一、WHY

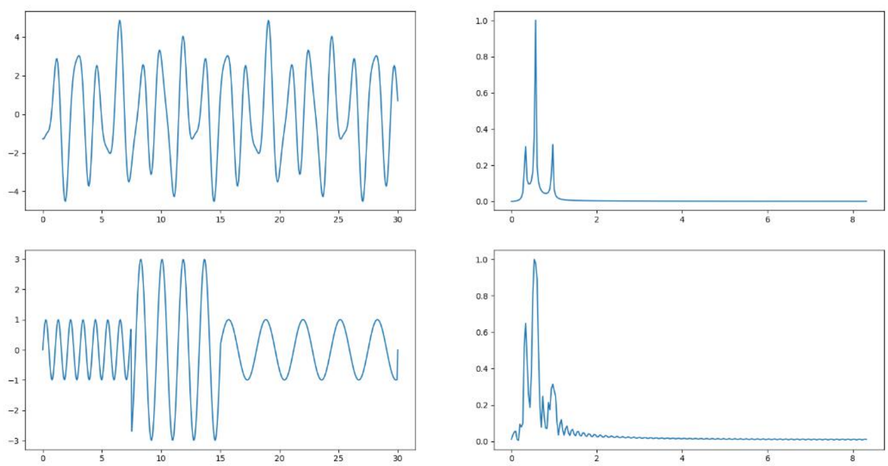
1. 傅里叶变换 FT

- 定义：

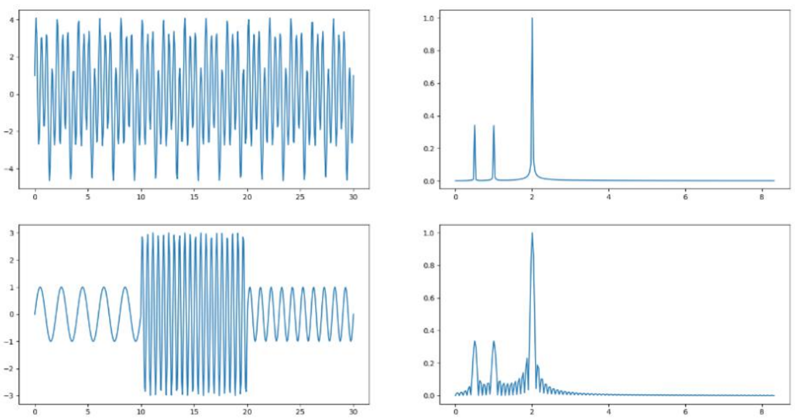
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

- 含义：傅里叶变换的本质是通过寻找和 origin signal 相关性最大的正弦函数来分析其频率成分
- 缺点：傅里叶变换只能分析信号的频率成分，却不能分析信号的频率出现的时刻，因此对于如下两个不同信号，它们的傅里叶变换几乎是一样的：



- **第二个频谱图中有其他的频率成分是因为出现了跳变，如果稍微修改使分段信号具有较好的连贯性则会产生更加接近于上图的频谱：**



- **适用对象**：平稳信号

非平稳信号的局部是平稳的

2．短时傅里叶变换 STFT

- 定义：

$$STFT_x(t,\Omega)=\int x(\tau)g^*(t-\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau.$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi g(0)}\int STFT_x(t,\Omega)e^{j\Omega\tau}d\Omega$$

$$STFT_x(m,\omega_k)=\sum_n x(n)g^*(n-mN)e^{-j\frac{2\pi}{M}nk}$$

g(n)的宽度等于 M 时可以得到标准 DFT

- 含义：使用一个窗函数从 0 开始滑动与 origin signal 相乘
- 缺点：由海森堡不确定性原理，不能得知某个频率的信号确切分布在哪个点上，只能知道它在哪个范围内（STFT 用有限长的窗函数牺牲了部分频率分辨率，获得了时域分辨率）；窗函数不能根据信号的情况调整宽度

窗口宽度可以调整

3．小波变换 WT

一、WHAT

1．定义

- 连续小波变换：

$$WT_x(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\psi^*_{a,b}(t)dt.$$

$$x(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{\infty}a^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}WT_x(a,b)\psi_{a,b}(t)\,da\,db$$

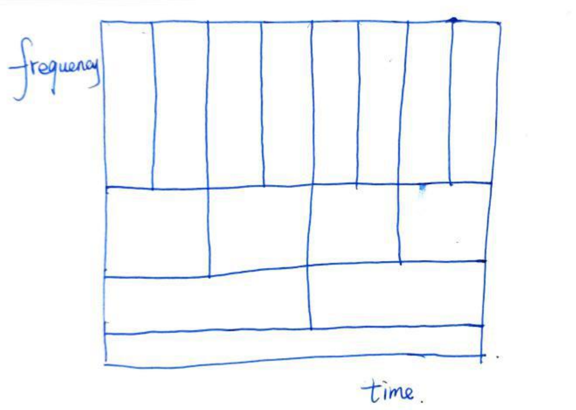
条件：$C_\psi=\int_0^{\infty}\frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega}d\Omega<+\infty.$

根据小波反变换的条件知道，信号需要是带通的

- 离散小波变换：指的是 a,b 的离散化；
    - 母小波：积分为 0，描述高频区域
    - 父小波：积分为 1，描述低频区域

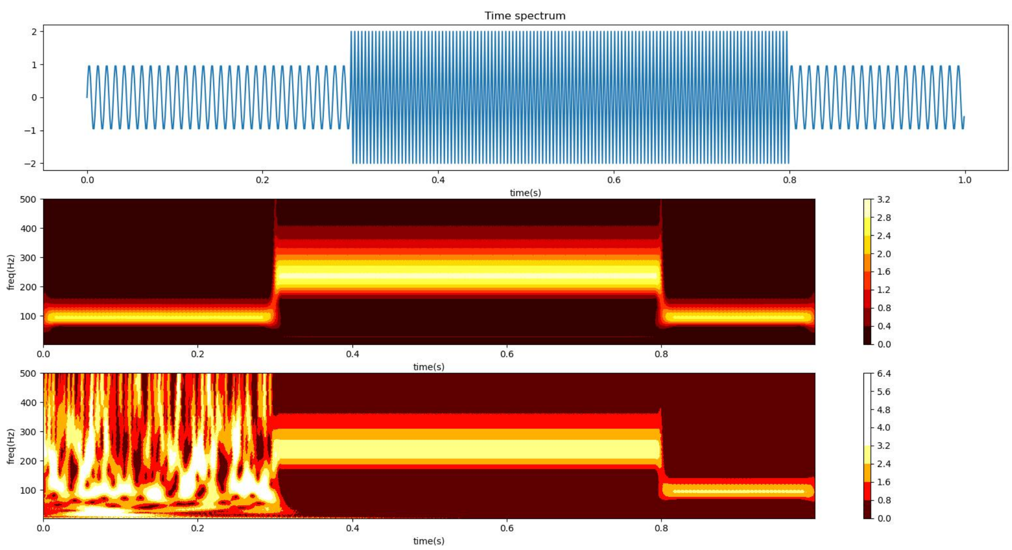
2．特点

- **多分辨率分析（MRA）**：高频时有<u>好的时域分辨率和差的频域分辨率</u>，低频时有<u>差的时域分辨率和好的频域分辨率</u>。--恒 Q 性质

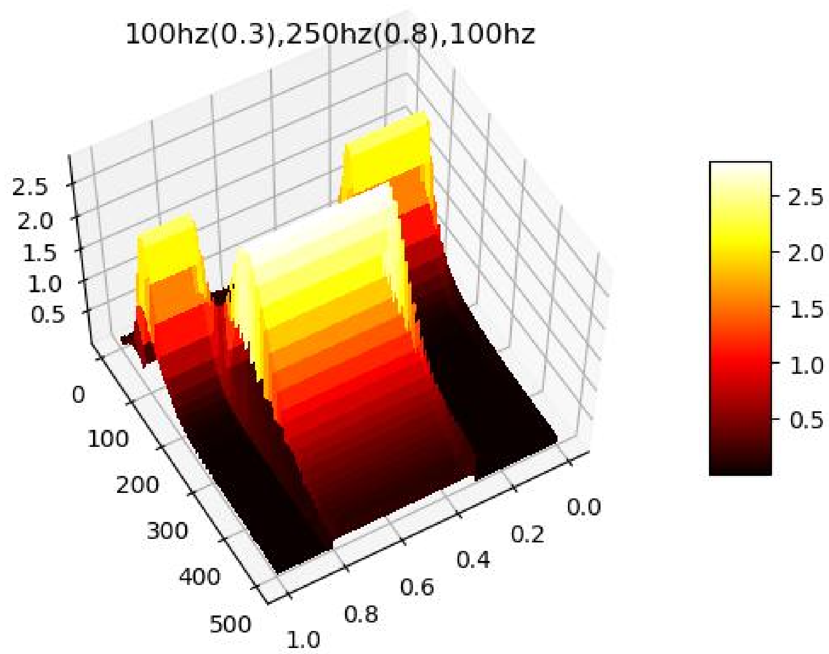


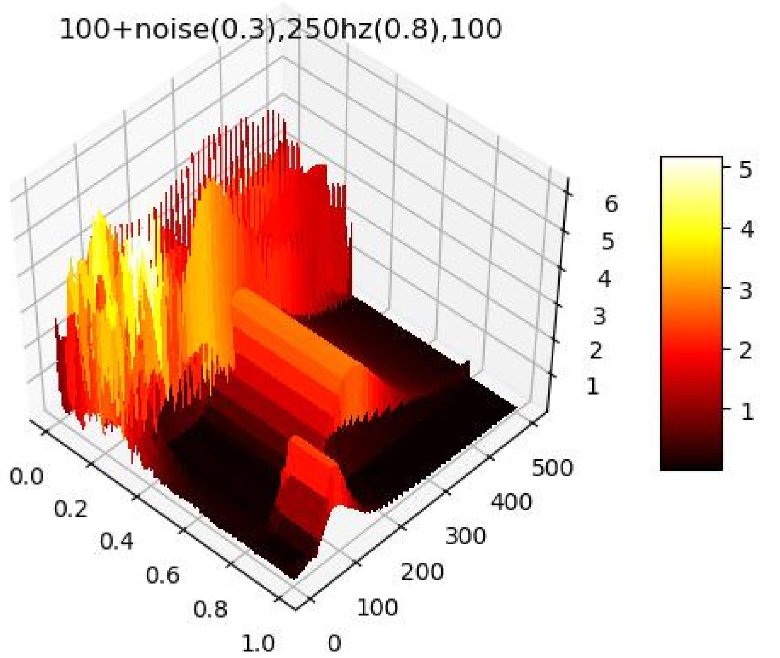
- 母函数 ψ(t)，由此产生一系列小波函数
- 在窗函数面积不变的前提下，a 较大适合于低频区域，a 较小适用于高频区域
- 连续小波变换得到的小波系数是每个时间和 scale 对应的幅度值，可以观察信号的时频分布特点。

如图：



红色区域表示信号含有的频率，加入噪声后信号的频域延拓至整个区域


100hz(0.3),250hz(0.8),100hz
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
100
200
300
400
500
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0


100+noise(0.3),250hz(0.8),100
6
5
4
3
2
1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
100
200
300
400
500

三、HOW

1．阈值法

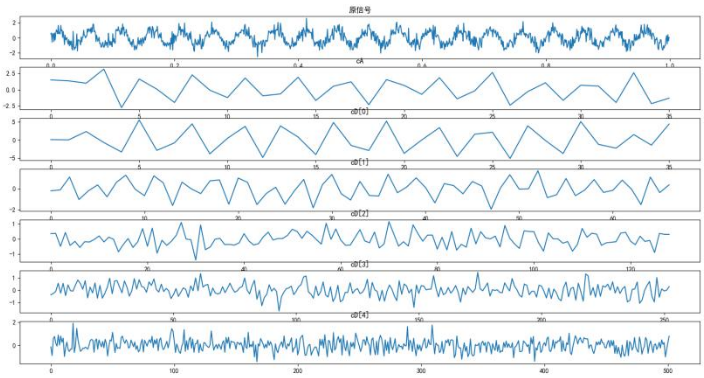
- 原理

经过正交小波变换小波变换后的小波系数中，能量集中在少数小波系数中，也即幅值比较大的小波系数绝大多数是有用信号，而幅值较小的一般是噪声；寻找到一个合适的阈值，将小于阈值的小波系数进行相应处理，然后根据处理后的小波系数还原出有用信号

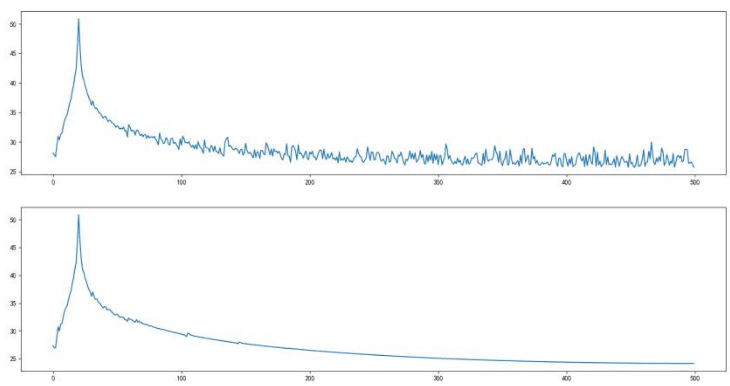
- 步骤：
  - 正交小波变换，选取一个正交小波和分解层数 N
  - 对测量信号的每一层高频系数通过阈值函数处理，低频系数不处理
  - 对处理后的小波系数进行重构
- 阈值函数分为硬阈值函数和软阈值函数
  - 硬阈值函数会产生突变
  - 软阈值函数会丢掉一些信号特征
- 阈值选取：
  - 通用阈值规则：$\lambda = \sigma\sqrt{2\ln N}$，其中 N 为信号的离散值个数
  - 最大极大方差阈值：$\lambda = \begin{cases} \sigma(0.3936 + 0.1829 * \dfrac{\ln N}{\ln 2}), N > 32 \\ 0, N < 32 \end{cases}$

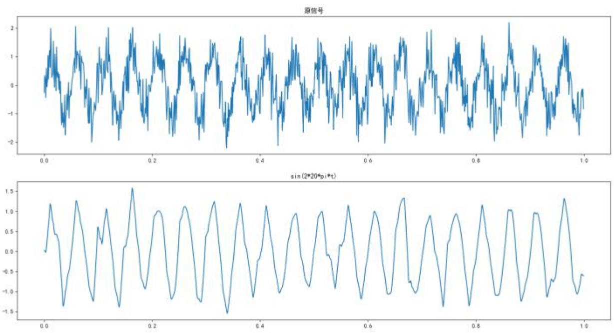
$$\sigma = \frac{median(|d_j(k)|)}{0.6745}, d_j(k)\text{为第一级小波系数}$$

- 效果：



这是小波分解每一层的系数



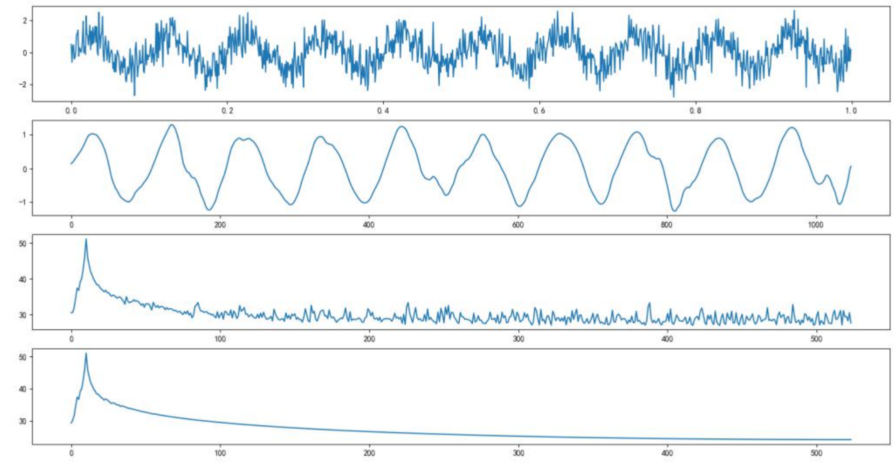


2．小波分解

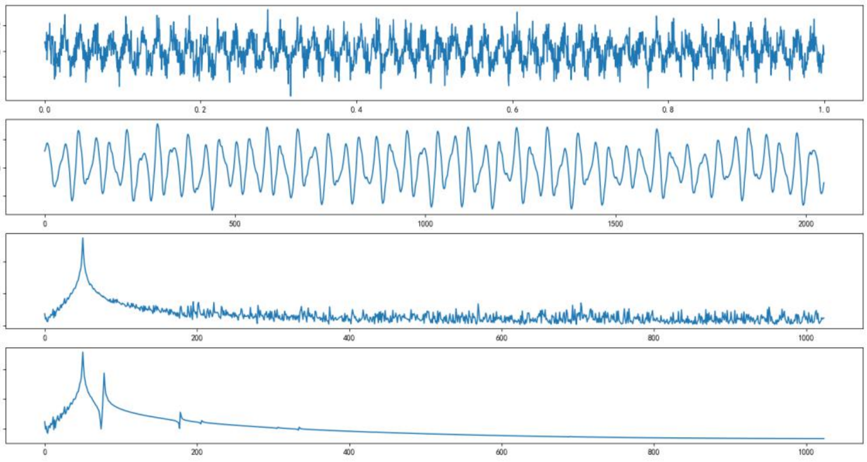
- 原理：

多尺度小波分解相当于一个高通滤波器和若干个带通滤波器，将每一级的低频系数继续分解；如果将噪声对应的系数清除，或者将信号对应的系数挑出来进行重构，就可以得到去噪后的信号

- 效果：
  - ✧ 10hz 的信号+snr=0

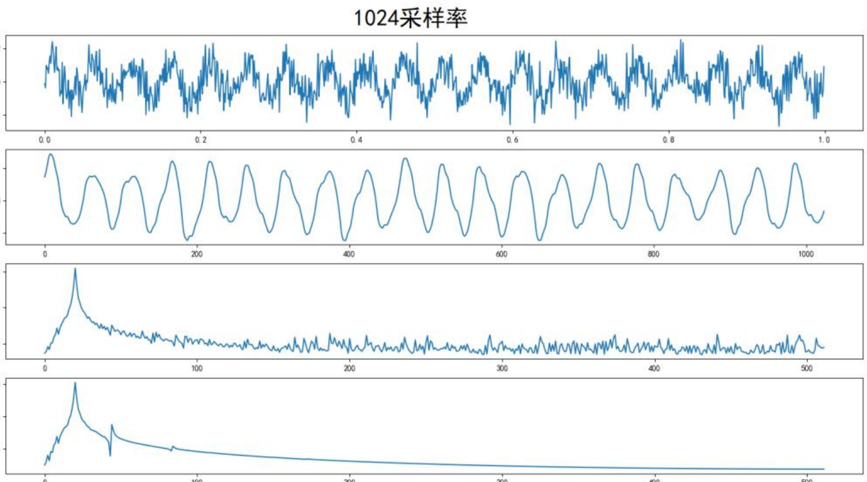


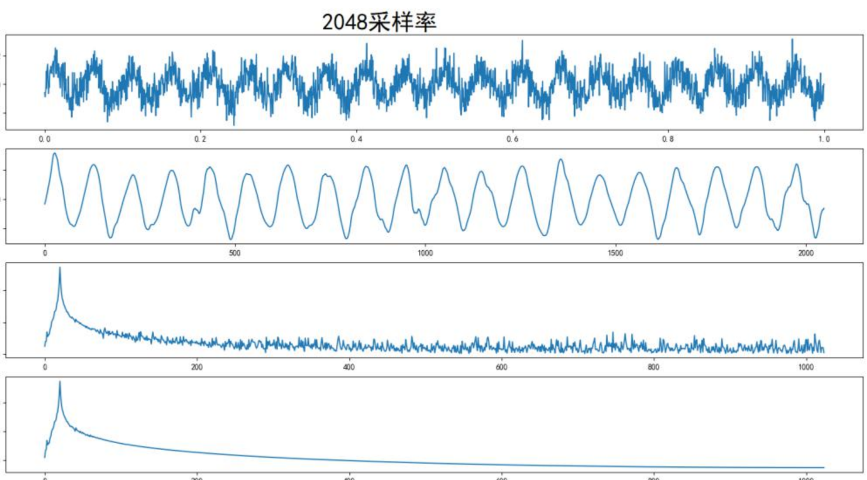
- 问题：
  - ✧ 为什么会出现多个信号频率？

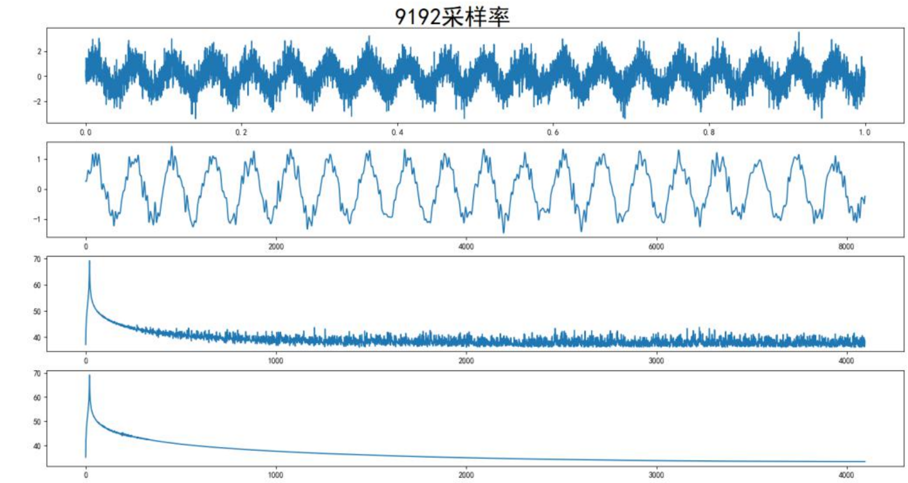


谐波？截断引起？

✧　适当调整采样率会改善信号质量：





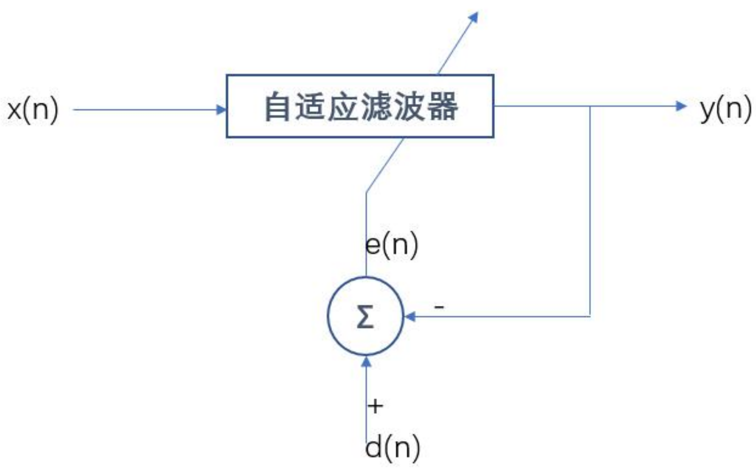


3．小波包分解

- 原理：小波包分解不仅对低频段进行进一步分解，也会对高频段进行分解；适合于对于中高频信号进行精细地划分

4．相关性去噪

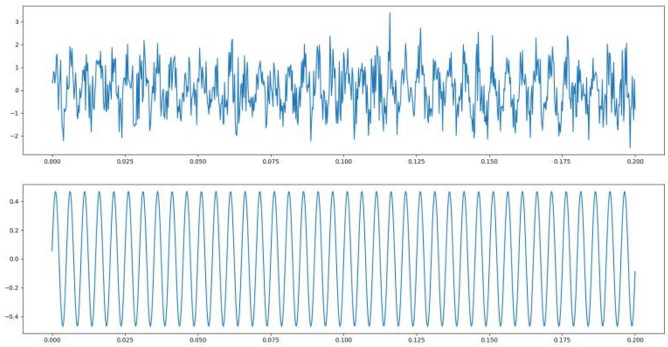
- 原理：在小波变换的基础上引入自适应处理，从而可以减小有用信号的损失
  - 自适应滤波
    - 自适应滤波器最本质的特点就是它具有自学习和自调整的能力，即能够依据某种预先确定的准则，在迭代过程中自动调整自身的参数和结构，去适应环境的变化，以实现在这种最优准则下的最优滤波
    - 原理框图：



5．更好的去噪

- 傅里叶变换和小波变换的结合！

- 傅里叶变换：适用于消除有规律的噪声
  - 保留信号频率对应的 fft 后的数值，将其他频率置零：



  - 局限性：非平稳信号就不太行咯
  - 所以就需要利用 STFT 的思路？分段来处理信号；关键就是如何分析信号的频率咯
  - 未完待续……