摘要

本次作业用 LaTeX 写。

1. 证明：曲线 $c(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\right)$ 是平面曲线。

   证明：因为 $x(t) = \frac{1}{t} + t, y(t) = t+1, z(t) = \frac{1}{t} - 1$
   所以 $x(t) = y(t) + z(t)$. 所以在平面 $x = y + z$ 上。
   (也可用绕率为 0)

2. 画出轨迹图，计算外摆线参数

   解：设两个圆分别旋转了 θ_1, θ_2 的圆心角，可知一个为顺时针，一个为逆时针，并且设初始时刻 θ_3 为该点和两圆圆心连线的夹角 (设两圆心连线为 x 轴平行)。
   并且可以找到一个统一的参数:$\theta_1 = \frac{S}{R}, \theta_1 = \frac{S}{r}$, 故其参数表示为

   $$p(t) = ((R+r)\cos\theta_1, -(R+r)\sin\theta_1) + (-r\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3), r\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3))$$

   $$= ((R+r)\cos\theta_1 - r\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3), -(R+r)\sin\theta_1) + r\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3))$$
   $$= ((R+r)\cos\frac{S}{R} - r\cos(\frac{S}{R}+\frac{S}{r}+\theta_3), -(R+r)\sin\frac{S}{R}) + r\sin(\frac{S}{R}+\frac{S}{r}+\theta_3))$$

   轨迹图的结果：

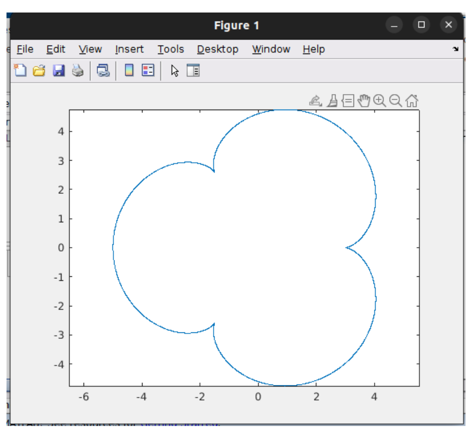

图 1: 结果：画出图

3. 画出轨迹图

解：因为椭圆参数曲线为 $(a\cos(t), b\sin(t))$，可知其标架为

$$e_1 = \frac{(-a\sin t, b\cos t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}, e_2 = \frac{(-b\cos t, -a\sin t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}.$$

并且曲率是

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

所以可以直接编程实现。

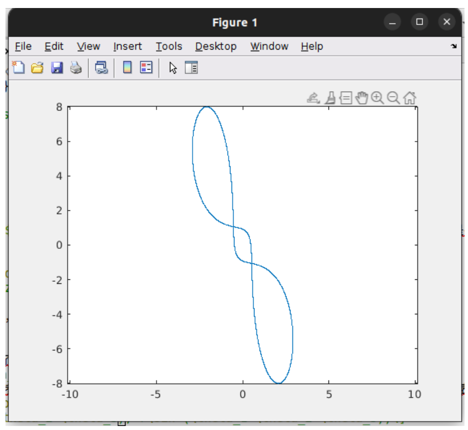

图 2: 当:$a=2, b=1$ 时的结果。