

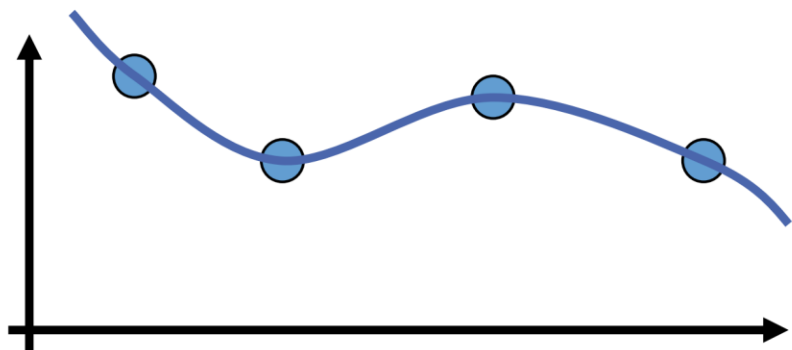
# 计算机辅助几何设计

## 2021秋学期

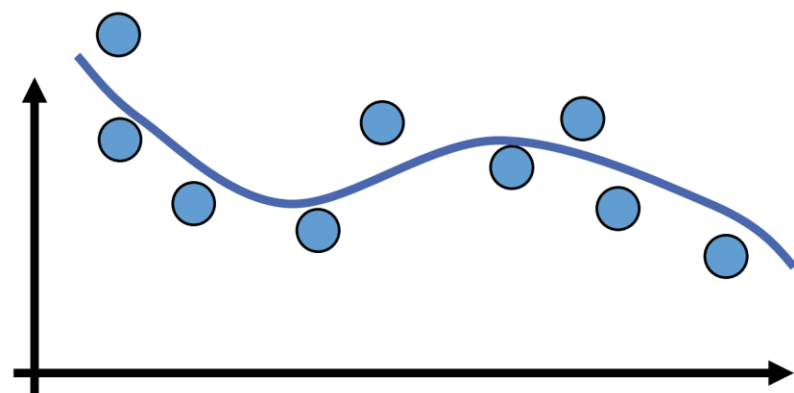
### 插值和逼近

陈仁杰

中国科学技术大学



插值



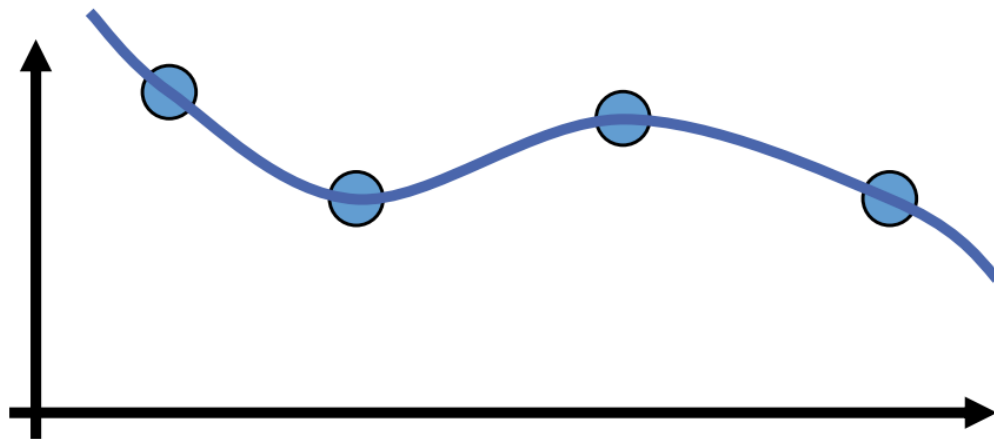
逼近

# 插值

一般插值和多项式插值

# 插值问题

- 最简单的光滑曲线曲面建模
  - 给定曲线或曲面上的一组点
  - 选择一组可张成合适的函数空间的基函数
    - 光滑基函数
    - 任意线性组合也光滑
  - 找到一个线性组合使得曲线或曲面能插值给定点



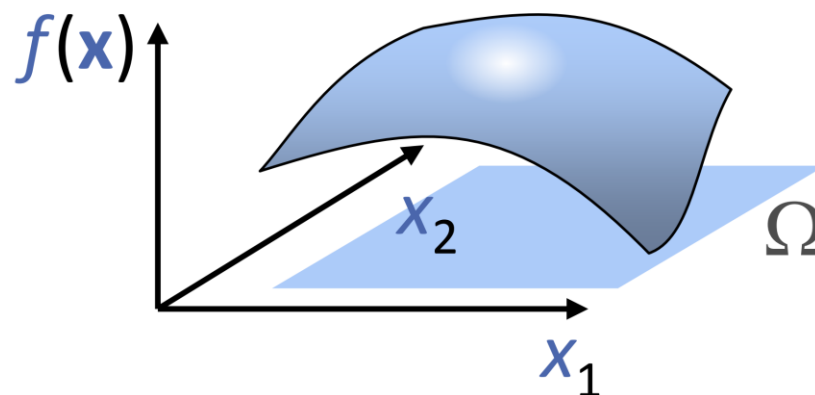
# 问题一般形式

- 设定
  - 寻找定义域  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ , 值域  $\mathbb{R}$  上函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
  - 基函数集合:  $B = \{b_1, \dots, b_n\}, b_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
  - 将  $f$  表示为基函数的线性组合

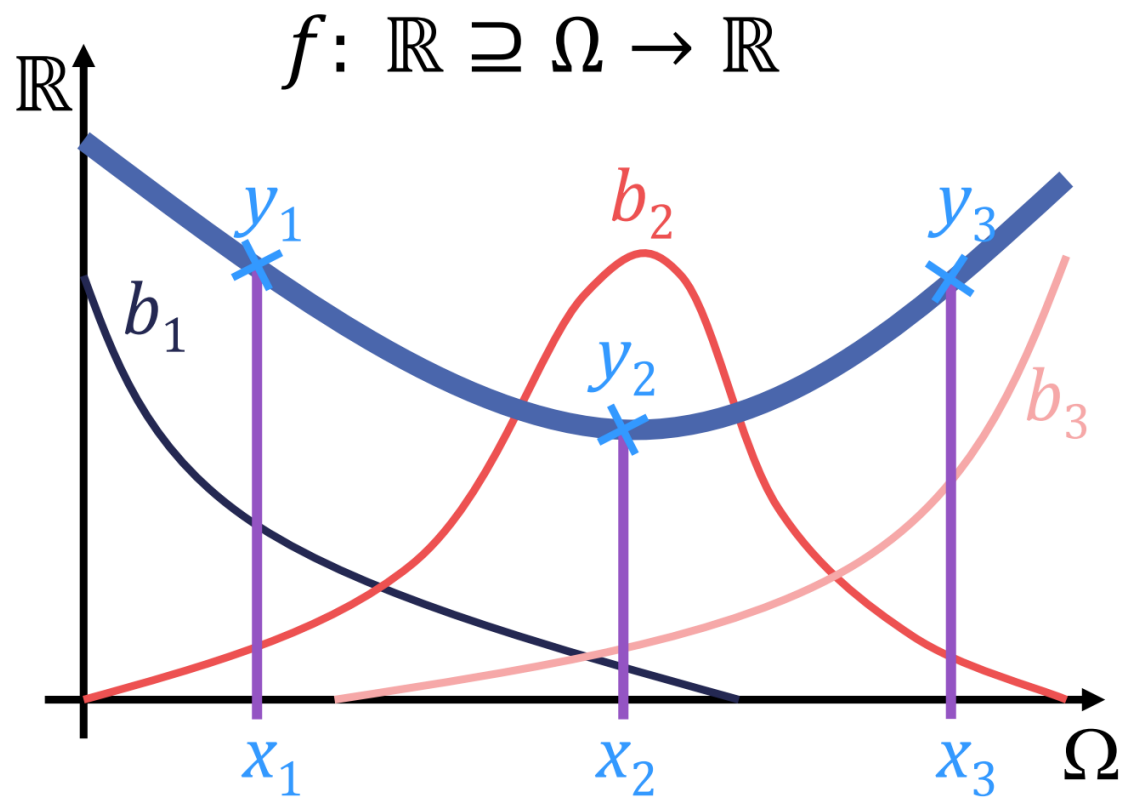
$$f_{\lambda}(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_i b_i(x)$$

$$f \text{ 由 } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 唯一确定}$$

- 函数值  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}, (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$
- 目标找到  $\lambda$  使得  $f_{\lambda}(x_i) = y_i$  对所有  $i$  成立



# 示意图



1D Example

# 插值问题求解

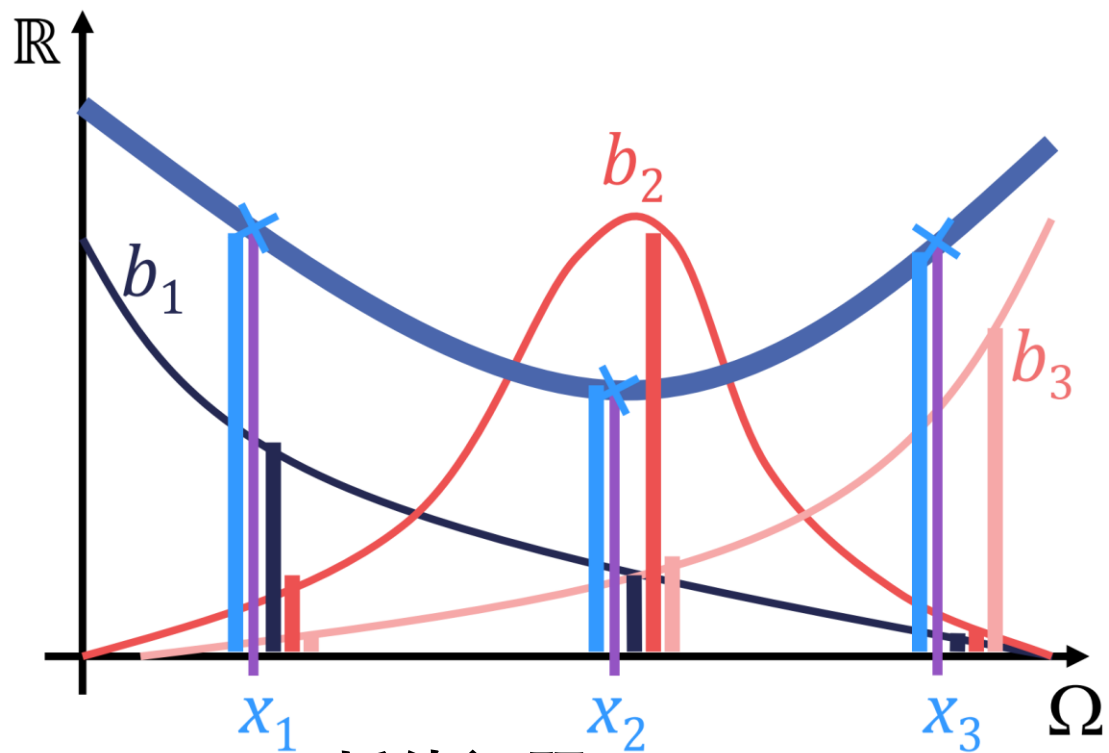
- 解决方法：构造线性方程组
  - 在数据点 $x_i$ 上计算基函数:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i(x_i) = y_i$$

- 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} b_1(x_1) & \cdots & b_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_n) & \cdots & b_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

# 示意图



→ → → → → → →

$y_1 = \Sigma$

$y_2 = \Sigma$

$y_3 = \Sigma$

$\times \lambda_3$

$\times \lambda_2$

$\times \lambda_1$

$\times \lambda_3$

$\times \lambda_2$

$\times \lambda_1$

$\times \lambda_3$

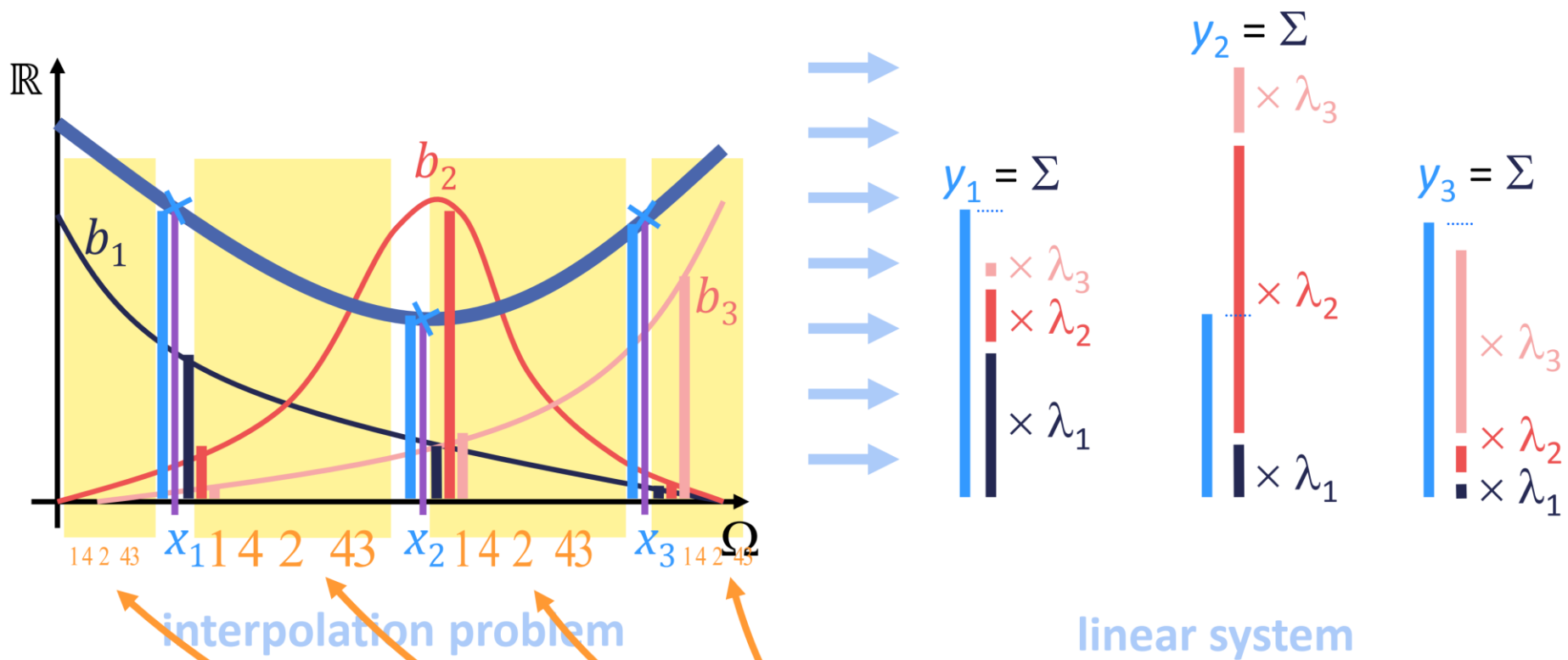
$\times \lambda_2$

$\times \lambda_1$

线性方程组



# 示意图



空白处可取任意值，  
由基函数确定

# 多项式插值示例

- 多项式基  $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}$
- 求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

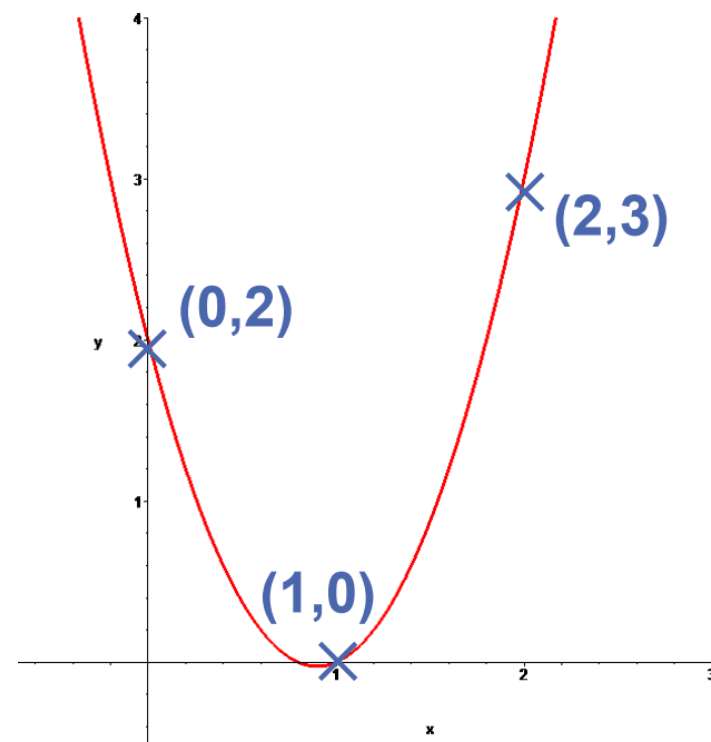
Vandermonde 范德蒙矩阵

# 数值实例

- 二次幂基(单项式)  $B = \{1, x, x^2\}$
- 函数值  $\{(0, 2), (1, 0), (2, 3)\}$   $[(x, y)]$
- 求解线性系统

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解为:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -\frac{9}{2}, \lambda_3 = 5/2$




# 多项式插值存在的问题


- 系统矩阵稠密
- 依赖于基函数选取，矩阵可能病态，导致难于求解（求逆）

# 病态矩阵示例

- 考虑二元方程组
  - 解为(1,1)
- 对第二个方程右边项扰动0.001
  - 解为(0,3)
- 对矩阵系数进行扰动
  - 解为(2,-1)

$$\begin{aligned}x_1 + 0.5x_2 &= 1.5 \\0.667x_1 + 0.333x_2 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 + 0.5x_2 &= 1.5 \\0.667x_1 + 0.333x_2 &= 0.999\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}x_1 + 0.5x_2 &= 1.5 \\0.667x_1 + 0.334x_2 &= 1\end{aligned}$$


# 病态问题

- 输入数据的细微变化导致输出(解)的剧烈变化
- 将线性方程看成直线（超平面）
  - 当系统病态时，直线变为近似平行
  - 求解(即直线求交)变得困难、不精确

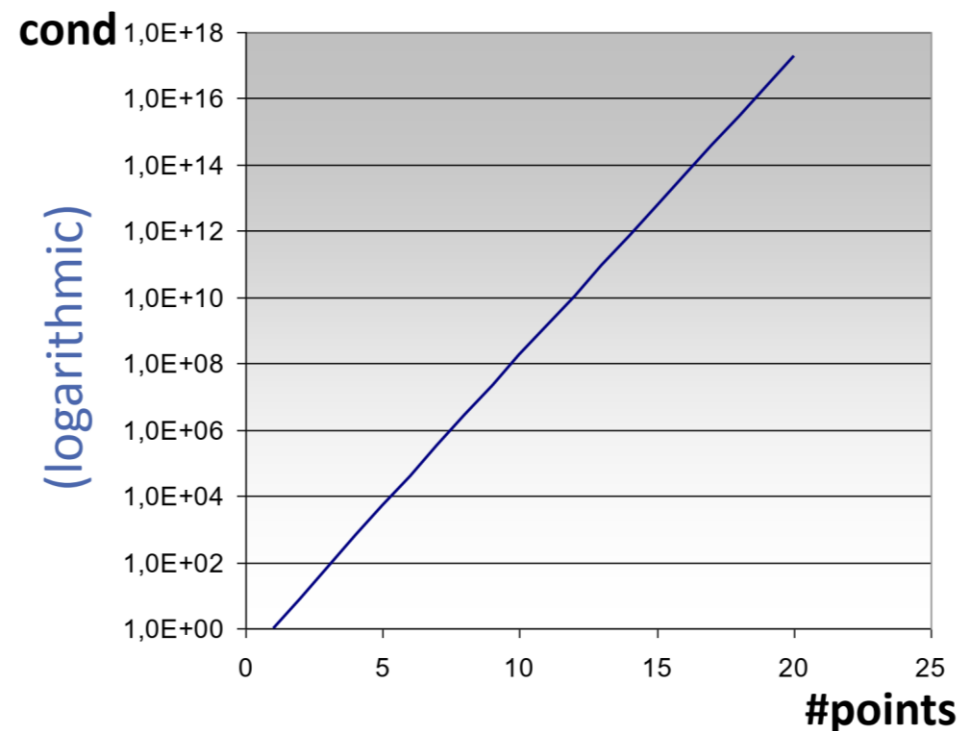
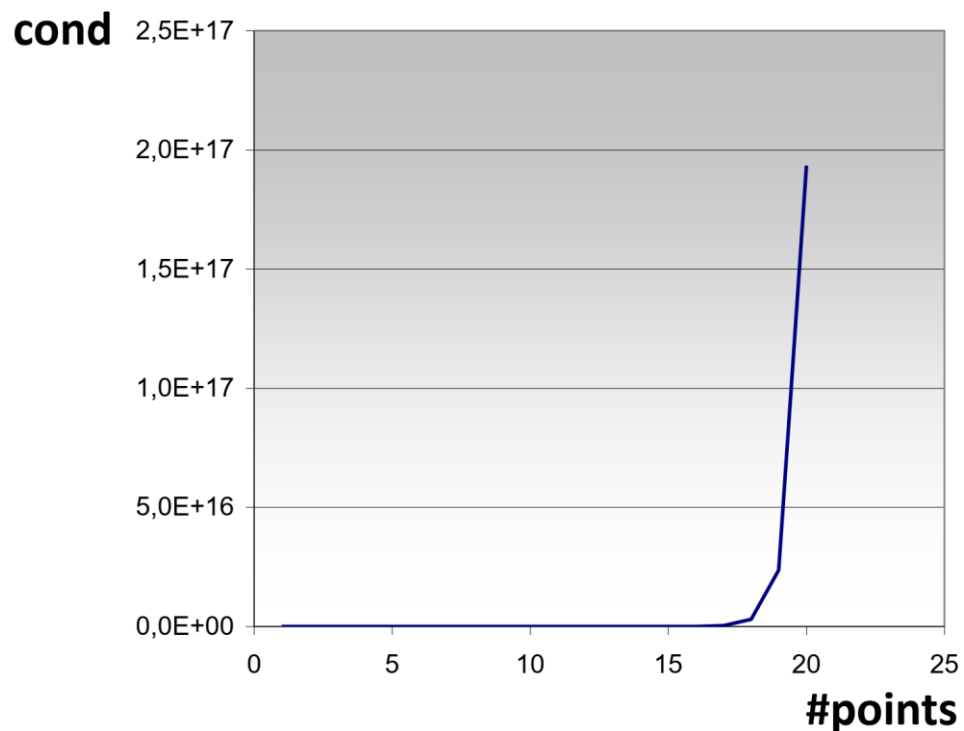
# 矩阵条件数

$$\kappa_2(A) = \frac{\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

- 等于最大特征值和最小特征值之间比例
- 条件数大意味着基元之间有太多相关性

# 矩阵条件数

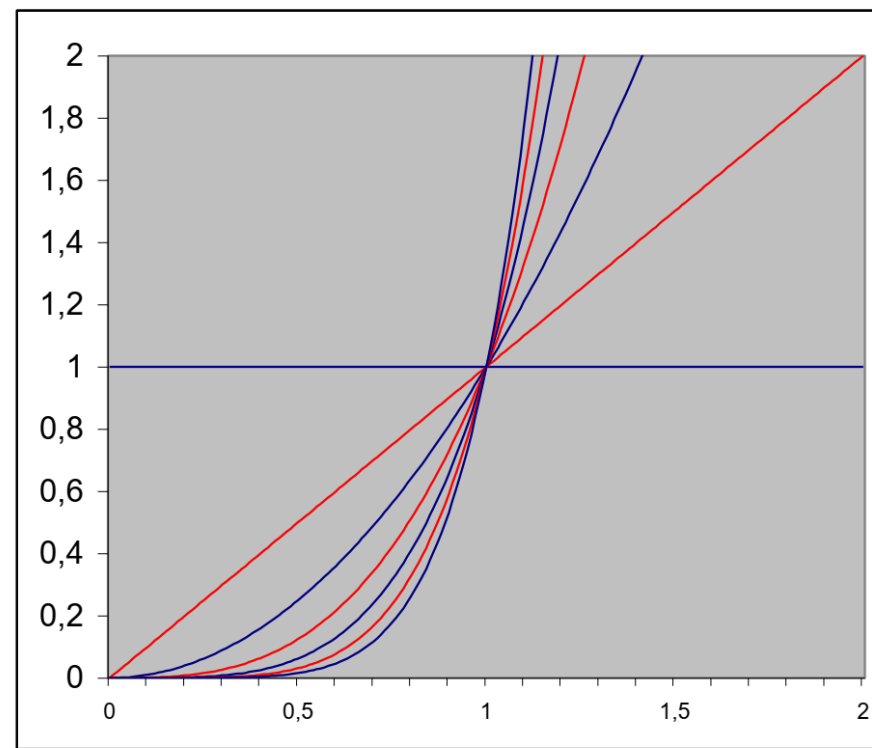
- 多项式插值问题是病态的
  - 对于等距分布的数据点 $x_i$ ，范德蒙矩阵的条件数随着数据点数 $n$ 呈指数级增长（多项式的最高次数为 $n - 1$ ）





# 为什么？

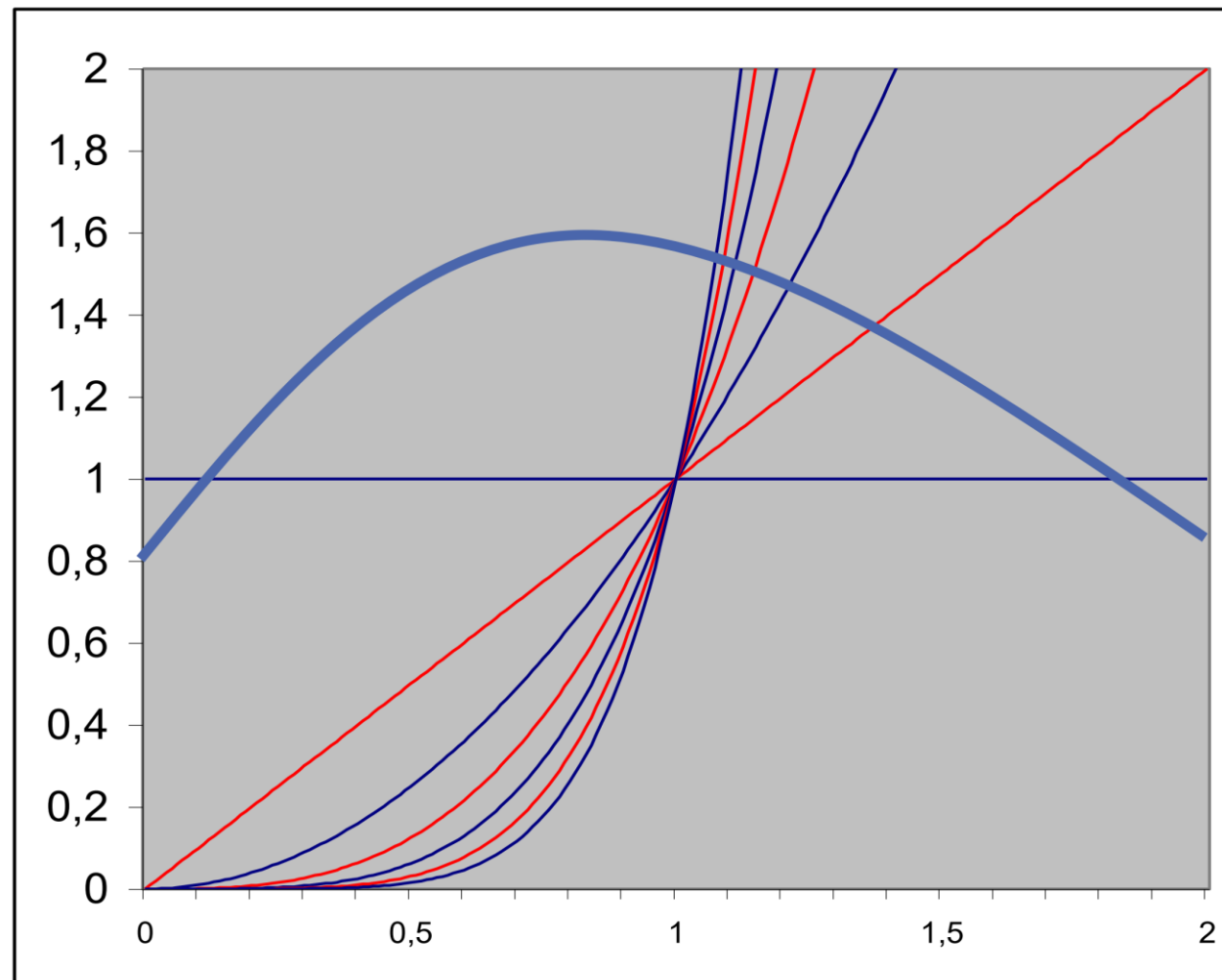
- 幂（单项式）函数基
  - 幂函数之间差别随着次数增加而减小
  - 不同幂函数之间唯一差别为增长速度( $x^i$ 比 $x^{i-1}$ 增长快)



幂(单项式) 函数

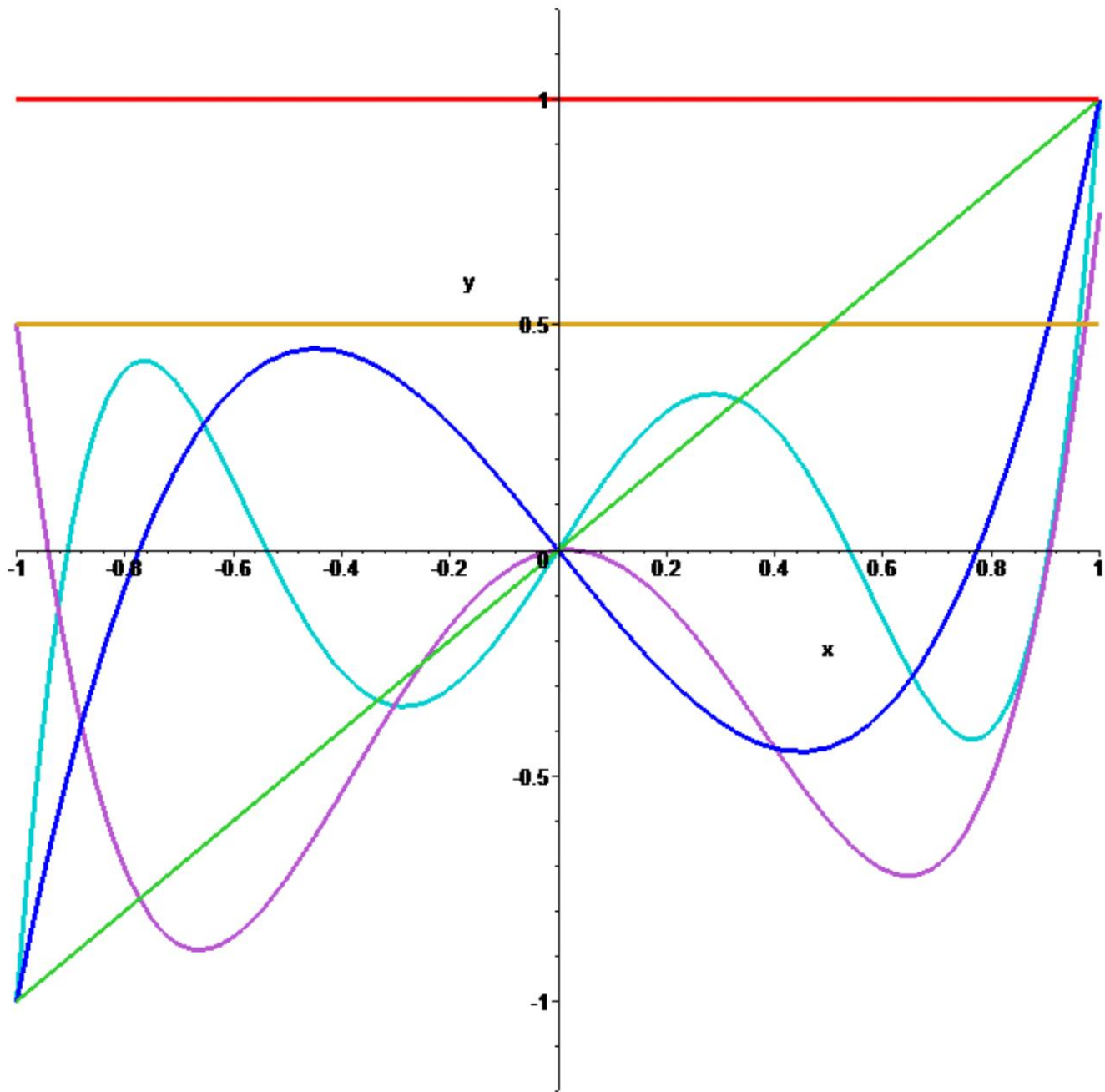
# 函数互相抵消

- 单项式：
  - 从左往右
  - 首先常函数1主宰
  - 接着 $x$ 增长最快
  - 接着 $x^2$ 增长最快
  - 接着 $x^3$ 增长最快
  - ...
- 趋势
  - 好的基函数一般需要系数交替
  - 互相抵消问题



# 解决方法

- 使用正交多项式基
- 如何获得?
  - Gram-Schmidt正交化



# 另一方法

- 能否避免求解线性方程组？

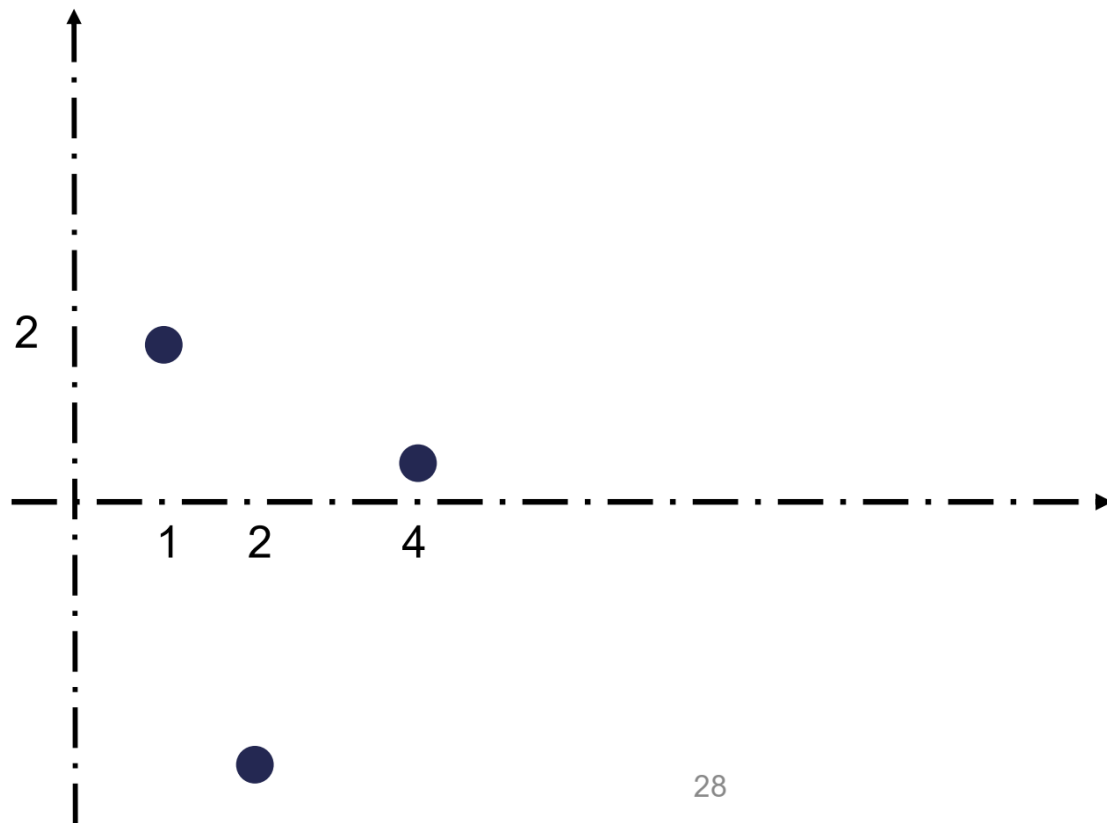
## 另一方法

- 能否避免求解线性方程组？

从不同基函数着手...

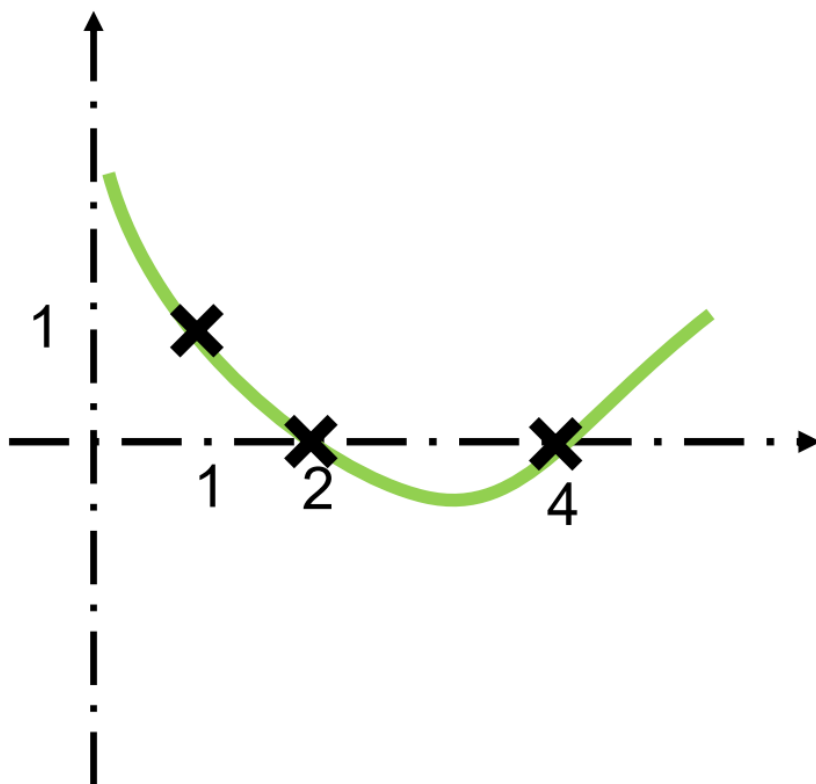
# 示例

- 通过 $(1, 2)$ ,  $(2, -3)$ ,  $(4, 0.5)$ 三点的二次多项式



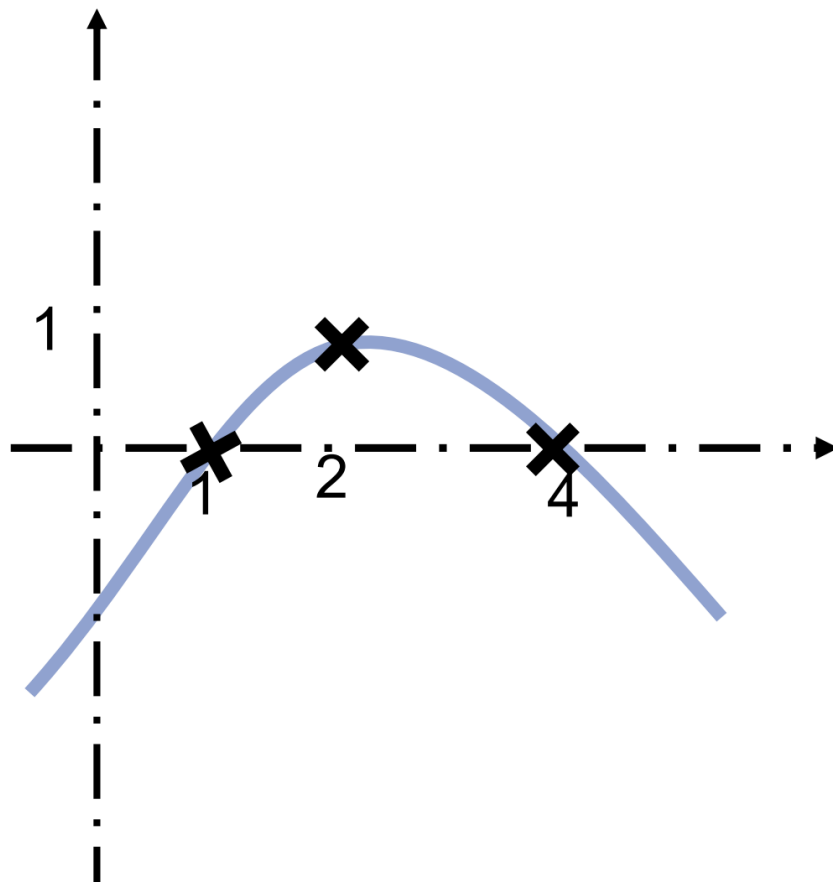
# 示例

- 假设可以构造二次多项式 $P_0(x)$ , 使其在 $x_0$ 处取值为1, 而另两点 $x_1, x_2$ 处取值为0



# 示例

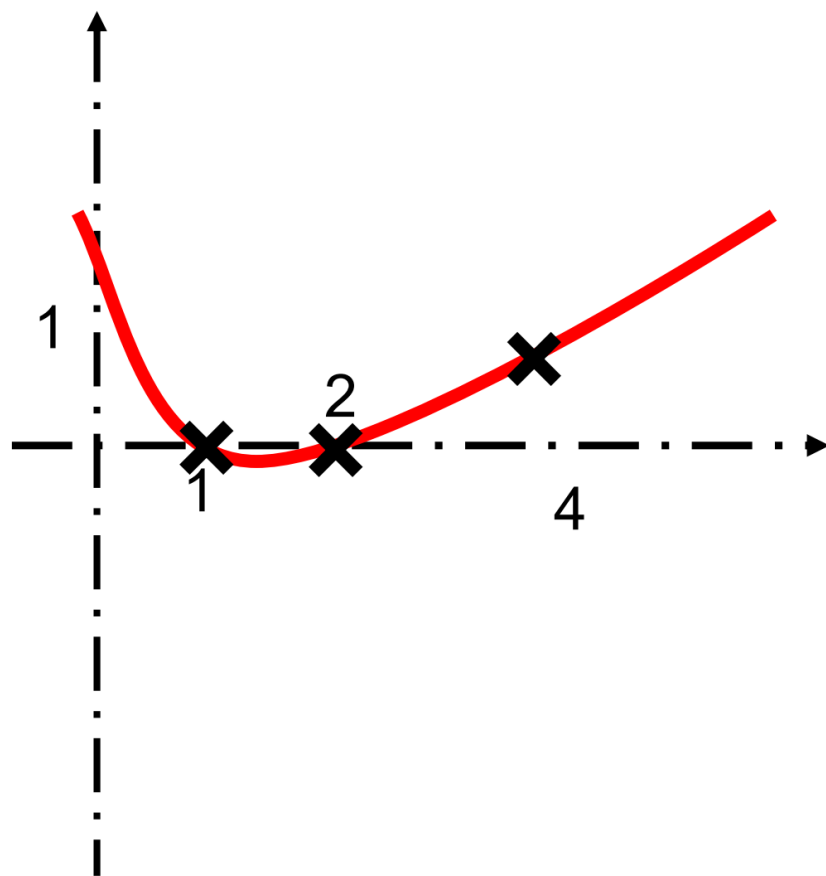
- 类似地，构造 $P_1(x)$ ，在 $x_1$ 处取值为1，在 $x_0, x_2$ 处取值为0





# 示例

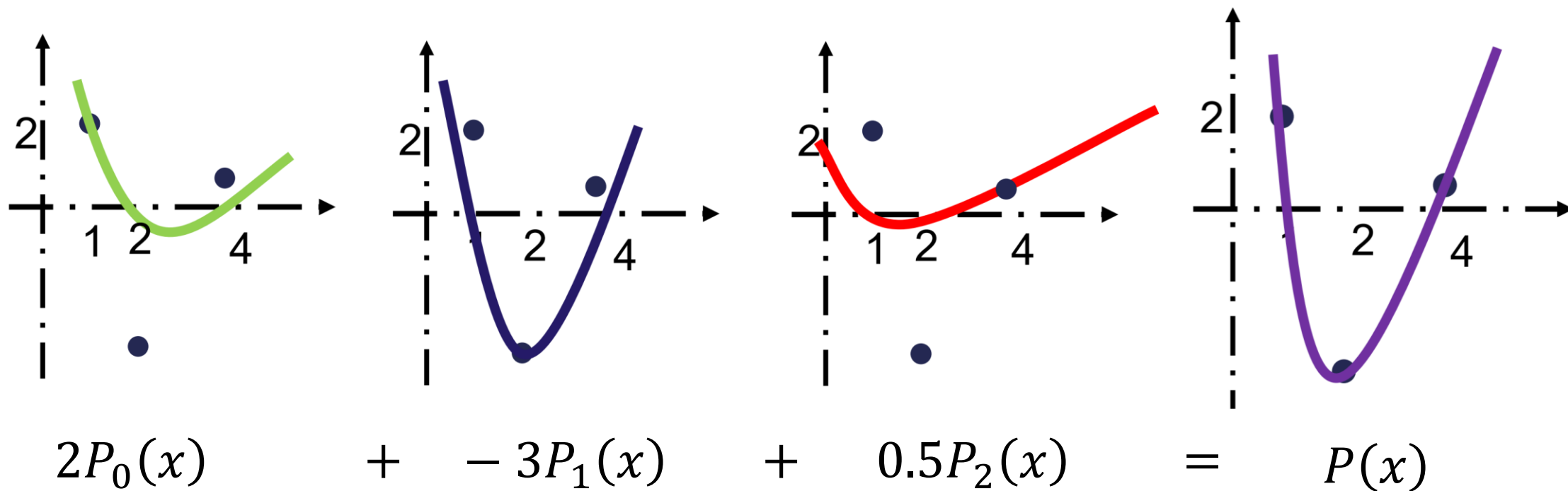
- 构造 $P_2(x)$ , 在 $x_2$ 处取值为1, 在 $x_0, x_1$ 处取值为0



# 示例

- 对 $P_i(x)$ 进行缩放使得 $P_i(x_i) = y_i$ ,
- 然后求和

$$P(x) = y_0P_0(x) + y_1P_1(x) + y_2P_2(x)$$



# 一般形式

- 构造插值问题的通用解
  - 给定  $n + 1$  个点  $\{(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)\}$ , 寻找一组次数为  $n$  的多项式基函数  $l_i$  使得

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{若 } i = j \\ 0, & \text{若 } i \neq j \end{cases}$$

- 插值问题的解为:

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

# 一般形式

- 怎么计算多项式 $l_i(x)$ ?

- $n$ 阶多项式, 且有以下 $n$ 个根

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

- 故可表示为

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$$= C_i \prod_{j \neq i} (x - x_j)$$

- 由 $l_i(x_i) = 1$ 可得

$$1 = C_i \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \Rightarrow C_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

# 一般形式

- 最终多项式基函数为

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

- 多项式 $l_i(x)$ 被称为拉格朗日多项式

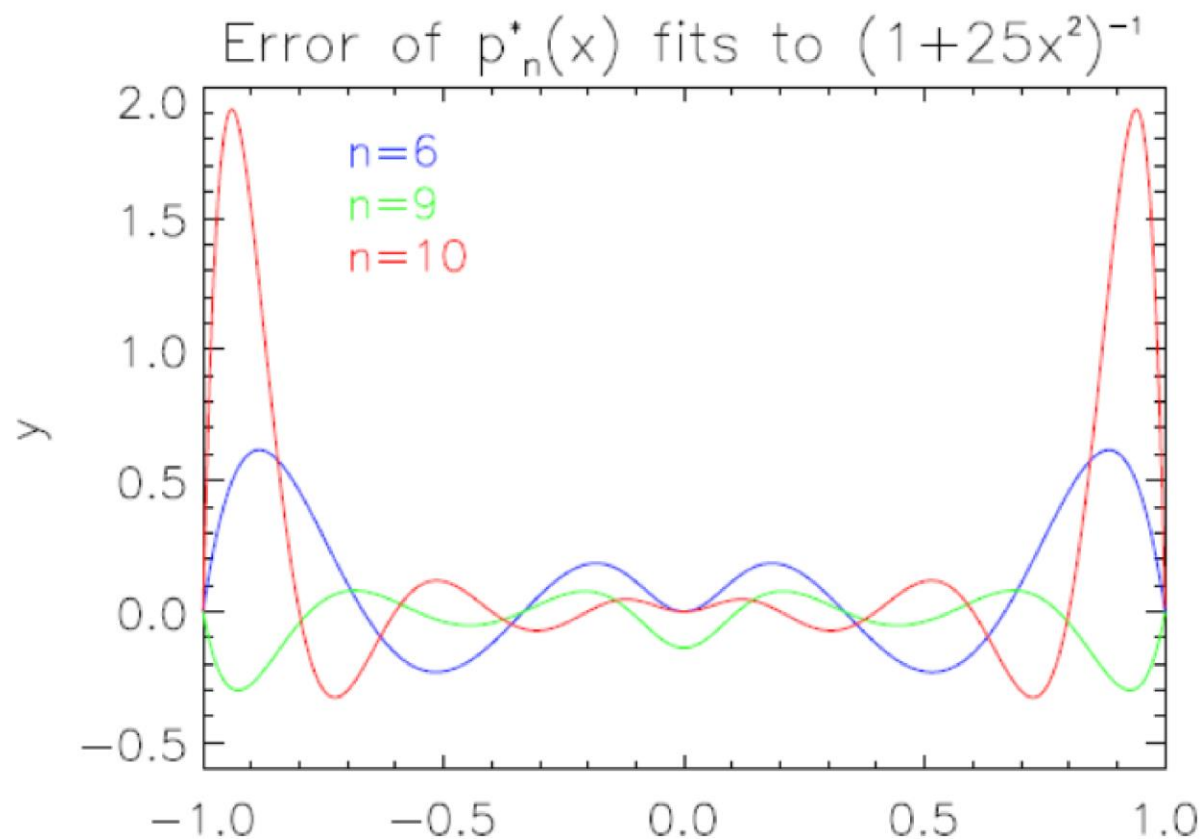
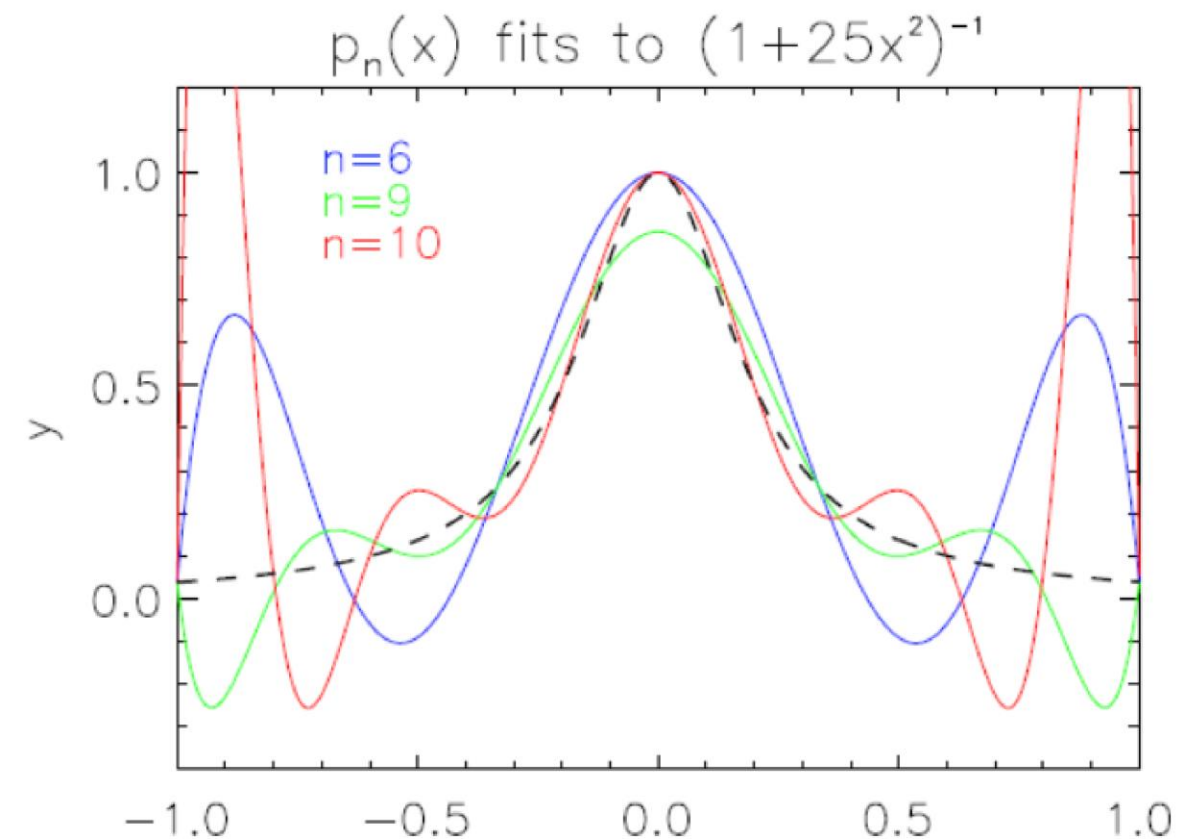
# 问题

- 给定同一组输入点，用拉格朗日多项式和利用范德蒙矩阵（单项式基）进行插值，得到的解是否不同？

# 问题

- 给定同一组输入点，用拉格朗日多项式和利用范德蒙矩阵（单项式基）进行插值，得到的解是否不同？
- 答案：两个解完全相同！
  - 假设解不同。记两个解的差别多项式为 $R_n$ ， $R_n$ 阶数至多为 $n$
  - 那么 $R_n(x_i) = 0, i = 0 \dots n$ ， $x_i$ 为不同插值点。因此 $R_n$ 是有 $n + 1$ 个根的 $n$ 阶多项式 $\Rightarrow R_n = 0$

# 多项式插值结果好吗？



振荡(龙格Runge)现象和对插值点数的高度敏感性

观察 $n = 9$ (10个数据点)和 $n = 10$ (11个数据点)的差别



# 结论

- 多项式插值不稳定
- 控制点的微小变化可导致完全不同的结果
- 振荡(Runge)现象
- 多项式随着插值点数(可以是细微)增加而摆动

➡ 需要更好的基函数来做插值

- 例如：分片多项式的结果会好很多

# 逼近

多项式和最小二乘逼近

# 动机Motivation

- 为什么逼近?
  - 数据点含噪声(采样)
  - 更紧凑的表示
  - 计算简单
- 常用逼近函数
  - **多项式**
  - 有理函数(多项式商)
  - 三角函数

# 为什么用多项式？

- 易于计算，表现良好，光滑， ...
- 更正式理由：
  - 魏尔斯特拉斯Weierstrass定理：令 $f$ 为闭区间 $[a, b]$ 上任意连续函数，则对任意给定 $\varepsilon$ ，存在 $n$ 和多项式 $P_n$ 使得
$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$$
  - Weierstrass只证明了存在性，未给出多项式

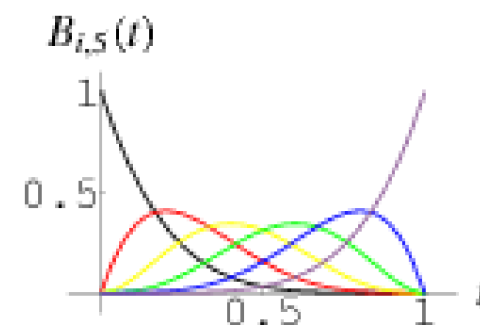
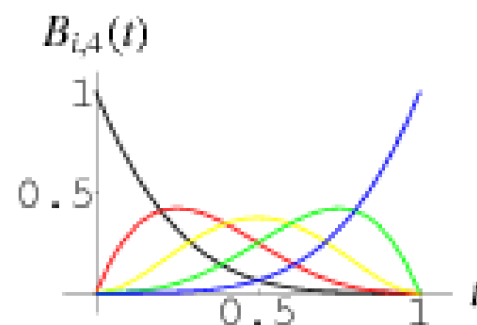
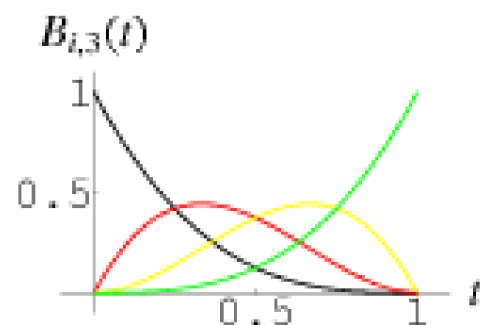
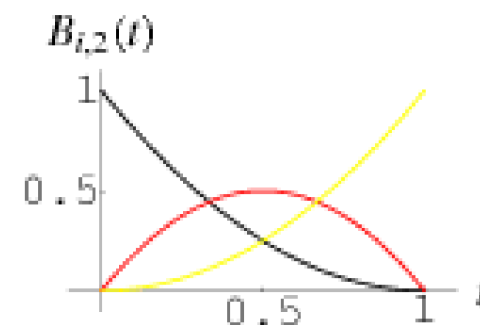
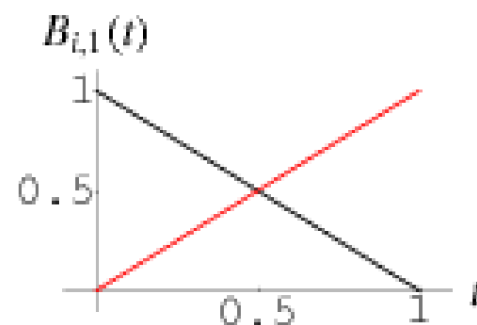
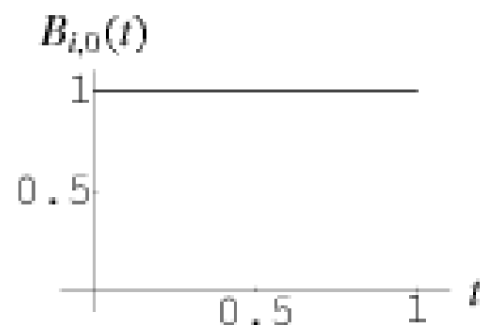
# 用Bernstein多项式做逼近

- 伯恩斯坦Bernstein给出了构造性证明（强大!）
  - 对 $[0, 1]$ 区间上任意连续函数 $f(x)$ 和任意正整数 $n$ ，以下不等式对所有 $x \in [0, 1]$ 成立

$$|f(x) - B_n(f, x)| < \frac{9}{4} m_{f,n}$$

- $m_{f,n} = \text{lower upper bound } |f(y_1) - f(y_2)|$   
 $y_1, y_2 \in [0, 1] \text{ 且 } |y_1 - y_2| < \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $B_n(f, x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) b_{n,j}(x)$ ，其中 $x_j$ 为 $[0, 1]$ 上等距采样点
- $b_{n,j} = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$  为Bernstein多项式

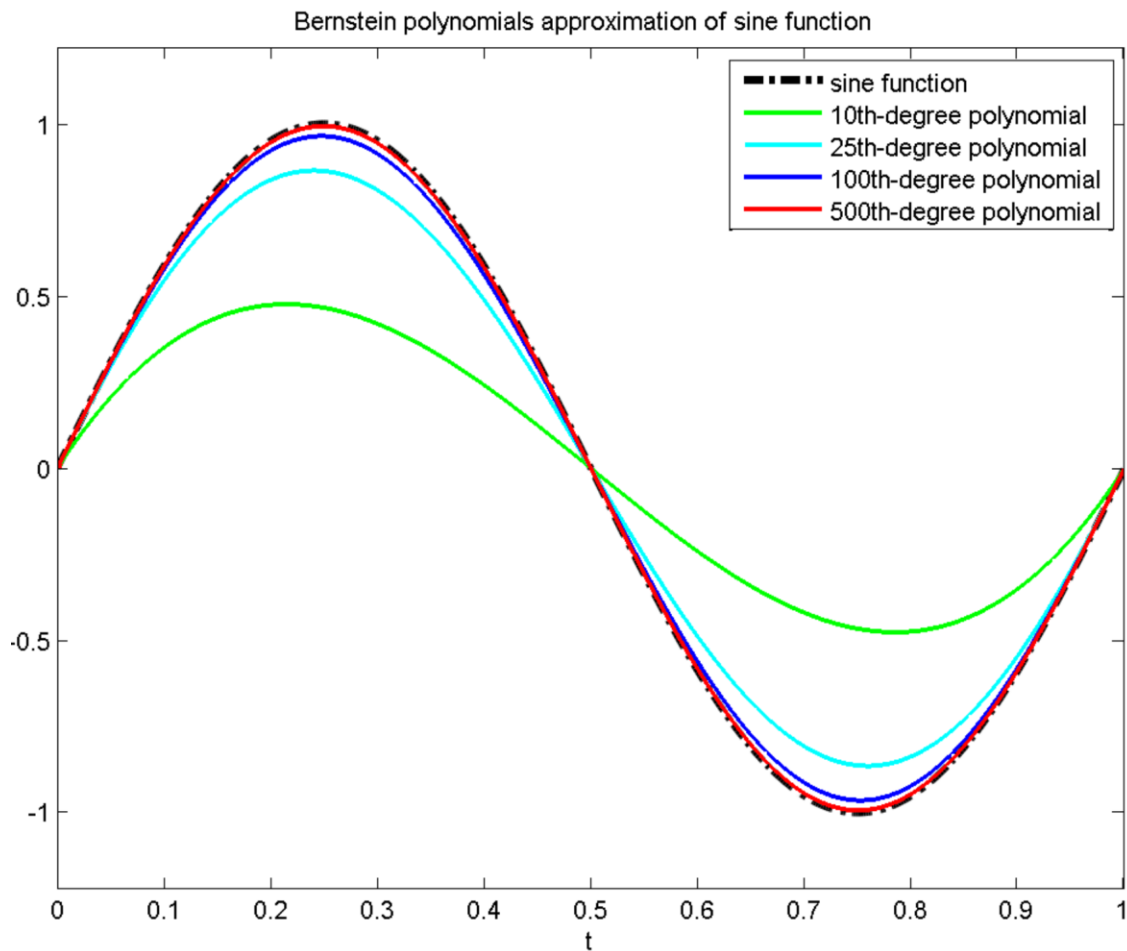
# Bernstein多项式



- $b_{0,0}(x) = 1$
- $b_{0,1}(x) = 1 - x$ ,  $b_{1,1} = x$
- $b_{0,2}(x) = (1 - x)^2$ ,  $b_{1,2} = 2x(1 - x)$ ,  $b_{2,2} = x^2$
- $b_{0,3}(x) = (1 - x)^3$ ,  $b_{1,3} = 3x(1 - x)^2$ ,  $b_{2,3} = 3x^2(1 - x)$ ,  $b_{3,3} = x^3$
- $b_{0,4}(x) = (1 - x)^4$ ,  $b_{1,4} = 4x(1 - x)^3$ ,  $b_{2,4} = 6x^2(1 - x)^2$ ,  $b_{3,4} = 4x^3(1 - x)$ ,  $b_{4,4} = x^4$

# 用Bernstein多项式做逼近

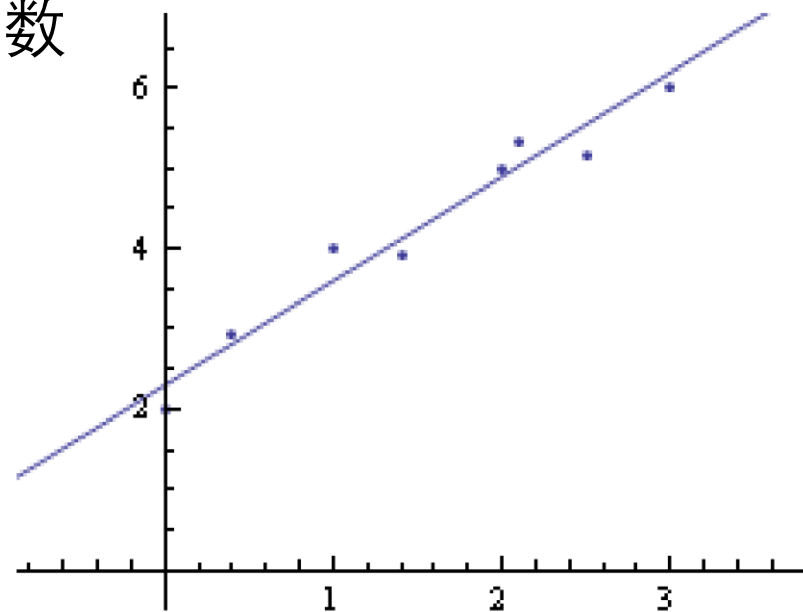
- Bernstein多项式逼近示例
  - 逼近结果优秀， 但需要高阶
  - 计算昂贵
  - 容易带来误差



# 最小二乘逼近

- 逼近问题

- 给定一组线性无关的连续函数集合  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  和一组结点  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ , 其中  $m > n$
- 在  $B$  张成空间中哪个函数  $f \in \text{span}(B)$  对结点逼近最好?
- 示例: 给定一组点, 找到最佳逼近的线性函数
- 怎么定义“最佳逼近”?





# 最佳逼近的定义

- 最小二乘逼近

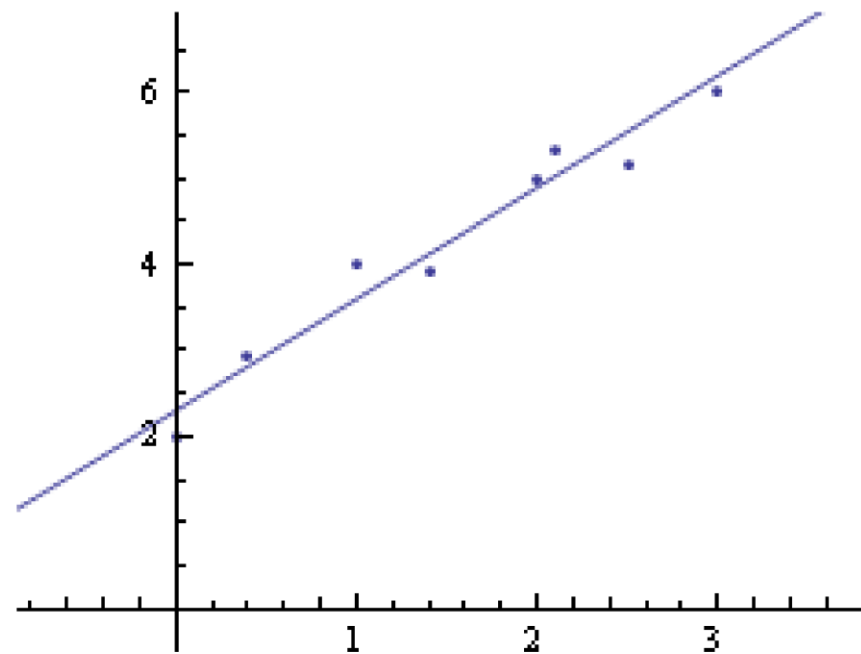
$$\operatorname{argmin}_{f \in \operatorname{span}(B)} \sum_{j=1}^m (f(x_j) - y_j)^2$$

$$\sum_{j=1}^m (f(x_j) - y_j)^2 = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i(x_j) - y_j \right)^2$$

$$= (M\lambda - y)^T (M\lambda - y)$$

$$= \lambda^T M^T M \lambda - y^T M \lambda - \lambda^T M^T y + y^T y$$

$$= \lambda^T M^T M \lambda - 2y^T M \lambda + y^T y$$



$$M = \begin{pmatrix} b_1(x_1) & \dots & b_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1(x_m) & \dots & b_n(x_m) \end{pmatrix}$$

# 求解

- 关于 $\lambda$ 的二次多项式

$$\lambda^T M^T M \lambda - 2y^T M \lambda + y^T y$$

- 法方程

- 最小解满足

$$M^T M \lambda = M^T y$$

- 提示

- 最小化二次目标函数  $x^T A x + b^T x + c$
  - 充分必要条件:  $2Ax = -b$

# 示例：线性逼近

%input

```
x=[0 1 2 3]';
```

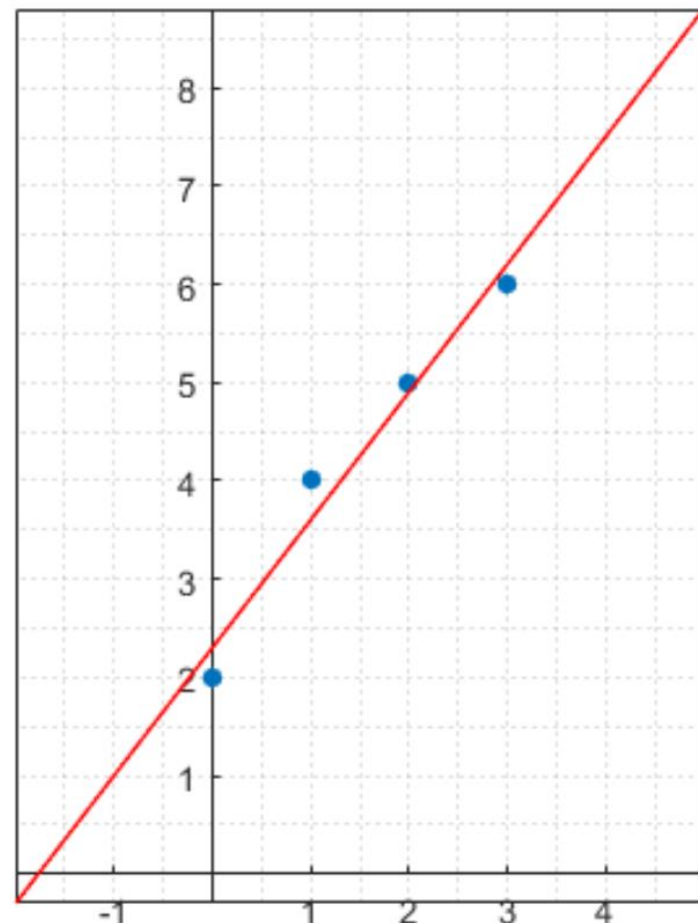
```
y=[2 4 5 6]';
```

%setup the matrix

```
M=[ones(4,1) x];
```

%solve the least square

```
c=(M'*M)\(M'*y);
```



# 示例：二阶逼近

%input

```
x=[0 1 2 3]';
```

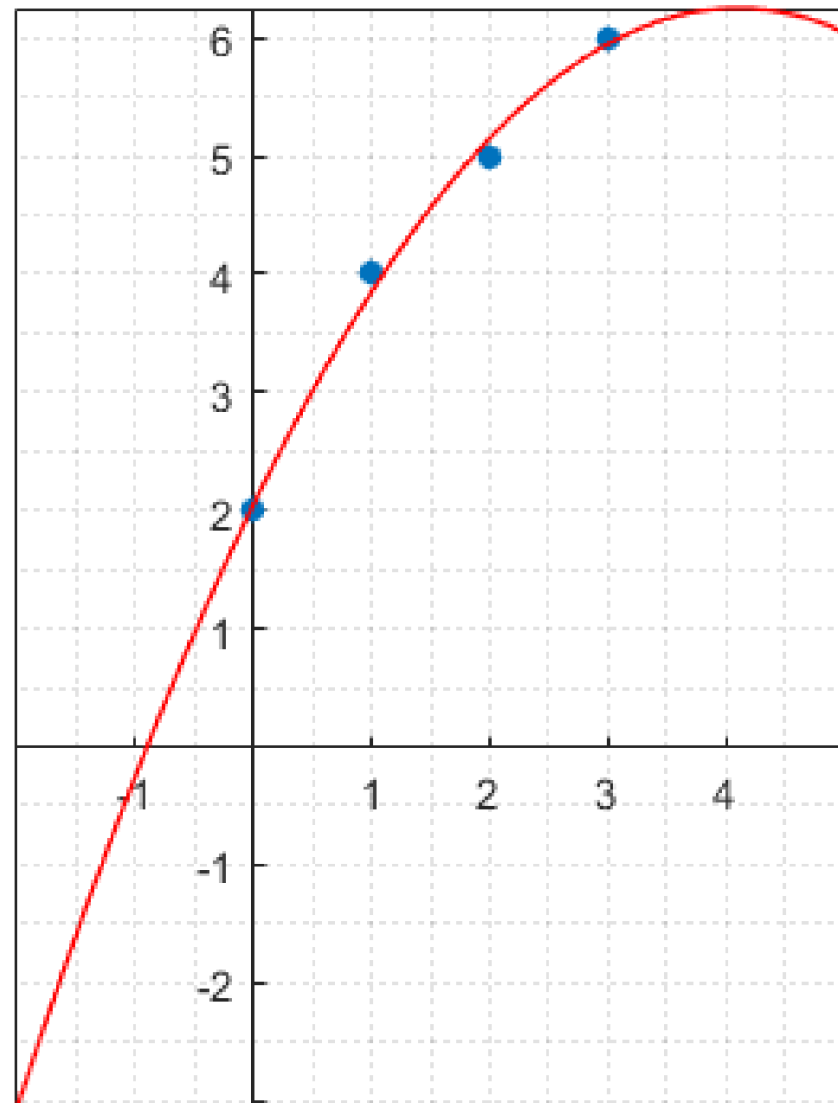
```
y=[2 4 5 6]';
```

%setup the matrix

```
M=[ones(4,1) x x.^2];
```

%solve the least square

```
c=(M'*M)\(M'*y);
```



Questions?