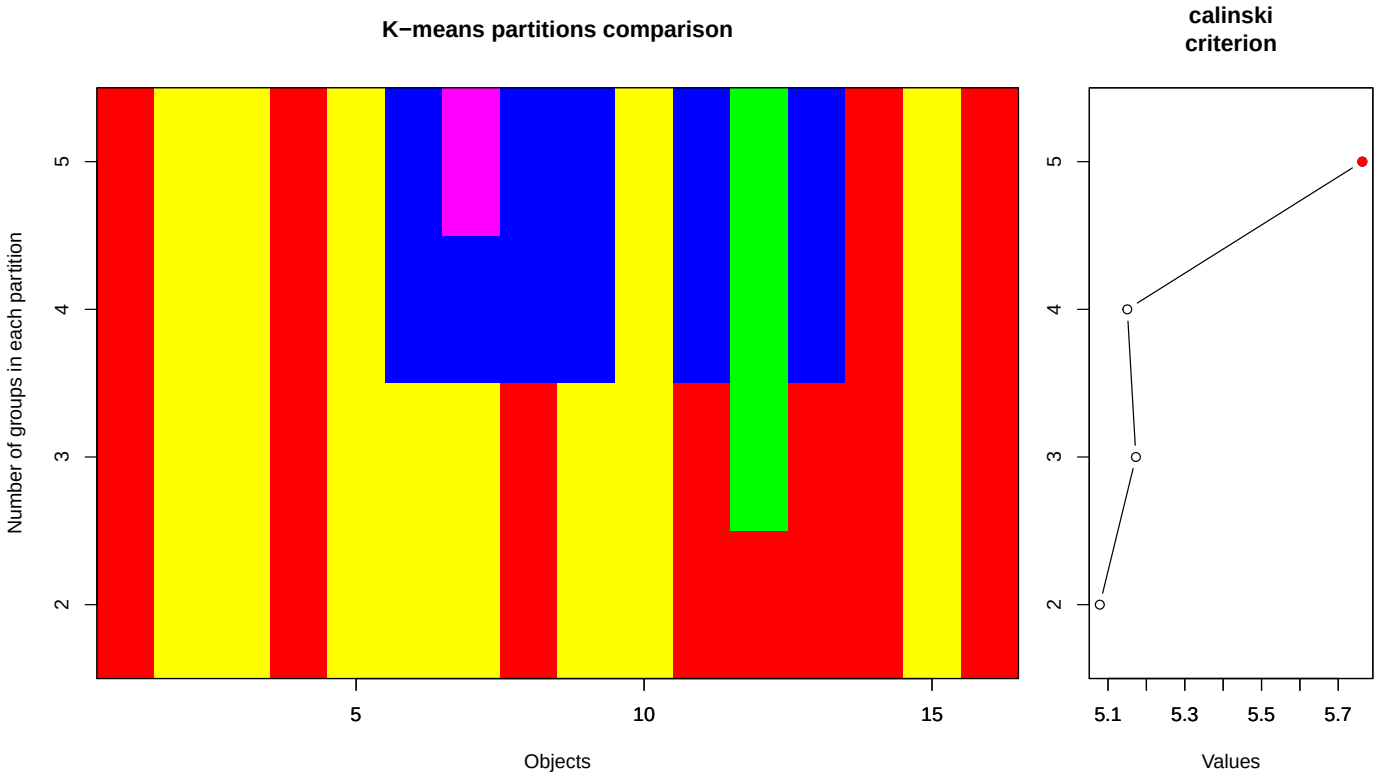
3. Wykorzystując odległość euklidesową jako miarę niepodobieństwa oraz metody pojedynczego, kompletnego, średniego wiązania skupień oraz metodę Warda łączenia skupień wykonaj hierarchiczną analizę skupień. Narysuj dendrogramy.



4. Jaką optymalną liczbę skupień proponuje indeks Calińskiego-Harabasza? Rozważ $K = 2, 3, 4, 5$.

```
##          2 groups  3 groups  4 groups  5 groups
```

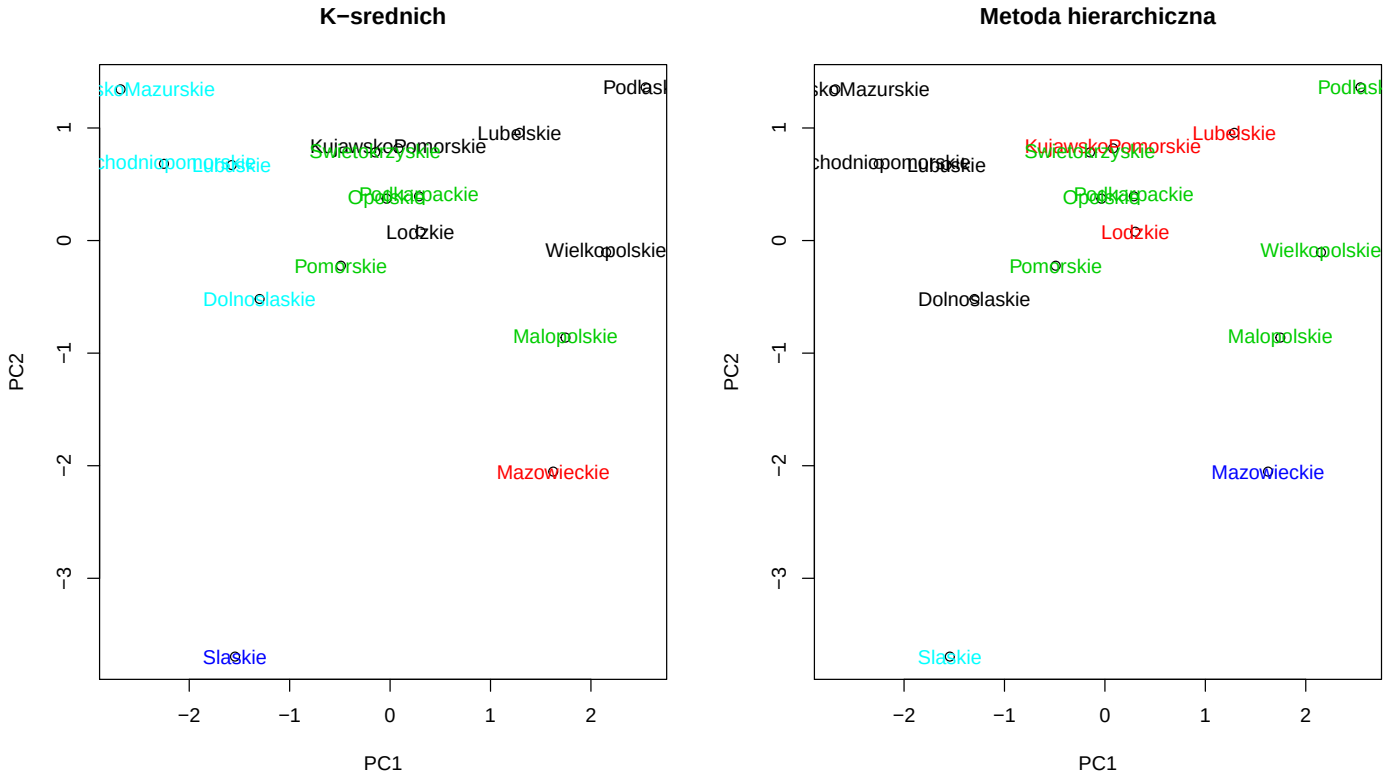
```
## SSE      77.049773 58.469889 45.900765 33.919492
## calinski  5.078577  5.172675  5.150174  5.762804
```



5. Wykonaj analizę skupień korzystając z metody K-średnich oraz hierarchicznej analizy skupień (odległość Minkowskiego z potęgą cztery, metoda średniego wiązania skupień) dla liczby skupień wyznaczonej przez indeks Calińskiego-Harabasza. Przedstaw obserwacje w układzie dwóch pierwszych składowych głównych z podziałem na otrzymane skupienia.

```
## K-średnich

## [1] KujawskoPomorskie Lubelskie         Lodzkie           Podlaskie
## [5] Wielkopolskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Mazowieckie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Malopolskie    Opolskie       Podkarpackie   Pomorskie
## [5] Swietokrzyskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Slaskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Dolnoslaskie       Lubuskie           WarminskoMazurskie
## [4] Zachodniopomorskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## metoda hierarchiczna

## [1] Dolnoslaskie       Lubuskie           WarminskoMazurskie
## [4] Zachodniopomorskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] KujawskoPomorskie Lubelskie         Lodzkie
```

```
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Malopolskie    Opolskie       Podkarpackie   Podlaskie
## [5] Pomorskie      Swietokrzyskie Wielkopolskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Mazowieckie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## [1] Slaskie
## 16 Levels: Dolnoslaskie KujawskoPomorskie Lodzkie Lubelskie ... Zachodniopomorskie

## Importance of components:
##                           PC1    PC2    PC3    PC4     PC5     PC6     PC7
## Standard deviation     1.5860 1.3168 1.1021 0.9503 0.70586 0.31884 0.18202
## Proportion of Variance 0.3593 0.2477 0.1735 0.1290 0.07118 0.01452 0.00473
## Cumulative Proportion  0.3593 0.6070 0.7805 0.9096 0.98074 0.99527 1.00000
```



Zadanie 2. W pliku wina.txt zawarto informację o trzynastu cechach różnych gatunków win. Co więcej obserwacje podzielone są na trzy grupy.

```
##      V1   V2   V3   V4  V5   V6   V7   V8   V9  V10  V11  V12  V13 V14
## 1 14.23 1.71 2.43 15.6 127 2.80 3.06 0.28 2.29 5.64 1.04 3.92 1065   1
## 2 13.20 1.78 2.14 11.2 100 2.65 2.76 0.26 1.28 4.38 1.05 3.40 1050   1
## 3 13.16 2.36 2.67 18.6 101 2.80 3.24 0.30 2.81 5.68 1.03 3.17 1185   1
## 4 14.37 1.95 2.50 16.8 113 3.85 3.49 0.24 2.18 7.80 0.86 3.45 1480   1
## 5 13.24 2.59 2.87 21.0 118 2.80 2.69 0.39 1.82 4.32 1.04 2.93  735   1
## 6 14.20 1.76 2.45 15.2 112 3.27 3.39 0.34 1.97 6.75 1.05 2.85 1450   1

## ...

## [1] 178  14

##
```

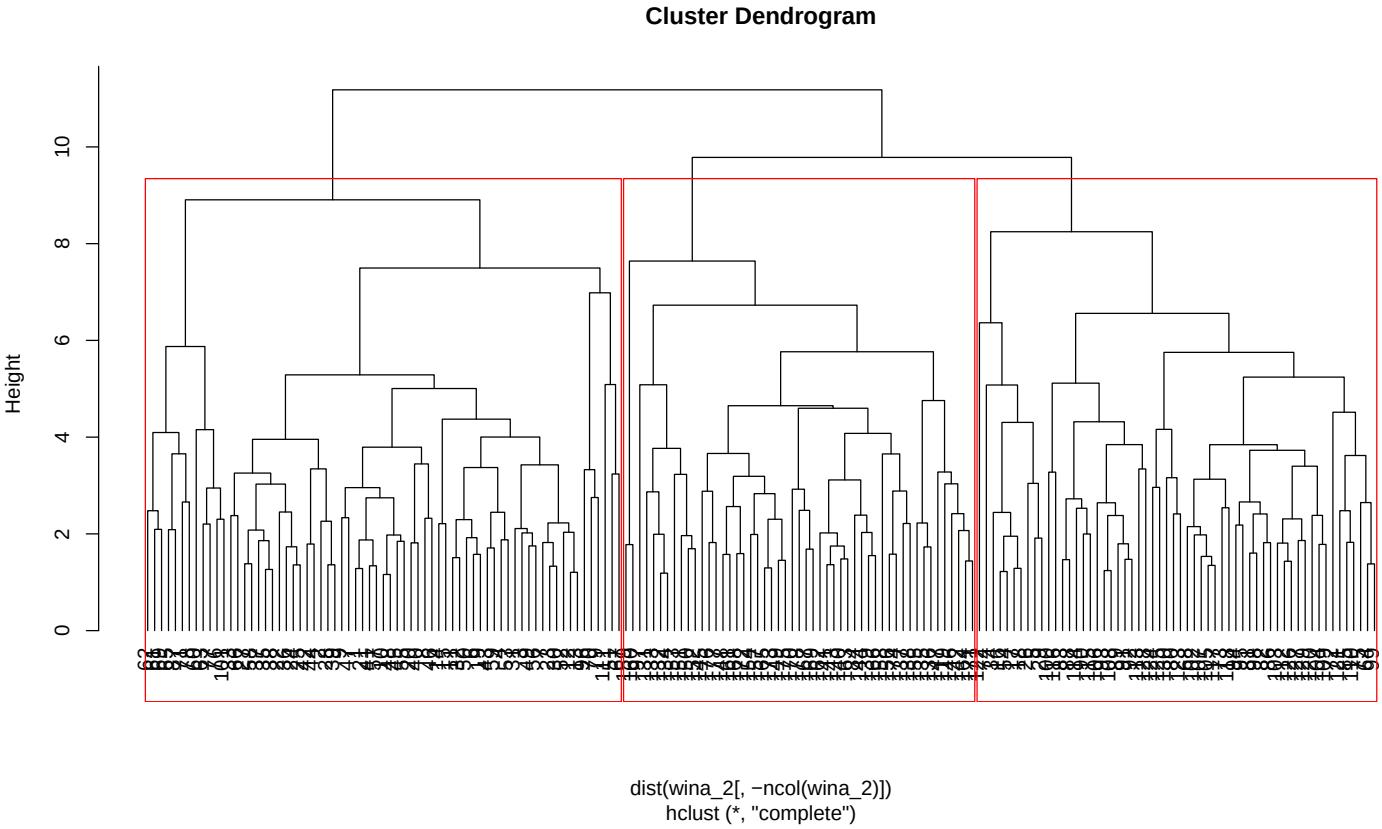
```
##  1  2  3
## 59 71 48
```

1. Czy powinniśmy dokonać standaryzacji zmiennych?

```
##          V1          V2         V3         V4         V5        V6
## 1 1.5143408 -0.56066822  0.2313998 -1.1663032 1.90852151 0.8067217
## 2 0.2455968 -0.49800856 -0.8256672 -2.4838405 0.01809398 0.5670481
## 3 0.1963252  0.02117152  1.1062139 -0.2679823 0.08810981 0.8067217
## 4 1.6867914 -0.34583508  0.4865539 -0.8069748 0.92829983 2.4844372
## 5 0.2948684  0.22705328  1.8352256  0.4506745 1.27837900 0.8067217
## 6 1.4773871 -0.51591132  0.3043010 -1.2860793 0.85828399 1.5576991
##          V7         V8         V9        V10        V11       V12
## 1 1.0319081 -0.6577078  1.2214385  0.2510088  0.3611585 1.8427215
## 2 0.7315653 -0.8184106 -0.5431887 -0.2924962  0.4049085 1.1103172
## 3 1.2121137 -0.4970050  2.1299594  0.2682629  0.3174085 0.7863692
## 4 1.4623994 -0.9791134  1.0292513  1.1827317 -0.4263410 1.1807407
## 5 0.6614853  0.2261576  0.4002753 -0.3183774  0.3611585 0.4483365
## 6 1.3622851 -0.1755994  0.6623487  0.7298108  0.4049085 0.3356589
##           V13 V14
## 1  1.01015939   1
## 2  0.96252635   1
## 3  1.39122370   1
## 4  2.32800680   1
## 5 -0.03776747   1
## 6  2.23274072   1
```

```
## ...
```

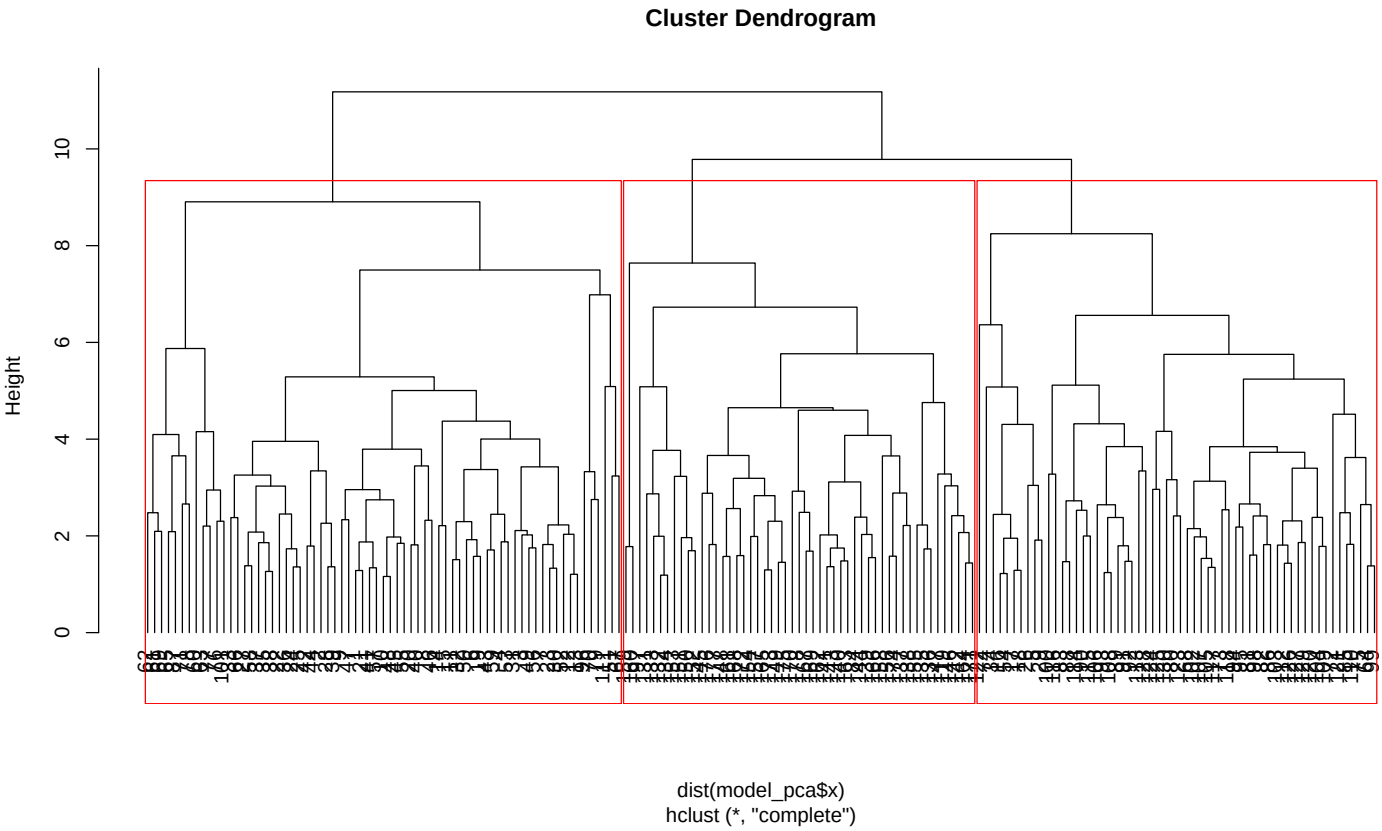
2. Wykonaj hierarchiczną analizę skupień. Narysuje dendrogram z podziałem na skupienia w liczbie równej liczbie grup wyszczególnionych w danych. Jaki jest błąd otrzymanego podziału?




```
##   [1] 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 1 1 1 2 1
##  [36] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1
##  [71] 1 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 3 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 2 2
## [106] 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
## [141] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
## [176] 3 3 3
```

```
## [1] 0.1629213
```

3. Wykonaj polecenie 2 tylko, że na składowych głównych. Co obserwujemy i dlaczego?




```
##   [1] 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 1 1 1 2 1
##  [36] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 1 2 1 1
##  [71] 1 2 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 3 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 2 2
## [106] 2 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3
## [141] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
## [176] 3 3 3
```

```
## [1] 0.1629213
```

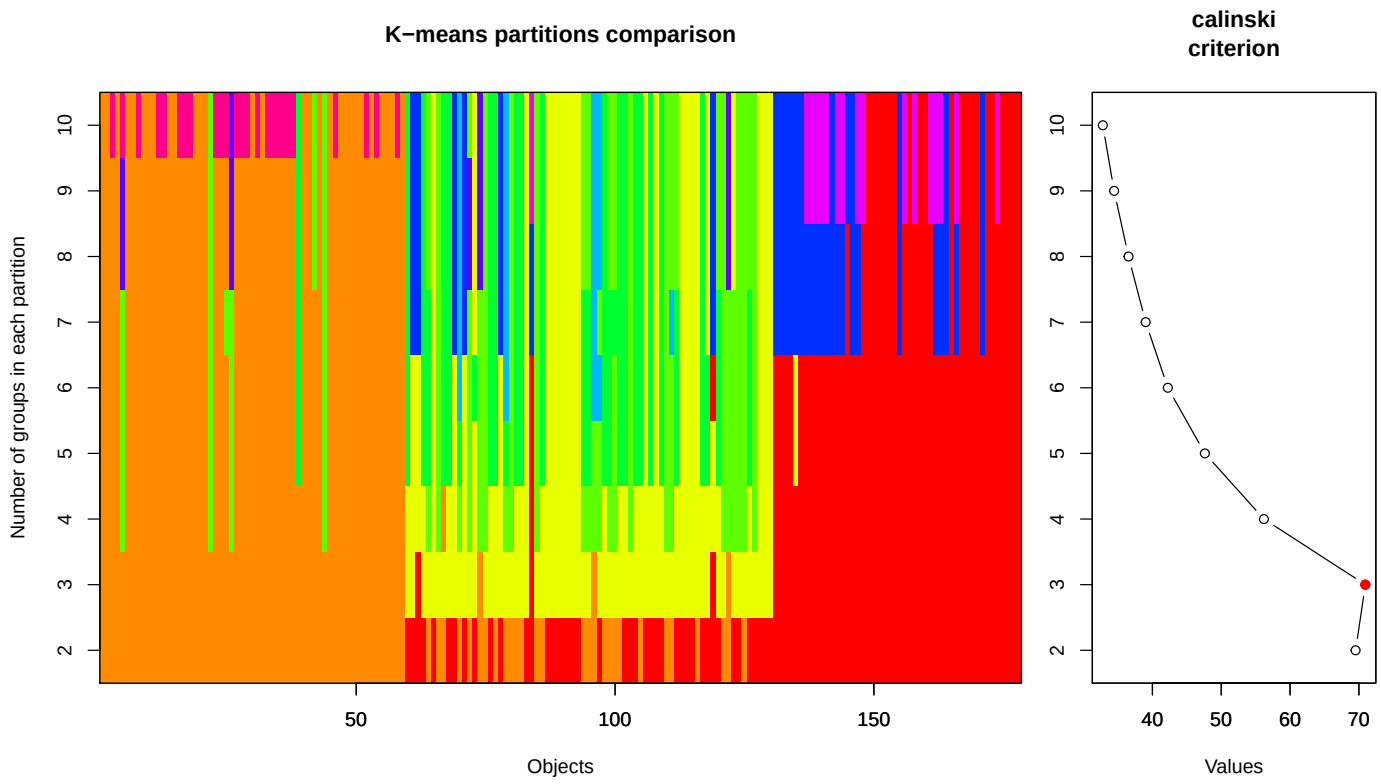
4. Wykonaj analizę skupień korzystając z metody K-średnich dla K równego liczbie grup wyszczególnionych w danych. Jaki jest błąd otrzymanego podziału?

```
##   [1] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
##  [36] 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 1 3 3 3 3 3 3 3 3 3
##  [71] 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 1 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3
## [106] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 1 3 3 2 3 3 3 3 3 3 3 3 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
## [141] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
## [176] 1 1 1
```

```
## [1] 0.03370787
```

5. Jaką optymalną liczbę skupień proponuje indeks Calińskiego-Harabasza? Rozważ $K = 2, 3, \ldots, 10$.

```
##            2 groups   3 groups   4 groups   5 groups   6 groups  7 groups
## SSE      1649.43998 1270.74912 1168.61434 1095.15295 1032.79520 971.23335
## calinski   69.52333   70.94001   56.20192   47.62155   42.24094  39.02085
##            8 groups  9 groups 10 groups
## SSE      918.95440 874.89052 834.66749
## calinski  36.52408  34.43467  32.79335
```



15 Klasyfikacja

15.1 Przykład

Przykład. Zbiór danych `iris` zawiera informacje na temat czterech cech trzech gatunków irysa.

```
head(iris)
```

```
##   Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species
## 1          5.1         3.5          1.4         0.2  setosa
## 2          4.9         3.0          1.4         0.2  setosa
## 3          4.7         3.2          1.3         0.2  setosa
## 4          4.6         3.1          1.5         0.2  setosa
## 5          5.0         3.6          1.4         0.2  setosa
## 6          5.4         3.9          1.7         0.4  setosa
```

```
dim(iris)
```

```
## [1] 150   5
```

```
table(iris$Species)
```

```
##
##     setosa versicolor  virginica
##         50         50         50
```

Na przykładzie tego zbioru danych przedstawimy liniową analizę dyskryminacyjną (LDA).

- model liniowej analizy dyskryminacyjnej w R

```
library(MASS)
(model_lda <- lda(Species ~ ., data = iris))
```

```
## Call:
## lda(Species ~ ., data = iris)
##
## Prior probabilities of groups:
##     setosa versicolor  virginica
##  0.3333333  0.3333333  0.3333333
##
## Group means:
##            Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
## setosa            5.006       3.428        1.462       0.246
## versicolor        5.936       2.770        4.260       1.326
## virginica         6.588       2.974        5.552       2.026
##
## Coefficients of linear discriminants:
##                     LD1         LD2
## Sepal.Length  0.8293776  0.02410215
## Sepal.Width   1.5344731  2.16452123
## Petal.Length -2.2012117 -0.93192121
## Petal.Width  -2.8104603  2.83918785
##
## Proportion of trace:
##    LD1    LD2
## 0.9912 0.0088
```

```
# lub
# model_lda <- lda(iris[, 1:4], grouping = iris$Species)
```

- tablica kontyngencji

```
head(predict(model_lda)$posterior)
```

```
##   setosa   versicolor    virginica
## 1      1 3.896358e-22 2.611168e-42
## 2      1 7.217970e-18 5.042143e-37
## 3      1 1.463849e-19 4.675932e-39
## 4      1 1.268536e-16 3.566610e-35
## 5      1 1.637387e-22 1.082605e-42
## 6      1 3.883282e-21 4.566540e-40
```

```
head(predict(model_lda)$class)
```

```
## [1] setosa setosa setosa setosa setosa setosa
## Levels: setosa versicolor virginica
```

```
(conf_matrix <- table(predict(model_lda)$class, iris$Species))
```

```
##
##              setosa versicolor virginica
##   setosa         50          0         0
##   versicolor      0         48         1
##   virginica       0          2        49
```

- błąd klasyfikacji metodą ponownego podstawiania

```
(1 - sum(diag(conf_matrix)) / nrow(iris))
```

```
## [1] 0.02
```

- błąd klasyfikacji metodą sprawdzania krzyżowego z $v = 1$ (1-CV, LOO, ang. *leave one out*)

```
pred_loo <- numeric(nrow(iris))
for (i in 1:nrow(iris)) {
  model_lda_i <- lda(Species ~ ., data = iris[-i, ])
  pred_loo[i] <- predict(model_lda_i, iris[i, ])$class
}
table(iris$Species, pred_loo)
```

```
##             pred_loo
##               1  2  3
##   setosa     50  0  0
##   versicolor  0 48  2
##   virginica   0  1 49
```

```
(1 - sum(diag(table(iris$Species, pred_loo))) / nrow(iris))
```

```
## [1] 0.02
```

- predykcja

```
new_data <- data.frame(Sepal.Length = 5.1,
                       Sepal.Width = 3.5,
                       Petal.Length = 1.3,
                       Petal.Width = 0.3)
predict(model_lda, new_data)
```

```
## $class
## [1] setosa
## Levels: setosa versicolor virginica
##
## $posterior
##   setosa   versicolor    virginica
## 1      1 4.850575e-22 6.605032e-42
##
## $x
##        LD1       LD2
## 1 8.000875 0.6775315
```

15.2 Zadania

Zadanie 1. Kontynuujemy przykład dotyczący zbioru danych `iris`.

1. Wyznacz błąd klasyfikacji liniowej analizy dyskryminacyjnej metodą sprawdzania krzyżowego z $v = 10$ (10-CV).

```
## [1] 0.02
```

2. Błąd klasyfikacji można oszacować również następującą metodą bootstrapową.

   - Przyjmijmy, że zbiór danych ma n obserwacji.
   - Krok 1. Losujemy ze zwracaniem n obserwacji ze zbioru danych tworzących próbę bootstrapową.

- Krok 2. Konstruujemy klasyfikator na bazie próby bootstrapowej.
- Krok 3. Liczymy błąd klasyfikatora wyznaczonego w kroku 2 dla obserwacji, które nie znalazły się w próbie bootstrapowej.
- Krok 4. Powtarzamy kroki 1-3 `n_boot` razy, otrzymując błędy $b_1, \ldots, b_{n\_boot}$.
- Krok 5. Obliczamy błąd klasyfikacji metodą bootstrapową według wzoru

$$\frac{1}{n\_boot} \sum_{i=1}^{n\_boot} b_i.$$

Wyznacz błąd klasyfikacji liniowej analizy dyskryminacyjnej metodą bootstrapową. Przyjmij `n_boot = 100`.

```
## [1] 0.0259815
```

Zadanie 2. W pliku wina.txt zawarto informację o trzynastu cechach różnych gatunków win. Co więcej obserwacje podzielone są na trzy grupy.

```
##      V1   V2   V3   V4  V5   V6   V7   V8   V9  V10  V11  V12  V13 V14
## 1 14.23 1.71 2.43 15.6 127 2.80 3.06 0.28 2.29 5.64 1.04 3.92 1065   1
## 2 13.20 1.78 2.14 11.2 100 2.65 2.76 0.26 1.28 4.38 1.05 3.40 1050   1
## 3 13.16 2.36 2.67 18.6 101 2.80 3.24 0.30 2.81 5.68 1.03 3.17 1185   1
## 4 14.37 1.95 2.50 16.8 113 3.85 3.49 0.24 2.18 7.80 0.86 3.45 1480   1
## 5 13.24 2.59 2.87 21.0 118 2.80 2.69 0.39 1.82 4.32 1.04 2.93  735   1
## 6 14.20 1.76 2.45 15.2 112 3.27 3.39 0.34 1.97 6.75 1.05 2.85 1450   1
```

```
## ...
```

1. Jaki jest wymiar tych danych? Jakie są etykiety klas i ich liczebności?

```
## [1] 178  14
```

```
##
##  1  2  3
## 59 71 48
```

2. Wykonaj liniową analizę dyskryminacyjną bazując na trzech pierwszych zmiennych w tym zbiorze danych.

```
##         1         2         3
## 0.3314607 0.3988764 0.2696629
```

```
##         V1       V2       V3
## 1 13.74475 2.010678 2.455593
## 2 12.27873 1.932676 2.244789
## 3 13.15375 3.333750 2.437083
```

```
##           LD1        LD2
## V1 -1.8725417 -0.2943580
## V2 -0.0862327  1.0473192
## V3 -1.4493443  0.1419408
```

3. Wyznacz oceny prawdopodobieństw a posteriori i przewidywaną przynależność do klas obserwacji oraz tablicę kontyngencji otrzymanego klasyfikatora.

```
##           1            2          3
## 1 0.9705550 0.0006735689 0.02877140
## 2 0.3933512 0.3924750849 0.21417373
## 3 0.5316537 0.0682685490 0.40007778
## 4 0.9723331 0.0002235964 0.02744332
```

```
## 5 0.5798070 0.0197639349 0.40042907
## 6 0.9668517 0.0007345077 0.03241381
```

```
## [1] 1 1 1 1 1 1
## Levels: 1 2 3
```

```
##
##      1  2  3
##   1 51  5  7
##   2  4 62  8
##   3  4  4 33
```

4. Wyznacz błąd klasyfikacji metodą ponownego podstawiania.

```
## [1] 0.1797753
```

5. Wyznacz błąd klasyfikacji metodą sprawdzania krzyżowego z $v = 1$.

```
##    pred_loo
##      1  2  3
##   1 49  5  5
##   2  5 61  5
##   3 10  8 30
```

```
## [1] 0.2134831
```

6. Wyznacz błąd klasyfikacji metodą sprawdzania krzyżowego z $v = 10$.

```
## [1] 0.2078652
```

7. Wyznacz błąd klasyfikacji metodą bootstrapową. Przyjmij `n_boot = 100`.

```
## [1] 0.2111531
```

8. Do których klas i z jakimi prawdopodobieństwami a posteriori należy zaklasyfikować poniższe nowe obserwacje?

V1	V2	V3
13.64	3.10	2.56
13.94	1.73	2.27
13.08	3.90	2.36
12.29	3.17	2.21

```
## $class
## [1] 1 1 3 2
## Levels: 1 2 3
##
## $posterior
##             1           2          3
## 1 0.531302523 0.007133455 0.46156402
## 2 0.924346812 0.007006399 0.06864679
## 3 0.061216479 0.054434582 0.88434894
## 4 0.005015639 0.810915785 0.18406858
##
## $x
##          LD1        LD2
## 1 -1.5435449  0.6390430
## 2 -1.5668588 -0.9252545
```

```
## 3 -0.2740389  1.6133507
## 4  1.4856206  1.0600594
```