数值PDE实验： 方程色散性

问题描述

针对下述偏微分方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0.4 \le x \le 0.6 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \end{cases}$$

(1) 分别用 FTBS 格式、FTCS 格式和 Lax-Wendroff 格式分别计算 $t = 0.05, 0.2, 0.8, 3.2$ 时刻的数值解，其中 $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 分别取 0.2 和 0.8，空间步长取 $\Delta x = 0.05$。将相同时刻（即相同 t 值）、相同 r 值的三种格式的数值解和相应的偏微分方程初值问题的精确解绘在同一张图上（如果某些格式在某些时刻的数值解与其他格式的结果相差太大，不宜画在同一张图上，可以略去，但需要说明）；并写出“观察到的现象”。

(2) 分别分析偏微分方程 $u_t + u_x = 0$ 的耗散性和色散性，以及其 FTBS 格式、FTCS 格式和 Lax-Wendroff 格式的耗散性和色散性；并对产生 (1) 中“观察到的现象”进行评论。

算法实现

对于该问题，首先注意`FTBS`，`FTCS`，`Lax-Werndroff`格式分别为

```
u[n+1][j+1] = u[n][j]+dt/dx*(u[n][j+1]-u[n][j])
u[n+1][j+1] = u[n][j]+dt/dx*(u[n][j+1]-u[n][j-1])/2
u[n+1][j+1] = u[n][j]+dt/dx*(u[n][j+1]-u[n][j-1])/2+dt*dt/2*(u[n]
[j+1]+u[n][j-1]-2*u[n][j]) /(dx*dx);
```

在具体实现上，因为仅仅需要求解最终的结果，不需要中间过程，所以只需要设立中间数据，一直迭代即可。以及考虑中间依赖项，就需要增加初始区间。

对于`FTCS`和`LaxW`算法，可知`nx`个最终解，需要`nx+2nt`个对称的初始数据(`FTCS, LaxW`), 而对于`FTBS`算法，需要`nx+nt`个解。

而区间若为`nx`个，则上述计算需要用`nx+1`来替换`nx`

以及对于迭代过程，应该需要坐改进：`u[n][j] => u[n][j-n]`(因为不存储那么多数据)，同时因为是在迭代过程中，也不需要计算那么多项。

实验环境：

C++ 产生数据

`OSX 12, clang++ -std=C++11`(在该目录下执行`make`即可编译，并执行产生数据)

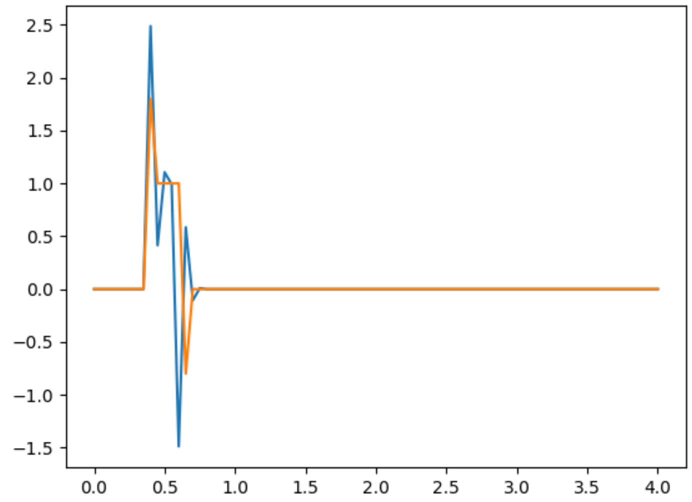
主函数会运行并生成满足题目需求的数据（解区间均为`[0,4]`），并以`python` 文件到形式存储到相应的文件中。

python 画图

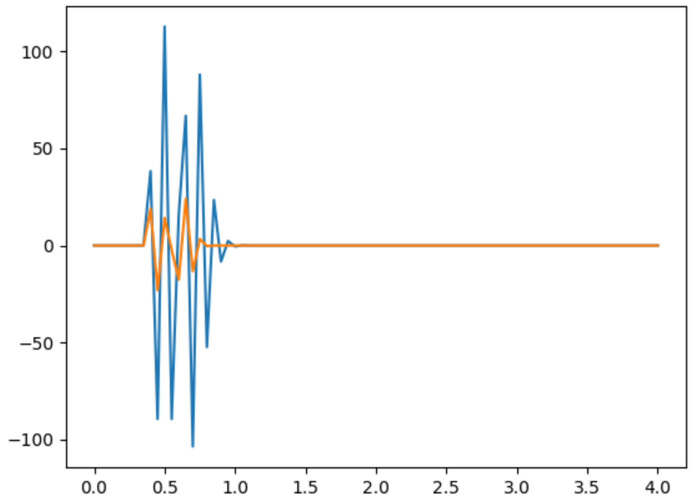
C++会把数据生成到`.py`文件中，python来读文件并画图。 依赖项 `pip install matplotlib`即可。

结果展示

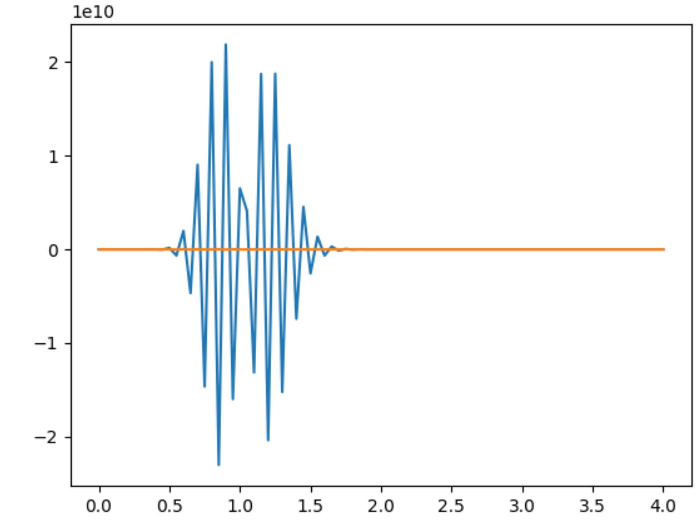
> FTBS格式，t=0.05,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



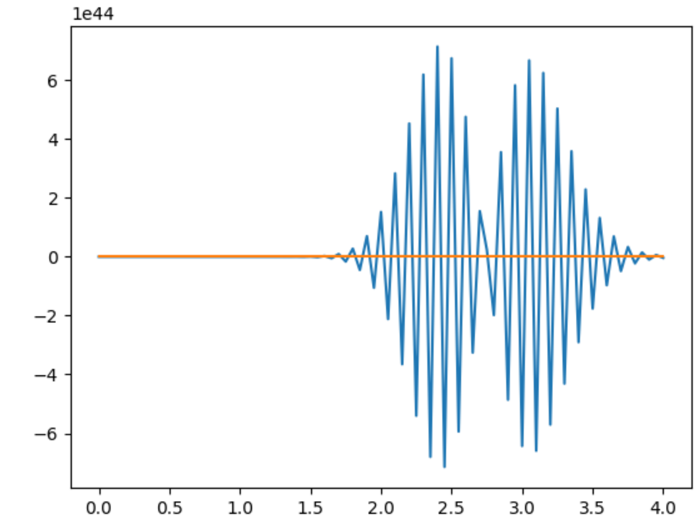
> FTBS格式，t=0.20,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



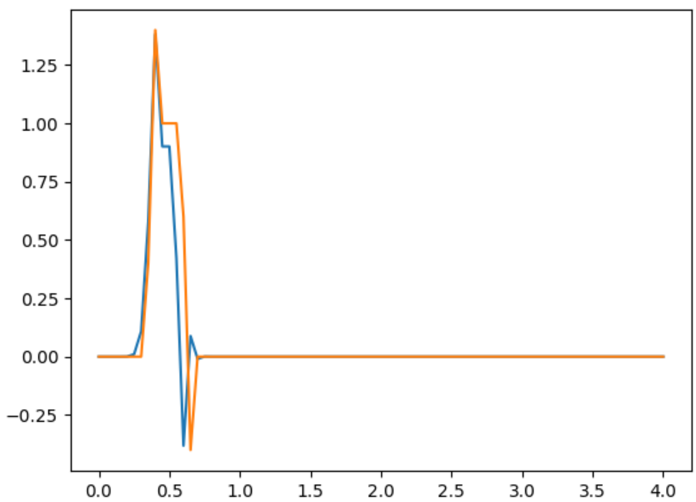
> FTBS格式，t=0.80,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



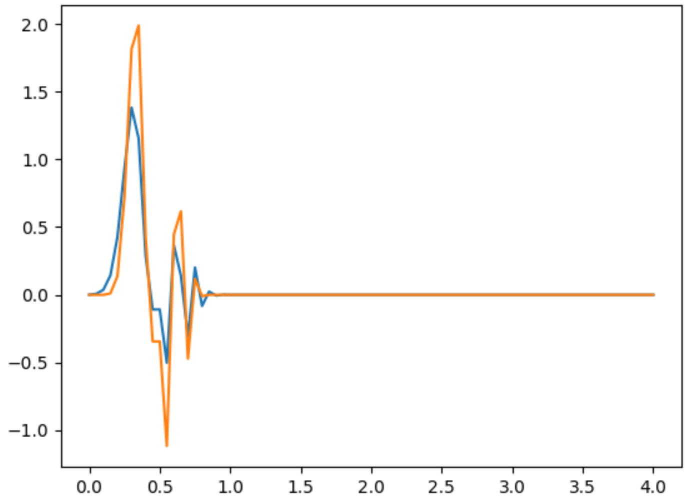
> FTBS格式，t=3.20,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



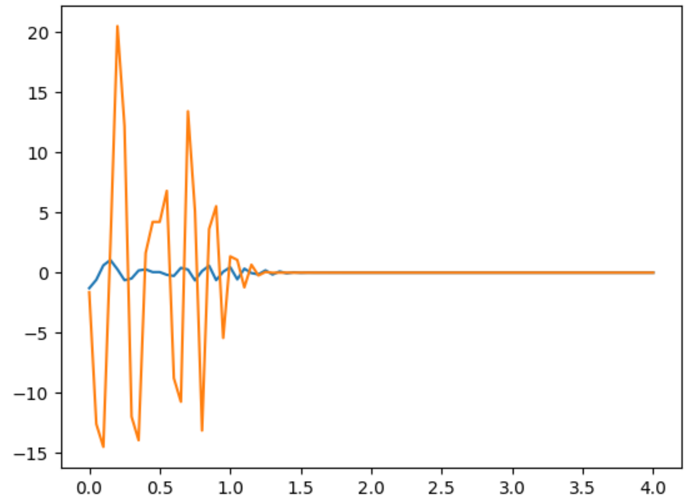
> FTCS格式，t=0.05,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



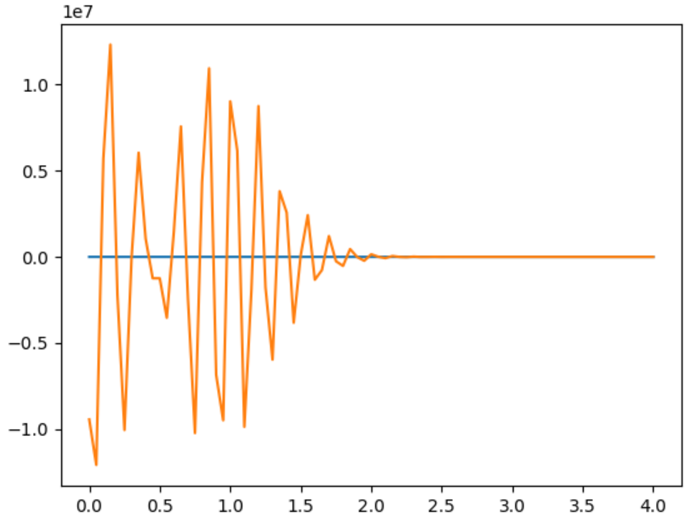
> FTCS格式，t=0.20,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



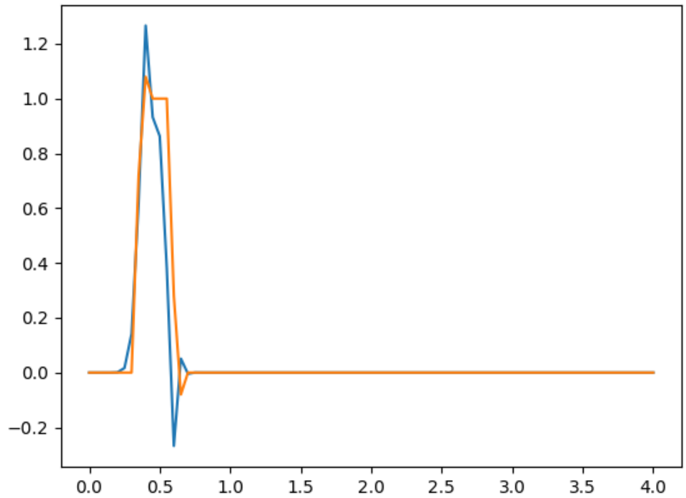
> FTCS格式，t=0.80,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



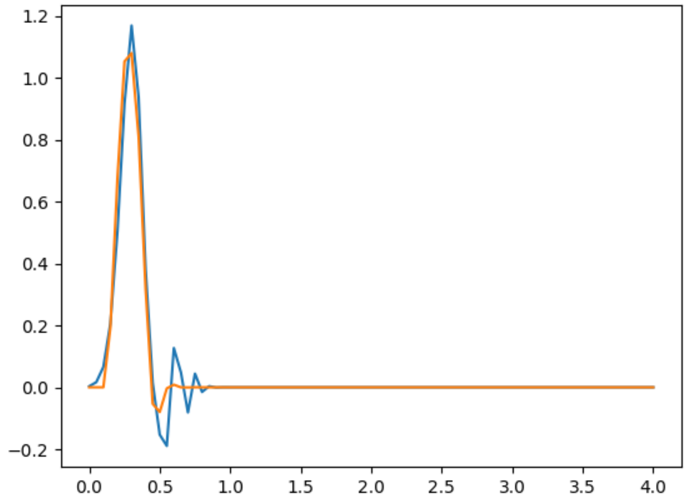
> FTCS格式，t=3.20,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



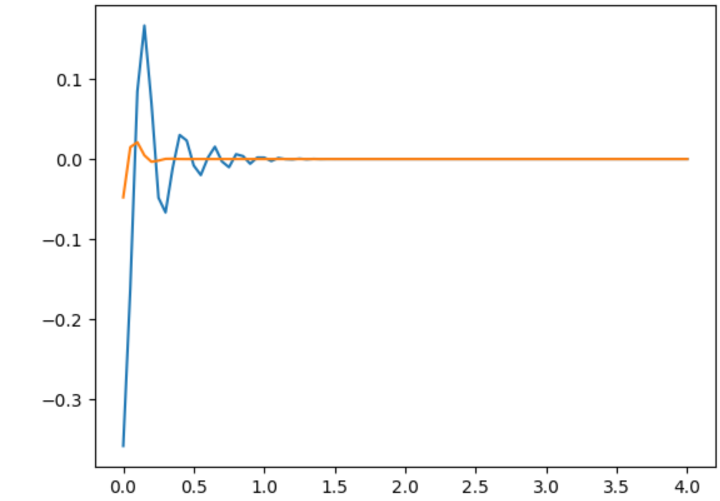
> LaxW格式，t=0.05,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



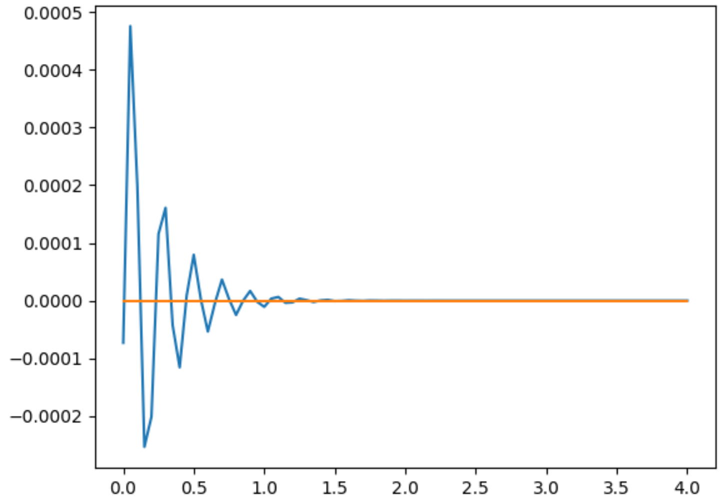
> LaxW格式，t=0.20,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



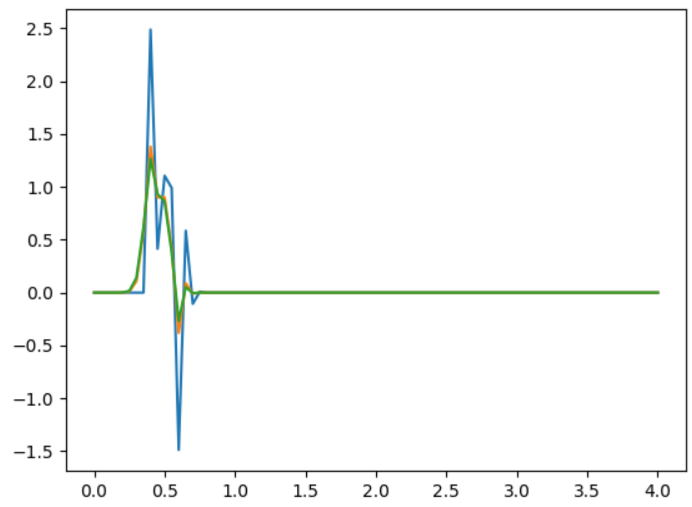
> LaxW格式，t=0.80,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



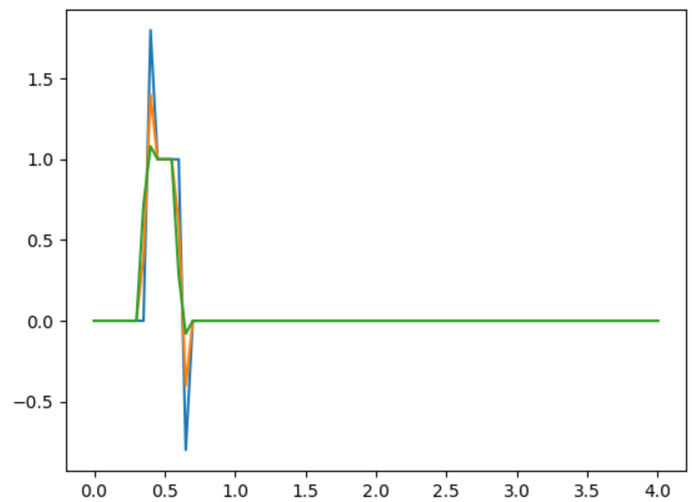
> LaxW格式，t=3.20,dt: 0.01(blue) vs 0.04(red)



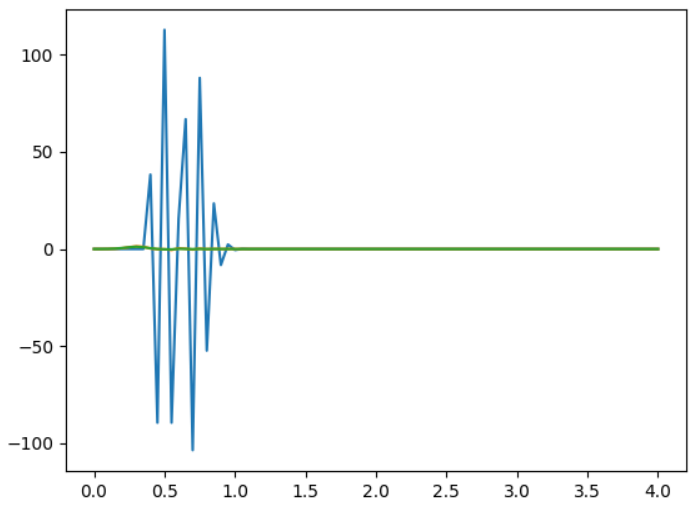
> 横向比较 t=0.05, dt = 0.01时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



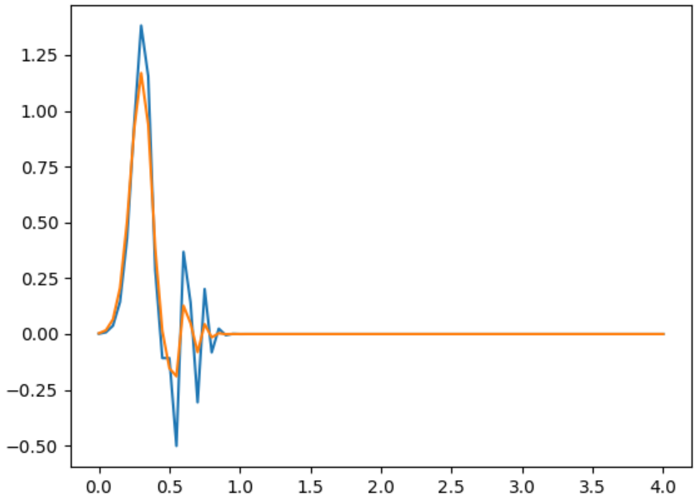
> 横向比较 t=0.05, dt = 0.04时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



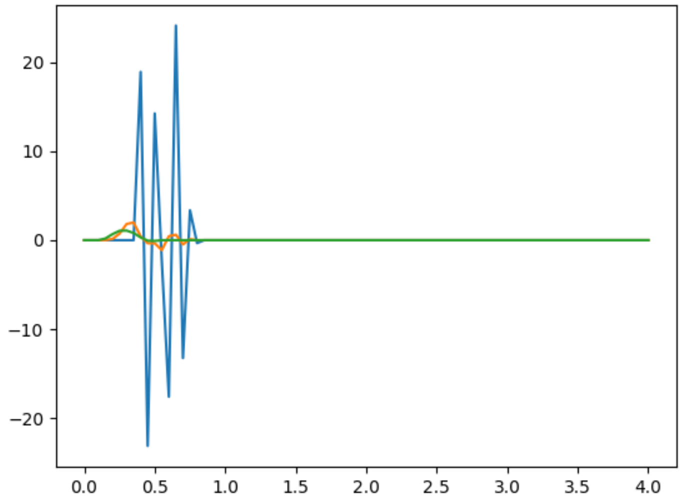
> 横向比较 t=0.20, dt = 0.01时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



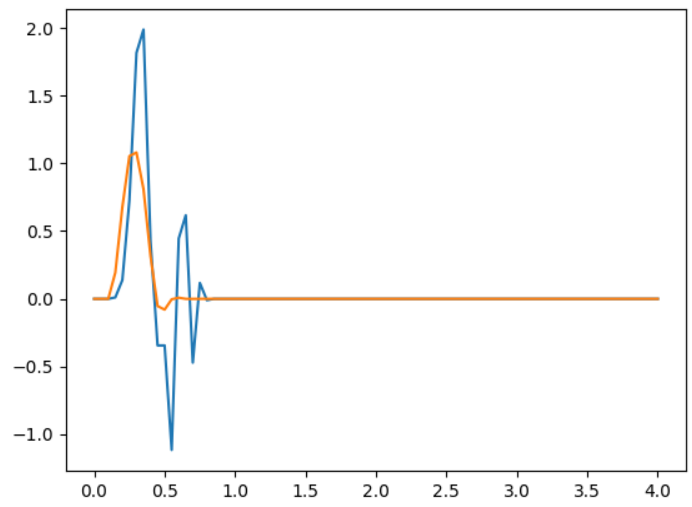
上面有影响者，重新绘制 FTCS(blue),_LaxW(red)



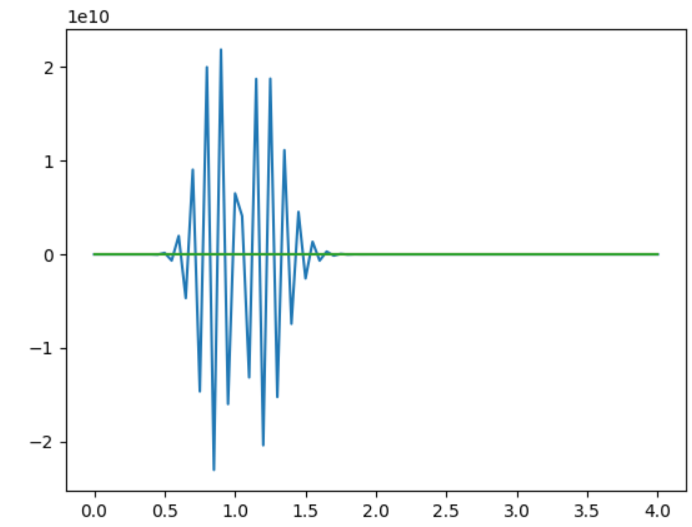
> 横向比较 t=0.20, dt = 0.04时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



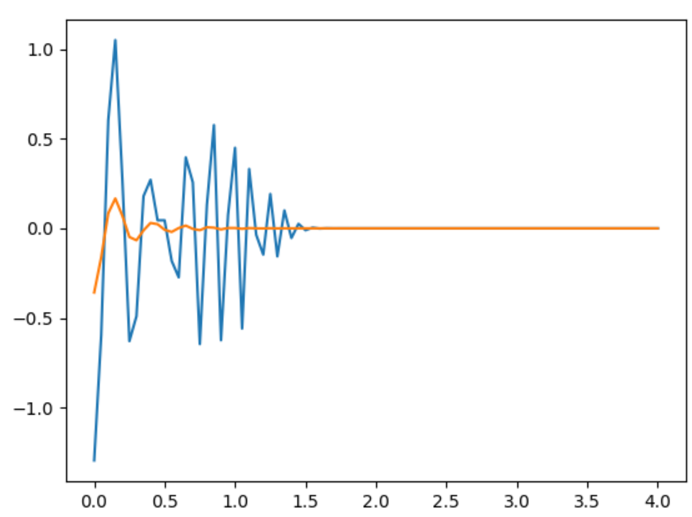
上面有影响者，重新绘制， FTCS(blue),_LaxW(red)



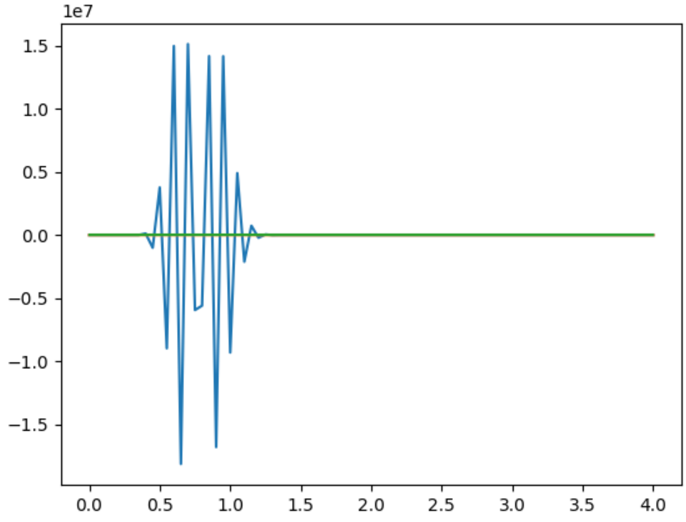
> 横向比较 t=0.80, dt = 0.01时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



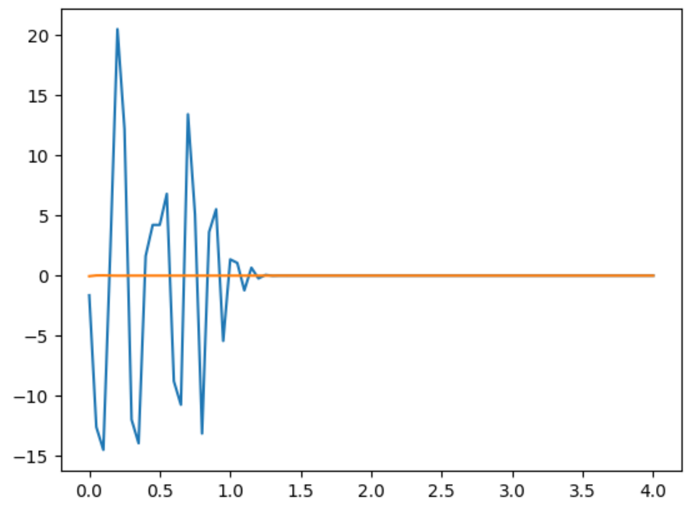
上面有影响者，重新绘制, FTCS(blue),_LaxW(red)



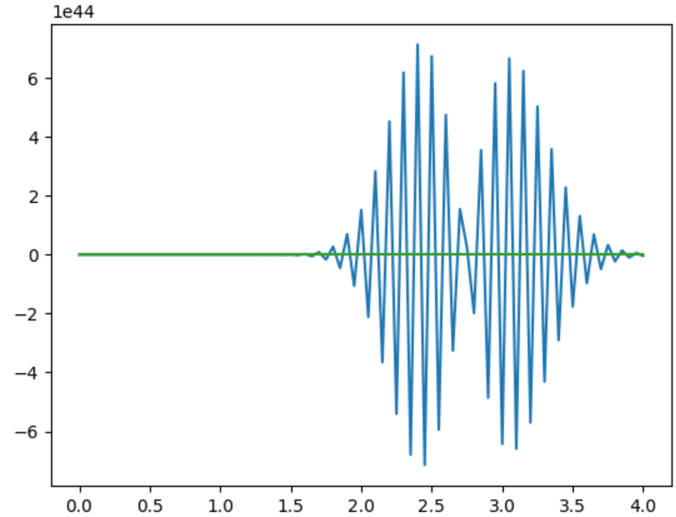
> 横向比较 t=0.80, dt = 0.04时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



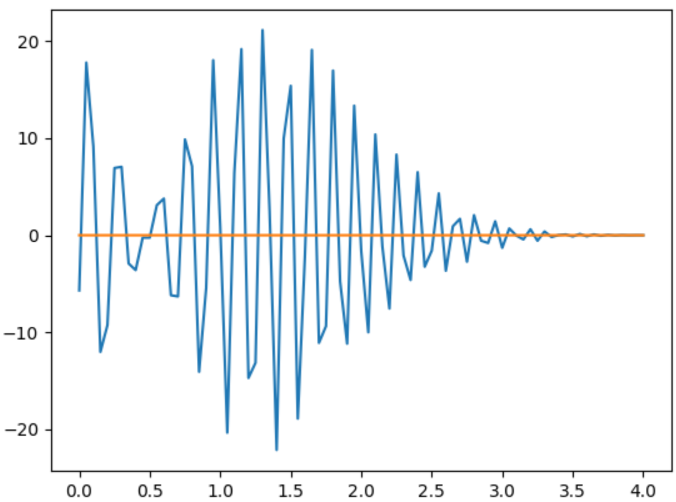
上面有影响者，重新绘制 FTCS(blue),_LaxW(red)



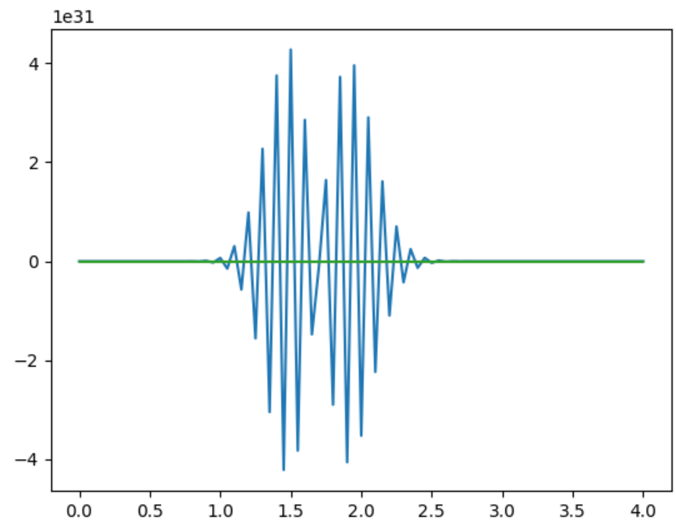
> 横向比较 t=3.20, dt = 0.01时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



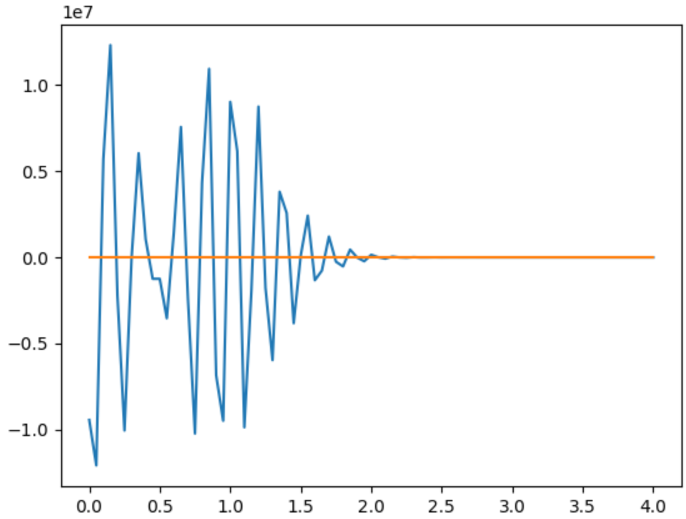
上面有影响者，重新绘制 FTCS(blue),_LaxW(red)



> 横向比较 t=3.20, dt = 0.04时 (FTBS(blue),_FTCS(red),_LaxW(green)



上面有影响者，重新绘制,FTCS(blue),_LaxW(red)



分析总结

首先根据结果的经验分析可知：

1. 时间上的迭代次数越多，解越不稳定。
2. 数值解的稳定性和初始值的连续性有很大关系（我们初始值不连续会产生非常混乱的结果）
3. 稳定性上： `FTBS` < `FTCS` < `LaxW`。

理论分析

1. 方程的色散型和耗散性 设谐波解为$e^{i(kt+\omega x)} \Rightarrow \omega = -k$

色散关系为$k = -\omega$, 解为$u(x,t) = e^{i\omega(t-x)}$

其振幅不衰减，无耗散，不是非线性关系，无色散。

2. 格式的耗散性和色散性

> FTBS的 耗散性和色散性

可知，对应的方程为

$$\frac{e^{ki\Delta t}-1}{\Delta t} = -\frac{1-e^{-\omega i\Delta x}}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow e^{ki\Delta t} = 1-\frac{\Delta t}{\Delta x}+\frac{\Delta t}{\Delta x}e^{-\omega i\Delta x}$$

> 其结果在复部非线形，所以是色散的。并且在实部上是不确定的，无法确定耗散性（和r有关系）。

> FTCS的 耗散性和色散性

可知，对应的方程为

$$\frac{e^{ki\Delta t}-1}{\Delta t} = -\frac{e^{\omega i\Delta x}-e^{-\omega i\Delta x}}{\Delta x}$$
$$\Rightarrow e^{ki\Delta t} = 1-\frac{\Delta t}{\Delta x}(2i\sin\omega\Delta x)$$

其结果的模长是增长的，所以是耗散的，并且其频率域上是非线性的，所以是色散的

> LaxW的 耗散性和色散性 可知，对应的方程为

$$\frac{e^{ki\Delta t}-1}{\Delta t} = -\frac{e^{\omega i\Delta x}-e^{-\omega i\Delta x}}{\Delta x}+\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}(e^{\omega i\Delta x}+e^{-\omega i\Delta x}-2)$$
$$\Rightarrow e^{ki\Delta t} = 1-\frac{\Delta t}{\Delta x}(2i\sin\omega\Delta x)+\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(2\cos\omega\Delta x-2)$$
$$= 1-2\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\omega\Delta x+\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(i\sin\omega\Delta x)^2$$
$$= (1-i\sin\omega\Delta x)^2$$

其结果模长是增加的，所以是有耗散的；同时因为其频率域是非线性的，所以是色散的

结合结果分析

可知，应为FTCS格式和LaxW格式均为耗散的，所以其结果的振幅是减小的。并且应为其色散性，在结果中也展示出了比较大的误差。

（抱歉本程序在编写的时候没有发现方程和程序有问题，应该全部取负号）。