Раздел 1

Векторная алгебра

Содержание: Понятие вектора, нулевого и противоположного вектора, длина вектора. Действия с векторами: сложение, умножение на число. Проекция вектора на ось. Линейная зависимость векторов. Понятие базиса. Координаты вектора. Базис на прямой, на плоскости, в пространстве. Декартова прямоугольная система координат. Условие коллинеарности векторов. Скалярное произведение и его свойства. Угол между векторами. Условие перпендикулярности. Векторное произведение и его свойства. Вычисление векторного произведения векторов. Вычисление площади параллелограмма, построенного на векторах, с помощью векторного произведения. Смешанное произведение и его геометрический смысл. Вычисление смешанного произведения, объема параллелепипеда и тетраэдра.

1.1 Векторы. Основные действия с векторами

Опр. 1 *Вектором будем называть направленный отрезок. Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым.*

Длиной вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина нулевого вектора равна нулю.

Опр. 2 *Два вектора будем называть коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Если при этом их направления совпадают, то векторы называются сонаправленными, иначе – противоположно направленными.*

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Опр. 3 *Вектор* $-\vec{a}$ *называется противоположным вектору* $\vec{a}$*, если они противоположно направлены и их длны равны.*

Опр. 4 *Два вектора будем называть равными, если они сонаправлены и их длины равны.*

Теперь мы можем дать более удобное определение вектора.

Опр. 5 *Вектором (или свободным вектором) называется множество всех векторов, равных данному.*

Таким образом, вектор определяется его длиной и направлением, но не конкретными точками начала и конца вектора. Любой вектор можно отложить от любой точки.

Действия с векторами

Опр. 6 ***Суммой двух векторов*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется вектор* $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$*, полученный в результате сложения векторов* a *и* b *по правилу треугольника или параллелограмма (см. рис.)*

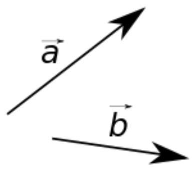

Рис. 1: Направленные отрезки

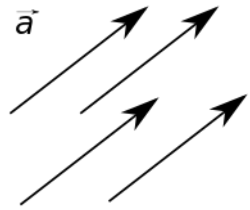

Рис. 2: Один и тот же (свободный) вектор

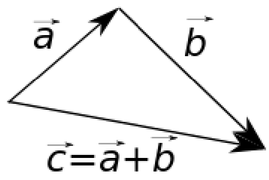

Рис. 3: Правило треугольника

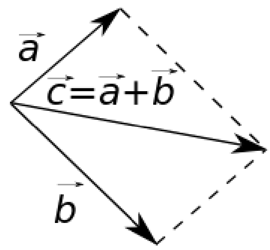

Рис. 4: Правило параллелограмма

Замечание 1 *Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.*

Заметим, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Опр. 7 ***Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ***, *называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, такой что*

1. $|\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;
2. $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;
3. $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;
4. $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Опр. 8 *Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}_0 \neq \vec{0}$, такой что:*

$$\vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a}, \quad |\vec{a}_0| = 1,$$

откуда следует, что $\vec{a}_0 = \vec{a}/|\vec{a}|$.

Опр. 9 *Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и c называются компланарными, если они, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости.*

Свойства действий с векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ - ассоциативность;
3. $\exists\,\vec{0}: \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \quad \forall\,\vec{a}$ - наличие нейтрального элемента;

4. $\forall \vec{a} \quad \exists (-\vec{a}): \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$; - наличие обратного элемента;

5. $\alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ - ассоциативность умножения на скаляр;

6. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ - дистрибутивность дистрибутивность относительно скаляров;

7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ - дистрибутивность относительно векторов;

1.2 Проекция вектора на ось

Под осью будем понимать прямую, на которой задано направление. Ненулевой вектор задаёт ось.

Проекцией точки на прямую (или ось) называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Пусть точки A' и B' являются проекциями точек A и B на прямую l.

Опр. 10 *Проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось $\vec{l}$ называется длина вектора $\vec{A'B'}$, если $\vec{A'B'} \uparrow\uparrow \vec{l}$ и $-|\vec{A'B'}|$, если $\vec{A'B'} \uparrow\downarrow \vec{l}$.*

Обозначать проекцию будем так: $\text{Пр}_{\vec{l}}\vec{a}$.

Свойства проекции:

1. $\text{Пр}_{\vec{l}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{l})$;

2. $\text{Пр}_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Пр}_{\vec{l}}\vec{a} + \text{Пр}_{\vec{l}}\vec{b}$;

3. $\text{Пр}_{\vec{l}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{Пр}_{\vec{l}}\vec{a}$.

1.3 Линейная зависимость векторов. Базис

Опр. 11 *Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ – набор векторов и $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ – набор чисел. Конструкция вида*

$$C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots + C_n\vec{a}_n \equiv \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{a}_i$$

называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Опр. 12 *Набор векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется линейно-независимым, если их линейная комбинация*

$$C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots + C_n\vec{a}_n = 0$$

равна нулю только при $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Иначе векторы называются линейно зависимыми.

Заметим, что если векторы линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Опр. 13 *Базисом называется набор линейно-независимых векторов* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *такой, что любой вектор* $\vec{a}$ *можно представить в виде линейной комбинации*

$$\vec{a} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \ldots + C_n\vec{e}_n.$$

При этом говорят, что вектор $\vec{a}$ *разложен по базису* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$*, а числа* $C_1, C_2, ..., C_n$ *называют координатами вектора* $\vec{a}$ *в этом базисе.*

Теорема 1 *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

$\square$ Заметим, что если хотя бы один из векторов нулевой, то утверждение очевидно выполняется.

I. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Докажем, что они коллинеарны. Из условия линейной зависимости получаем, в равенстве

$$C_1\vec{a} + C_2\vec{b} = 0$$

хотя бы один из C_1 и C_2 отличен от нуля. Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда

$$\vec{a} = -\frac{C_2}{C_1}\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}||\vec{b}.$$

II. Обратно, если $\vec{a}||\vec{b}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то запишем

$$\vec{a} = \pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b},$$

где знак "+" выбирается, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, и "–" если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Получаем, $\vec{a} \mp \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b} = 0$, откуда следует линейная зависимость векторов. $\blacksquare$

Следствие. На прямой любой ненулевой вектор образует базис. Для любого вектора $\vec{a}$, заданного на l существует единственно представление $\vec{a} = x_a \cdot \vec{e}$, где $x_a \in \mathbb{R}$ и $|\vec{e}| = 1$.

Теорема 2 *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

$\square$ I. Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы. Тогда один из них представим в виде линейной комбинации двух других, а значит он лежит в ними в одной плоскости.

II. Обратно, пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Отложим их от одной точки O. Из конца вектора $\vec{OC}$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда (см. рис.)

$$\vec{c} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

где α и β – некоторые числа. $\blacksquare$

Следствие. На плоскости базис образуют любые два неколлинеарных вектора. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, лежащий в этой же плоскости, представим единственным образом в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (см. рис.)

Аналогичным образом доказывается, что в трехмерном пространстве ($\mathbb{R}^3$) базис состоит из трех некомпланарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, и каждый вектор $\vec{a}$ имеет единственное представление

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{e}_1 + y_a \cdot \vec{e}_2 + z_a\vec{e}_3.$$

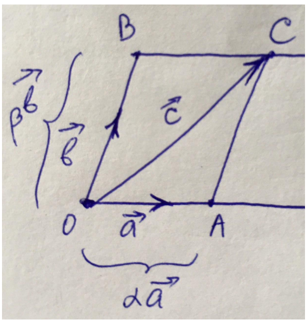

Рис. 5: Разложение вектора по базису на плоскости

Декартова прямоугольная система координат

В декартовой прямоугольной системе координат в трехмерном пространстве базисом является тройка попарно ортогональных ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (см. рис.)

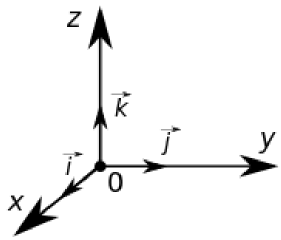

Рис. 6: Базис ДПСК в трехмерном пространстве

Замечание 2 *В ДПСК приняты следующие обозначения:*

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{i}, \quad |\vec{i}| = 1 \quad - \textit{орт оси } Ox,\\
\vec{e}_2 &= \vec{j}, \quad |\vec{j}| = 1 \quad - \textit{орт оси } Oy,\\
\vec{e}_3 &= \vec{k}, \quad |\vec{k}| = 1 \quad - \textit{орт оси } Oz,
\end{aligned}$$

тогда

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$
$$a_x = \text{Пр}_{Ox}\vec{a}, \quad a_y = \text{Пр}_{Oy}\vec{a}, \quad a_z = \text{Пр}_{Oz}\vec{a}.$$

1.4 Действия с векторами в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в ДПСК:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения:

1. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

2. $\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_i = b_i, \ i = 1, 2, 3.$

3. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}.$

4. $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}.$

5. $\vec{a}||\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ (если какая-то из координат равна нулю, то соответствующая координата второго вектора тоже равна нулю и дробь вида $\frac{0}{0}$ из равенства убираем).

6. Под координатами точки A понимаются координаты вектора $\vec{OA}$.

7. Координаты вектора $\vec{AB}$ равны разностям соответствующих координат точек B и A.

8. Пусть α, β, γ – углы, которые образует вектор $\vec{a}$ с осями координат OX, OY, OZ, соответственно. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ и
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|},$$
а орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$ имеет координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

1.5 Скалярное произведение векторов

Опр. 14 *Скалярным произведенем векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, определяемое равенствами.*
$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

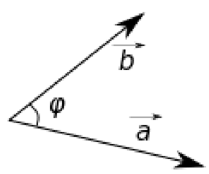

Рис. 7: Угол между векторами

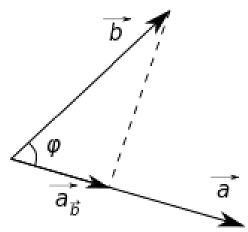

Рис. 8: Скаляное произведение

Замечание 3 *Альтернативные обозначения:*
$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Свойства скалярного произведения

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a});$

2. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \neq 0;$

3. $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Выражение скалярного произведения в декартовых координатах
Найдем скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами в некоторой ДПСК:

$$\begin{aligned} \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Для базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ имеем:

$$\begin{aligned} &\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ &\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ = a_x \cdot b_x + 0 + 0 + 0 + a_y \cdot b_y + 0 + 0 + 0 + a_z \cdot b_z = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \end{aligned}$$

Замечание 4 *Формулы длины и угла:*

$$\sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \equiv |\vec{a}|, \quad \cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

1.6 Векторное произведение векторов

Опр. 15 *Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$.
3. $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ *- образуют правую тройку.*

Опр. 16 *Тройка $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ называется правой, если располагаясь по направлению вектора $\vec{c}$ наблюдатель видит, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит по часовой стрелке.*

Замечание 5 *Для векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используются следующие обозначения:*

$$[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Замечание 6 *Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах.*

Алгебраические свойства векторного произведения:

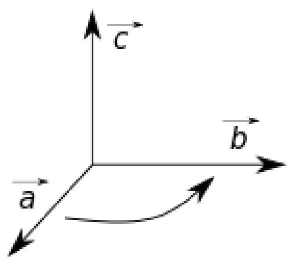

Рис. 9: Правая тройка

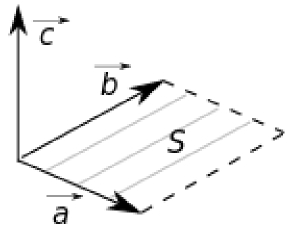

Рис. 10: Векторное произведение

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}||\vec{b};$
2. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b});$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$

□

1. Доказательство (1):

   При перестановке векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ местами меняется ориентация тройки. Чтобы тройка $\left\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right\}$ была правой необходимо у вектора $\vec{c}$ поменять направление.

   $$\vec{a} \times \vec{b} = 0, \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0(\pi) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \,||\, \vec{b}.$$

2. Доказательство (2):

   $$\vec{m} = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}, \quad \vec{n} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}),$$
   $$|\vec{m}| = \alpha|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \quad |\vec{n}| = \alpha|\vec{a}||\vec{b}|\sin\psi,$$
   $$\varphi = \angle(\alpha\vec{a}, \vec{b}), \quad \psi = \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$
   $$\varphi = \psi(\alpha > 0), \quad \varphi + \psi = \pi(\alpha < 0) \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \sin\psi,$$

   Значит $|\vec{m}| = |\vec{n}|$ и $\vec{m}||\vec{n}$. Кроме того, независимо от знака α обе тройки $\left\{\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}\right\}$ и $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}\right\}$ имеют одинаковую ориентацию и значит $\vec{m} = \vec{n}$.

3. Доказательство (3): Разложим вектор $\vec{a}$ на две составляющие $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$, одна из которых $\vec{a}_{||}$ коллинеарна вектору $\vec{c}$, а другая $\vec{a}_{\perp}$ ортогональна ему. Имеем:

   $$|\vec{a} \times \vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \sin\varphi = |\vec{a}_{\perp}| \cdot |\vec{c}| = \vec{a}_{\perp} \times \vec{c}.$$

   Поэтому для доказательства достаточно показать, что

   $$(\vec{a}_{\perp} + \vec{b}_{\perp}) \times \vec{c}_0 = \vec{a}_{\perp} \times \vec{c}_0 + \vec{b}_{\perp} \times \vec{c}_0, \quad \vec{c}_0 = \vec{c}/|\vec{c}|,$$

   но это верно и значит верно доказываемое утверждение.

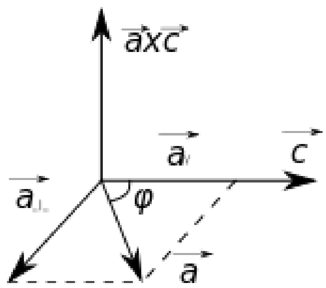

Рис. 11: К доказательству (3)

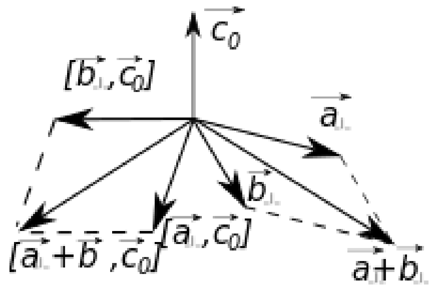

Рис. 12: К доказательству (3)

Выражение векторного произведения в декартовых координатах
Найдем векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами в некоторой ДПСК:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$
$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}.$$

Для базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ имеем:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

и тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ = a_x b_x \cdot \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_j \cdot \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \cdot \vec{i} \times \vec{k} = \\ = a_y b_x \cdot \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_j \cdot \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \cdot \vec{j} \times \vec{k} = \\ = a_z b_x \cdot \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_j \cdot \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \cdot \vec{k} \times \vec{k} = \\ = (a_y b_z = a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} = \\ = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Окончательно, используя определение алгебраических дополнений и сворачивая последнее выражение, получаем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

1.7 Смешанное произведение векторов

Опр. 17 *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется результат последовательного применения к данной тройке операций векторного и скалярного произведений:*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Геометрические свойства смешанного произведения

Теорема 3 *Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

$\square$

$\Rightarrow$ Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, тогда или $\vec{b} \times \vec{c} = 0$ или $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$. В первом случае имеем $\vec{b}||\vec{c}$ и тогда

$$\exists\, \alpha, \beta: \quad \vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \text{компланарность.}$$

Во втором случае получаем, что вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$\Leftarrow$ Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарные векторы, тогда

$$\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c}) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

$\blacksquare$

Замечание 7 *Модуль смешанного произведения трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на данных векторах:*

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}),$$
$$|\vec{a}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \mathit{Пр}_{\vec{b}\times\vec{c}}\vec{a} \equiv h, \quad |\vec{b} \times \vec{c}| \equiv S,$$
$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = h \cdot S = V.$$

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$;
2. $\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

1. Доказательство (1): Длины векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ и ориентация тройки не меняются.
2. Доказательство (2): Модули слева и справа равны, а ориентация изменилась при перестановке $\vec{b}$ и $\vec{c}$ местами.
3. Доказательство (3): Следует из свойств (1) и (2).

Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

Найдем смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами в некоторой ДПСК:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$
$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k},$$
$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{c} = c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}.$$

Имеем

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left(\left(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\right), \left((a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}\right)\right) =$$

$$= a_i \begin{vmatrix} b_j & b_k \\ c_j & c_k \end{vmatrix} + a_j \begin{vmatrix} b_k & b_i \\ c_k & c_i \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$