Maestría en Matemática Aplicada
Modelado Matemático II

Errores de truncamiento en las series de Taylor

Jorge Leonardo López
Eliana Bonalde
Prof.: Juan Carlos Bastos Pineda

Teorema de Taylor

Dado un entero positivo n, y una función que es derivable al menos n veces con todas sus derivadas continuas alrededor de x_0, el valor de la función en un punto x en la vecindad de x_0 se puede expresar como

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j(x_o)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \textbf{(1)}$$

para algún valor c entre x_0 y x. Este resultado puede escribirse de la forma compacta $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

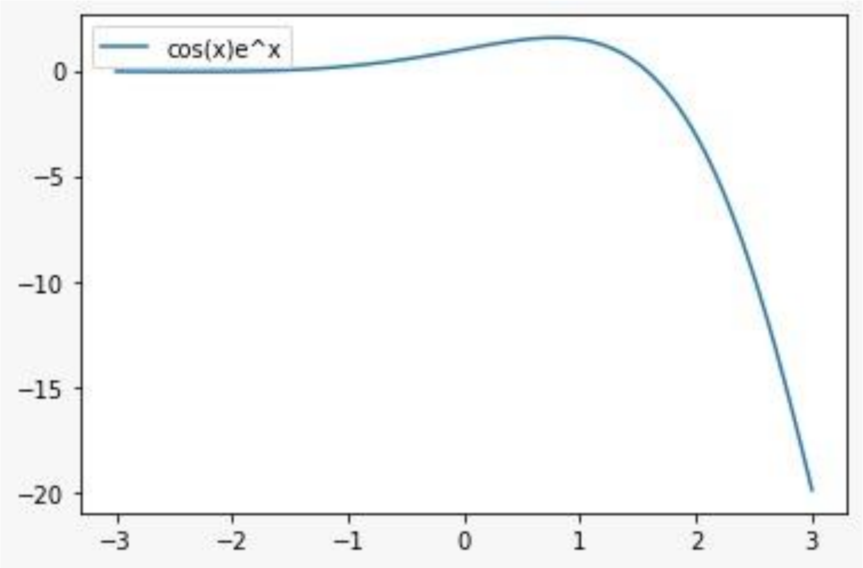
El polinomio obtenido al truncar la serie en n términos es llamado **polinomio de Taylor** de orden *n* (P_n)
Y (R_n) representa el residuo o **error de truncamiento**.

A partir de **(1)** se puede expresar la función alrededor del punto x_0 como

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \textbf{(2)}$$

La serie dada en **(2)** puede ser truncada en cualquier punto, el error que resulta al truncar la serie es $R_{n.}$

Considere el polinomio de Taylor $P_3(x)$
de $f(x) = e^x \cos(x)$ alrededor de $x = 0$



$$f'(x) = \cos(x)e^x - \sin(x)e^x$$

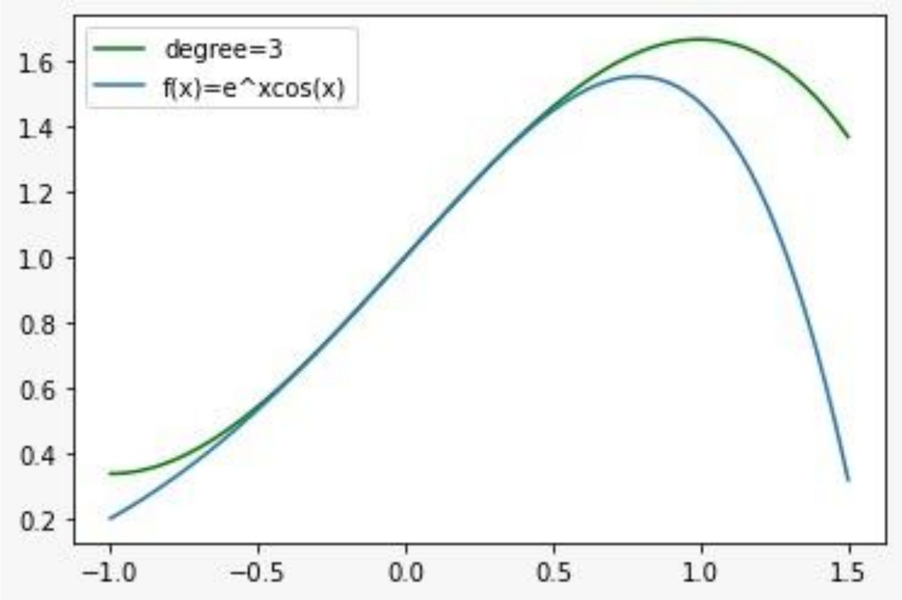
$$f''(x) = \cos(x)e^x - \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \sin(x)e^x = -2\sin(x)e^x$$

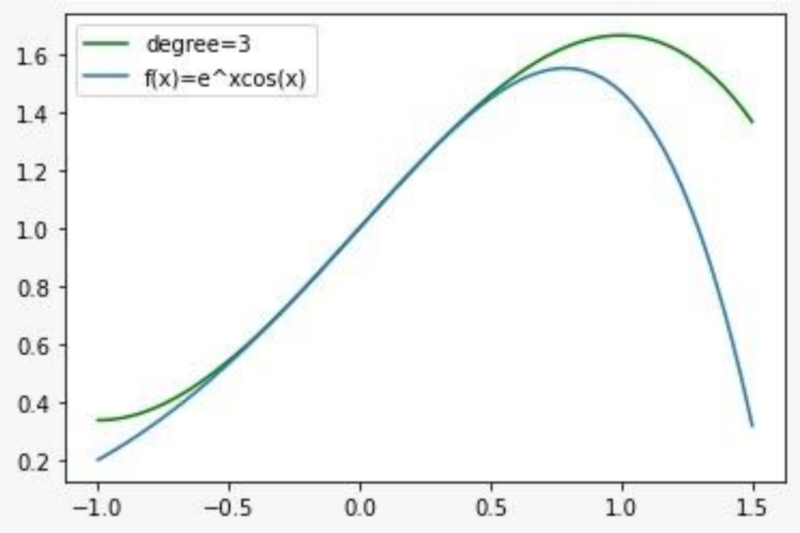
$$f'''(x) = -2(\cos(x)e^x + \sin(x)e^x)$$

$$f^4(x) = -2(\cos(x)e^x - \sin(x)e^x + \cos(x)e^x + \sin(x)e^x) = -4\cos(x)e^x$$

$$f(x) = 1 + x - \frac{2x^3}{3!} + R_n$$ donde $$R_n(x) = -\tfrac{1}{6}\cos(c)e^c$$

$$\boxed{f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \tfrac{1}{6}\cos(c)e^c}$$





$$f(x) = e^x \cos(x)$$
$$f(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \tfrac{1}{6}\cos(c)e^c$$

$P_3(x)$ **para aproximar la función en el intervalo *[0,1]***

$$\int_0^1 e^x \cos(x)dx = 1.3787$$

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 \Big(1 + x + \frac{x^3}{3}\Big)dx = 1.4167$$

$$|1.4167 - 1.3780| = 0.0387$$

$$\int_0^1 \Big(-cos(c)e^c\frac{x^4}{6}\Big)dx = -\frac{1}{30}\cos(c)e^c$$

$$|-\frac{1}{30}\cos(c)e^c| \leqslant |-\frac{1}{30}e| = 0.0906093943$$

$P_3(0.5)$ **para aproximar *f(0.5)***

$$f(0.5) = 1.446889036584169$$

$$P(0.5) = 1.458\widehat{3}$$

$$|f(0.5) - P(0.5)| = 0.01144429749169$$

$$|R_3(x)| \leqslant -e^c\cos(c)\frac{x^4}{6} = -e^c\frac{(0.5)^4}{6} \leqslant -e^{0.5}\frac{(0.5)^4}{6}$$

$$|R_3(x)| = 0.017174179903126$$

Dado

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{f^j(x_o)}{j!}(x-x_0)^j}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

y sea $I = \int_a^b f(x)dx$ entonces,

$$|\ I\ | = \left| \int_a^b (P_n(x) + R_n(x))dx \right| \leqslant \int_a^b \left|(P_n(x) + R_n(x))\right| dx$$

$$\leqslant \int_a^b \Big(|P_n(x)| + |R_n(x)| \Big) = \int_a^b |P_n(x)|dx + \int_a^b |R_n(x)|dx$$

$$\leqslant I_{aprox} + \int_a^b M dx \ = I_{aprox} + M(a-b)$$

Cota máxima del error cometido

donde $M = \| R_n(x) \| = Sup|R_n(x)|$

$$|I| = I_{aprox} + M(a-b)$$

Observación 1

M existe si $f \in C^{n+1}[0,b]$

Así, $\boxed{I \approx I_{aprox}}$ cometiendo un error acotado por $M(a-b)$.

Observación 2

Si $n \longrightarrow \infty$ y $f \in C^{\infty}[0,b] \Rightarrow \| R_n(x) \| \longrightarrow 0$ teniendo que $\boxed{I = I_{aprox}}$