Вариант 1

1. Определить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = \overrightarrow{5p} + 2\vec{q}$, если известно, что $\vec{p} = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3$ и $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \pi/4$

2. Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$, $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 30°$. Найти $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

3. Найти взаимное расположение прямых $l_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$ и $l_2 = \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0}$. При этом, если $l_1 \parallel l_2$ найти расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между прямыми, а если прямые пересекаются, то найти косинус угла между ними и точку M_0 пересечения прямых.

4. Исследуйте взаимное расположение плоскостей $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$ и $P_2: y + 3z - 1 = 0$. При этом, если $P_1 \parallel P_2$, найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между плоскостями, а если плоскости пересекаются, то найти косинус угла между ними.

5. Записать каноническое уравнение эллипса, если эксцентриситет $e = {}^{1}\!/_{2}$ и расстояние между директрисами равняется 32.

Вариант 2

1. Задан вектор $\vec{a} = (-1,2,0)$. Вычислите $|\vec{a}|$ и координаты орта $(\vec{a})_0$ вектора $\vec{a}$

2. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ и такой, который образует с ортом $\vec{\jmath}$ острый угол и имеет длину $|\vec{x}| = 15$

3. Прямая l задана точкой $M_0(-1,2) \in l$ и вектором нормали $\vec{n} = (2,2)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Вычислите объем пирамиды, ограниченной плоскостью *P:* $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

5. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 3

1. Задан вектор $\vec{a} = (-1,2,0)$. Вычислите $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})$

2. Найти вектор $\vec{x}$, который образует с ортом $\vec{j}$ угол 60°, с ортом $\vec{k}$ - 120°, при условии, что $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$

3. Прямая l задана точкой $M_0(2,1) \in l$ и вектором нормали $\vec{n} = (2,0)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Исследуйте взаимное расположение плоскостей P_1: $2x - y + z - 1 = 0$ и P_2: $-4x + 2y - 2z - 1 = 0$. При этом, если $P_1 \parallel P_2$, найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между плоскостями, а если плоскости пересекаются, то найти косинус угла между ними.

5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если c=10 и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Вариант 4

1. Заданы вектора $\vec{a}_1 = (-1,2,0), \vec{a}_2 = (3,1,1), \vec{a}_3 = (2,0,1)$. Вычислите координату x вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_3$.

2. При каких значениях α и β вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарные

3. Прямая l задана точкой $M_0(1,1) \in l$ и вектором нормали $\vec{n} = (2,-1)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Составить уравнение плоскости P, которая проходит через точку $A(1,1,-1)$ и перпендикулярна к плоскостям P_1: $2x - y + 5z + 3 = 0$ и P_2: $x + 3y - z - 7 = 0$.

5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен $^3/_2$ и расстояние между директрисами равно $^8/_3$.

Вариант 5

1. Заданы вектора $\vec{a}_1 = (-1,2,0), \vec{a}_2 = (3,1,1), \vec{a}_3 = (2,0,1)$. Вычислите $\text{пр}_{\vec{j}}\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_3$.

2. Заданы три вершины $A(3,-4,7), B(-5,3,-2)$ и $C(1,2,-3)$ параллелограмма ABCD. Найти его четвертую вершину D, противолежащую B.

3. Прямая l задана точкой $M_0(-1,2) \in l$ и направляющим вектором $\vec{s} = (3,-1)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой каноническое уравнение и уравнение в отрезках. $L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$

5. Докажите, что $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 6

1. Заданы вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Найти координаты орта $\vec{a}_0$

2. Заданы две смежные вершины параллелограмма $A(-2,6), B(2,8)$ и точка пересечения их диагоналей $M(2,2)$. Найти две другие вершины.

3. Прямая l задана точкой $M_0(1,1) \in l$ и направляющим вектором $\vec{s} = (0,-1)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой каноническое уравнение и уравнение в отрезках. $L: \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$

5. Докажите, что $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 7

1. Заданы вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{k},\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

2. Определите координаты вершин треугольника, если известны середины его сторон: $K(2,-4), M(6,1), N(-2,3)$

3. Прямая l задана точкой $M_0(-1,1) \in l$ и направляющим вектором $\vec{s} = (2,0)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Написать каноническое уравнение прямой *L*, которая проходит через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно прямой L_1: $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

5. Докажите, что $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 8

1. Заданы вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a} - \overrightarrow{b})$

2. На оси абсцисс найти точку *M*, расстояние от которой до точки $A(3,3)$ равно 5.

3. Найти взаимное расположение прямых $l_1: x + y - 1 = 0$ и $l_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$. При этом, если $l_1 \parallel l_2$ найти расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между прямыми, а если прямые пересекаются, то найти косинус угла между ними и точку M_0 пересечения прямых.

4. Задана прямая L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ и точка $M(0, 1, 2) \notin L$ (проверить). Необходимо написать уравнение плоскости *P*, которая проходит через прямую *L* и точку *M*.

5. Докажите, что $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 9

1. Найти координаты орта $\vec{a}_0$, если $\vec{a} = (6,7,-6)$

2. На оси ординат найти точку *M*, равноудаленную от точек $A(1,-4,7)$ и $B(5,6,-5)$

3. Прямая l задана двумя точками $M_1(1,2)$ и $M_2(-1,0)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Задана прямая L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ и точка $M(0,1,2) \notin L$ (проверить). Необходимо написать уравнение плоскости *P*, которая проходит точку *M* перпендикулярно прямой *L*.

5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если эксцентриситет равен $^3/_2$ и расстояние между директрисами равно $^8/_3$

Вариант 10

1. Вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + z\vec{k}$. Найти z, если $|\vec{a}| = 12$

2. Заданы вершины треугольника $A(3,-1,5), B(4,2,-5)$ и $C(-4,0,3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины *A*.

3. Найти взаимное расположение прямых l_1 и l_2. При этом, если $l_1 \parallel l_2$ найти расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между прямыми, а если прямые пересекаются, то найти косинус угла между ними и точку M_0 пересечения прямых.

$l_1: x - y + 1 = 0 \quad l_2: 2x - 2y + 1 = 0$

4. Задана прямая L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ и точка $M(0,1,2) \notin L$ (проверить). Необходимо написать уравнение перпендикуляра, опущенного с точки *M* на прямую *L*.

5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если *c*=10 и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Вариант 11

1. Найти длину вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

2. Отрезок с концами в точках $A(3, -2)$ и $B(6,4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

3. Найти взаимное расположение прямых $l_1: -2x + y - 1 = 0$ и $l_2: 2y + 1 = 0$. При этом, если $l_1 \parallel l_2$ найти расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между прямыми, а если прямые пересекаются, то найти косинус угла между ними и точку M_0 пересечения прямых.

4. Задана прямая L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ и точка $M(0, 1, 2) \notin L$ (проверить). Необходимо найти расстояние от точки *M* до прямой *L*.

5. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$. Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 12

1. Заданы вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = -3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

2. Определить координаты концов отрезка *AB*, который точками $C(2,0,2)$ и $B(5, -2,0)$ разделен на три равные части.

3. Задана прямая $l: x + y + 1 = 0$ и точка $M(0, -1)$. Необходимо вычислить расстояние $\rho(M, l)$ от точки *M* до прямой l, написать уравнение прямой l', которая проходит через точку *M* параллельно заданной прямой l.

4. Задана поверхность $P: x + y - z = 0$ и прямая L: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, причем $L \notin P$ (проверить). Необходимо вычислить $\sin(\widehat{P, L})$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости.

5. Докажите, что $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 13

1. Вектор $\vec{a} = \vec{\imath} + z\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти z, если $|\vec{a}| = 9$

2. Отрезок с концами в точках $A(1,5)$ и $B(-2,3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

3. Прямая l задана двумя точками $M_1(1, 1)$ и $M_2(1, -2)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Задана поверхность $P: x + y - z = 0$ и прямая $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, причем $L \notin P$ (проверить). Необходимо написать уравнения плоскости Q, которая проходит через прямую L перпендикулярно плоскости P.

5. Докажите, что $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 14

1. Найти координаты орта $\vec{a}_0$, если $\vec{a} = (2,5,-2)$

2. Известны вершины треугольника ABC: $A(1,5), B(2,3)$ и $C(3,6)$. Определить координаты точки пересечения медиан.

3. Прямая l задана двумя точками $M_1(2, 2)$ и $M_2(0, 2)$. Написать уравнение прямой, свести его к общему виду, построить график прямой, найти расстояние от начала координат до прямой.

4. Задана поверхность $P: x + y - z = 0$ и прямая $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, причем $L \notin P$ (проверить). Необходимо написать уравнение проекции прямой на плоскость P.

5. Докажите, что $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ эллипс. Для него найти полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис.

Вариант 15

1. Задан вектор $\vec{a} = (3,1,1)$. Вычислите $\cos\left(\widehat{\vec{a}\,,\vec{j}}\right)$

2. Известны вершины треугольника *ABC*: $A(-1,-2), B(0,3)$ и $C(3,0)$. Определить координаты точки пересечения медиан.

3. Задана прямая l: $-2x + y - 1 = 0$ и точка $M(-1, 2)$. Необходимо вычислить расстояние $\rho(M, l)$ от точки *M* до прямой l, написать уравнение прямой l', которая проходит через точку *M* перпендикулярно заданной прямой l.

4. Найти расстояние между параллельными прямыми L_1: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и L_2: $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$

5. Напишите каноническое уравнение эллипса, если *c*=2 и расстояние между директрисами равно 5.

Вариант 16

1. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = 4\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}$.

2. Найти координаты четвертой вершины квадрата *ABCD*, если известны координаты вершин $A(-5,3,4), B(-1,-7,5), C(6,-5,-3)$.

3. Задана прямая l: $2y + 1 = 0$ и точка $M(1, 0)$. Необходимо вычислить расстояние $\rho(M, l)$ от точки *M* до прямой l, написать уравнение прямой l', которая проходит через точку *M* перпендикулярно заданной прямой l.

4. Для какого значения λ плоскость P: $5x - 3y + \lambda z + 1 = 0$ будет параллельна прямой L: $\begin{cases} x - 4z - 1 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

5. Постройте эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис.