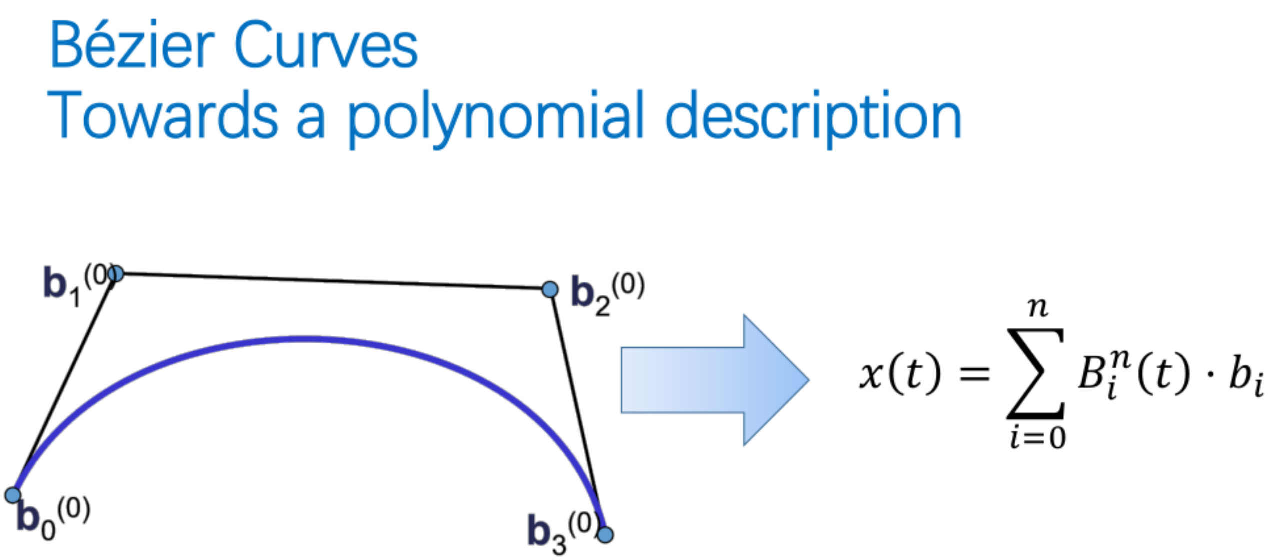
作业3： 实现基函数Bezier 曲线生成以及控制多边形交互

问题描述

对应CAGD的应用场景，需要很好的曲线族构造方法以逼近比较好的形状。Beizer曲线便是一族好的曲线。基于Beizer曲线的生成主要有两种方法：一种是基于Bronstein多项式，一种是基于线性组合递归实现。本次实验生成基函数的。

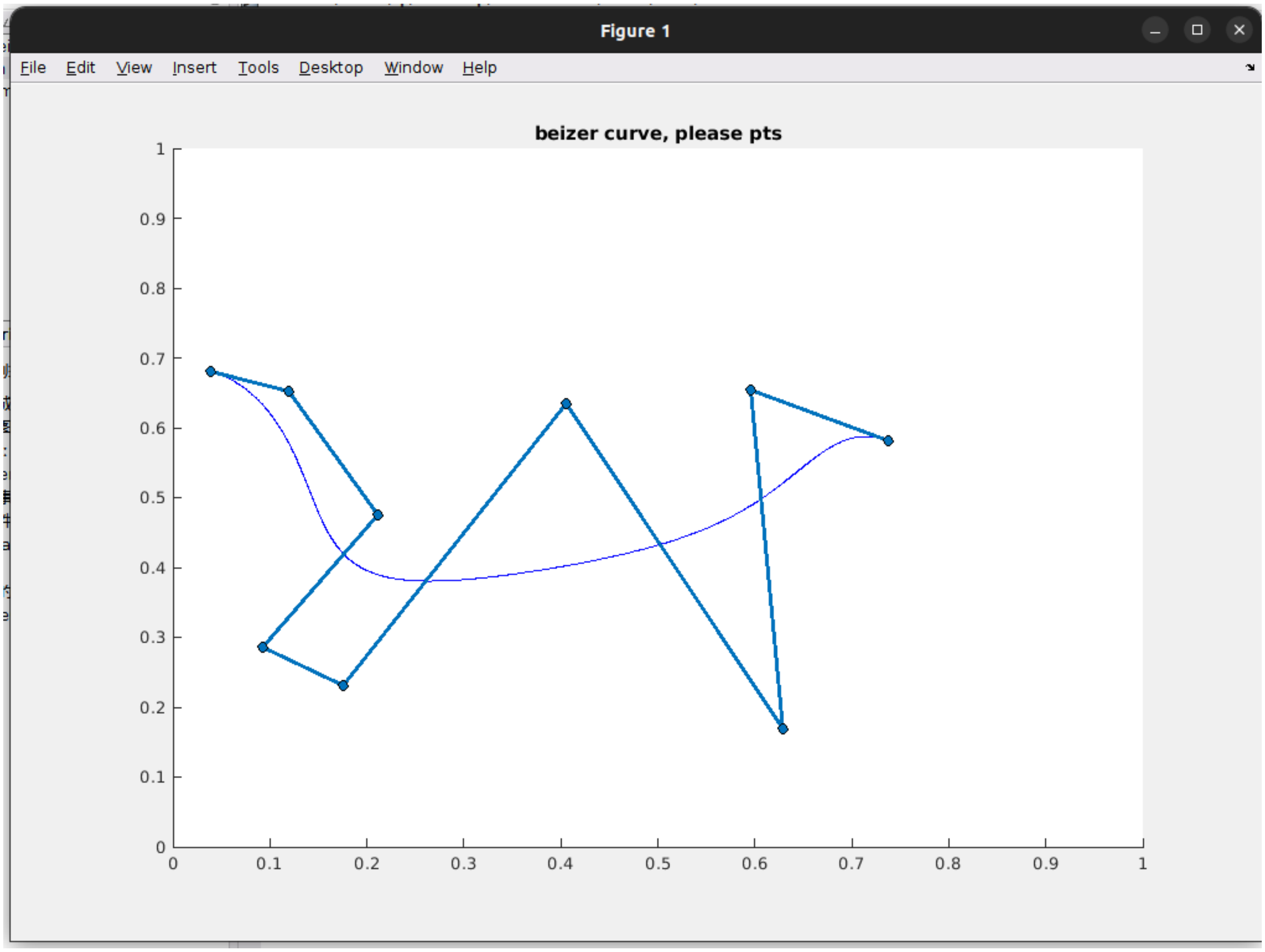
算法实现与分析

本次实验主要实现的Beizer的构造方法如下。



我们用一个函数来表示Bernstein基函数。

并且想要达到如下的交互



结果展示

我实现的结果如下，

1. 实现任意点的画图

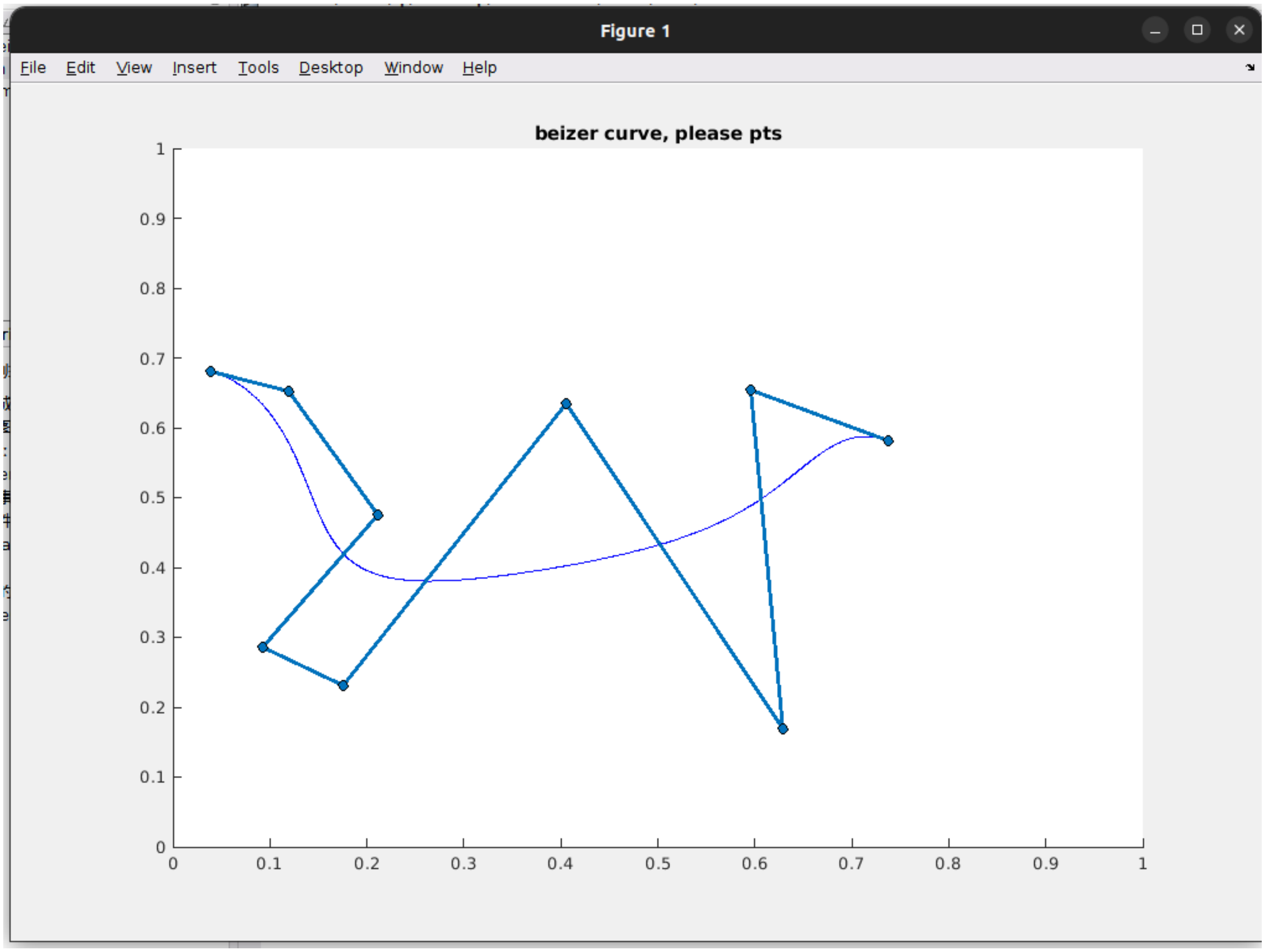
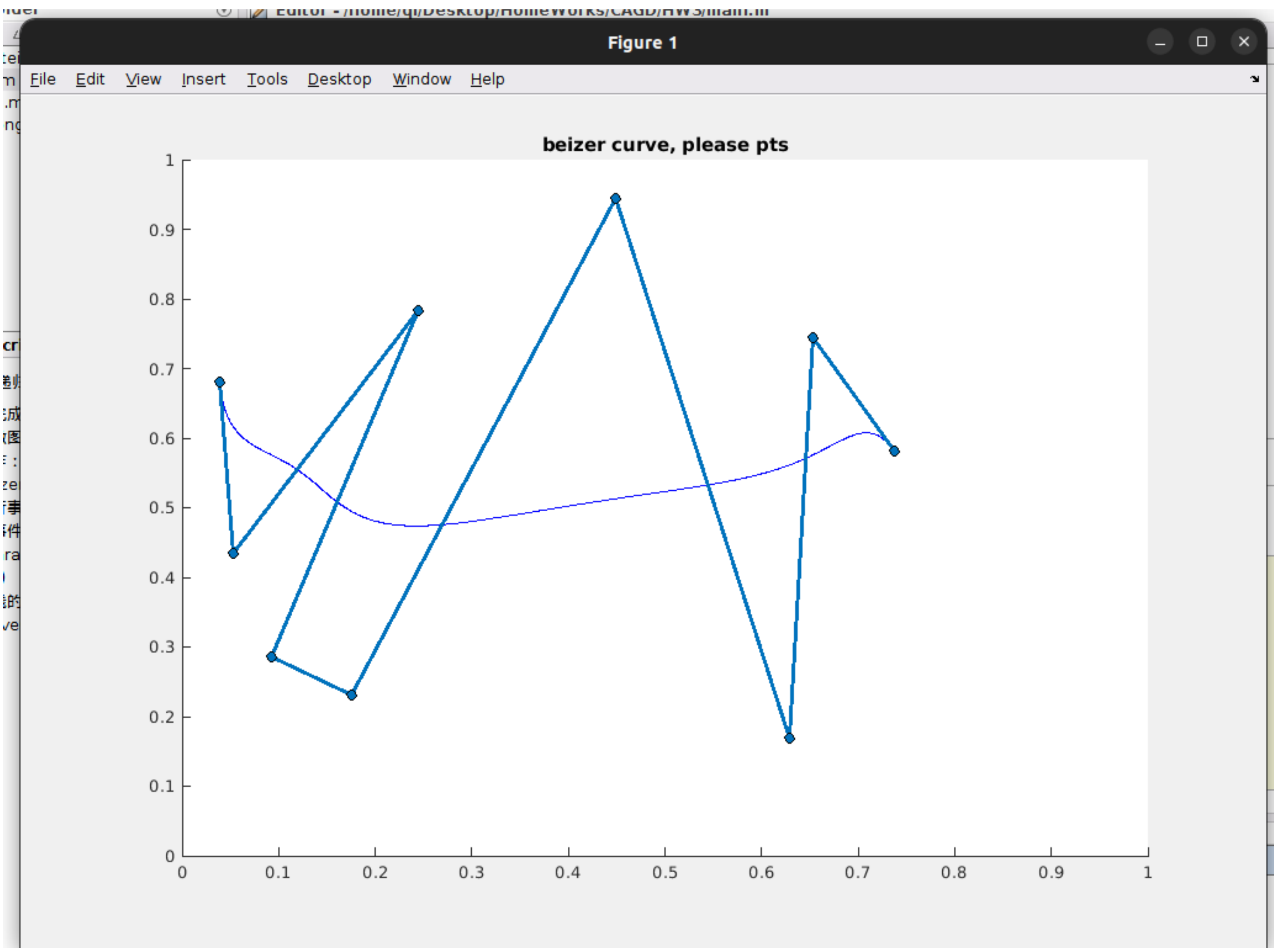


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
beizer curve, please pts
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

2. 实现实时地交互



结果分析

此次实验的结果比上次已经比较满意了，得到比较好的交互结果，并且能对点数十分多的时候做到实时交互。

书面作业

2. 证明： Beizer曲线弧长不大于其控制多边形的周长.

证明： 考虑表达式，设为$P_i, i = 0, \ldots, n$的Bezier曲线，则其表达式为

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_n^i(t)$$

考虑求导即可

$$\frac{dB_n^i(x)}{dx} = n(B_{n-1}^{i-1}(x) - B_{n-1}^i(x))$$

所以

$$\frac{dB(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{n}P_in(B_{n-1}^{i-1}(t)-B_{n-1}^{i}(t))$$

(在多余处为0即可)。

故弧长为

$$S=\int_0^1||\frac{dB(t)}{dt}||dt=\int_0^1|\sum_{i=0}^{n}P_in(B_{n-1}^{i-1}(t)-B_{n-1}^{i}(t))||dt$$

$$=\int_0^1||\sum_{i=0}^{n-1}nB_{n-1}^{i}(t)(P_i-P_{i+1})||dt$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n-1}||P_i-P_{i-1}||\int_0^1 nB_{n-1}^{i}(t)dt$$

$$\leq\sum_{i=0}^{n-1}||P_i-P_{i-1}||=L(P_1,\cdots,P_n)$$

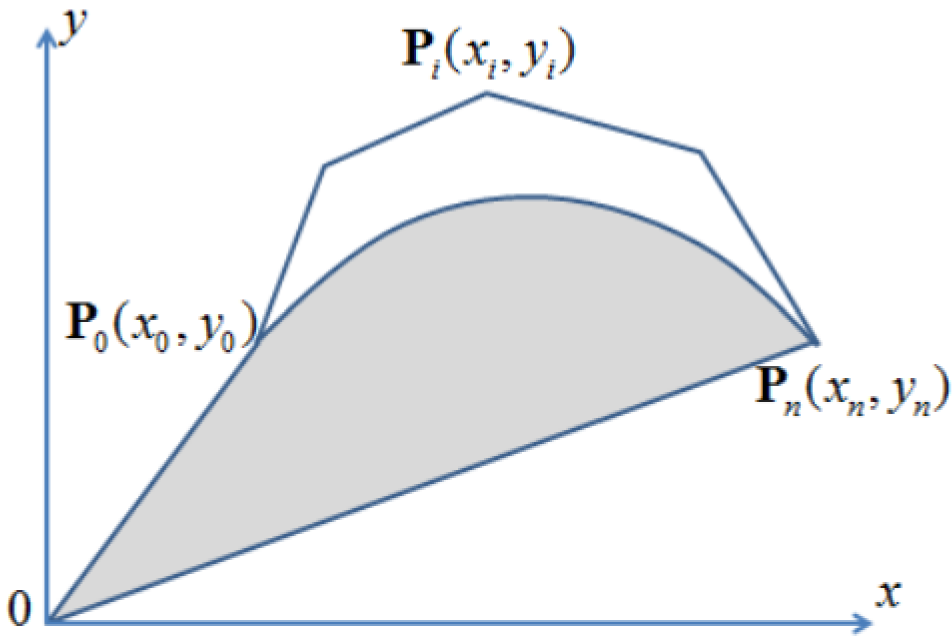
3. 圆弧不能用Beizer曲线精确表示.

证明：若有可能表示出来，假设是有n个点组成的Beizer曲线，那么在P点处重合。

首先可知，在P点处，圆是无限可微的，有导数$f^{(i)}(P)$,并且由此给出Beizer曲线的控制点P_i(因为Beizer曲线的导数可以由控制点线性组合给出)

那么可以导出，圆弧是可以被多项式参数化的，即$f(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iC_i^n(t)^i(1-t)^{n-i}$，但是这带入到圆面积的表达式中显然不成立。

4. 给出下面的面积表达式.



解：

考虑连线P_0和P_n,随后用参数化表示

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_n^i(t)$$

$$L_{P_0P_n}(x) = y_0 \frac{x - x_n}{x_0 - x_n} + y_n \frac{x_0 - x}{x_0 - x_n}$$

以及面积的剖分

$$S = S_{\triangle P_0 O P_n} + S_n$$

$$S_{\triangle P_0 O P_n} = |x_0 y_n - x_n y_0|/2$$

以及对于面积S_2：

$$S_2 = \int_0^1 |\sum_{i=0}^{n} y_i B_n^i(t) - L_{P_0P_n}(\sum_{i=0}^{n} x_i P_i B_n^i(t))| dt$$

后面就不好再继续算了，可以考虑绝对值永远为正/负的情况，同时也应该注意为负的时候可能会对$S_{\triangle}$产生冲突。