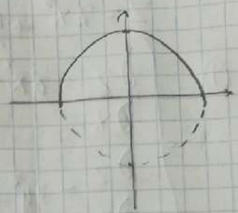
№4.

$\int (x-y)dx + dy;$ L – дуга верхней половины окружности



$x^2+y^2=R^2$

$y=\sqrt{R^2-x^2}$

$y=\sqrt{R^2-R^2\cdot\cos^2\varphi}$

$\begin{cases} y=R\cdot\sin\varphi \\ x=R\cdot\cos\varphi \end{cases}$

$$\int_L (x-y)dx+dy = \int_0^\pi (R\cdot\cos\varphi - R\cdot\sin\varphi)\cdot(-R\sin\varphi)d\varphi +$$

$$+\int_0^\pi R\cos\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi (R^2\sin^2\varphi - R^2(\cos\varphi\cdot\sin\varphi))d\varphi + \int_0^\pi R\cdot\cos\varphi d\varphi =$$

$$= R^2\int_0^\pi \sin^2\varphi - \cos\varphi\cdot\sin\varphi + \int_0^\pi R\cdot\cos\varphi d\varphi =$$

Чтобы сделать следующие преобразование, вспоминаем прекрасную формулу с лекции:

$$\int \sin^n(\varphi)d\varphi = \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}(\varphi)d\varphi - \frac{\cos\varphi\cdot\sin^{n-1}\varphi}{n}$$

$$= R^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\cos x\cdot\sin x}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{2}\right)\Big|_0^\pi + \underbrace{R\sin\varphi\Big|_0^\pi}_{0} =$$

$$= R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+0 = \frac{\pi}{2}R^2$$