二分探索法

二分探索法とは

- 解の存在範囲を半分に絞っていくことによって計算量を$O(logn)$に抑える探索方法
- **条件を満たす/満たさないの境界がただ一つあれば**利用できるかも
- 方程式の実数解を求めるアルゴリズムは二分法というっぽい考え方はほとんど同じ

まずは数当てゲーム

例) 太郎君のTOEICのスコアを当てる(闇)
スコアが520だとする.

方法1: 0から順に訊く

- 0 ⇒ No
- 1 ⇒ No
- 2 ⇒ No

  …

- 520 ⇒ Yes

質問回数: 520回

方法2: 範囲を半分ずつに絞る

[0, 991)の間にあると仮定
質問: 範囲の半分の位置以上? 未満?

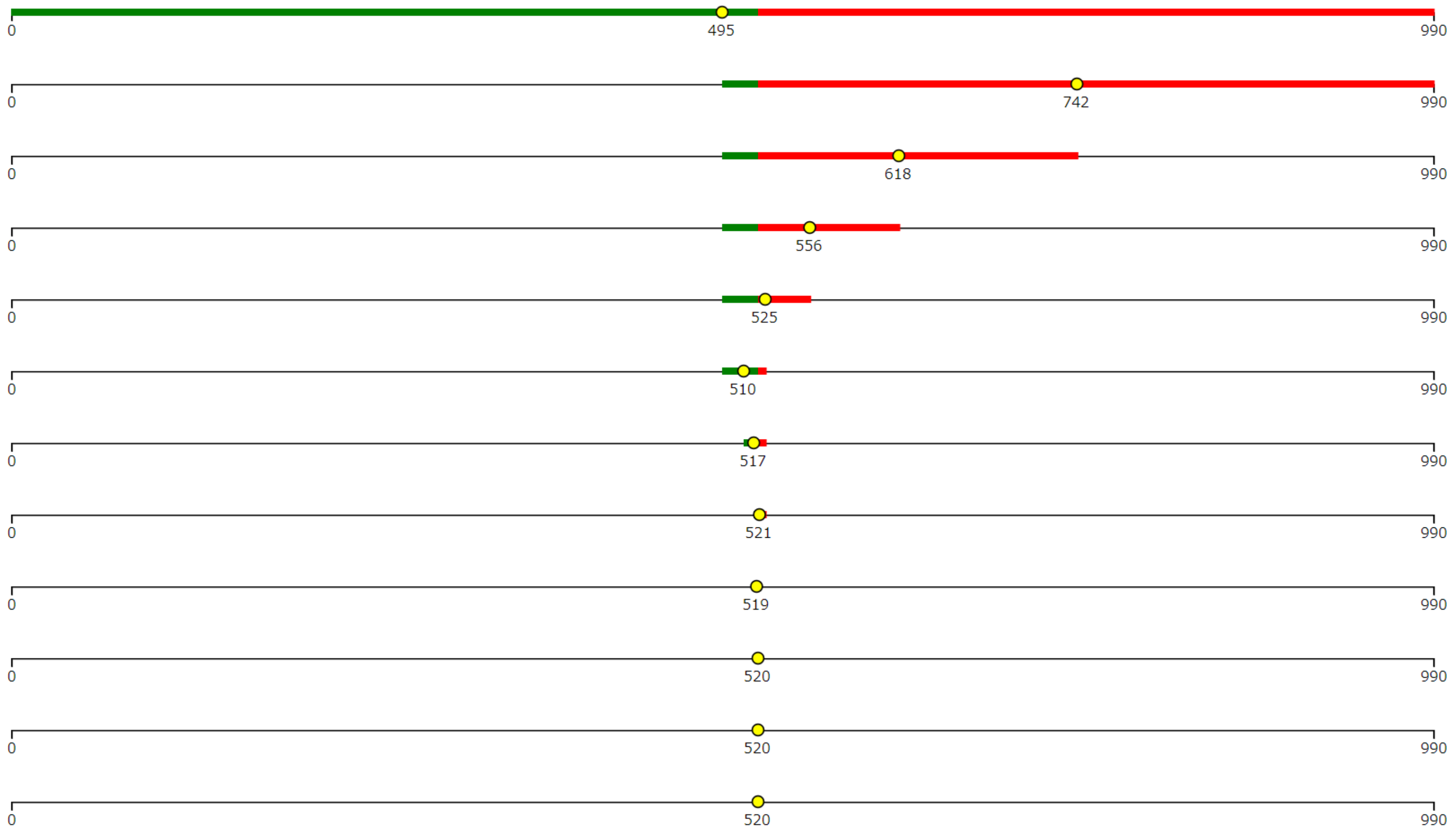
- 495以上 ⇒ [495, 991)の間
- 793未満 ⇒ [495, 793)の間
- 644未満 ⇒ [495, 644)の間

  ...
- 520以上 ⇒ [520, 522)の間
- 521未満 ⇒ [520, 521)の間

区間内の整数が1つになったので520が答え

区間が縮んでいく様子

- l: 右端, r: 左端として，区間は[l,r)と書ける
- 以下の事実に注目する
  - lは常に「520以下」
  - rは常に「520より大」


0
495
990
0
742
990
0
618
990
0
556
990
0
525
990
0
510
990
0
517
990
0
521
990
0
519
990
0
520
990
0
520
990
0
520
990

一般化

- **条件を満たす，満たさないの境界がある**
  ⇒区間を半分に絞っていくことで境界を探索できる
- 逆にこの条件が無いと二分探索できない

コード

- 変数xについてtrue，falseを返す関数をcheck(x)と置く.
- check(x)にはtrue，falseの切れ目があると仮定
- [l,r)として範囲を徐々に縮めていく

```
int l = (check(x)がtureになるようなx);
int r = (check(x)がfalseになるようなx);
while (r - l > 1) {
  int mid = (l + r) / 2;
  if (check(mid)) l = mid;
  else r = mid;
}
```

check関数が大規模な場合は，このように関数化することがよくある

TOEICスコア当てゲームの実装

```
int score;
cin >> score;

int l = 0,  r = 991;
while (r - l > 1) {
  int mid = (l + r) / 2;
  if (mid <= score) l = mid;
  else r = mid;
}
cout << l << endl;
```

二分探索を書く際に注意すること

- leftの初期値: 常に条件を満たす側
  rightの初期値: 常に条件を満たさない側
- なのでもしTOEICのスコアに負の値が存在したら,
  さっきの数当てゲームで初期を[0,991)とするのは不適切

lower_boundとupper_bound

- 「配列中で，〇〇以上の最小のxが知りたい」
  「配列中で，〇〇より大の最小のxが知りたい」
  と思うときがよくある ⇒ 二分探索で実現可能

- でもC++ではlower_boundとupper_boundという関数が用意されている
  配列はソートされていないとだめ(単調性が欲しいので)

```cpp
#include <algorithm>

...

// vは昇順ソート済みであると仮定する

// v中でX以上となる最初のイテレータを返す
auto itr1 = lower_bound(v.begin(), v.end(), X);
// v中でXを超える最初の数のイテレータを返す
auto itr2 = upper_bound(v.begin(), v.end(), X);
```

※lower_bound,upper_boundの返り値はイテレータなので，添え字が欲しい場合は次のようにする

```
#include <algorithm>

...

// vは昇順ソート済みであると仮定する

// v中でX以上となる最初のイテレータを返す
int idx1 = lower_bound(v.begin(), v.end(), X) - v.begin();
// v中でXを超える最初の数のイテレータを返す
int idx2 = upper_bound(v.begin(), v.end(), X) - v.begin();
```

詳しくは去年の入門講習会後期第3回参照

演習

ABC077 C: Snuke Festival

解答

考え方

- **3つのものがあるときは真ん中を固定してみる**
- 他のものが少ない計算量で求められる可能性を検討する

- 例としてこれを用意
- A, Cはソートする

A:

1	3	3	6	6	6	10	12	13	13	14	16	16	17	18

B:

18	3	8	14	1	10	11	19	1	9	19	7	12	1	14

C:

1	4	5	7	8	10	10	14	15	15	17	19	19	20	20

- Aのほうでは,B[i]未満のものの個数を数えたい
- Cのほうでは,B[i]より大のものの個数を数えたい

A:

1	3	3	6	6	6	10	12	13	13	14	16	16	17	18

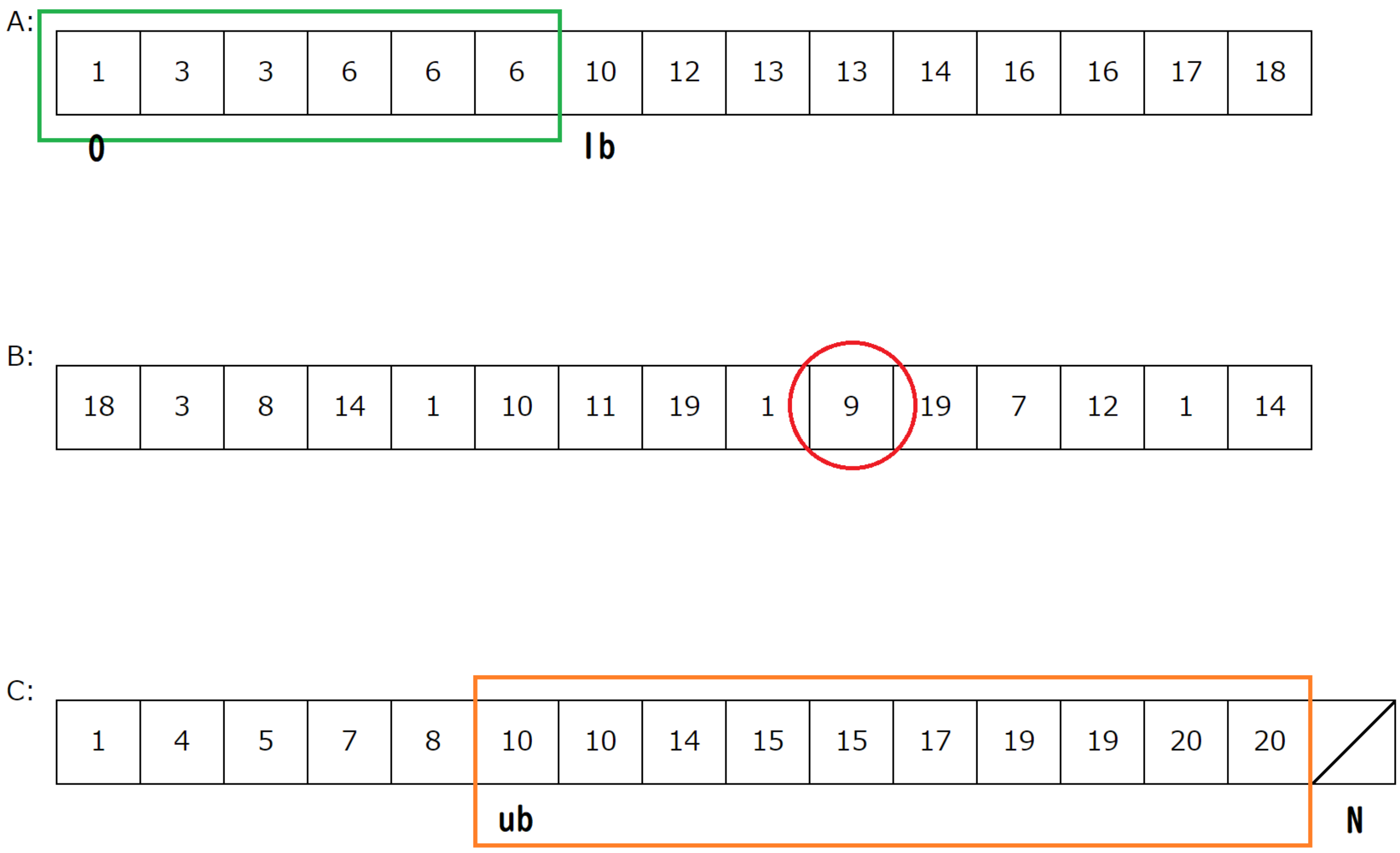
B:

18	3	8	14	1	10	11	19	1	9	19	7	12	1	14

C:

1	4	5	7	8	10	10	14	15	15	17	19	19	20	20

- lower_bound, upper_boundを使うと求められます



まとめると

- 各B[i]について
- lower_boundで，A中でB[i]以上となる最初の値の位置lbを求める
- upper_boundで，C中でB[i]より大となる最初の値の位置ubを求める
- A中でB[i]未満の個数はlb, C中でB[i]より大の個数は(N-ub)
  ⇒ B[i]固定での場合の数はlb*(N-ub)通り
- これを各B[i]で求める

計算量

- A,Cのソート: $O(NlogN)$
- 各B[i]についてA，Cの二分探索: $O(NlogN)$
- 合わせて$O(NlogN)$なので間に合う

解答

```cpp
typedef long long ll;

int main()
{
  int N; cin >> N;
  vector<int> A(N), B(N), C(N);
  for (int i = 0; i < N; i++) cin >> A[i];
  for (int i = 0; i < N; i++) cin >> B[i];
  for (int i = 0; i < N; i++) cin >> C[i];
  sort(A.begin(), A.end());
  sort(C.begin(), C.end());

  ll ans = 0;
  for (int i = 0; i < N; i++) {
    ll lb = lower_bound(A.begin(), A.end(), B[i]) - A.begin();
    ll ub = upper_bound(C.begin(), C.end(), B[i]) - C.begin();
    ans += lb * (N - ub);
  }
  cout << ans << endl;

  return 0;
}
```