

**Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение
Высшего Профессионального Образования
Московский Государственный Технологический Университет
«СТАНКИН»**

на правах рукописи

Бондаренко Алексей Алексеевич

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РЕШЕНИЙ
ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ К
КОЛЕБАНИЯМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.18 – «математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц.
Елисеева Ю. В.

Москва – 2012 г.

Содержание

Введение	4
Глава 1. Методы осцилляционной теории в математическом моделировании колебаний линейных систем	10
1.1. Математическое моделирование колебаний линейных систем . .	10
1.2. Постановка задачи	23
1.3. Обзор осцилляционной теории уравнений Штурма – Лиувилля и её приложений в численных методах	28
1.4. Основные свойства дискретной модели, описываемой уравнениями Штурма – Лиувилля порядка $2n$	43
1.5. Основные результаты главы 1	45
Глава 2. Осцилляционные свойства решений уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков	48
2.1. Число фокальных точек решения уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка	48
2.2. Одно свойство числа фокальных точек $m^*(Y_i)$	49
2.3. Осцилляционные теоремы для уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка	51
2.4. Уравнения Штурма – Лиувилля и трехчленные рекуррентные соотношения	54
2.5. Пример исследования дискретных уравнений Штурма – Лиувилля	62
2.6. Основные результаты главы 2	65
Глава 3. Вычисление фокальных точек дискретных уравнений Штурма – Лиувилля	67

3.1.	Трудности вычисления фокальных точек	67
3.2.	Ортогональные трансформации сопряженного базиса симплек- тической системы	69
3.3.	Подсчет числа фокальных точек уравнения Штурма – Лиувил- ля четвертого порядка	73
3.4.	Подсчет числа фокальных точек уравнений Штурма – Лиувил- ля высшего порядка	82
3.5.	Дискретная краевая задача Штурма – Лиувилля второго по- рядка с периодическими граничными условиями	87
3.6.	Основные результаты главы 3	92
 Глава 4. Алгоритмы вычисления собственных значений дис- кретной краевой задачи Штурма – Лиувилля высшего поряд- ка		 94
4.1.	Алгоритмы вычисления фокальных точек и их применение в методе бисекции	94
4.2.	Примеры вычислений собственных значений дискретных крае- вых задач Штурма–Лиувилля с граничными условиями Дирихле	106
4.3.	Примеры задач с разделенными граничными условиями	112
4.4.	Вычисление собственных частот колебаний моделей с распре- деленными параметрами	116
4.5.	Основные результаты главы 4	127
 Заключение		 129
 Литература		 131
 Приложение А. Описание программного комплекса		 141
A.1.	Основные характеристики комплекса.	141

Введение

Актуальность работы. Механические и электромагнитные колебания в линейных системах, многие явления в ядерной физике и квантовой химии описываются дифференциальными и разностными уравнениями высших порядков. Для таких задач разделение по времени и по пространственным переменным приводит к дифференциальным и дискретным краевым задачам Штурма – Лиувилля. Дискретные краевые задачи Штурма – Лиувилля высших порядков возникают при исследовании поперечных колебаний дискретных моделей стержневых систем, анализе моделей колебаний частиц в одномерных решетках, учитывающих дальние взаимодействия, а также при аппроксимации дифференциальных краевых задач Штурма – Лиувилля конечно-разностными соотношениями. При изучении механических колебаний в линейных системах в теоретическом и прикладном аспектах основной интерес представляют низшие моды колебаний, анализ которых требует решения частичной проблемы собственных значений для дифференциальных и дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков.

В работах Е. А. Coddington, N. Levinson [64], Р. Hartman [80], Е. С. Titchmarsh, И. М. Глазмана [15], Л. Д. Николенко [27], В. А. Якубовича [44], [42], [43], [45] и других авторов изучались осцилляционные свойства решений дифференциальных уравнений Штурма – Лиувилля, которые позже легли в основу методов решения краевых задач Штурма – Лиувилля второго и четвертого порядков, разработанных А. А. Абрамовым [2], Р. В. Bailey, W. N. Everitt, A. Zettl [52], Л. Д. Акуленко, Г. В. Костиным, С. В. Нестеровым [3], [49], L. Greenberg, M. Marletta [74],[75] и др.

Дискретная краевая задача Штурма – Лиувилля второго порядка с разделенными граничными условиями равносильна задаче на собственные значения для симметричной трехдиагональной матрицы. Решением последней

занимались J. Givens [70], J. Wilkinson [39], С. К. Годунов [16] и др.

Теория дискретных симплектических систем уравнений:

$$Y_{i+1} = W_i Y_i, \quad W_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad W_i^T J W_i = J, \quad i = 0, \dots, N, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

развивалась в работах L. Erbe, P. Yan [69], С. Ahlbrandt [48], M. Bohner [53, 55, 58], W. Kratz [86],[88], O. Dosly [56, 57], и др. Дискретные краевые задачи Штурма – Лиувилля высших порядков являются важным частным случаем краевых задач для систем (3.4.3) с вырожденным блоком B_i . В 2007 году W. Kratz и O. Dosly доказали осцилляционную теорему [88] для дискретных симплектических систем. Используя метод бисекции и данную теорему, можно решать частичную проблему собственных значений дискретных краевых задач для дискретных симплектических систем.

Применение метода бисекции для дискретной краевой задачи Штурма – Лиувилля высшего порядка связано с трудностью подсчета фокальных точек [86] главного решения соответствующей симплектической системы. Число фокальных точек — осцилляционная характеристика, обобщающая понятие нуля функции на случай матричного решения дискретной симплектической системы.

В настоящей диссертации разрабатываются методы исследования осцилляционных свойств решений дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, позволяющие использовать метод бисекции для решения частичной проблемы собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков, что является актуальным с позиций практического интереса.

Цель диссертационной работы развитие качественных и количественных методов исследования осцилляционных свойств решений дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков и разработка метода

решения частичной проблемы собственных значений для дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с заданной точностью.

Научная новизна.

1. В диссертационной работе разработаны новые методы исследования осцилляционных свойств решений дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, отличительной особенностью которых является применение осцилляционной теории симплектических систем и учет структуры соответствующей матрицы симплектической системы.
2. Доказана осцилляционная теорема, позволяющая использовать метод бисекции для решения частичной проблемы собственных значений дискретной краевой задачи Штурма – Лиувилля высшего порядка.
3. Доказана теорема о совпадении осцилляционных свойств дискретного уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка и некоторого трехчленного уравнения, что позволяет сократить число операций в n раз при подсчете фокальных точек решения дискретного уравнения Штурма – Лиувилля порядка $2n$.
4. Разработан метод решения частичной проблемы собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с заданной точностью, требующий $O(N)$ операций для вычисления отдельного собственного значения.

Практическая значимость. Разработан комплекс программ, реализующий локализацию и вычисление отдельных собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков. Разработанные методы и комплекс программ могут быть использованы при решении следующих задач:

- анализ моделей колебаний частиц в одномерных решетках, учитывающих дальние взаимодействия;
- исследование поперечных колебаний дискретных моделей стержневых систем;
- анализ колебаний стержней переменного поперечного сечения;
- решение частичной проблемы собственных значений симметрических ленточных матриц без приведения к трехдиагональной форме.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Методы исследования дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, основанные на осцилляционной теореме и теореме о совпадении осцилляционных свойств дискретного уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка и некоторого трехчленного уравнения.
2. Алгоритмы подсчета фокальных точек главного решения уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка, отличительной особенностью которых является использование ортогональных трансформаций главного решения и структуры симплектической системы, соответствующей уравнению Штурма – Лиувилля высшего порядка.
3. Комплекс программ, реализующий разработанный метод решения частичной проблемы собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с заданной точностью, требующий $O(N)$ операций для вычисления отдельного собственного значения.

Апробация работы. Основные теоретические положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: на научном семинаре кафедры дифференциальных

уравнений и математической физики под руководством профессора А. Л. Скубачевского, РУДН (г. Москва, февраль 2012 г.); на XIX международной конференции “Математика. Компьютер. Образование” (Дубна, 2012 г.); на II международной научной конференции “Моделирование нелинейных процессов и систем” (МГТУ “Станкин”, Москва, 2011 г.); на XV международной научной конференции "Dynamical system modeling and stability investigation" (КНУ им. Тараса Шевченко, Киев, Украина, 2011 г.); на XI, XII, XIII научных конференциях МГТУ “Станкин” и Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ “Станкин” — ИММ РАН по математическому моделированию и информатике (МГТУ “Станкин”, г. Москва, 2008, 2009, 2010 г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 7 печатных работах, в числе которых 2 статьи из перечня изданий, рекомендованных ВАК, 3 — в сборниках трудов научных конференций и 2 — в периодических изданиях.

Личный вклад автора состоит в разработке представленных в диссертации методов исследования осцилляционных свойств дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, разработке численного метода решения частичной проблемы собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков, разработке программного комплекса, позволяющего проводить расчеты на основе предложенного численного метода. Основные результаты и их доказательства, изложенные в диссертационной работе, были впервые получены автором и отражены в 7 публикациях автора. В статье [59] автором лично разработаны и реализованы алгоритм подсчета фокальных точек решения уравнения Штурма – Лиувилля высших порядков, метод вычисления собственных значений, проведен вычислительный эксперимент. В остальных материалах совместных работ личный вклад автора является определяющим, научному руководителю принадлежат постановка задач и возможная методика их решения.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. Содержание диссертации изложено на 148 страницах машинописного текста, в число которых входит 8 страниц приложений. В тексте имеется 19 рисунков и 8 таблиц. Список литературы включает 91 наименование.

Глава 1

Методы осцилляционной теории в математическом моделировании колебаний линейных систем

1.1. Математическое моделирование колебаний линейных систем

Приведем примеры математических моделей колебаний в линейных системах с сосредоточенными и распределенными параметрами, описываемых дискретными уравнениями Штурма-Лиувилля высших порядков и краевыми задачами для данных уравнений.

1.1.1. Колебания в кристаллических решетках и их аналоги

Простейшее твердое тело - это твердый аргон. Он состоит из правильно расположенных атомов с крепко связанными электронными оболочками. Эти атомы удерживаются вблизи друг друга силами Ван-Дер-Ваальса, которые действуют в основном между ближайшими соседями в решетке. Физические процессы в таком кристалле связаны с тепловым движением атомов вблизи своих идеализированных положений равновесия. Для простейшего описания такого движения используется модель Эйнштейна, согласно которой каждый атом колеблется подобно простому гармоническому осциллятору в потенциальной яме, образованной силами его взаимодействия с соседями [22].

Решетка представляет собой самый наглядный объект, который естественно назвать упорядоченной структурой из осцилляторов. Моделями упорядоченной структуры, в которых осцилляторы связаны между собой опре-

деленным образом, являются (см. [12], [31]): линейная цепочка из одинаковых частиц, расположенных вдоль прямой на равных расстояниях друг от друга (одномерная решетка из одинаковых частиц); цепочка из LC - элементов; ряд акустических резонаторов; цепочка, образованная из магнитов и др.

Простую модель, соответствующую описанному твердому аргону, можно представить как систему правильно расположенных в пространстве шариков, связанных друг с другом пружинами. Волны, бегущие в твердом теле или другой упорядоченной структуре, характеризуются длиной волны и частотой ω .

Рассмотрим движение одномерной решетки из одинаковых равноудаленных частиц (см. рис. 1.1). Отметим, что на рис. 1.1 отражена зависимость только от соседних частиц. Выведем уравнение движения цепи, учитывающее силу взаимодействия между всеми частицами цепи.

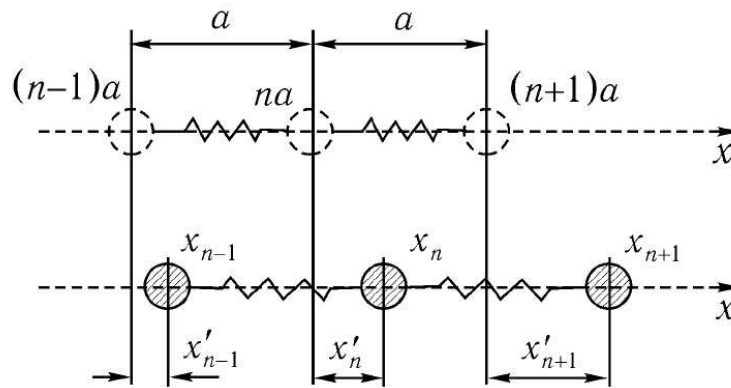


Рис. 1.1. Одномерная "решетка" состоящая из равноудаленных частиц с взаимодействием только между соседними частицами; сверху - решетка до возмущения; внизу - после возмущения

Координата n - й частицы после возмущения равна

$$x_n = na + y_n \quad (1.1.1)$$

где y_n – отклонение от положения равновесия (будем далее предполагать, что

$y_n \ll a$). Выражение для расстояния между n -й $n+k$ -й частицами имеет вид

$$r_{n,n+k} = x_{n+k} - x_n = ka + y_{n+k} - y_n \quad (1.1.2)$$

Будем считать, что потенциальная энергия, на основании которой можно найти силу взаимодействия между двумя данными частицами, зависит только от расстояния между ними $|x_{n+k} - x_n|$, поэтому будем обозначать ее через $U(r_{n,n+k}) = U(|x_{n+k} - x_n|)$. Таким образом, выражение для полной потенциальной энергии всей решетки можно записать в виде

$$U = \sum_n \sum_{k>0} U(|x_{n+k} - x_n|). \quad (1.1.3)$$

Чтобы не учитывать дважды взаимодействие каждой пары частиц, ограничимся суммированием только по положительным значениям k . Если предполагать смещение y_n малым по сравнению с расстоянием между частицами, то функцию U всегда можно разложить в ряд Тейлора. Пренебрегая степенями величины $(y_{n+k} - y_n)$, большими двух, получаем

$$U(x_{n+k} - x_n) = U(ka) + (y_{n+k} - y_n)U'(ka) + \frac{1}{2}(y_{n+k} - y_n)^2 U''(ka), \quad (1.1.4)$$

где $U'(ka)$ и $U''(ka)$ – соответственно значения производных dU/dr и d^2U/dr^2 в точке $r = ka$.

Подставляя (1.1.4) в (1.1.3), запишем выражение для потенциальной энергии цепочки

$$U = \sum_n \sum_{k>0} \left((y_{n+k} - y_n)U'(ka) + \frac{1}{2}(y_{n+k} - y_n)^2 U''(ka) \right) + U_0 \quad (1.1.5)$$

где $U_0 = \sum_n \sum_{k>0} U(ka)$. Зная U , вычислим силу, действующую на p -ю частицу, поскольку $F_p = -\partial U / \partial y_p$. Дифференцирование ведется по смещению y_p рассматриваемой частицы, поэтому вклад в F_p при суммировании по n дадут лишь слагаемые, зависящие от y_p , то есть слагаемые, для которых справед-

ливы равенства $n = p$ и $n + k = p$. Тогда из (1.1.6) следует, что

$$F_p = -\frac{\partial U}{\partial y_p} = \sum_{k>0} U''(ka)(y_{p+k} + y_{p-k} - 2y_p) \quad (1.1.6)$$

Можно показать, что для модели рис. 1.1 величина $U''(ka)$ аналогична жесткости пружинок, соединяющих шарики.

Наиболее важный случай имеет место, когда сила быстро спадает с расстоянием. Если радиус действия сил порядка Ma , то в сумме (1.1.6) следует оставить члены с $1 \leq k \leq M$.

Уравнение движения частицы получим, приравнявая силу F_p силе инерции. Таким образом, для p -й частицы получаем

$$m \frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} = \sum_{k>0}^M U_k''(y_{p+k} + y_{p-k} - 2y_p), \quad U_k'' = U''(ka). \quad (1.1.7)$$

Будем искать решение в виде

$$y_p = z_p \cdot e^{i\omega t}, \quad (1.1.8)$$

где ω - частота колебания. Подставляя (1.1.8) в (1.1.7), получаем

$$m\omega^2 z_p = \sum_{k>0}^M U_k''(2z_p - z_{p+k} - z_{p-k}), \quad (1.1.9)$$

Замечание 1.1.1. Отметим, что уравнение (1.1.9) в самосопряженной форме будет иметь вид дискретного уравнения Штурма-Лиувилля $2M$ - го порядка, где параметр $\lambda = \omega^2$.

При соответствующих граничных условиях для (1.1.9) получаем дискретную краевую задачу Штурма-Лиувилля $2M$ - го порядка, для решения которой необходимо найти значение параметра $\lambda = \omega^2$ удовлетворяющего граничным условиям. В последующих главах диссертации разрабатываются методы позволяющие вычислять λ_n – собственные значения данной задачи, то есть

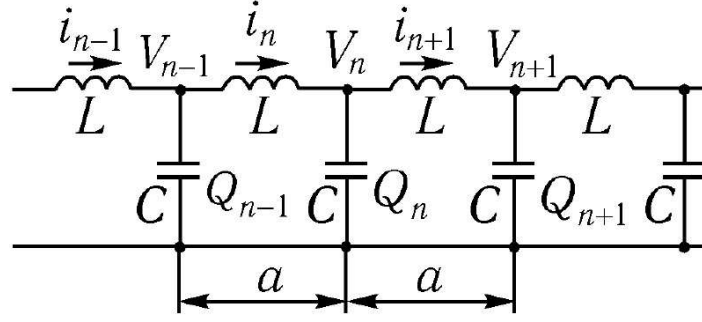


Рис. 1.2. Электрический аналог одномерной цепочки из одинаковых частиц: i_n – ток, протекающий через индуктивность между $(n-1)$ и n -й емкостями; Q_n и $V_n = Q_n/C$ заряд на емкости и приложенная к ней разность потенциалов

находить допустимые частоты гармонических колебаний соответствующих кристаллических решеток .

Рассмотрим другие линейные системы с сосредоточенными параметрами приводящие к (1.1.9) или в самосопряженной форме к дискретным краевым задачам Штурма-Лиувилля. Электрическим аналогом одномерной "решетки" из одинаковых равноудаленных частиц является цепочка, составленная из последовательно соединенных индуктивностей L и емкостей C рис. 1.2. Такая LC -цепочка ведет себя как фильтр нижних частот и описывается уравнением для тока

$$\frac{d^2 i_n}{dt^2} = (LC)^{-1}(i_{n-1} + i_{n+1} - 2i_n), \quad (1.1.10)$$

которое совпадает с уравнением (1.1.7) при $M = 1$, если сделать замены $U''/m \leftrightarrow (LC)^{-1}$, $y_n \leftrightarrow i_n$. Это уравнение позволяет определить величину тока, протекающего в линии, а также величины электрического заряда и разность потенциалов во всех ее точках.

Электрическая цепь на рис. 1.2 может быть усложнена таким образом, что она будет обладать такими же свойствами как и решетка, состоящая из частиц, находящихся на равных расстояниях друг от друга частиц, каждая из которых взаимодействует с M ближайшими частицами решетки.

Каждый из конденсаторов емкостью C свяжем при помощи катушек с индуктивностью L_1 с двумя смежными конденсаторами - "первыми соседями", при помощи катушек с индуктивностью L_2 с двумя следующими "вторыми соседями", расположенными слева и справа от него, и так далее. Конденсатор емкостью C свяжем при помощи катушек с индуктивностью L_M с двумя смежными " M - соседями". Пусть $i_{k,k+p}$ - величина тока, протекающего через L_p от k -ого к $k + p$ -му конденсатору, Q_n - заряд, накопленный в n -ом конденсаторе. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$C \frac{d^2 Q_n}{dt^2} = \sum_p^M \frac{Q_{n-p} + Q_{n+p} - 2Q_n}{L_p}. \quad (1.1.11)$$

Еще одна реализация одномерной цепочки – ряд акустических резонаторов объемом V_p , которые соединены трубками с поперечным сечением S и объемом V_{Tp} (см. рис. 1.4). Пусть через эту систему протекает газ с объемной

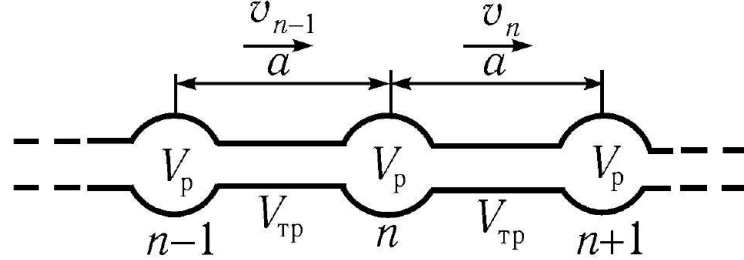


Рис. 1.3. Акустический аналог одномерной цепочки из одинаковых частиц: v_{n-1} и v_n – скорости массы газа, находящегося между $(n - 1)$ -й, n -й и n -й, $(n + 1)$ -й трубками соответственно

плотностью ρ . Предположим, что в любой момент времени газ в резонаторах находится в состоянии равновесия и объем резонатора много больше объема соединительной трубки. Используя второй закон Ньютона, можно убедиться, что имеет место уравнение

$$\frac{d^2 p_n}{dt^2} = \frac{S^2}{\chi V_P V_{Tp}} (p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n), \quad (1.1.12)$$

где dp_n - изменение давления в n -м резонаторе, а $\chi = -\frac{1}{V} \frac{(v_n - v_{n-1})S}{dp_n/dt}$ - сжимаемость газа. Уравнение (1.1.12) аналогично (1.1.7) при $M = 1$, то есть представленная цепочка представляет собой акустический аналог одномерной решетки из одинаковых частиц, в которой каждая частица взаимодействует только с ближайшими соседями.

Рассмотрим еще один пример – цепочку, состоящую из маленьких магнитных стрелок – осцилляторов с неупругой связью (см. рис. 1.4). Цепочка

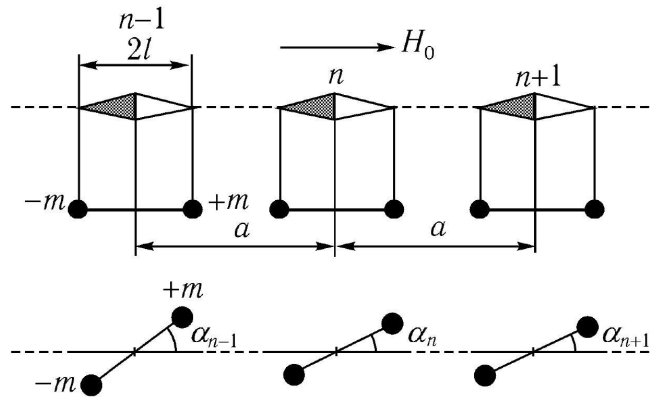


Рис. 1.4. Цепочка из магнитных стрелок: вверху – в невозмущенном состоянии; внизу – возмущенное состояние цепочки при отклонении диполя от положения равновесия на малый угол

находится во внешнем магнитном поле, при этом каждая стрелка может свободно вращаться в плоскости чертежа вокруг своего неподвижного закрепленного центра. Будем предполагать, что магнитное взаимодействие имеет место лишь между полюсами ближайших стрелок. Распространение волн в такой цепочке рассматривалось М. Parodi при изучении ферромагнитных кристаллов [12] и в работе [34] в связи с исследованием магнитостатических волн в магнитоупорядоченных средах.

Приведем уравнение движения для n -ой стрелки (см. [34]) (1.1.13), где I – момент инерции магнита относительно его оси вращения, H магнитное поле, параллельное направлению цепочки.

Уравнение (1.1.13) аналогично (1.1.7) при $M = 1$.

$$I \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} = -\frac{2m^2 l^2}{a^3} (\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} - 2\alpha_n) - \\ - m^2 l^2 \left[\frac{1}{(a-2l)^3} + \frac{1}{(a+2l)^3} \right] (\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n) - \\ - 2m^2 l \left[\frac{1}{(a-2l)^2} + \frac{1}{(a+2l)^2} \right] \alpha_n - 2ml H_0 \alpha_n, \quad (1.1.13)$$

1.1.2. Колебания дискретных стержневых систем

Дискретная модель поперечного колебания балки Бернулли-Эйлера может быть представлена моделью "масса-пружина-стержень" Гладуэлла [71]. Она состоит из $N + 2$ масс m_r , $-1 \leq r \leq N$, соединенных невесомыми упругими стержнями длины l_r , $0 \leq r \leq N$, которые в свою очередь соединены вращающимися пружинками жесткости k_r , $1 \leq r \leq N$. Масса и упругость балки, растянутая по всей его длине, сосредоточена в $n + 2$ точках.

Плотность, модуль упругости, площадь сечения и момент инерции i -ого элементарного стержня обозначим через ρ_i , E_i , A_i и I_i соответственно. Тогда параметры модели будут иметь вид:

$$l_i = h_i, m_i = \rho_i A_i h_i = q_i h_i, k_i = \frac{E_i I_i}{h_i} = \frac{\bar{r}_i}{h_i},$$

где q_i – масса единицы длины и \bar{r}_i – жесткость при изгибе соответствующего элементарного стержня.

Пусть u_i – смещение i -ой массы из равновесия, θ_i – угол наклона i -ого элементарного стержня, τ_i – изгибающий момент и ϕ_i – сдвигающая сила. Пусть левый конец жестко закреплен. Тогда смещение и угол удовлетворяют условию

$$u_{-1} = \theta_0 = 0,$$

следовательно

$$u_0 = 0.$$

Для i -го элементарного стержня

$$m_i \ddot{u}_i = \phi_i - \phi_{i-1}, \quad i = -1, 0, \dots, n, \quad (1.1.14)$$

и тогда суммируя моменты на левом конце $(i+1)$ -ого элементарного стержня, получаем

$$\phi_i = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{l_{i+1}}, \quad i = -1, 0, \dots, n-1. \quad (1.1.15)$$

Подставляя (1.1.15) в (1.1.14), получаем

$$m_i \ddot{u}_i = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{l_{i+1}} - \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{l_i} = \left(\frac{1}{l_i} \right) \tau_{i-1} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) \tau_i + \left(\frac{1}{l_{i+1}} \right) \tau_{i+1}. \quad (1.1.16)$$

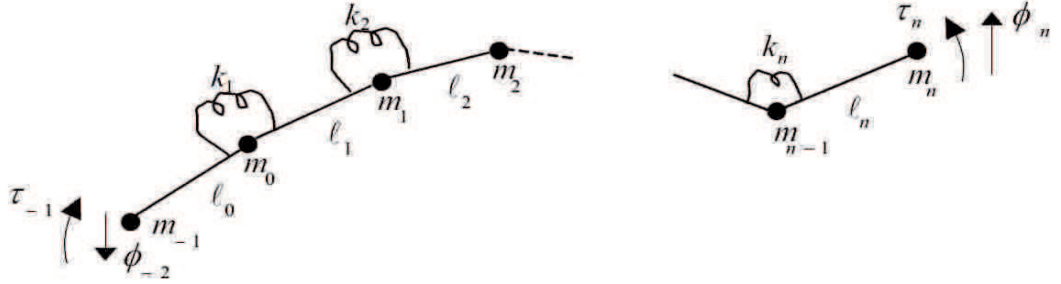


Рис. 1.5. Модель "масса-пружина-стержень"

Отметим, что момент зависит от относительного изменения угла между двумя элементарными упругими стержнями, находящимися слева и справа от i -ой массы:

$$\tau_i = k_{i+1} (\theta_{i+1} - \theta_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.1.17)$$

Подставляя (1.1.17) в (1.1.16), получаем

$$m_i \ddot{u}_i = -\frac{k_i}{l_i} \theta_{i-1} + \left(\frac{k_{i+1} + k_i}{l_i} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \theta_i - \left(\frac{k_{i+1}}{l_i} + \frac{k_{i+1} + k_{i+2}}{l_{i+1}} \right) \theta_{i+1} + \frac{k_{i+2}}{l_{i+1}} \theta_{i+2}. \quad (1.1.18)$$

Заметим, что при малом перемещении угол можно определять

$$\theta_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{l_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.1.19)$$

тогда, подставляя (1.1.19) в (1.1.18), получаем

$$m_i \ddot{u}_i = -\frac{k_i}{l_i l_{i-1}} (u_{i-1} - u_{i-2}) + \left(\frac{k_{i+1} + k_i}{l_i^2} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1} l_i} \right) (u_i - u_{i-1}) - \left(\frac{k_{i+1}}{l_i l_{i+1}} + \frac{k_{i+1} + k_{i+2}}{l_{i+1}^2} \right) (u_{i+1} - u_i) + \frac{k_{i+2}}{l_{i+1} l_{i+2}} (u_{i+2} - u_{i+1}). \quad (1.1.20)$$

Преобразуя (1.1.20), окончательно имеем

$$m_i \ddot{u}_i = u_{i-2} \frac{k_i}{l_i l_{i-1}} - u_{i-1} \left(\frac{k_i}{l_i l_{i-1}} + \frac{k_{i+1} + k_i}{l_i^2} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1} l_i} \right) + u_i \left(\frac{k_{i+1} + k_i}{l_i^2} + \frac{2k_{i+1}}{l_{i+1} l_i} + \frac{k_{i+1} + k_{i+2}}{l_{i+1}^2} \right) - u_{i+1} \left(\frac{k_{i+1}}{l_i l_{i+1}} + \frac{k_{i+1} + k_{i+2}}{l_{i+1}^2} \frac{k_{i+2}}{l_{i+1} l_{i+2}} \right) + u_{i+2} \frac{k_{i+2}}{l_{i+1} l_{i+2}}.$$

Таким образом, при рассмотрении гармонических колебаний $u(i, t) = y(i) e^{j(\omega t)}$ приходим к краевой задаче Штурма–Лиувилля 4-го порядка, или к проблеме собственных значений $M - \lambda I = 0$ для пятидиагональной матрицы:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & \vdots \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & a_4 & \ddots & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{N-2} & b_{N-1} & a_N \end{pmatrix},$$

$$a_i = \frac{-1}{m_i} \left(\frac{k_{i+1} + k_i}{l_i^2} + \frac{2k_{i+1}}{l_{i+1} l_i} + \frac{k_{i+1} + k_{i+2}}{l_{i+1}^2} \right),$$

$$b_i = \frac{1}{m_i} \left(\frac{k_{i+1}}{l_i l_{i+1}} + \frac{k_{i+1} + k_{i+2}}{l_{i+1}^2} \frac{k_{i+2}}{l_{i+1} l_{i+2}} \right), \quad c_i = \frac{-k_{i+2}}{m_i l_{i+1} l_{i+2}}$$

1.1.3. Дифференциальные задачи Штурма–Лиувилля

Дифференциальные краевые задачи Штурма–Лиувилля 2-ого порядка являются наиболее популярной моделью колебаний, используемой в физике

и технике (см. [28], [35], [49], [29], [37], [33]). Они возникают при определении собственных колебаний струны, продольных колебаний стержня, исследований колебаний различных деталей конструкций с вращающимися узлами круговой формы, в задачах распределения тепла, исследовании электромагнитных колебаний, в задачах ядерной физики и др. Данные задачи приводят к краевым задачам для линейного уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[r^{(1)}(t) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda w^{(0)}(x) y(x) = 0. \quad (1.1.21)$$

Важные для техники задачи, такие как колебания турбинных лопаток, корпусов судов, мостовых балок переменной высоты [28], [35] и телевизионных башен [25] и антенн спутников, требуют применения теории колебаний для стержней переменного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение, описывающее колебания стержня переменного поперечного сечения имеет вид [35]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1.22)$$

Здесь x – продольная координата, t – время, y – поперечное перемещение центральной оси стержня (прогиб), I – момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной плоскости изгиба, F – площадь поперечного сечения, E – модуль Юнга, ρ – объемная плотность.

Уравнение (1.1.22) принято называть классическим, или уравнением Бернулли-Эйлера. В классической теории Я. Бернулли и Л. Эйлера предполагается следующее:

- поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные его оси, во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси стержня;
- продольные сечения стержня сопротивляются изгибу независимо, не

оказывая друг на друга влияния (т. е. нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, пренебрежимо малы);

- инерцией вращения элемента стержня при изгибе пренебрегается.

В теории колебания Рэлея добавляется еще одно условие:

- учитывается инерция вращения элемента стержня при изгибе.

К модели Рэлея приводят изгибные колебания зашцементированного на одном конце вертикального стержня, примером физической задачи приводящей к данной модели является высокая дымовая труба [28, Глава 1, п. 2.5]. Соответствующее уравнение колебаний имеет вид

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (1.1.23)$$

где $G(x) = \int_0^x \rho g F d\xi$ - вес стержня от верхнего конца до точки x .

Для решения уравнения (1.1.22) и уравнения изгибных колебаний стержня с учетом инерции вращения (1.1.23) применяют метод разделения переменных [37].

Согласно методу разделения переменных решение дифференциальных уравнений в частных производных, например, в двумерном случае, ищется в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной из независимых переменных. Для уравнений (1.1.22), (1.1.23) имеем

$$w(x, t) = X(x)T(t). \quad (1.1.24)$$

Подставим (1.1.24) в уравнение (1.1.22) и разделим его на $X(x)T(t)$. Тогда получаем

$$-\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) = \lambda. \quad (1.1.25)$$

Из равенства двух функций, одна из которых зависит только от t , а другая только от x , следует, что их можно приравнять некоторой постоянной λ , выбор ее здесь обсуждать не будем. Из (1.1.25) получим два уравнения

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \lambda T(t) = 0, \quad (1.1.26)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) - \lambda X(x) = 0. \quad (1.1.27)$$

В случае уравнения (1.1.23) для $T(t)$ установим аналогичное (1.1.26) уравнение, а для $X(x)$ – уравнение следующего вида

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(G \frac{dX(x)}{dx} \right) - \lambda X(x) = 0. \quad (1.1.28)$$

Для уравнений (1.1.26), (1.1.28) требуется найти последовательность собственных значений $\lambda = \lambda_n$ и функций $X = X_n(x)$ (форм колебаний). В прикладном аспектах основной интерес представляют низшие моды колебаний $n = 1, 2, \dots$ (условно $n \leq 10$).

Только в некоторых специальных случаях можно получить точные выражения для нормальных функций и частот колебаний. Поэтому для определения собственных частот используют приближенные методы.

1.1.4. Конечно-разностные аппроксимации

Решение самосопряжённых дифференциальных уравнений и краевых задач приближенными методами приводит к системам линейных алгебраических уравнений и к задачам на собственные значения для симметричных матриц специальной структуры [6, Глава 9], [36]. При аппроксимации дифференциальных уравнений и краевых задач Штурма-Лиувилля появляются дискретные уравнения и краевые задачи Штурма-Лиувилля высших порядков [32], [40].

Исследование колебаний, допускающих описание в виде дифференциаль-

ных уравнений с разрывными коэффициентами, требует использования специальных однородных консервативных схем [36], [40].

В частности, при аппроксимации уравнений (1.1.22), (1.1.23), в которых функция $I(x)$, определяющая жесткость на изгиб, разрывна, необходимо использовать специальные разностные схемы, например, приведенные в [40]. В §4.3 рассмотрим сведение аппроксимаций самосопряжённых дифференциальных краевых задач 4-ого порядка, предложенных в работах [40] [41], к дискретной краевой задаче Штурма–Лиувилля 4 порядка.

1.2. Постановка задачи

1.2.1. Дискретные уравнения Штурма–Лиувилля

В работе рассматриваются разностные уравнения Штурма–Лиувилля порядка $2n$, $n \in \mathbb{N}$ для скалярной функции v от дискретного аргумента i :

$$S(y_i) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \Delta^m (r_i^{(m)} \Delta^m y_{i+1-m}) = 0, \quad r_i^{(n)} \neq 0 \quad (1.2.1)$$

Дискретные уравнения Штурма–Лиувилля (1.2.1) могут быть записаны в виде *дискретной гамильтоновой системы* уравнений

$$J^T \begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta U_i \end{bmatrix} = \mathcal{H}_i \begin{bmatrix} X_{i+1} \\ U_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^T, \quad H_i = \begin{bmatrix} -C_i & \mathcal{A}_i^T \\ \mathcal{A}_i & B_i \end{bmatrix}, \quad \det(I - \mathcal{A}_i) \neq 0, \quad (1.2.2)$$

где $\Delta A_i = A_{i+1} - A_i$, \mathcal{H}_i – дискретный *гамильтониан*. Доказано [56], что (1.2.2) являются частным случаем дискретных симплектических систем уравнений [63]:

$$Y_{i+1} = W_i Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (1.2.3)$$

Вещественная $2n \times 2n$ матрица W_i системы (1.2.3) является симплектической

для любого i :

$$W_i^T J W_i = J, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.4)$$

здесь 0 , I - нулевая и единичная матрицы. После разбиения W_i на блоки размерности $n \times n$

$$W_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad (1.2.5)$$

условие (1.2.4) равносильно

$$B_i^T D_i = D_i^T B_i, \quad A_i^T C_i = C_i^T A_i, \quad A_i^T D_i - C_i^T B_i = I. \quad (1.2.6)$$

В диссертационной работе основным математическим аппаратом исследования свойств решений (1.2.1) является теория дискретных симплектических систем уравнений.

Замечание 1.2.1. Матрица симплектической системы соответствующей (1.2.2) имеет вид

$$W_i = \begin{bmatrix} (I - \mathcal{A}_i)^{-1} & (I - \mathcal{A}_i)^{-1} \mathcal{B}_i \\ \mathcal{C}_i (I - \mathcal{A}_i)^{-1} & \mathcal{C}_i (I - \mathcal{A}_i)^{-1} \mathcal{B}_i + I - \mathcal{A}_i^T \end{bmatrix}. \quad (1.2.7)$$

Отметим, что последняя матрица, записанная в обозначениях (1.2.5), удовлетворяет условию $\det A_i \neq 0$, $i = 0, \dots, N$.

Разностные уравнения Штурма-Лиувилля порядка $2n$ (1.2.1) сводятся к (1.2.3) после замены переменных

$$x_i = \begin{pmatrix} y_i \\ \Delta y_{i-1} \\ \vdots \\ \Delta^{n-1} y_{i-n+1} \end{pmatrix}, \quad u_i = \begin{pmatrix} \sum_{\mu=\nu+1}^n (-\Delta)^{\mu-\nu-1} \left(r_i^{(\mu)} \Delta^\mu y_{i+1-\mu} \right) \\ \vdots \\ -\Delta \left(r_i^{(n)} \Delta^n y_{i-n+1} \right) + r_i^{(n-1)} \Delta^{n-1} y_{i-n+2} \\ r_i^{(n)} \Delta^{(n)} y_{i-n+1}, \end{pmatrix} \quad (1.2.8)$$

при этом блоки (1.2.5) матрицы системы (1.2.3) имеют вид

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B_i = A_i \cdot \frac{1}{r_i^{(n)}} \cdot \text{diag}(0, \dots, 0, 1),$$

$$C_i = \text{diag}(r_i^{(0)}, \dots, r_i^{(n-1)}) \cdot A_i, \quad D_i = \text{diag}(r_i^{(0)}, \dots, r_i^{(n-1)}) \cdot B_i + (A_i)^{-T} \quad (1.2.9)$$

Основным свойством (1.2.3) является сохранение симплектической структуры фундаментальной матрицы решений системы Z_i : если в какой либо точке $M \in [0, N + 1]$ выполнено $Z_M^T J Z_M = J$, то Z_i является симплектической для $\forall i \in [0, N + 1]$.

В работе рассматриваются матричные решения системы (1.2.3):

$$Y_i = \begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix}, \quad Y_i^T J Y_i = 0, \quad \text{rank} Y_i = n, \quad (1.2.10)$$

где матрицы X_i, U_i имеют размерность $n \times n$. Любое матричное решение, удовлетворяющее (1.2.10) называется *сопряженным базисом*.

Определение 1.2.2. *Сопряженный базис $Y_i^{(k)}$ системы (1.2.3) называется главным решением в точке $k \in [0, N + 1]$, если $Y_k^{(k)} = [0 \ I]^T$.*

Симплектическая структура системы (1.2.3) обеспечивает выполнение *тождества Вронского* для произвольных сопряженных базисов

$$Y_i, \hat{Y}_i : \quad w_{i+1}(Y, \hat{Y}) = Y_{i+1}^T J \hat{Y}_{i+1} = Y_i^T W_i^T J W_i \hat{Y}_i = Y_i^T J \hat{Y}_i = w_i(Y, \hat{Y}),$$

следовательно,

$$w_i(Y, \hat{Y}) = Y_i^T J \hat{Y}_i = \text{const}, \quad i = 0, \dots, N + 1. \quad (1.2.11)$$

1.2.2. Дискретная краевая задача Штурма-Лиувилля высшего порядка

В работе рассматриваются разностные краевые задачи Штурма-Лиувилля порядка $2n$, $n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\mu=0}^n (-\Delta)^\mu \left\{ r_i^{(\mu)} \Delta^\mu y_{i+1-\mu} \right\} = \lambda y_{i+1}, \quad r_i^{(n)} \neq 0, \quad (1.2.12)$$

$$y_{1-n} = \dots = y_0 = y_{N+2-n} = \dots = y_{N+1} = 0, \quad (1.2.13)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $0 \leq i \leq N - n$, $N, n \in \mathbb{Z}$ и $1 \leq n \leq N$. Отметим, что симплектическая краевая задача (1.3.19), (1.3.18), соответствующая краевой задаче (1.2.12), (1.2.13), имеет следующие матрицы системы:

$$S_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_i = L = \text{diag}(1, 0, \dots, 0), \quad (1.2.14)$$

где A_i, B_i, C_i, D_i определены в (1.2.9).

Задача (1.2.12) с граничными условиями Дирихле (1.2.13) соответствует задаче на собственные значения для матрицы A :

$$Ay = \lambda y,$$

где $A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ – симметричная ленточная матрица с шириной ленты $2n+1$ (см. [85]). Элементы матрицы однозначно задаются коэффициентами в (1.2.12):

$$\begin{aligned} a_{i+1, i+1+t} &= (-1)^t \sum_{\mu=t}^2 \sum_{\nu=t}^{\mu} C_v^{\mu} \cdot C_{v-t}^{\mu} r_{i+\nu}^{(\mu)}, \\ a_{i+1, i+1-t} &= (-1)^t \sum_{\mu=t}^2 \sum_{\nu=0}^{\mu-t} C_v^{\mu} \cdot C_{v+t}^{\mu} r_{i+\nu}^{(\mu)}, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

для $0 \leq t \leq 2$ (здесь C_v^{μ} – биномиальные коэффициенты).

В приложениях важное значение имеет разностная краевая задача Штурма-Лиувилля четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^2 r_i^{(2)} \Delta^2 y_{i-1} - \Delta r_i^{(1)} \Delta y_i + r_i^{(0)} y_{i+1} &= \lambda y_{i+1}, \quad r_i^{(2)} \neq 0, \\ y_{-1} &= y_0 = y_N = y_{N+1} = 0, \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, 0 \leq i \leq N-2, N \in \mathbb{N}$. Для задачи (1.2.16) матрицы соответствующей системы (1.3.19) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} W_i(\lambda) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda \mathcal{W}_i & I \end{bmatrix} S_i, \quad S_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \\ A_i &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} r_i^{(0)} & r_i^{(0)} \\ 0 & r_i^{(1)} \end{bmatrix}, \\ D_i &= \begin{bmatrix} 1 & r_i^{(0)}/r_i^{(2)} \\ -1 & (r_i^{(1)} + r_i^{(2)})/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Задача (1.2.16) соответствует задаче на собственные значения для симметричной ленточной матрицы $A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ с шириной ленты 5 (см.[1]):

$$(A - \lambda I) \bar{y} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & c_2 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & c_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & b_3 & c_4 & \ddots & a_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (1.2.18)$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$,

$$\begin{aligned} a_i &= r_{i+1}^{(2)}, \quad b_i = -2r_{i+1}^{(2)} - 2r_i^{(2)} - r_i^{(1)}, \\ c_i &= r_{i+1}^{(2)} + 4r_i^{(2)} + \sum_{j=0}^2 r_{i-1}^{(j)} + r_i^{(1)}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

При математическом моделировании колебаний, основанном на изучении свойств решений уравнений (1.2.12) и исследовании разрешимости краевых задач для данных уравнений, важную роль играют структурные свойства рассматриваемой модели. Как было отмечено, дискретные уравнений Штурма-Лиувилля высших порядков являются важным частным случаем дискретных симплектических систем (1.2.3). Поэтому все основные теоретические факты,

относящиеся к общему случаю дискретных симплектических систем, а также численные методы решения дискретных симплектических краевых задач могут быть перенесены на рассматриваемый частный случай. Однако, рассматриваемая модель обладает рядом особенностей, учет которых при разработке методов её исследования имеет основополагающее значение.

1.3. Обзор осцилляционной теории уравнений Штурма – Лиувилля и её приложений в численных методах

Осцилляционная теория является важным разделом качественной теории дифференциальных и разностных уравнений и систем. В настоящем разделе дается краткий обзор методов дискретной и непрерывной осцилляционной теории в теории краевых задач для уравнений Штурма-Лиувилля высших порядков и в численных алгоритмах их решения.

1.3.1. Применение осцилляционных свойств решений дифференциальных уравнений Штурма – Лиувилля в численных алгоритмах решения краевых задач

В качественной теории для дифференциального уравнения

$$(r^{(1)}(t) y')' - r^{(0)}(t) y = 0, \quad r^{(1)}(t) > 0 \quad (1.3.1)$$

важную роль играет изучение осцилляционных свойств решений этого уравнения. Ключевую роль в осцилляционной теории занимает теорема Штурма о перемежаемости нулей различных решений уравнения (1.3.1), теоремы сравнения, различные достаточные условия осциллируемости и неосциллируемости решений (1.3.1), характеристики областей устойчивости и неустойчивости для уравнения (1.3.1) с периодическими коэффициентами в терминах числа

нулей решений на периоде, связь номера собственного значения для краевой задачи

$$\begin{aligned} (r^{(1)}(t)y')' + (-r^{(0)}(t) + \lambda\psi(t))y &= 0, \\ r^{(1)}(t) > 0, \quad \psi(t) > 0 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot y(0) + r^{(1)}(0) \sin \alpha \cdot y'(0) &= 0, \\ \cos \beta \cdot y(1) + r^{(1)}(1) \sin \beta \cdot y'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

с числом нулей соответствующей собственной функции на полуинтервале $(0, 1]$. Данные осцилляционные свойства играют важную роль в разработке численных методов решения задач (1.3.1), (1.3.2) - (1.3.3), а также сингулярных краевых задач [49, Глава 2], [90], [62], [50], [52], [27].

В работах [15], [24] И. М. Глазман и А. Ю. Левин рассматривает аналогичные вопросы для скалярного уравнения

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu (r^{(\mu)}(t)y^{(\mu)})^{(\mu)} = 0, \quad r^{(n)}(t) > 0. \quad (1.3.4)$$

Данное уравнение может быть записано в форме гамильтоновой системы $2n$ дифференциальных уравнений

$$J^T Z' = H(t, \lambda) Z, \quad H(t, \lambda) = H(t, \lambda)^T. \quad (1.3.5)$$

Исследованием осцилляционных свойств матричных решений размерности $2n \times n$ (или *сопряженных базисов*), таких, что

$$Z(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ U(t) \end{pmatrix}, \quad X(t)^T U(t) = U^T X(t), \quad \text{rank } Z(t) = n \quad (1.3.6)$$

занимались М. Г. Крейн И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский, В.А. Якубович [26, 45] и др.

И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский [14] ввели понятие аргумента $(Arg_0 X)$ на группе G симплектических матриц, используемое при изучении структуры областей устойчивости для уравнений (1.3.5). В. А. Якубович привел другие

определения аргумента Arg_*X и показал их топологическую эквивалентность понятию аргумента Arg_0X . Основная заслуга работ [43], [42] состоит в изучении осцилляционных свойств решений уравнений (1.3.5).

В работах [5], [91] исследованы осцилляционные свойства (1.3.6) с помощью унитарных матриц, определенных на блоках сопряженных базисов (1.3.6):

$$\Theta(t) = (U(t) + iX(t))(U(t) - iX(t))^{-1}. \quad (1.3.7)$$

Развитие осцилляционной теории уравнений (1.3.4) и гамильтоновых систем уравнений (1.3.5) послужило толчком к разработке методов решения соответствующих краевых задач, в частности, задач для уравнения (1.3.4) с линейной зависимостью от вещественного параметра λ :

$$\sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu (r^{(\mu)}(t)y^{(\mu)})^{(\mu)} = \lambda y, \quad r^{(n)}(t) > 0. \quad (1.3.8)$$

L. Greenberg и M. Marletta [73–75] разрабатывали алгоритмы вычисления собственных значений краевых задач для (1.3.8), в частности, для задач Штурма-Лиувилля четвертого ($n = 2$) и шестого ($n = 3$) порядков, записанных в виде гамильтоновых систем (1.3.5). В своей статье L. Greenberg [72] показал, как функция $Count^*(\lambda)$, равная числу собственных значений, меньших λ для краевой задачи Штурма-Лиувилля высшего порядка, связана с собственными значениями унитарных матриц вида (1.3.7).

В работах [3], [49, Глава 6] Л. Д. Акуленко и С. В. Нестеров предлагают метод "ускоренной сходимости" решения задачи (1.3.8) при $n = 2$ с различными разделенными граничными условиями. Данный метод основан на осцилляционных свойствах решений уравнений (1.3.8).

Замечание 1.3.1. Отметим, что для применения метода "ускоренной сходимости" [49], важным является решение задачи о локализации собственных значений исходной задачи. Используемый в [49] метод Рэ-

лея–Ритца позволяет оценивать верхнюю границу собственных значений с небольшими номерами, при этом задача о нижней оценке собственных значений с небольшими номерами и локализация собственных значений с большими номерами требуют отдельного рассмотрения. Задачи, связанные с первоначальной локализацией собственных значений, можно эффективно решать с помощью методов, основанных на осцилляционной теории, предлагаемых в настоящей работе. При этом, в отличие от методов из [73–75], вместо (1.3.7) используются вещественные матрицы, также позволяющие вычислить функцию $\text{Count}^*(\lambda)$, определяющую число собственных значений, меньших λ для краевой задачи Штурма–Лиувилля высшего порядка.

Следует также отметить, что при решении краевых задач для дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля конечноразностными методами, а также в ряде приложений [51] возникают задачи на собственные значения для симметрических ленточных матриц. Для симметрических трехдиагональных матриц существует эффективный численный алгоритм, основанный на дискретной осцилляционной теории, излагаемый в следующей секции. Обобщение результатов осцилляционной теории на дискретные уравнения Штурма–Лиувилля высших порядков дает возможность применения данного алгоритма для решения проблемы собственных значений симметрических ленточных матриц.

1.3.2. Метод бисекции для трехдиагональных матриц

Дискретная краевая задача Штурма–Лиувилля 2-ого порядка, имеет вид:

$$-\Delta \left(r_i^{(1)} \Delta y_i \right) + r_i^{(0)} y_{i+1} = \lambda y_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad r_i^{(1)} \neq 0, \quad (1.3.9)$$

$$y_0 = y_{N+1} = 0, \quad (1.3.10)$$

Задача (1.3.9), (1.3.10) возникает при исследовании гармонических колебаний масс, соединенных пружиной (1.1.9) при $M = 1$, цепочки из по-

следовательно соединенных индуктивностей L и емкостей C (1.1.11), ряда акустических резонаторов (1.1.12), цепочки магнитных стрелок (1.1.13), при аппроксимации дифференциальных краевых задачах Штурма-Лиувилля второго порядка и т. д. Задача (1.3.9) - (1.3.10) равносильна задаче вычисления собственных значений симметричной трехдиагональной матрицы

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{N-1} & a_N \end{pmatrix}, \quad (1.3.11)$$

где $a_i = r_i^{(1)} + r_{i-1}^{(1)} + r_{i-1}^{(0)}$, $b_i = -r_i^{(1)} \neq 0$.

Эффективным методом решения (1.3.11) является метод бисекции. Он основан на теореме Гивенса о равенстве $Count(\tilde{\lambda})$ – числа собственных значений матрицы T , меньших или равных данного $\tilde{\lambda}$, числу перемен знака в последовательности главных миноров матрицы T . Опишем, как теорема Гивенса для (1.3.11) связана с осцилляционными свойствами решения (1.3.9).

Пусть T_i означает ведущую главную подматрицу размера $i \times i$ матрицы T и определены многочлены $G_{i+1}(\lambda) = \det(T_i - \lambda I_i)$, $i = 1, \dots, N$, тогда верно рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} G_{i+1}(\lambda) &= (a_i - \lambda) G_i(\lambda) - b_{i-1}^2 G_{i-1}(\lambda), i = 1, \dots, N \\ G_1 &= 1, G_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Теорема 1.3.2. Число собственных значений матрицы T , меньших или равных данного $\tilde{\lambda}$, равно числу перемен знака в последовательности $\{G_1(\tilde{\lambda}), G_2(\tilde{\lambda}), \dots, G_{N+1}(\tilde{\lambda})\}$.

Отметим, что в данной теореме под сменой знака между $G_i(\tilde{\lambda}), G_{i+1}(\tilde{\lambda})$

понимается выполнение одного из условий

$$\begin{cases} G_{i+1}(\tilde{\lambda}) = 0, \\ G_i(\tilde{\lambda})/G_{i+1}(\tilde{\lambda}) < 0. \end{cases} \quad (1.3.13)$$

Пусть решение (1.3.9), удовлетворяет

$$y_0 = 0, y_1 = 1/r_0^{(1)}. \quad (1.3.14)$$

Если в (1.3.9) подставить

$$y_i = G_i / \prod_{k=0}^{i-1} r_k^{(1)}, \quad (1.3.15)$$

то задача (1.3.9), (1.3.14) будет соответствовать задаче для главных миноров (1.3.12).

Согласно (1.3.15) и (1.3.13) условие смены знака y_i на интервале $(i, i+1]$ может быть записано так

$$\begin{cases} y_{i+1} = 0, \\ y_i / (r_i^{(1)} y_{i+1}) < 0 \end{cases} \quad (1.3.16)$$

Определение 1.3.3. Решение уравнения (1.3.9) имеет **обобщенный нуль** на $(i, i+1]$, если выполняется одно из условий (1.3.16).

Таким образом, аналогично теоремам для дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля, можно сформулировать осцилляционную теорему для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля второго порядка.

Теорема 1.3.4. Число собственных значений задачи (1.3.9), (1.3.10) меньших или равных данному $\tilde{\lambda}$ равно числу обобщенных нулей на $(0, N+1]$ решения $y_i(\tilde{\lambda})$ уравнения (1.3.9) (при $\lambda = \tilde{\lambda}$), удовлетворяющего начальным условиям

$$y_0 = 0, y_1 = 1/r_0^{(1)}.$$

Вычисляя обобщенные нули решений при различных λ , используя осцилляционную теорему и метод бисекции, можно вычислять собственные значения задачи (1.3.9), (1.3.10) с заданной точностью. Применение метода бисекции для решения задач высших порядков рассмотрено в главе 4 и основано на результатах глав 2 и 3.

Замечание 1.3.5. *Трудность исследования осцилляционных свойств дискретных уравнений Штурма-Лиувилля связана с понятием нуля решения. В частности для дифференциального уравнения (1.3.1) нуль определяется $y(t) = 0$, в то время как для дискретного уравнения (1.3.9) обобщенный нуль определяется выполнением одного из двух условий (1.3.16). При рассмотрении уравнений Штурма-Лиувилля высших порядков данное понятие усложняется.*

1.3.3. Осцилляционная теория дискретных симплектических систем

Дадим краткий обзор основных понятий осцилляционной теории дискретных симплектических систем, используемых в работе. Важным понятием осцилляционной теории симплектических систем является понятие числа фокальных точек, являющееся обобщением понятия нуля дискретной функции на случай сопряженных базисов (1.2.3). Данное понятие играет важную роль в теории краевых задач для (1.2.3).

Краевая задача для симплектической системы с граничными условиями Дирихле имеет вид:

$$x_{i+1}(\lambda) = A_i x_i(\lambda) + B_i u_i(\lambda), \quad (1.3.17)$$

$$u_{i+1}(\lambda) = C_i x_i(\lambda) + D_i u_i(\lambda) - \lambda \mathcal{W}_i x_{i+1}(\lambda), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$x_0(\lambda) = x_{N+1}(\lambda) = 0, \quad (1.3.18)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_i, u_i \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что уравнения (1.3.17) могут быть записаны в виде

$$y_{i+1}(\lambda) = W_i(\lambda)y_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad y_i(\lambda) = [x_i(\lambda) \ u_i(\lambda)]^T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (1.3.19)$$

где

$$W_i(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda \mathcal{W}_i & I \end{bmatrix} S_i, \quad S_i^T J S_i = J, \quad \mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i^T, \quad \mathcal{W}_i \geq 0. \quad (1.3.20)$$

Ниже для (1.3.19) будем рассматривать не только векторное решение y_i , но и сопряженные базисы удовлетворяющие (1.2.10) и главное решение определенное в 1.2.2.

Как уже было отмечено, число фокальных точек – осцилляционная характеристика, обобщающая понятие нуля функции на случай матричного решения системы (1.2.3).

Определение 1.3.6. ¹ Говорят, что сопряженный базис Y_i системы (1.2.3) имеет $m(Y_i)$ фокальных точек (с учетом их кратностей) на $(i, i + 1]$, если $m(i) = m_1(i) + m_2(i)$, где

$$m_1(i) = \text{rank } M_i, \quad M_i = (I - X_{i+1} X_{i+1}^\dagger) B_i, \quad (1.3.21)$$

$$m_2(i) = \text{ind}(T_i^T X_i X_{i+1}^\dagger B_i T_i), \quad T_i = I - M_i^\dagger M_i, \quad (1.3.22)$$

при этом B_i – блок матрицы W_i .

В работе [20] разработана концепция числа фокальных точек $m^*(Y_i)$ на $[i, i + 1)$ (включен левый конец интервала $(i, i + 1)$), которую можно отождествить с числом фокальных точек сопряженного базиса обратной симплектической системы

$$Y_i = W_i^{-1} Y_{i+1}, \quad W_i^{-1} = \begin{bmatrix} D_i^T & -B_i^T \\ -C_i^T & A_i^T \end{bmatrix}. \quad (1.3.23)$$

¹ $\text{rank}(A)$ – ранг матрицы A , A^\dagger – псевдообратная матрица матрицы A , $\text{ind}(A)$ – число отрицательных собственных значений матрицы A [13],

Система (1.3.23) равносильна (1.2.3) в том смысле, что Y_i – сопряженный базис (1.2.3) тогда и только тогда, когда Y_i – сопряженный базис (1.3.23). В данной системе с "обратным временем" при определении числа фокальных точек меняется роль i и $i + 1$.

Определение 1.3.7. Говорят, что сопряженный базис Y_i системы (1.3.23) (или (1.2.3)) имеет $m^*(Y_i)$ фокальных точек (с учетом их кратностей) на $[i, i + 1)$, если $m^*(Y_i) = m_1^*(Y_i) + m_2^*(Y_i)$, где

$$m_1^*(Y_i) = \text{rank } \tilde{M}_i, \quad \tilde{M}_i = (I - X_i X_i^\dagger) B_i^T,$$

$$m_2^*(Y_i) = \text{ind}(\tilde{T}_i^T X_{i+1} X_i^\dagger B_i^T \tilde{T}_i),$$

$\tilde{T}_i = I - \tilde{M}_i^\dagger \tilde{M}_i$, при этом B_i – блок матрицы W_i .

Замечание 1.3.8. ² Согласно результатам работы [56] сопряженный базис $Y_i = [X_i^T U_i^T]^T$ системы (1.3.19) имеет фокальную точку на $(i, i + 1]$, если хотя бы одно из условий

$$\text{Ker } X_{i+1} \subseteq \text{Ker } X_i, \quad X_i X_{i+1}^\dagger B_i \geq 0 \quad (1.3.24)$$

не выполнено.

1.3.4. Осцилляционная теорема

Данная теорема обобщает теорему 1.3.2 Гивенса для трёхдиагональных матриц на случай симплектических систем. Введем определение собственного значения краевой задачи (1.3.17), (1.3.18).

Определение 1.3.9. Пусть $Y_i^T = [X_i^T U_i^T]$ – главное решение системы (1.3.17). Число λ называется конечным собственным значением задачи

² $\text{Ker}(A)$ – размерность ядра матрицы A [13]

(1.3.17), (1.3.18) кратности $\theta_N(\lambda)$, если $\text{rank} X_{N+1}(\lambda) < r_{N+1}$, $r_{N+1} = \max_{\mu} \text{rank} X_{N+1}(\mu)$

$$\theta_N(\lambda) = r_{N+1} - \text{rank} X_{N+1}(\lambda).$$

Доказано [88], что задача (1.3.17), (1.3.18) является самосопряженной, конечные собственные значения вещественны и их число ограничено. В дальнейшем λ_{\min} – минимальное конечное собственное значение рассматриваемой задачи. Основным результатом работы [88] является следующая осцилляционная теорема для систем (1.3.17).

Теорема 1.3.10. *Для задачи (1.3.17), (1.3.18) существует число $p \in \{0, 1, \dots, nN\}$ такое, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$n_1(\lambda) = n_2(\lambda) + p, \quad (1.3.25)$$

где $n_1(\lambda)$ – число фокальных точек для главного решения (1.3.17) на интервале $(0, N + 1]$:

$$n_1(\lambda) = \sum_{i=0}^N m(Y_i) \quad (1.3.26)$$

$n_2(\lambda)$ – спектральная функция задачи (1.3.19), или число конечных собственных значений задачи, которые меньше или равны λ (включая их кратность). Причем,

$$p = n_1(\lambda_0), \quad \lambda_0 < \lambda_{\min}. \quad (1.3.27)$$

Данная теорема обобщает результаты Гивенса 1.3.2 для трёхдиагональных матриц на случай симплектических систем.

1.3.5. Круговая теорема Рэйда

С системой (1.3.19) связан матричный дискретный оператор Риккати

$$R_W[Q] = C_i - Q_{i+1}A_i + D_iQ_i - Q_{i+1}B_iQ_i, \quad (1.3.28)$$

где A_i, B_i, C_i, D_i – блоки матрицы W_i в форме (1.2.5), удовлетворяющие условиям (1.2.6). Разрешимость дискретного уравнения Риккати (1.3.28) эквивалентна существованию сопряженного базиса данной соответствующей системы $Y_i = [X_i^T U_i^T]^T$, удовлетворяющего условию $\det X_i \neq 0$ (см. [46], [56]):

Теорема 1.3.11. *Разностное уравнение Риккати*

$$R_W[Q] = C_i - Q_{i+1}A_i + D_iQ_i - Q_{i+1} = 0 \quad (1.3.29)$$

имеет решение $Q_i = Q_i^T$ тогда и только тогда, когда существует Y_i – сопряженный базис (1.2.10) системы (3.4.3) с условием

$$\det(X_i) \neq 0, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad (1.3.30)$$

при этом $Q_i = U_i X_i^{-1}$.

Вторым важным объектом, связанным с системой (1.3.19) является дискретный квадратичный функционал

$$F(x, u; \lambda_0) = \sum_{i=0}^N x_i^T C_i^T A_i x_i + u_i^T D_i^T B_i u_i + 2u_i^T B_i^T C_i x_i - \lambda_0 x_{i+1}^T W_i x_{i+1}, \quad (1.3.31)$$

для допустимых решений (x, u) , таких, что $x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i$ для $0 \leq i \leq N$ и $x_0 = 0 = x_{N+1}$.

Теорема 1.3.12 (Дискретная теорема Рейда). *Для дискретной симплектической системы следующие утверждения равносильны*

1. *главное решение системы (3.4.3) в точке 0 не имеет фокальных точек на $(0, N+1]$;*
2. *дискретный квадратичный функционал (1.3.31) строго положителен на допустимых (x_i, u_i) , удовлетворяющих $x_0 = x_{N+1} = 0, x_i \neq 0, i = 1, \dots, N$;*

3. на $[0, N + 1]$ существует решение разностного уравнения Риккати
(1.3.28) $Q_i = Q_i^T$, удовлетворяющее условию $B_i^T D_i - B_i^T Q_{i+1} B_i \geq 0$, $i = 0, \dots, N$;

Замечание 1.3.13. В силу теоремы 1.3.12 число p (из теоремы 1.3.10) равно нулю тогда и только тогда, когда функционал $F(x, u; \lambda_0)$, определенный (1.3.31), и связанный с соответствующей симплектической системой (1.3.19) строго положителен, т.е. условия $F(x, u; \lambda_0) > 0$ и $p = \sum_{i=0}^N m(Y_i, \lambda_0) = 0$ равносильны.

1.3.6. Сравнительный индекс и его свойства

В работах [20, 21, 67] разработана важная концепция дискретной осцилляционной теории – сравнительный индекс. Согласно [20], сравнительный индекс для двух матриц Y, \hat{Y} определяется следующим образом.

Определение 1.3.14. Пусть $2n \times n$ -матрицы $Y = [X^T, U^T]^T$, $\hat{Y} = [\hat{X}^T, \hat{U}^T]^T$ удовлетворяют условиям

$$Y^T J Y = 0, \quad \hat{Y}^T J \hat{Y} = 0, \quad (1.3.32)$$

$$\text{rank } Y = \text{rank } \hat{Y} = n, \quad (1.3.33)$$

и определен Вронскиан для Y, \hat{Y} :

$$w = w(Y, \hat{Y}) = Y^T J \hat{Y}. \quad (1.3.34)$$

По определению сравнительный индекс $\mu(Y, \hat{Y})$ равен:

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \mu_1(Y, \hat{Y}) + \mu_2(Y, \hat{Y}), \quad (1.3.35)$$

$$\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank } \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = (I - X^\dagger X)w, \quad (1.3.36)$$

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind } \mathcal{P}, \quad (1.3.37)$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{T}^T (w^T X^\dagger \hat{X}) \mathcal{T}, \quad \mathcal{T} = I - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}. \quad (1.3.38)$$

Корректность определения 1.3.14 следует из теоремы 2.1 работы [66]:

Теорема 1.3.15. Матрица \mathcal{M} в определении 1.3.14 может быть заменена на матрицу

$$\tilde{\mathcal{M}} = (I - XX^\dagger)\hat{X}, \quad (1.3.39)$$

матрица \mathcal{P} в (1.3.37) симметрическая и

$$\mathcal{P} = \mathcal{T}^T(\hat{X}^T[\hat{Q} - Q]\hat{X})\mathcal{T} \quad (1.3.40)$$

для любых симметрических матриц Q, \hat{Q} , таких, что

$$X^T Q X = X^T U, \quad \hat{X}^T \hat{Q} \hat{X} = \hat{X}^T \hat{U}. \quad (1.3.41)$$

Определение 1.3.16. Сравнительный индекс $\mu^*(Y, \hat{Y})$ называется двойственным по отношению к $\mu(Y, \hat{Y})$, если он получается заменой в определении 1.3.14 матрицы J на $J^T = -J$. Тогда

$$\mu^*(Y, \hat{Y}) = \mu_1^*(Y, \hat{Y}) + \mu_2^*(Y, \hat{Y}), \quad \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = \mu_1(Y, \hat{Y}), \quad (1.3.42)$$

$$\mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-\mathcal{P}), \quad (1.3.43)$$

где \mathcal{P} определена равенством (1.3.40).

Пусть Z, \hat{Z} – симплектические матрицы такие, что Y, \hat{Y} , удовлетворяющие условиям (1.3.32), (1.3.33), представимы в виде $Y = Z[0, I]^T, \hat{Y} = \hat{Z}[0, I]^T$ (здесь $0, I$ – нулевая и единичная матрицы размерности $n \times n$). Существование матриц Z, \hat{Z} доказано, например, в [84, с. 94].

Замечание 1.3.17. Согласно определениям сравнительный индекс (1.3.35) и двойственный сравнительный индекс (1.3.42) связаны

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\begin{bmatrix} X_k \\ U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{U}_k \end{bmatrix} \right) &= \mu \left(\begin{bmatrix} -X_k \\ U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\hat{X}_k \\ \hat{U}_k \end{bmatrix} \right) = \\ &= \mu \left(\begin{bmatrix} X_k \\ -U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ -\hat{U}_k \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

В терминах введенных обозначений свойства сравнительного индекса, используемые в настоящей работе, перечислены в теореме

Теорема 1.3.18. 1. $\mu_k(YC_1, \hat{Y}C_2) = \mu_k(Y, \hat{Y})$, $k = 1, 2$, где C_1, C_2 произвольные несингулярные матрицы соответствующей размерности.
2. $\mu_k(LY, L\hat{Y}) = \mu_k(Y, \hat{Y})$, $k = 1, 2$, где L произвольная симплектическая нижняя блочно-треугольная матрица.

Доказательство перечисленных свойств приведено в [20].

1.3.7. Сравнительный индекс и фокальные точки

Приведем основные результаты отражающие связь сравнительного индекса и числа фокальных точек. Данные результаты будут использованы в следующих главах работы. Согласно [20, Лемме 3.1] верна

Лемма 1.3.19. Пусть Z_i – симплектическая фундаментальная матрица решений системы (1.3.19) и $Y_i = Z_i[0, I]^T$, тогда

$$m_k(Y_i) = \mu_k(Z_{i+1}[0, I]^T, W_i[0, I]^T), \quad k = 1, 2, \quad (1.3.45)$$

где $m(Y_i) = m_1(Y_i) + m_2(Y_i)$ – число фокальных точек на $(i, i + 1]$ для Y_i , $\mu = \mu_1 + \mu_2$ – сравнительный индекс согласно определению 1.3.14, а μ^* – двойственный μ .

Согласно [20, Лемме 3.2] верна

Лемма 1.3.20. Пусть Z_i – симплектическая фундаментальная матрица решений системы (1.3.19) и $Y_i = Z_i[0, I]^T$, тогда

$$m_k^*(Y_i) = \mu_k^*(Z_i[0, I]^T, W_i^{-1}[0, I]^T), \quad k = 1, 2, \quad (1.3.46)$$

где $m^*(Y_i) = m_1^*(Y_i) + m_2^*(Y_i)$ – число фокальных точек на $[i, i + 1)$ для Y_i , $\mu = \mu_1 + \mu_2$ – сравнительный индекс согласно определению 1.3.14, а μ^* – двойственный μ .

Согласно [20, Теореме 1.1] верна

Теорема 1.3.21. Пусть Y_i, \hat{Y}_i сопряженные базисы 1.3.19 и $\mu(i) = \mu(Y_i, \hat{Y}_i)$. Тогда

$$m(Y_i) - m(\hat{Y}_i) = \Delta\mu(Y_i, \hat{Y}_i). \quad (1.3.47)$$

Следствием лемм 1.3.19, 1.3.20 является формула, связывающая $m(Y_i)$ и $m^*(Y_i)$ для сопряженного базиса Y_i [20, формула 3.5]:

Следствие 1.3.22.

$$m^*(Y_i) - m(Y_i) = \text{rank}(X_{i+1}) - \text{rank}(X_i). \quad (1.3.48)$$

Определим общее число фокальных точек на $(0, N+1]$ для сопряженного базиса Y_i следующей формулой:

$$l(Y_i) = \sum_{i=0}^N m(Y_i). \quad (1.3.49)$$

Тогда следствием 1.3.22 является формула, связывающая число фокальных точек для двух базисов Y_i, \hat{Y}_i на $(0, N+1]$.

Следствие 1.3.23. Пусть число фокальных точек для Y_i, \hat{Y}_i на интервале $(0, N+1]$ определено формулой (1.3.49), тогда

$$l(Y_i) - l(\hat{Y}_i) = \mu(N+1) - \mu(0), \quad (1.3.50)$$

В работе [20] была введена матрица:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} U^T X & U^T \hat{X} \\ \hat{X}^T U & \hat{X}^T \hat{U} \end{bmatrix}. \quad (1.3.51)$$

Одним из важных результатов осцилляционной теории (1.2.3) является связь между сравнительным индексом и разностью индексов симметричных матриц [20, формулы 4.10, 4.12]:

$$\text{ind}(\Lambda) = \text{ind}(X^T U) + \mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\hat{X}^T \hat{U}) + \mu^*(J\hat{Y}, JY), \quad (1.3.52)$$

откуда следуют

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind} \begin{bmatrix} U^T X & U^T \hat{X} \\ \hat{X}^T U & \hat{X}^T \hat{U} \end{bmatrix} - \text{ind}(X^T U) \quad (1.3.53)$$

и

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\hat{X}^T \hat{U}) + \mu^*(J\hat{Y}, JY) - \text{ind}(X^T U). \quad (1.3.54)$$

1.4. Основные свойства дискретной модели, описываемой уравнениями Штурма – Лиувилля порядка $2n$

Как было отмечено в § 1.2 данной главы, уравнения Штурма-Лиувилля высших порядков обладают рядом особенностей, выделяющих их в качестве важного частного случая дискретных симплектических систем. Выделим эти особенности.

Предложение 1.4.1. *Дискретная симплектическая система (1.2.3) с матрицей (1.2.14), (1.2.9) обладает следующими свойствами:*

1. блок A_i дискретной симплектической системы является верхней треугольной матрицей с условием $\det(A_i) \neq 0$;
2. блок B_i удовлетворяет условию $\text{rank}(B_i) = 1$;
3. матрицы $A_i^{-1}B_i, C_iA_i^{-1}$ являются диагональными.

Следует отметить, что основной вклад в изучение структурных свойств уравнений Штурма-Лиувилля высших порядков внес М. Bohner [53, 54]. В работе [54, лемма 4] доказано следующее утверждение.

Лемма 1.4.2. *Пусть $Y_i^T = [X_i^T \ U_i^T]$ – главное решение в точке θ , тогда выполнено:*

1. $\text{Ker} X_{i+1} \subset \text{Ker} X_i$ для всех $i \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$,
2. $\text{rank} X_i = i$ для всех $i \in [0, n] \cap \mathbb{Z}$,
3. $X_i X_{i+1}^\dagger B_i = 0$ для всех $i \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$.

Следствие 1.4.3. Пусть $Y_i^{(k)T} = (X_i^{(k)T} \ U_i^{(k)T})$ – главное решение системы (1.2.3), (1.2.14) в точке k , тогда согласно лемме 1.4.2

$$\det \left(X_{k+n}^{(k)} \right) \neq 0, \quad (1.4.1)$$

$$m \left(Y_i^{(k)} \right) = 0, i = k, k+1, \dots, k+n-1. \quad (1.4.2)$$

Важный вклад в теорию краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков внесли результаты работ W. Kratz [85], [87]. В частности, в данных работах установлено, что главные миноры A_m матрицы A в (1.2.15) связаны следующей формулой с коэффициентами задачи (1.2.12) и верхним блоком главного решения соответствующей симплектической системы (1.3.19) с матрицами (1.2.14), при $2 \leq m \leq N$ (см. [85, теорему A]):

$$\det (A_{m-1} - \lambda I) = r_0^{(2)} \cdot r_1^{(2)} \cdot \dots \cdot r_m^{(2)} \det X_{m+1}(\lambda) \quad (1.4.3)$$

Следует отметить, что алгоритмы решения, основанные на результатах осцилляционной теории для частного случая дискретных симплектических систем – уравнений Штурма-Лиувилля высших порядков – разработаны не были. В работе [89] предложен алгоритм вычисления собственных значений симметрических ленточных матриц с шириной ленты 5, 7, связанных с дискретными уравнениями 4-го и 6-го порядков. Однако предлагаемый метод, как отмечено авторами, не обобщается на общий случай произвольных n . Для применения известных алгоритмов нахождения собственных значений для ленточных матриц при расчете спектров краевых задач для уравнений Штурма-Лиувилля

высших порядков требуется приведение уравнения Штурма-Лиувилля порядка $2n$ к ленточной матрице с шириной ленты $2n + 1$. Данное сведение требует дополнительных вычислений по формулам (1.2.15). Далее, известные алгоритмы вычисления собственных значений ленточных матриц (см. [38, алгоритм II.7], [30]) обеспечивают вычисление отдельных собственных значений, близкие к заданному параметру t , но не дают никакой информации о номере найденного собственного значения. Данные возможности – вычислять собственные значения по заданным номерам – являются специфической чертой применения осцилляционной теории Штурма.

Построение численных методов решения краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, основанных на теореме 1.3.10, связаны с трудностью использования общего определения числа фокальных точек (см. определения 1.3.6, 1.3.7), не учитывающего специфику дискретной модели (1.2.12), определяемую предложением 1.4.1 и леммой 1.4.2. Поэтому основной целью настоящей работы являлось развитие качественных и количественных методов исследования осцилляционных свойств решений дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков и разработка метода решения частичной проблемы собственных значений для дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с заданной точностью. При этом важную роль в настоящем исследовании играет учет структуры соответствующей дискретной модели.

1.5. Основные результаты главы 1

Основными результатами главы являются следующие.

1. Проведен обзор математических моделей колебаний линейных систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, приводящих к изучению дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков и краевых

задач для данных уравнений.

2. Приведена постановка задачи, состоящей в изучении качественных свойств решений дискретных уравнений Штурма – Лиувилля порядка $2n$ и краевых задач с граничными условиями Дирихле. Показано, что дискретное уравнение Штурма – Лиувилля может быть записано в форме дискретной симплектической системы, а соответствующие краевые задачи для данных уравнений – в форме соответствующих краевых задач для симплектических систем с линейной зависимостью от спектрального параметра. Показано, что краевая задача с граничными условиями Дирихле для уравнения Штурма – Лиувилля порядка $2n$ эквивалентна задаче на собственные значения для симметричной ленточной матрицы с шириной ленты $2n + 1$. Отдельно рассмотрен важный частный случай уравнений Штурма – Лиувилля 4-го порядка.

3. Проведен обзор литературы по методам математического моделирования, основанным на использовании осцилляционной теории непрерывных и дискретных уравнений Штурма – Лиувилля. В результате обзора литературы выявлено, что существуют эффективные численные методы решения *дифференциальных* краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, основанные на осцилляционной теории. Данные алгоритмы реализованы в комплексах программ, использующих вычисление собственных значений унитарных матриц, связанных с сопряженными базисами соответствующих гамильтоновых систем. Для *дискретных* краевых задач *второго* порядка также существуют эффективные численные методы, основанные на осцилляционной теории. Данные алгоритмы используют вычисление нулей последовательностей Штурма и метод бисекции для нахождения собственных значений дискретной краевой задачи. Аналогичные приложения дискретной осцилляционной теории для уравнений Штурма – Лиувилля *высших* порядков разработаны не были.

4. Сформулированы свойства рассматриваемой дискретной модели – уравнений Штурма – Лиувилля порядка $2n$, выделяющих их в качестве важного частного случая дискретных симплектических систем. Подчеркнуто, что применение общих понятий и методов теории дискретных симплектических систем требует дальнейшей разработки для уравнений Штурма – Лиувилля порядка $2n$. В частности, разработка эффективных алгоритмов решения краевых задач возможна только на основе использования конкретных свойств исследуемой модели.

Глава 2

Осцилляционные свойства решений уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков

Во второй главе развиваются качественные методы исследования осцилляционных свойств решений дискретных уравнений Штурма–Лиувилля высших порядков.

2.1. Число фокальных точек решения уравнения

Штурма – Лиувилля высшего порядка

Первым результатом главы является теорема, устанавливающая связь между $m^*(Y_i)$ и одноранговым возмущением матрицы $X_i^T U_i$, с учетом свойств модели (1.2.12), указанных в предложении 1.4.1 (см. [10])

Теорема 2.1.1. *Для любого сопряженного базиса $Y_i = [X_i^T, U_i^T]^T$ симплектической системы (1.3.19) с матрицей, определенной (1.2.14) справедлива формула*

$$m_i^* = \text{ind} \left(r_i^{(n)} \right) + \text{ind} \left(-X_i^T U_i - U_i^T \text{diag} \left(0, \dots, 0, 1/r_i^{(n)} \right) U_i \right) - \text{ind} \left(-X_i^T U_i \right), \quad (2.1.1)$$

где m_i^* – число фокальных точек на $[i, i+1)$.

Доказательство. Используя (1.3.46) и свойство 1 теоремы 1.3.18, получаем

$$m^*(Y_i) = \mu^* \left(Y_k, \begin{bmatrix} -B_k^T \\ A_k^T \end{bmatrix} \right) = \mu^* \left(Y_k, \begin{bmatrix} -E \\ I \end{bmatrix} A_k^T \right) = \mu \left(\begin{bmatrix} -X_k \\ U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} \right), \quad (2.1.2)$$

где

$$E = (A_k^{-1}B_k)^T = \text{diag} \left(0, \dots, 0, 1/r_k^{(n)} \right). \quad (2.1.3)$$

Вычисляя последний индекс согласно (1.3.54), имеем:

$$\begin{aligned} \mu \left(\begin{bmatrix} -X_k \\ U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} \right) &= \text{ind} \left(1/r_k^{(n)} \right) + \mu^* \left(J \begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix}, J \begin{pmatrix} -X_k \\ U_k \end{pmatrix} \right) \\ &\quad - \text{ind} \left(-X_k^T U_k \right). \end{aligned}$$

Преобразуем второй член в правой части выражения:

$$\mu^* \left(J \begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix}, J \begin{pmatrix} -X_i \\ U_i \end{pmatrix} \right) = \mu^* \left(\begin{pmatrix} I \\ -E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_i \\ X_i \end{pmatrix} \right) \quad (2.1.4)$$

Используя определение сравнительного индекса 1.3.14, получим

$$\mu^* \left(\begin{pmatrix} I \\ -E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_i \\ X_i \end{pmatrix} \right) = \text{ind} \left(-X_i^T U_i - U_i^T E U_i \right). \quad (2.1.5)$$

Следовательно, формула (2.1.1) доказана. \square

2.2. Одно свойство числа фокальных точек $m^*(Y_i)$

В работе [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Путь собственные значения $R_i = -X_i^T U_i$ упорядочены по возрастанию, тогда число фокальных точек $m^*(Y_i)$ на $[i, i+1)$ не превышает 1 и зависит от знака возмущенного первого положительного (при $r_i^{(n)} > 0$), или последнего отрицательного (при $r_i^{(n)} < 0$) собственного значения матрицы R_i , где возмущенные собственные значения R_i – собственные значения матрицы $R_i - U_i^T \text{diag}(0, \dots, 0, 1/r_i^{(n)}) U_i$.*

Доказательство. Первое слагаемое в (2.1.1) элементарно определяется знаком коэффициента $r_i^{(n)} \neq 0$ в уравнении Штурма – Лиувилля порядка $2n$.

Вычисление разности двух индексов $ind \left(R_i - U_i^T diag \left(0, \dots, 0, 1/r_i^{(n)} \right) U_i \right) - ind(R_i)$, $R_i = -X_i^T U_i$ в ((2.1.1)) можно осуществить с привлечением теории и численных методов для одноранговых возмущений симметрических матриц.

Пусть $d_n \leq \dots \leq d_2 \leq d_1$ - собственные значения симметрической матрицы R_i , $\mu_n \leq \dots \leq \mu_2 \leq \mu_1$ - собственные значения ее однорангового возмущения $R_i - U_i^T diag \left(0, \dots, 0, 1/r_i^{(n)} \right) U_i$ и $\delta = [0, \dots, 0, 1] U_i U_i^T \left[0, \dots, 0, 1/r_i^{(n)} \right]^T$, тогда согласно [17, см. пункт 12.5.3] получим следующее.

Если $r_i^{(n)} > 0$, то выполняются неравенства: $d_{i+1} \leq \mu_i \leq d_i$

для $i = 1, \dots, n-1$ и $d_n - \delta \leq \mu_n \leq d_n$, и тогда

$$\begin{aligned} d_1 < 0 &\Rightarrow m^*(i) = 0; \\ \exists! j \mid d_{j+1} < 0 \leq d_j &\Rightarrow m^*(i) = ind(\mu_j); \\ 0 < d_n &\Rightarrow m^*(i) = ind(\mu_n). \end{aligned}$$

Если $r_i^{(n)} < 0$, то выполняются неравенства: $d_i \leq \mu_i \leq d_{i-1}$

для $i = 2, \dots, n$ и $d_1 \leq \mu_1 \leq d_1 - \delta$, и тогда

$$\begin{aligned} d_1 < 0, &\Rightarrow m^*(i) = ind(\mu_1); \\ \exists! j \mid d_j < 0 \leq d_{j-1} &\Rightarrow m^*(i) = ind(\mu_j); \\ 0 < d_n &\Rightarrow m^*(i) = 0. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы доказано. □

Пусть Y_i – главное решение (1.3.19). Запишем выражения $m^*(Y_i)$ и $m(Y_i)$ записанные в виде сравнительного индекса $\mu(*, *)$. Согласно (1.3.20) и (1.3.17) (см. (2.1.2)) получаем

$$m^*(Y_i) = \mu \left(\begin{bmatrix} -X_k \\ U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_k^T \\ A_k^T \end{bmatrix} \right) = \mu \left(\begin{bmatrix} -X_k \\ U_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} \right), \quad (2.2.1)$$

где

$$E = A_k^{-1} B_k = diag \left(0, \dots, 0, 1/r_k^{(n)} \right).$$

В тоже время согласно (1.3.19)

$$m(Y_i) = \mu \left(\begin{bmatrix} X_{i+1} \\ U_{i+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_i^T \\ D_i^T - \lambda \mathcal{W} B_i \end{bmatrix} \right). \quad (2.2.2)$$

Сравнивая (2.2.1) и (2.2.2) получаем, что

- в определении $m^*(Y_i)$ по формуле (2.2.1) присутствуют блоки главного решения Y_i , единичная матрица I , и матрица простой структуры с одним не нулевым диагональным элементом E .
- в определении $m(Y_i)$ по формуле (2.2.2) присутствуют блоки главного решения Y_{i+1} , блок зависящий в явном виде от λ .

Таким образом осцилляционная характеристика $m^*(Y_i)$, в отличие от $m(Y_i)$ учитывает структуру блоков A_i, B_i , т. е. отражает свойства (1.4.1) модели (1.2.12). Поэтому в следующих главах работы особое внимание уделено осцилляционной характеристике $m^*(Y_i)$ и ее применению в методах исследования осцилляционных свойств решений уравнений (1.2.12).

Чтобы использовать эту специфику $m^*(Y_i)$ в численных методах, требуется доказать осцилляционную теорему для уравнения Штурма – Лиувилля (1.2.12), связывающую $m^*(Y_i)$ и число собственных значений задачи Штурма – Лиувилля (1.2.12), (1.2.13).

2.3. Осцилляционные теоремы для уравнения

Штурма – Лиувилля высшего порядка

Ниже доказана осцилляционная теорема для $m^*(Y_i)$ [7], учитывающая особенности системы (1.3.19), (1.2.14), указанные в предложении 1.4.1 и лемме 1.4.2. Данная теорема и алгоритмы вычисления $m^*(Y_i)$ составляют основу

метода бисекции для решения дискретной краевой задачи Штурма–Лиувилля (1.2.12).

Теорема 2.3.1 (Осцилляционная теорема для $m^*(Y_i)$). Для задачи (1.3.19) с матрицей (1.2.14), для любого $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), n, N) = \# \left\{ \mu \in \sigma \mid \mu < \tilde{\lambda} \right\}, \quad (2.3.1)$$

где $\# \left\{ \mu \in \sigma \mid \mu < \tilde{\lambda} \right\}$ – число собственных значений задачи (1.2.12), (1.2.13), которые меньше данного $\tilde{\lambda}$, а $l^*(Y_i(\lambda), n, N)$ – число фокальных точек для главного решения (1.3.19), (1.2.14) на интервале $[n, N + 1)$.

Доказательство. Согласно доказанной в работе [68, формуле (3.9)], для спектральной симплектической задачи (1.3.19) справедливо соотношение

$$l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), 0, N) = \# \left\{ \mu \in \sigma \mid \mu < \tilde{\lambda} \right\} + p^*, \quad p^* = l^*(Y_i(\lambda_0), 0, N), \quad \lambda_0 < \lambda_{\min} \quad (2.3.2)$$

где λ_{\min} – минимальное собственное значение (1.2.12), (1.2.13). Используя формулу связи между $m(Y_i)$, $m^*(Y_i)$ (1.3.48) получаем

$$l^*(Y_i(\lambda), 0, N) - l(Y_i(\lambda), 0, N) = \text{rank}(X_{N+1}(\lambda)) - \text{rank}(X_0(\lambda)). \quad (2.3.3)$$

Рассмотрим все члены равенства (2.3.3). Для задачи Штурма–Лиувилля (1.2.12), (1.2.13) квадратичный функционал (1.3.31) связан с ленточной матрицей (1.2.15) (см. [85]) следующим образом:

$$F(x, u; \lambda) = y^T (A - \lambda I) y.$$

Таким образом, при $\lambda_0 < \lambda_{\min}$ получаем $F(x, u; \lambda_0) > 0$, откуда согласно замечанию (1.3.13), для уравнения Штурма – Лиувилля выполнено (1.2.12), (1.2.13)

$$l(Y_i(\lambda_0), 0, N) = 0. \quad (2.3.4)$$

Для главного решения (в том числе и при $\lambda = \lambda_0$)

$$\text{rank}(X_0(\lambda)) = 0. \quad (2.3.5)$$

Согласно лемме 1.4.2, для главного решения $Y_i^T = (X_i^T, U_i^T)$ системы (1.3.19), (1.2.14) выполняется условие $\text{rank}(X_n(\lambda_0)) = n$, в силу отсутствия фокальных точек при $\lambda_0 < \lambda_{\min}$ для $i = 0, \dots, N$, выполняются условия (см. замечание (1.3.8)) “вложенности ядер”

$$\ker(X_{i+1}(\lambda_0)) \subseteq \ker(X_i(\lambda_0)),$$

откуда следует, что $\text{rank}(X_{i+1}(\lambda_0)) \geq \text{rank}(X_i(\lambda_0))$, таким образом

$$\text{rank}(X_{N+1}(\lambda_0)) = \text{rank}(X_n(\lambda_0)) = n. \quad (2.3.6)$$

Таким образом, подставляя (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) в (2.3.3) получаем

$$p^* = l^*(Y_i(\lambda_0), 0, N) = l(Y_i(\lambda_0), 0, N) + \text{rank}(X_{N+1}(\lambda_0)) - \text{rank}(X_0(\lambda_0)) = n.$$

Определим, какие значения принимает $m^*(Y_i(\lambda))$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$. Из 1.3.22 и 1.4.1 $m^*(Y_i(\lambda)) = 1$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$, следовательно

$$l^*(Y_i(\lambda), 0, n-1) = n. \quad (2.3.7)$$

Разложим сумму фокальных точек на два слагаемых, учитывая (2.3.7), тогда

$$l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), 0, N) = l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), 0, n-1) + l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), n, N) = n + l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), n, N). \quad (2.3.8)$$

Из (2.3.2), учитывая (2.3.7), (2.3.8) получаем

$$\#\left\{\mu \in \sigma \mid \mu < \tilde{\lambda}\right\} = l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), 0, N) - p^* = l^*(Y_i(\tilde{\lambda}), n, N).$$

□

Согласно (2.3.4) и (1.4.2) осцилляционная теорема 1.3.10 переписывается в виде:

Теорема 2.3.2. Для задачи (1.2.12), (1.2.13), согласно следствию 1.4.3 и (1.3.27), (2.3.4) справедливо:

$$\# \left\{ \lambda \in \sigma \mid \lambda \leq \tilde{\lambda} \right\} = \sum_{k=n}^N m(Y_k, \tilde{\lambda}), \quad (2.3.9)$$

где $\# \left\{ \lambda \in \sigma \mid \lambda \leq \tilde{\lambda} \right\}$ — число собственных значений задачи (1.2.12), (1.2.13), которые не превосходят $\tilde{\lambda}$, $\sum_{k=n}^N m(Y_k, \tilde{\lambda})$ — сумма числа фокальных точек главного решения системы (1.3.19), (1.2.14) для заданного $\tilde{\lambda}$.

2.4. Уравнения Штурма – Лиувилля и трехчленные рекуррентные соотношения

Симплектическая система (1.3.19) при $i = 0, 1, \dots, N$, соответствующая уравнениям Штурма – Лиувилля высшего порядка (1.2.12), обладает структурой, определенной (1.2.14), (1.2.9), что позволяет построить систему (1.3.19), заданную на меньшем интервале $i = 0, 1, \dots, q$, главное решение которой совпадает с решением исходной системы в точках $i = 0, n, 2n, \dots, N + 1$. Ниже показано, что данная система, заданная на укороченном интервале, сводится к трехчленной краевой задаче.

Лемма 2.4.1. Пусть $L^{(j)} = u^T \cdot u$, $0 \leq j \leq n - 1$ — $n \times n$ матрица, где $u = (C_j^0, C_j^1, \dots, C_j^j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Допустим, что блоки A_i, B_i, C_i, D_i определены в (1.2.9), тогда

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(j)} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(j+1)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n - 2. \quad (2.4.1)$$

Доказательство. Отметим, что $L^{(j)}$ содержит элементы

$$l_{pq}^{(j)} = \begin{cases} (-1)^{p+q} C_j^{p-1} \cdot C_j^{q-1}, & \max(p, q) \leq j+1 \\ 0, & \max(p, q) > j+1 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Доказываемое равенство (2.4.1) равносильно

$$\begin{cases} B_i \cdot L^{(j)} = 0, \\ L^{(j+1)} \cdot A_i = D_i \cdot L^{(j)}, \\ L^{(j+1)} \cdot B_i = 0. \end{cases}$$

Отметим, что из (1.2.9) следует первое неравенство выполняется для всех $0 \leq j \leq n-2$.

Согласно (1.2.9) получаем

$$A_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_i = (A_i^{-1})^T + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & r_i^{(0)}/r_i^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & r_i^{(1)}/r_i^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & r_i^{(n-1)}/r_i^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что $l_{11}^{(j)} = 1$ для всех $0 \leq j \leq n-1$. Рассмотрим $(D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1})_{pq}$ при различных p и q . При $p=1, 2 \leq q \leq j$

$$\begin{aligned} (D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1})_{1q} &= l_{1q}^{(j)} - l_{1(q-1)}^{(j)} = (-1)^{1+q} \cdot C_j^0 \cdot C_j^{q-1} - (-1)^q \cdot C_j^0 \cdot C_j^{q-2} = \\ &= (-1)^{1+q} \cdot C_j^0 \cdot (C_j^{q-1} + C_j^{q-2}) = (-1)^{1+q} \cdot C_j^0 \cdot C_{j+1}^{q-1} = (-1)^{1+q} \cdot C_{j+1}^0 \cdot C_{j+1}^{q-1} = \\ &= l_{1q}^{(j+1)}. \end{aligned}$$

При $2 \leq p \leq j, q=1$

$$\begin{aligned} (D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1})_{p1} &= l_{p1}^{(j)} - l_{(p-1)1}^{(j)} = (-1)^{p+1} \cdot C_j^{p-1} \cdot C_j^0 - (-1)^p \cdot C_j^{p-2} \cdot C_j^0 = \\ &= (-1)^{p+1} \cdot C_{j+1}^{p-1} \cdot C_j^0 = (-1)^{p+1} \cdot C_{j+1}^{p-1} \cdot C_{j+1}^0 = l_{p1}^{(j+1)}. \end{aligned}$$

При $2 \leq p, q \leq j$

$$\begin{aligned} \left(D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1} \right)_{pq} &= (-1)^{p+q} \cdot C_j^{p-1} \cdot C_j^{q-1} - (-1)^{p+q-1} \cdot C_j^{p-2} \cdot C_j^{q-1} - \\ &\quad (-1)^{p+q-1} \cdot C_j^{p-1} \cdot C_j^{q-2} + (-1)^{p+q-2} \cdot C_{j-1}^{p-1} \cdot C_j^{q-2} = \\ &= (-1)^{p+q} \cdot C_{j+1}^{p-1} \cdot C_j^{q-1} - (-1)^{p+q-1} \cdot C_{j+1}^{p-1} \cdot C_j^{q-2} = (-1)^{p+q} \cdot C_{j+1}^{p-1} \cdot C_{j+1}^{q-1} = l_{pq}^{(j+1)}. \end{aligned}$$

При $p = j + 1, q = 1$

$$\left(D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1} \right)_{pq} = -((-1)^{p+q} \cdot C_j^j \cdot C_j^0 (-1)^{p+q+1} \cdot C_{j+1}^{j+1} \cdot C_{j+1}^0 = l_{pq}^{(j+1)}.$$

При $p = j + 1, 2 \leq q \leq j$

$$\begin{aligned} \left(D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1} \right)_{pq} &= -((-1)^{p+q} \cdot C_j^j \cdot C_j^{q-1} - (-1)^{p+q-1} \cdot C_j^j \cdot C_j^{q-1}) = \\ &= (-1)^{p+q+1} \cdot C_{j+1}^{j+1} \cdot C_{j+1}^q = l_{pq}^{(j+1)}. \end{aligned}$$

При $p = j + 1, q = j + 1$

$$\left(D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1} \right)_{pq} = (-1)(-1)((-1)^{2j} \cdot C_j^j \cdot C_j^j = (-1)^{2j+2} \cdot C_{j+1}^{j+1} \cdot C_{j+1}^{j+1} = l_{pq}^{(j+1)}.$$

Аналогичные утверждения верны и для различных значений q . Из этого следует $L^{(j+1)} = D_i \cdot L^{(j)} \cdot A_i^{-1}$ и второе равенство выполняется. Допустим $1 \leq j \leq n - 1$ и (1.2.9), тогда для $L^{(j)} \cdot B_i$ получаем

$$\sum_{m=1}^n l_{pm}^{(j)} \cdot (B_i)_{mn} = \frac{1}{r_i^{(n)}} \left(\sum_{m=1}^n l_{pm}^{(j)} \right) = \frac{(-1)^i \cdot C_j^{p-1}}{r_i^{(n)}} \left(\sum_{m=1}^n (-1)^m \cdot C_j^{m-1} \right).$$

Пусть j – нечетное число. Тогда

$$\sum_{m=1}^n (-1)^m \cdot C_j^{m-1} = \sum_{m=1}^{j+1} (-1)^m \cdot C_j^{m-1} = -C_j^0 + C_j^1 - \dots - C_j^{j-1} + C_j^j = 0.$$

Пусть j – четное число. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n (-1)^m \cdot C_j^{m-1} &= \sum_{m=1}^{j+1} (-1)^m \cdot C_j^{m-1} = \\ &= \left(-C_{j-1}^0 + C_{j-1}^0 + C_{j-1}^1 - \dots - C_{j-1}^{j-2} - C_{j-1}^{j-1} + C_{j-1}^{j-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Из этого следует $L^{(j)} \cdot B_i = 0$ для всех $1 \leq j \leq n - 1$. □

Теорема 2.4.2. Пусть задано $0 \leq l < N$ и $k \leq n$, матрица W_i системы (1.3.19) определена согласно (1.2.14) и

$$\hat{W}_i = \begin{cases} W_i, & i = 0, 1, \dots, l-1, \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda \hat{L}_i & I \end{bmatrix} \cdot \hat{S}_i, & i = l, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

$$\hat{L}_l = \hat{L} = \sum_{j=0}^{k-1} L^{(j)} \geq 0, \quad (2.4.4)$$

$$\hat{S}_l = \prod_{t=0}^{k-1} S_{l+t} = S_{l+k-1} \cdot S_{l+k-2} \cdot \dots \cdot S_{l+1} \cdot S_l = \begin{bmatrix} \hat{A}_l & \hat{B}_l \\ \hat{C}_l & \hat{D}_l \end{bmatrix}, \quad (2.4.5)$$

где $L^{(j)}$ определена в (2.4.2). Тогда

$$\sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(0)}) = m(\hat{Y}_l^{(0)}), \quad (2.4.6)$$

где $\sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(0)})$ – число фокальных точек главного решения в точке 0 системы (1.3.19) с матрицей W_i на полуинтервале $(l, l+k]$, а $m(\hat{Y}_l^{(0)})$ – число фокальных точек главного решения в точке 0 симплектической системы (1.3.19) с матрицей \hat{W}_i на полуинтервале $(l, l+1]$.

Доказательство. Пусть $Y_i^{(0)}, Y_i^{(l)}$ главные решения (1.3.19) с (1.2.14) в 0 и точке l соответственно. Согласно (1.3.47) на интервале $(l, l+k]$ выполняется

$$\sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(0)}) - \sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(l)}) = \mu(Y_{l+k}^{(0)}, Y_{l+k}^{(l)}) - \mu(Y_l^{(0)}, Y_l^{(l)}). \quad (2.4.7)$$

Отметим, что $Y_l^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T$. Согласно определению сравнительного индекса получаем $\mu(Y_l^{(0)}, Y_l^{(l)}) = 0$. Согласно ((1.4.2)) получаем $\sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(0)}) = 0$. Таким образом, ((2.4.7)) будет иметь вид

$$\sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(0)}) = \mu(Y_{l+k}^{(0)}, Y_{l+k}^{(l)}). \quad (2.4.8)$$

Согласно ((1.3.19)) $Y_{l+k}^{(l)} = \prod_{t=0}^{k-1} W_{l+t}(\lambda) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, где

$$\prod_{t=0}^{k-1} W_{l+t}(\lambda) = W_{l+k-1}(\lambda) \cdot W_{l+k-2}(\lambda) \cdot \dots \cdot W_{l+1}(\lambda) \cdot W_l(\lambda).$$

Из факторизации (1.3.19) матрицы $W_i(\lambda)$, леммы (2.4.1) и $L = L^{(0)} = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ следует

$$\begin{aligned} \prod_{t=0}^{k-1} W_{l+t}(\lambda) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(0)} & I \end{bmatrix} \cdot S_{l+k-1} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(0)} & I \end{bmatrix} \cdot S_l = \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(0)} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(1)} & I \end{bmatrix} \cdot S_{l+k-1} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(1)} & I \end{bmatrix} \cdot S_{l+1} \cdot S_l = \dots = \\ &= \left(\prod_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda L^{(j)} & I \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\prod_{t=0}^{k-1} S_{l+t} \right) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda \sum_{j=0}^{k-1} L^{(j)} & I \end{bmatrix} \left(\prod_{t=0}^{k-1} S_{l+t} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda \hat{L} & I \end{bmatrix} \hat{S}_l. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Тогда, используя обозначения (2.4.4), (2.4.5), (2.4.6), перепишем (2.4.8) в виде

$$\sum_{t=0}^{k-1} m(Y_{l+t}^{(0)}) = \mu(\hat{Y}_{l+1}^{(0)}, \hat{W}_l) = m(\hat{Y}_l^{(0)}). \tag{2.4.10}$$

Доказательство завершено. \square

Следствие 2.4.3. Матрица \hat{L} положительно определена при $j = n$.

Доказательство. Отметим, что $l_{j+1,j+1}^{(j)} = 1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, тогда, используя элементарные операции над строками получаем

$$\det \left(\sum_{j=0}^{n-1} L^{(j)} \right) = \prod_{j=0}^{n-1} l_{j+1,j+1}^{(j)} = 1.$$

Следовательно

$$\det(\hat{L}) = \det\left(\sum_{j=0}^{k-1} L^{(j)}\right) = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k < n. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

Учитывая, что $L^{(j)}$ неотрицательно определены, получаем $\hat{L} > 0$ для $k = n$ и $\hat{L} \geq 0$ при $0 \leq k \leq n - 1$. \square

Теорема 2.4.4. Пусть в системе (1.3.19) с матрицей (1.2.14) $N = n(q + 1) - 1$ и \hat{W}_i для каждого $i = 0, 1, \dots, q$ имеет блоки (2.4.4), (2.4.5), тогда

$$\sum_{k=0}^N m\left(Y_i^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^q m\left(\hat{Y}_i^{(0)}\right). \quad (2.4.12)$$

$$\sum_{k=0}^N m^*\left(Y_i^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^q m^*\left(\hat{Y}_i^{(0)}\right). \quad (2.4.13)$$

Доказательство. Разобьем полуинтервал подсчета числа фокальных точек $(0, N + 1]$ на $q + 1$ непересекающихся полуинтервалов $(l, l + n]$, $l = 0, n, 2n, \dots, qn$. На каждом полуинтервале выполняется теорема 2.4.2, следовательно, будет выполняться (2.4.12).

Заменяем в (2.4.12) $m(Y_i)$ согласно (1.3.48), получим

$$\sum_{k=0}^N m\left(Y_i^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^N m^*\left(Y_i^{(0)}\right) - \text{rank}(X_{N+1}) + \text{rank}(X_0).$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=0}^N m\left(\hat{Y}_i^{(0)}\right) = \sum_{k=0}^N m^*\left(\hat{Y}_i^{(0)}\right) - \text{rank}(\hat{X}_{q+1}) + \text{rank}(\hat{X}_0).$$

Учитывая, что выполняются равенства

$$Y_0 = \hat{Y}_0, \dots, Y_{2n} = \hat{Y}_n, \dots, Y_{N+1} = \hat{Y}_{q+1} \quad (2.4.14)$$

из доказанного (2.4.12) следует (2.4.13). \square

Таким образом, подсчет фокальных точек на $(0, N + 1]$ или $[0, N + 1]$ для задачи (1.3.19) с матрицей (1.2.14) сводится к подсчету фокальных точек для системы (1.3.19) с матрицей \hat{W}_i на интервале $(0, q + 1]$ или $[0, q + 1]$ соответственно, то есть в n раз меньшем интервале. Данный результат для $m(Y_k) = m(k)$ демонстрирует рис. 2.1.

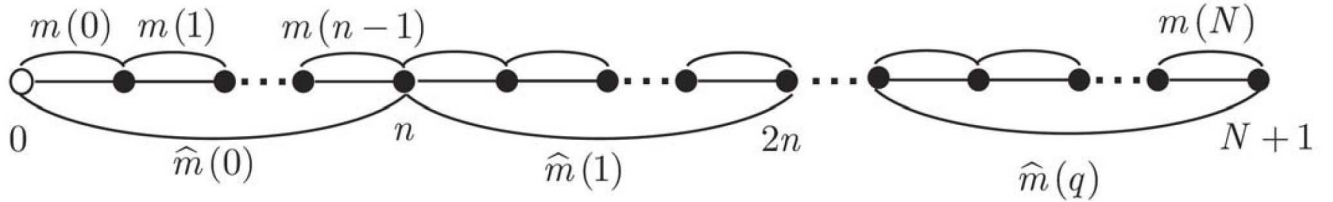


Рис. 2.1. Схема подсчета фокальных точек для системы (1.3.19) с матрицей (1.2.14) и для системы (1.3.19) с матрицей \hat{W}_i

Следствие 2.4.5. Пусть для (1.3.19) с матрицей (1.2.14) $N = n(q + 1) - 1$. Если для симплектической системы (1.3.19) с матрицами (2.4.4), (2.4.5), поставить граничные условия

$$x_0 = 0 = x_{q+1},$$

то согласно разбиению на непересекающиеся полуинтервалы $(l, l + n]$, $l = 0, n, 2n, \dots, qn$ и равенству матричных решений (2.4.14), данная задача будет равносильна задаче на собственные значения (1.3.19), (1.3.18) с матрицей (1.2.14).

Замечание 2.4.6. Блок $\hat{B}_i = [0 \ I] \hat{W}_i(\lambda) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = [0 \ I] Y_{ni+n}^{(ni)}$ в (2.4.4) матрицы симплектической системы $\hat{W}_i(\lambda)$ будет невырожденным согласно (1.4.1).

Известно, что симплектическая система с невырожденным блоком B_i сводится к трехчленному матричному соотношению (см. [82]). Следовательно, справедливо

Следствие 2.4.7. Пусть для $q, N \in \mathbb{N}$, выполняется $N = n(q + 1) - 1$, тогда система (1.3.19) с матрицей (1.2.14) сводится к трехчленному уравнению :

$$-K_{i+1}\tilde{x}_{i+2} + T_{i+1}\tilde{x}_{i+1} - K_i^T\tilde{x}_i = \lambda\hat{L}\tilde{x}_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq q-1, \quad (2.4.15)$$

где $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $K_i = (\hat{B}_i^{-1})$, $T_{i+1} = (\hat{B}_{i+1}^{-1}\hat{A}_{i+1} + \hat{D}_i\hat{B}_i^{-1})$, $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$ — блоки матрицы \hat{S}_i , \hat{S}_i и \hat{L} определены в (2.4.4), и (2.4.5).

Таким образом, согласно (2.4.4), (2.4.7) совпадают осцилляционные свойства уравнений (1.2.12) и (2.4.15).

Замечание 2.4.8. Отметим, что для трехчленных рекуррентных матричных соотношений [61], [47] осцилляционная теория развита значительно глубже и является составной частью теории матричных ортогональных многочленов. Известный метод матричной прогонки [32] также предназначен для решения данных соотношений, поэтому доказанный результат важен для теории и практических приложений.

Для дискретной краевой задачи Штурма–Лиувилля четвертого порядка (1.2.16) были получены матрицы \hat{S}_i , \hat{L}_i в явном виде [11].

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \begin{pmatrix} 1 & (2r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(1)})/r_{i+1}^{(2)} \\ 0 & (r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(1)})/r_{i+1}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \hat{B}_i &= \begin{pmatrix} -1/r_{i+1}^{(2)} & (2r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(1)} + r_i^{(2)})/(r_{i+1}^{(2)}r_i^{(2)}) \\ -1/r_{i+1}^{(2)} & (r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(1)} + r_i^{(2)})/(r_{i+1}^{(2)}r_i^{(2)}) \end{pmatrix}, \\ \hat{C}_i &= \begin{pmatrix} r_{i+1}^{(0)} + r_i^{(2)} & (2r_{i+1}^{(0)}r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(0)}r_{i+1}^{(2)} + r_{i+1}^{(0)}r_i^{(1)})/r_{i+1}^{(2)} \\ -r_i^{(0)} & (r_{i+1}^{(1)}r_{i+1}^{(2)} - r_i^{(0)}r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(1)}r_{i+1}^{(1)} + r_i^{(1)}r_{i+1}^{(2)})/r_{i+1}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ \hat{D}_i &= \begin{pmatrix} \frac{(r_{i+1}^{(2)} - r_{i+1}^{(0)})}{r_{i+1}^{(2)}} & \frac{(2r_{i+1}^{(0)}r_{i+1}^{(2)} + r_i^{(0)}r_{i+1}^{(2)} + r_{i+1}^{(0)}r_i^{(1)} + r_{i+1}^{(0)}r_i^{(2)})}{r_{i+1}^{(2)}r_i^{(2)}} \\ \frac{-(2r_{i+1}^{(2)} + r_{i+1}^{(1)})}{r_{i+1}^{(2)}} & \frac{r_{i+1}^{(2)}(r_i^{(2)} + r_{i+1}^{(1)} + r_i^{(1)} - r_i^{(0)}) + r_{i+1}^{(1)}(r_i^{(2)} + r_i^{(1)})}{r_{i+1}^{(2)}r_i^{(2)}} \end{pmatrix}, \hat{L}_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Таким образом, для задачи (1.2.12), (1.2.13) при $n = 2$, вычисление фокальных точек на интервале $(0, (N + 1)/2]$ для (1.3.19) с полученными матрицами \hat{S}_i, \hat{L}_i (2.4.16) приводит к сокращению числа операций в 2 раза, что подтверждается в четвертой главе вычислительными экспериментами.

Следствие 2.4.9. Для уравнения Штурма–Лиувилля 4 порядка (1.2.16) коэффициенты трехчленной рекуррентной задачи (2.4.15) примут вид [8]:

$$K_i = \begin{pmatrix} r_{2i+1}^{(2)} + r_{2i}^{(2)} + r_{2i}^{(1)} & -2r_{2i+1}^{(2)} - r_{2i}^{(2)} - r_{2i}^{(1)} \\ r_{2i}^{(2)} & -r_{2i}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$T_i = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^3 r_{2i+t}^{(2)} + r_{2i+2}^{(1)} + r_{2i+1}^{(0)} + \sum_{j=0}^2 r_{2i}^{(j)} & r_{2i+2}^{(2)} - 2r_{2i+1}^{(2)} - \sum_{j=0}^2 r_{2i}^{(j)} \\ r_{2i+2}^{(2)} - 2r_{2i+1}^{(2)} - \sum_{j=0}^2 r_{2i}^{(j)} & r_{2i+2}^{(2)} + 4r_{2i+1}^{(2)} + r_{2i+1}^{(1)} + \sum_{j=0}^2 r_{2i}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

2.5. Пример исследования дискретных уравнений

Штурма – Лиувилля

Рассмотрим разностную задачу Штурма – Лиувилля:

$$\begin{aligned} \Delta^4 y_{i-1} &= \lambda y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, 4, \\ y_{-1} &= y_0 = y_3 = y_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Последовательность $Y_i(\lambda)$ главных решений от λ имеют вид

$$Y_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, Y_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Y_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \\ \lambda + 1 & -4\lambda \\ -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_3(\lambda) = \begin{pmatrix} -4 & \lambda + 6 \\ -3 & \lambda + 3 \\ 5\lambda + 1 & -\lambda^2 - 10\lambda \\ -\lambda - 3 & 5\lambda + 1 \end{pmatrix}, Y_4(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda - 10 & 7\lambda + 10 \\ -\lambda - 6 & 6\lambda + 4 \\ \lambda^2 + 15\lambda + 1 & -8\lambda^2 - 20\lambda \\ -6\lambda - 4 & \lambda^2 + 15\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

Как известно из общей теории, собственными значениями будут решения характеристического уравнения для верхнего блока главного решения, т.е. $\det \left(X_4^{(0)}(\lambda) \right) = 0$. Таковыми будут являться значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 10$.

Вычислим собственные значения (2.5.1), используя теоремы 2.1.1, 2.3.1.

$$m^*(2) = \text{ind} \left(-U_2^T \text{diag} (0, \dots, 0, 1) U_2 - X_2^T U_2 \right) - \text{ind} \left(-X_2^T U_2 \right) = \text{ind} A_1 - \text{ind} A_2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 3 - \lambda \\ 3 - \lambda & -\lambda^2 + 8\lambda - 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 - 3\lambda \\ 1 - 3\lambda & 10\lambda - 2 \end{pmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Для определения индекса 2×2 симметричной матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, имеющей характеристическое уравнение $\mu^2 - p\mu + q = 0$, где $p = \text{tr} A, q = \det A$, будем использовать неравенства:

$$\text{ind} A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0 \\ q > 0 \end{cases}, \quad \text{ind} A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p < 0 \\ q < 0 \end{cases}$$

Обозначим $b1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $b2 = 3 + 2\sqrt{2}$ корни $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$, тогда

$$\text{ind} A_2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 11\lambda - 3 < 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (\infty, b1);$$

$$\text{ind} A_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \\ \lambda < 3/11 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in [b1, b2);$$

$$\text{ind} A_1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda^2 + 9\lambda - 8 < 0 \\ (\lambda^2 - 6\lambda + 1)(6 - \lambda) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (\infty, b1);$$

$$\text{ind} A_1 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2 - 6\lambda + 1)(6 - \lambda) = 0 \\ -\lambda^2 + 9\lambda - 8 < 0 \\ (\lambda^2 - 6\lambda + 1)(6 - \lambda) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in [b1, b2) \cup (6, \infty).$$

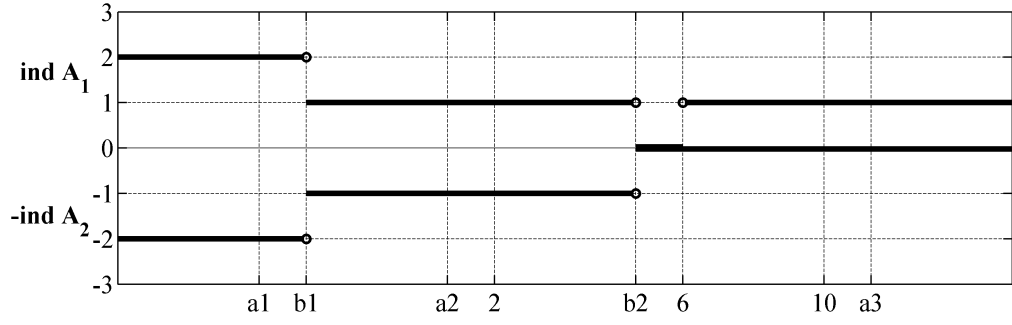


Рис. 2.2. Индексы матриц A_1 и A_2

$$m^*(3) = \text{ind}(-U_3^T \text{diag}(0, \dots, 0, 1) U_3 - X_3^T U_3) - \text{ind}(-X_3^T U_3) = \text{ind} A_3 - \text{ind} A_4$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{pmatrix} -\lambda^2 + 11\lambda - 14 & \lambda^2 - 9\lambda + 6 \\ \lambda^2 - 9\lambda + 6 & \lambda^3 - 14\lambda^2 + 34\lambda - 4 \end{pmatrix}, \\ A_4 &= \begin{pmatrix} 17\lambda - 5 & 3 - 25\lambda - 4\lambda^2 \\ 3 - 25\lambda - 4\lambda^2 & \lambda^3 + 11\lambda^2 + 44\lambda - 3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Корни уравнения $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1 = 0$ приблизительно равны $a1 \approx 0.05$, $a2 \approx 1.94$, $a3 \approx 10.01$, тогда

$$\begin{aligned} \text{ind} A_4 = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 + 11\lambda^2 + 61\lambda - 8 < 0 \\ (\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1)(\lambda - 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, a1). \\ \text{ind} A_4 = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0. \\ \lambda^3 + 11\lambda^2 + 61\lambda - 8 < 0 \\ (\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1)(\lambda - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in [a1, a2) \cup (6, a3). \\ \text{ind} A_3 = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 - 15\lambda^2 + 45\lambda - 18 < 0 \\ -(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\lambda \in (-\infty, a1) \cup (10, a3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ind A_3 = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} -(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 10) = 0 \\ \lambda^3 - 15\lambda^2 + 45\lambda - 18 < 0 \\ -(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 20\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 10) < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \lambda \in [a1, a2) \cup (2, 10] \cup [a3, \infty).
\end{aligned}$$

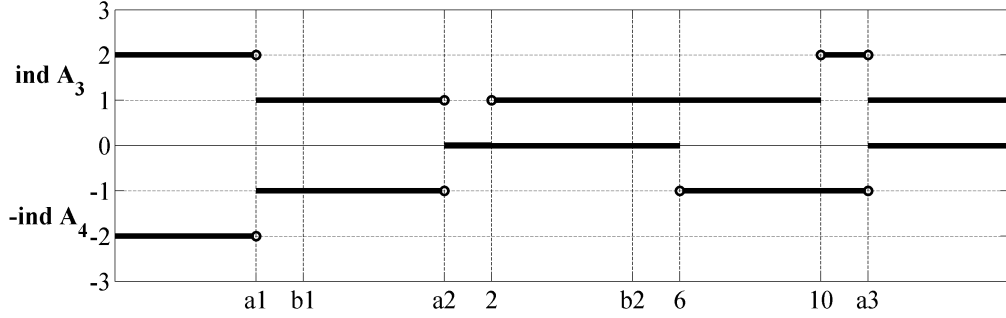


Рис. 2.3. Индексы матриц A_3 и A_4

Отметим, что для удобства восприятия на рис. 2.2, 2.3, 2.4 значения по оси абсцисс стоят в порядке возрастания, но соотношения длин интервалов не соблюдены. По оси абсцисс – параметр λ , а по оси ординат отмечены значения индексов встречающихся в формулах $m^*(2, \lambda)$ и $m^*(3, \lambda)$, с учетом знака, соответственно. Из рисунка 2.4 следует, что для задачи (2.5.1) собственные значения равны 2 и 10.

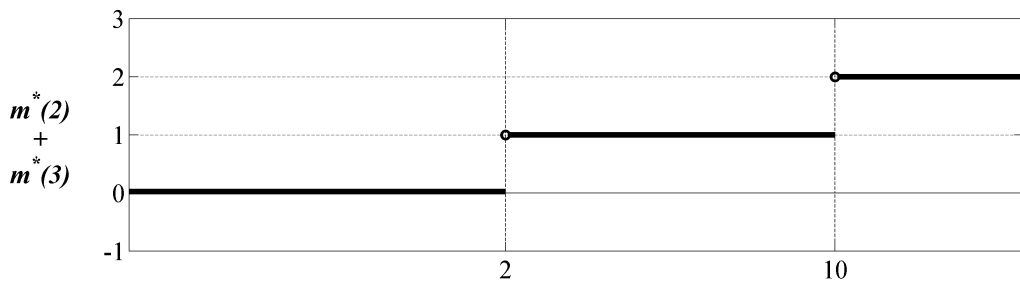


Рис. 2.4. Сумма $m^*(2, \lambda)$ и $m^*(3, \lambda)$.

2.6. Основные результаты главы 2

Основными результатами главы 2 являются следующие.

1. Доказывается основной выносимый на защиту результат – осцилляционная теорема 2.3.1, связывающая число фокальных точек на интервале $[n, N+1)$ и число собственных значений дискретной краевой задачи для уравнений Штурма – Лиувилля высшего порядка с граничными условиями Дирихле. С помощью данной теоремы можно рассчитать число собственных значений данной задачи, строго меньших наперед заданного числа $\tilde{\lambda}$.

2. Доказывается выносимый на защиту результат о совпадении осцилляционных свойств дискретных уравнений высших порядков и трехчленного рекуррентного матричного уравнения. Данный результат устанавливается в теоремах 2.4.2, 2.4.4. Известно, что для краевых задач для трехчленного матричного самосопряженного уравнения существуют эффективные численные методы их решения, основанные на методе прогонки. Доказанный результат будет использован в методах вычисления фокальных точек и позволяет сократить число вычислений в n раз.

3. В результате исследований данной главы установлены преимущества использования числа фокальных точек $m^*(Y_i)$ на интервале $[i, i+1)$ для описания осцилляционных свойств уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков. Данное преимущество установлено в теореме 2.1.1, где выявлена связь между $m^*(Y_i)$ и одноранговым возмущением симметрической матрицы $X_i^T U_i$, составленной из блоков сопряженного базиса симплектической системы. Данная связь проиллюстрирована примером, рассмотренным в конце главы.

Глава 3

Вычисление фокальных точек дискретных уравнений Штурма – Лиувилля

3.1. Трудности вычисления фокальных точек

При вычислении блоков главного решения

$$Y_i = \begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{i-1} W_k \right) Y_0, \quad (3.1.1)$$

т.е. при многократном умножении на матрицу системы W_i , возникают погрешности, связанные с представлением главного решения в арифметике с плавающей точкой. Из-за этих погрешностей, вычисление собственного значения по определению 1.3.9 затруднительно.

Пример 3.1.1. Рассмотрим пример (см. [89]) демонстрирующий трудность вычисления блока главного решения симплектической системы соответствующей уравнениям (3.1.2).

Рассмотрим (1.2.16) при $n = 2$, $r_i^{(0)} = r_k^{(1)} = 0$, $r_k^{(2)} = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta^4 y_{i-1} &= \lambda y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N+1, \\ y_{-1} &= y_0 = y_N = y_{N+1} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Собственные значения соответствующей ленточной матрицы A (1.2.15) независимы от N и $\lambda_i \in (0, 16)$.

Рассмотрим матрицу $W(\lambda)$ симплектической системы (1.3.19), соответствующей уравнению (3.1.2) Для задачи (3.1.2) матрица симплектиче-

ской системы $W_i(\lambda)$ имеет вид:

$$W_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Собственные значения матрицы $W_i(\lambda)$ составляют пары $(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_3, \gamma_4)$, что $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1, \gamma_3 \cdot \gamma_4 = 1$. При $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 3.090657850852248, \gamma_2 = 0.323555711520850, \\ \gamma_3 &= 0.292893218813452 + 0.956145157584921i, \\ \gamma_4 &= 0.292893218813452 - 0.956145157584921i. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Число обусловленности $\text{cond}(W(2)) \approx 18$ (см. [81]).

При $\lambda = 16$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 5.828427124746192, \gamma_2 = 0.1715728752538109, \\ \gamma_3 &= -1, \gamma_4 = -1 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Число обусловленности $\text{cond}(W(16)) \approx 774$.

В определении числа фокальных точек на полуинтервалах участвуют блоки матричного решения, поэтому из-за "жесткости" симплектической системы, подсчет фокальных точек по их определению 1.3.6, 1.3.7, используя сопряженный базис вычисленный по формуле (3.1.1), затруднительно.

При $N = 100, \lambda = 2$ задаче (3.1.2) соответствует симметричная ленточная матрица с элементами $a_{ii} = 6, a_{i,i+1} = -4, a_{i,i+2} = 1$.

Вычислим определитель матрицы $A - \lambda I$, в Matlab с точностью 16 знаков, получим:

$$\det(A - \lambda I) = 3.587130819108950 \times 10^{48}.$$

Вычислим верхний блок главного решения, в Matlab с точностью 16 знаков, $X_{101} = [I0]W_{100} \cdot W_{99} \cdot \dots \cdot W_0 \cdot [0I]^T$. Согласно формуле (1.4.3) получаем:

$$X_{101} = \begin{pmatrix} -1.292774454245886 \cdot 10^{48} & 2.702749062150387 \cdot 10^{48} \\ -8.744898958663793 \cdot 10^{47} & 1.828259166284008 \cdot 10^{48} \end{pmatrix}$$

$$\det(X_{101}) = \det(A_{99} - \lambda I) = -8.390585921968737 \times 10^{80}.$$

Пример показывает, что при вычислении собственных значений задачи (3.1.2) по определению 1.3.9 "жесткость" симплектической системы для стандартной задачи при $N = 100, \lambda = 2$ дает ошибку, в том числе и в знаках элементов блока главного решения $X_{N+1}(\lambda)$.

3.2. Ортогональные трансформации сопряженного базиса симплектической системы

Одним из способов, позволяющим избежать ошибок переполнения (overflow) и потери значимости (underflow), является переход к интегрированию некоторого уравнения типа Риккати (см. [83] и [16]).

Чтобы избежать трудностей (см. п. 3.1), связанных с жесткостью системы, в данной работе применяем следующую факторизацию к сопряженному базису [19], [65]:

$$P_{j(i)}^i Y_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q_{j(i)}^i & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \det(R_i) \neq 0, \quad Q_{j(i)}^i = \left(Q_{j(i)}^i\right)^T, \quad (3.2.1)$$

где $P_{j(i)}$ симплектическая матрица перестановок:

$$P_{j(i)}^i = \begin{bmatrix} F_{j(i)} & -G_{j(i)} \\ G_{j(i)} & F_{j(i)} \end{bmatrix}, \quad F_{j(i)} + G_{j(i)} = I, \quad F_{j(i)} G_{j(i)} = 0, \quad F_{j(i)} \geq 0, \quad G_{j(i)} \geq 0, \quad (3.2.2)$$

Отметим, что матрица $P_{j(i)}^i$ однозначно определяется расположением единиц или нулей в одной из матриц $G_{j(i)}$ или $F_{j(i)}$. Число различных матриц $G_{j(i)}$,

удовлетворяющих условиям (3.2.2), для данного n равно 2^n . Пусть на главной диагонали $G_{j(i)}$ записано двоичное разложение числа $j(i) \in 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Такое определение матрицы $G_{j(i)}$ однозначно определяет $P_{j(i)}^i$, так как $F_{j(i)} = I - G_{j(i)}$. Например, при $n = 2$ существует всего 4 различных матрицы $G_{j(i)}$:

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2.3)$$

В (3.2.1) $Q_{j(i)}^i$ является решением уравнения Риккати

$$\tilde{C}_i - Q_{j(i+1)}^{i+1} \tilde{A}_i + \tilde{D}_i Q_{j(i)}^i - Q_{j(i+1)}^{i+1} \tilde{B}_i Q_{j(i)}^i = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\tilde{W}_i(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i \end{bmatrix} = P_{j(i+1)}^i W_i (P_{j(i)}^i)^T. \quad (3.2.5)$$

вдоль пути интегрирования $j = j(i)$, $i = 0, \dots, N + 1$.

Замечание 3.2.1. Согласно [65] при выборе $P_{j(i)}^i$ из условия

$$\max_{P_{j(k+1)}^{k+1}} \left| \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P_{j(k+1)}^{k+1} W_k (P_{j(k)}^k)^T \begin{bmatrix} I & Q_{j(k)}^k \end{bmatrix}^T \right|, \quad (3.2.6)$$

в (3.2.1) матрица $Q_{j(i)}^i$ будет удовлетворять условию ограниченности

$$\|Q_{j(i)}^i\|_1 \leq 1 + (n - 1) \sqrt{2}.$$

Замечание 3.2.2. Опускаем в представлении (3.2.1) блок R_i , что приводит ортогональную трансформацию $P_{j(i)}^i Y_i$ (3.2.1) сопряженного базиса Y_i к виду:

$$\tilde{Y}_i = P_{j(i)}^i Y_i R_i^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ Q_{j(i)}^i \end{bmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Согласно пункту 1 теоремы 1.3.18, получаем

$$m(Y_i) = m(\tilde{Y}_i), m^*(Y_i) = m^*(\tilde{Y}_i) \quad (3.2.8)$$

3.2.1. Формулы связи чисел фокальных точек сопряженного базиса и трансформированного сопряженного базиса симплектической системы

Рассмотрим произвольную симплектическую трансформацию $\tilde{Y}_i = P_i Y_i$ сопряженного базиса системы (1.3.19), где P_i – симплектическая матрица для любого i . Тогда, трансформированный базис удовлетворяет системе

$$\tilde{Y}_{i+1} = \tilde{W}_i \tilde{Y}_i, \quad \tilde{W}_i = P_{i+1} W_i P_i^{-1}. \quad (3.2.9)$$

Связь $m(Y_i)$ – числа фокальных точек сопряженного базиса Y_i с $m(\tilde{Y}_i)$ – числом фокальных точек $\tilde{Y}_i = P_i Y_i$ отражена в [67, лемма 3.1]:

Теорема 3.2.3. Пусть $Y_i, \tilde{Y}_i = P_i Y_i$ – сопряженные базисы (1.2.3) и (3.2.9) соответственно, тогда

$$m(Y_i) = m(\tilde{Y}_i) - \mu(P_{i+1}[0 \ I]^T, \tilde{W}_i[0 \ I]^T) + \mu^*(P_i^{-1}[0 \ I]^T, W_i^{-1}[0 \ I]^T) + \mu(\tilde{Y}_i, P_i[0 \ I]^T) - \mu(\tilde{Y}_{i+1}, P_{i+1}[0 \ I]^T) \quad (3.2.10)$$

Теорема 3.2.3 для симплектической ортогональной трансформации (3.2.2) примет вид следующий вид.

Теорема 3.2.4. Пусть $P_{j(i)}^i$ – матрица симплектической трансформации, заданная согласно (3.2.2), Y_i – сопряженный базис и \tilde{Y}_i определен в (3.2.7), A_i, B_i, C_i, D_i – блоки W_i (1.2.14) и $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i$ – блоки соответствующей матрицы \tilde{W}_i , определенной в (3.2.9). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N m(Y_i) &= \sum_{i=0}^N m(\tilde{Y}_i) - \sum_{i=0}^N \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & F_{j(i+1)} \tilde{B}_i \\ (F_{j(i+1)} \tilde{B}_i)^T & \tilde{B}_i^T \tilde{D}_i \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{i=0}^N \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & F_{j(i)} B_i^T \\ (F_{j(i)} B_i^T)^T & B_i A_i^T \end{pmatrix} - \text{ind} \left(-G_{j(N+1)} Q_{j(N+1)}^i G_{j(N+1)} \right). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Доказательство. Рассмотрим каждый из членов (3.2.10). Используя $\det(\tilde{X}_i) \neq 0$, $\tilde{U}_0 = 0$ и определение 1.3.14, получаем

$$\mu(\tilde{Y}_i, P_i[0 \ I]^T) = \mu \left(\begin{bmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{U}_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -G_{j(i)} \\ F_{j(i)} \end{bmatrix} \right) = \text{ind}(-G_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)}). \quad (3.2.12)$$

Причем при $i = 0$, получаем

$$\mu(\tilde{Y}_0, P_0[0 \ I]^T) = \mu \left(\begin{bmatrix} \tilde{X}_0 \\ \tilde{U}_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -G_{j(0)} \\ F_{j(0)} \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (3.2.13)$$

Отметим, что суммируя формулу (3.2.10) при $i = 0, 1, \dots, N$ согласно (3.2.12), (3.2.13), получим $\sum_{i=0}^N (\mu(\tilde{Y}_i, P_i[0 \ I]^T) - \mu(\tilde{Y}_{i+1}, P_{i+1}[0 \ I]^T)) = -\text{ind}(-G_{j(N+1)} Q_{j(N+1)}^{N+1} G_{j(N+1)})$.

Учитывая $F_i \cdot G_i = 0$, согласно (1.3.53) получаем

$$\begin{aligned} \mu(P_{i+1}[0 \ I]^T, \tilde{W}_i[0 \ I]^T) = \\ \text{ind} \begin{bmatrix} -F_{j(i+1)} G_{j(i+1)} & F_{j(i+1)} \tilde{B}_i \\ \left(F_{j(i+1)} \tilde{B}_i \right)^T & \tilde{B}_i^T \tilde{D}_i \end{bmatrix} - \text{ind}(-F_{j(i+1)} G_{j(i+1)}) = \\ \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & F_{j(i+1)} \tilde{B}_i \\ \left(F_{j(i+1)} \tilde{B}_i \right)^T & \tilde{B}_i^T \tilde{D}_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{aligned} \mu^*(P_i^T[0 \ I]^T, W_i^{-1}[0 \ I]^T) = \mu^* \left(\begin{bmatrix} G_{j(i)} \\ F_{j(i)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix} \right) = \mu \left(\begin{bmatrix} -G_{j(i)} \\ F_{j(i)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix} \right) = \\ \text{ind} \begin{pmatrix} -F_{j(i)} G_{j(i)} & F_{j(i)} B_i^T \\ B_i F_{j(i)} & B_i A_i^T \end{pmatrix} - \text{ind}(-F_{j(i+1)} G_{j(i+1)}) = \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & F_{j(i)} B_i^T \\ B_i F_{j(i)} & B_i A_i^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

□

3.3. Подсчет числа фокальных точек уравнения

Штурма – Лиувилля четвертого порядка

В данном параграфе доказывается теорема позволяющая предложить "неявный" метод подсчета фокальных точек главного решения (1.3.17), (1.2.17) четвертого порядка, основанный на формулах связи между числом фокальных точек исходного главного решения и решения, подвергнутого симплектической ортогональной трансформации на каждом шаге интегрирования.

Для уравнения Штурма – Лиувилля 4 порядка матрицу $W_i(\lambda)$ (см. (1.2.17)) симплектической системы (1.3.19) можно представить в виде

$$W_i(\lambda) = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i(\lambda) & D_i(\lambda) \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.3.1)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} - \lambda \\ 0 & r_i^{(1)} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} 1 & (r_i^{(0)} - \lambda)/r_i^{(2)} \\ -1 & (r_i^{(1)} + r_i^{(2)})/r_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Для общего случая дискретной симплектической системы (1.3.19) процедура вычисления фокальных точек согласно теореме 3.2.4 не обладает численной устойчивостью. Учет конкретной структуры задачи позволил провести регуляризацию расчетных формул, которые представлены в следующей теореме согласно [9, 60].

Теорема 3.3.1. Пусть $n = 2$, и для (1.3.19) с матрицей (1.2.14) путь интегрирования $j(i)$, $i = 0, 1, \dots, N + 1$ определяется из условия (3.2.6), тогда коэффициенты в (3.2.11) примут следующее значение:

$$m(\tilde{Y}_i) = \text{ind} \left(\left(\tilde{D}_i^T - \tilde{B}_i^T Q_{j(i+1)}^{i+1} \right) \tilde{B}_i \right), \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned}
\mu^*((P_{j(i)}^i)^T[0 \ I]^T, W_i^{-1}[0 \ I]^T) = \\
= \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & F_{j(i)} B_i^T \\ B_i F_{j(i)} & B_i A_i^T \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, j(k) = 0, 2, \\ \text{ind}(r_k^{(2)}), j(k) = 1, 3, \end{cases} \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(P_{j(i+1)}^i[0 \ I]^T, \tilde{W}_i[0 \ I]^T) = \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & F_{j(i+1)} \tilde{B}_i \\ (F_{j(i+1)} \tilde{B}_i)^T & \tilde{B}_i^T \tilde{D}_i \end{pmatrix} = \\
= \begin{cases} 2, j(i+1) = 0, j(i) = 2, 3, \\ \text{ind} - (r_i^{(0)} + r_i^{(1)} - \lambda), j(i+1) = 3, j(i) = 1, \\ \text{ind} - (r_i^{(0)} + r_i^{(1)} + r_i^{(2)} - \lambda), j(i+1) = 3, j(i) = 0, \\ \text{ind} - (r_i^{(0)} - \lambda) + \text{ind} - (r_i^{(1)} + r_i^{(2)}), j(i+1) = 3, j(i) = 2, \\ \text{ind} - (r_i^{(0)} - \lambda) + \text{ind} - (r_i^{(1)}), j(i+1) = 3, j(i) = 3, \\ 1, j(i+1) = 0, 1, 2; j(i) = 0, 1, \\ 1 + \text{ind} - (r_i^{(1)} + r_i^{(2)}), j(i+1) = 1, j(i) = 2, \\ 1 + \text{ind} - (r_i^{(1)}), j(i+1) = 1, j(i) = 3, \\ 1 + \text{ind} - (r_i^{(0)} - \lambda), j(i+1) = 2, j(i) = 2, 3. \end{cases} \quad (3.3.4)
\end{aligned}$$

Доказательство. 1. Докажем (3.3.2). Рассмотрим $m(\tilde{Y}_i)$. Заметим, из свойства сопряженного базиса (1.2.10), из структуры матрицы ортогональной трансформации (3.2.2) и условия ее выбора (3.2.6), получаем: $\tilde{X}_i \neq 0$. Таким образом, согласно (1.3.21) $m_1(\tilde{Y}_i) = 0$,

$$m(\tilde{Y}_i) = m_2(\tilde{Y}_i) = \text{ind}(\tilde{X}_i \tilde{X}_{i+1}^{-1} \tilde{B}_i) \quad (3.3.5)$$

Заметим, согласно (1.3.23)

$$\tilde{X}_i = \tilde{D}_i^T \tilde{X}_{i+1} - \tilde{B}_i^T \tilde{U}_{i+1} \quad (3.3.6)$$

Учитывая $Q_{j(i+1)}^{i+1} = \tilde{U}_{i+1} \tilde{X}_{i+1}^{-1}$ и подставляя (3.3.6) в (3.3.5) получим

$$m(\tilde{Y}_i) = \text{ind}((\tilde{D}_i^T - \tilde{B}_i^T Q_{j(i+1)}^{i+1}) \tilde{B}_i). \quad (3.3.7)$$

2. Докажем (3.3.3). Рассмотрим $\mu^*((P_{j(i)}^i)^T [0 \ I]^T, W_i^{-1} [0 \ I]^T)$, где для удобства примем

$$Y = \begin{bmatrix} G_{j(i)} \\ F_{j(i)} \end{bmatrix}, \hat{Y} = \begin{bmatrix} -B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix}.$$

Вычислим Вронскиан $w_{j(i)} = w_{j(i)}(Y, \hat{Y}) = G_{j(i)} A_i^T + F_{j(i)} B_i^T$. При $j(i) = 0, 2$ Вронскиан соответственно принимает вид

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Случай $j(i) = 0$. Учитывая (3.2.3) получаем

$$\mathcal{M} = (I - G_0^\dagger G_0) w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1. \text{ Откуда}$$

$$\mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-\mathcal{P}) = \text{ind}(w_0^T G_0^\dagger B_i^T) = 0,$$

а значит при $j(i) = 0$ получаем $\mu^*(Y, \hat{Y}) = \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = 1$.

Случай $j(i) = 2$. Аналогично получаем

$$\mathcal{M} = (I - G_2^\dagger G_2) w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1. \text{ Откуда}$$

$$\mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-\mathcal{P}) = \text{ind}(w_2^T G_2^\dagger B_i^T) = 0,$$

а значит при $j(i) = 2$ получаем $\mu^*(Y, \hat{Y}) = \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = 1$.

При $j(i) = 1, 3$ Вронскиан соответственно принимает вид

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Случай $j(i) = 1$. Учитывая (3.2.3), получаем

$$\mathcal{M} = (I - G_1^\dagger G_1)w_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_1, \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 0. \text{ Откуда}$$

$$\mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-\mathcal{P}) = \text{ind}(w_1^T G_1^\dagger B_i^T) = \text{ind} \begin{bmatrix} 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix},$$

а значит при $j(i) = 1$ получаем $\mu^*(Y, \hat{Y}) = \mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(r_i^{(2)})$.

Случай $j(i) = 3$. Учитывая (3.2.3), получаем $\mathcal{M} = (I - G_3^\dagger G_3)w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w_3, \mu_1^*(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 0$. Откуда

$$\mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-\mathcal{P}) = \text{ind}(w_3^T G_3^\dagger B_i^T) = \text{ind} \begin{bmatrix} 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix},$$

а значит при $j(i) = 3$ получаем $\mu^*(Y, \hat{Y}) = \mu_2^*(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(r_i^{(2)})$. Откуда, получаем (3.3.3).

3. Докажем (3.3.4). Рассмотрим $\mu(P_{i+1}[0 \ I]^T, \tilde{W}_i[0 \ I]^T) = \mu(Y, \hat{Y})$, где для удобства примем

$$Y = \begin{bmatrix} -G_{j(i+1)} \\ F_{j(i+1)} \end{bmatrix}, \hat{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i \\ \tilde{D}_i \end{bmatrix},$$

где $\tilde{W}_i = P_{j(i+1)}^i W_i (P_{j(i)}^i)^T$ и W_i определена в (3.3.1), то есть

$$\tilde{B}_i = (F_{j(i+1)} \cdot A_i - G_{j(i+1)} \cdot C_i) \cdot G_i + (F_{j(i+1)} \cdot B_i - G_{j(i+1)} \cdot D_i) \cdot F_i,$$

$$\tilde{D}_i = (G_{j(i+1)} \cdot A_i + F_{j(i+1)} \cdot C_i) \cdot G_i + (G_{j(i+1)} \cdot B_i + F_{j(i+1)} \cdot D_i) \cdot F_i.$$

Вычислим Вронскиан

$$w_{j(i+1)j(i)} = w_{j(i+1)j(i)}(Y, \hat{Y}) = -G_{j(i+1)} \tilde{D}_i^T - F_{j(i+1)} \tilde{B}_i^T$$

Рассмотрим различные случаи.

Случай 1. Пусть $j(i+1) = 0$. Соответствующие матрицы и Вронскиан примут вид:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_i &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix} \cdot F_i, \\ \tilde{D}_i &= \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} - \lambda \\ 0 & r_i^{(1)} \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ -1 & \frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} + 1 \end{bmatrix} \cdot F_i, \\ w_{0j(i)} &= -\tilde{B}_i\end{aligned}$$

Так как $G_{j(i+1)} = 0$, то $\mu_2(Y, \hat{Y}) = 0$.

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(I - G_{j(i+1)}^\dagger G_{j(i+1)})w_{0j(i)} = \text{rank}(w_{0j(i)}).$$

Для различных $j(i)$ получаем

$$w_{00} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, w_{01} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, w_{02} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, w_{03} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Откуда следуют соответствующие строчки в (3.3.4).

Случай 2. Пусть $j(i+1) = 1$. Соответствующие матрицы и Вронскиан примут вид:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_i &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -r_i^{(1)} \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 1 & -\frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} - 1 \end{bmatrix} \cdot F_i, \\ \tilde{D}_i &= \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} - \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix} \cdot F_i, \\ w_{1j(i)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{D}_i^T - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{B}_i^T\end{aligned}$$

Случай 2.1 Пусть $j(i+1) = 1, j(i) = 0$.

Вронскиан $w_{10} = -\begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, тогда

$\mathcal{M} = (I - G_1^\dagger G_1)w_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -1/r_i^{(2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Тогда $\mathcal{M}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r_i^{(2)} & 0 \end{bmatrix}$, следовательно $\mathcal{T} = I - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Подстановкой соответствующих матриц получаем

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{T}^T(-w_{10}^T G_1^\dagger \tilde{B}_i)\mathcal{T}) = 0.$$

При $j(i+1) = 1, j(i) = 0$, получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = 1$.

Случай 2.2 Пусть $j(i+1) = 1, j(i) = 1$.

Вронскиан $w_{11} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{M} = (I - G_1^\dagger G_1)w_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, следовательно $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Аналогично, случаю 2.1 получаем, что при $j(i+1) = 1, j(i) = 1$, $\mu(Y, \hat{Y}) = \mu_1(Y, \hat{Y}) = 1$.

Случай 2.3 Пусть $j(i+1) = 1, j(i) = 2$.

Матрица $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & -\frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} - 1 \end{bmatrix}$, Вронскиан $w_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{M} = (I - G_1^\dagger G_1)w_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -1/r_i^{(2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, следовательно $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Тогда $\mathcal{M}^\dagger = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{T} = I - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Подстановкой соответствующих матриц получаем

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{T}^T(-w_{12}^T G_1^\dagger \tilde{B}_i)\mathcal{T}) = \text{ind}\left(-\frac{r_i^{(1)} + r_i^{(2)}}{(r_i^{(2)})^2}\right).$$

При $j(i+1) = 1, j(i) = 2$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = 1 + \text{ind}(-(r_i^{(1)} + r_i^{(2)}))$.

Случай 2.4 Пусть $j(i+1) = 1, j(i) = 3$.

Матрица $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -r_i^{(1)} \end{bmatrix}$, Вронскиан $w_{13} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{M} =$

$(I - G_1^\dagger G_1)w_{13} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, следовательно $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Анало-

гично, случаю 2.3 получаем, что $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Подстановкой соответствующих матриц получаем

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{T}^T(-w_{13}^T G_1^\dagger \tilde{B}_i) \mathcal{T}) = \text{ind}(-r_i^{(1)}).$$

При $j(i+1) = 1, j(i) = 3$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = 1 + \text{ind}(-r_i^{(1)})$.

Таким образом случай 2 $j(i+1) = 1$ рассмотрен полностью.

Случай 3. Пусть $j(i+1) = 2$. Соответствующие матрицы и Вронскиан примут вид:

$$\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} -(r_i^{(0)} - \lambda) & -(r_i^{(0)} - \lambda) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} -1 & -\frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix} \cdot F_i,$$

$$\tilde{D}_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r_i^{(1)} \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ -1 & \frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} + 1 \end{bmatrix} \cdot F_i,$$

$$w_{2j(i)} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \tilde{D}_i^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \tilde{B}_i^T$$

Случай 3.1 Пусть $j(i+1) = 2, j(i) = 0$.

Вронскиан $w_{20} = - \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, тогда

$$\mathcal{M} = (I - G_2^\dagger G_2)w_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}, \mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1. \text{ Тогда}$$

$\mathcal{M}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, следовательно $\mathcal{T} = I - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Подстановкой соответствующих матриц получаем

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{T}^T(-w_{20}^T G_2^\dagger \tilde{B}_i) \mathcal{T}) = 0.$$

При $j(i+1) = 2, j(i) = 0$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = 1$.

Случай 3.2 Пусть $j(i+1) = 2, j(i) = 1$.

Вронскиан $w_{21} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{M} = (I - G_2^\dagger G_2)w_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, следовательно $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Аналогично, случаю 3.1 получаем, что при $j(i+1) = 2, j(i) = 1$, $\mu(Y, \hat{Y}) = \mu_1(Y, \hat{Y}) = 1$.

Случай 3.3 Пусть $j(i+1) = 2, j(i) = 2$.

Матрица $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} -(r_i^{(0)} - \lambda) & -(r_i^{(0)} - \lambda)/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, Вронскиан $w_{22} = -\begin{bmatrix} 1 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{M} = (I - G_2^\dagger G_2)w_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/r_i^{(2)} \end{bmatrix}$, следовательно $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Тогда $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Подстановкой соответствующих матриц получаем

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{T}^T(-w_{22}^T G_2^\dagger \tilde{B}_i)\mathcal{T}) = \text{ind}\left(-(r_i^{(0)} - \lambda)\right).$$

При $j(i+1) = 2, j(i) = 2$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = 1 + \text{ind}(-(r_i^{(0)} - \lambda))$.

Случай 3.4 Пусть $j(i+1) = 2, j(i) = 3$.

Матрица $\tilde{B}_i = \begin{bmatrix} -(r_i^{(0)} - \lambda) & -(r_i^{(0)} - \lambda)/r_i^{(2)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Вронскиан $w_{22} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогда $\mathcal{M} = (I - G_2^\dagger G_2)w_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, следовательно $\mu_1(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$. Тогда $\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Подстановкой соответствующих матриц получаем

$$\mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{T}^T(-w_{23}^T G_2^\dagger \tilde{B}_i)\mathcal{T}) = \text{ind}\left(-(r_i^{(0)} - \lambda)\right).$$

При $j(i+1) = 2, j(i) = 3$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = 1 + \text{ind}(-(r_i^{(0)} - \lambda))$.

Случай 4. Пусть $j(i+1) = 3$. Соответствующие матрицы и Вронскиан примут вид:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_i &= - \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} - \lambda \\ 0 & r_i^{(1)} \end{bmatrix} \cdot G_i - \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ -1 & \frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} + 1 \end{bmatrix} \cdot F_i, \\ \tilde{D}_i &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot G_i + \begin{bmatrix} 0 & 1/r_i^{(2)} \\ 0 & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix} \cdot F_i, \\ w_{3j(i)} &= -\tilde{D}_i\end{aligned}$$

Так как $G_3 = I$, то $\mu_1(Y, \hat{Y}) = 0$. Откуда получаем

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \mu_2(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\tilde{D}_i^T \cdot \tilde{B}_i).$$

Для различных $j(i)$ получаем следующие случаи.

Случай 4.1 Пусть $j(i+1) = 3, j(i) = 0$.

$$\tilde{D}_i^T \cdot \tilde{B}_i = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ -1 & \frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_i^{(0)} + r_i^{(1)} + r_i^{(2)} - \lambda}{(r_i^{(2)})^2} \end{bmatrix}.$$

При $j(i+1) = 3, j(i) = 0$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-(r_i^{(0)} + r_i^{(1)} + r_i^{(2)} - \lambda))$.

Случай 4.2 Пусть $j(i+1) = 3, j(i) = 1$.

$$\tilde{D}_i^T \cdot \tilde{B}_i = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & r_i^{(0)} - \lambda \\ -1 & r_i^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(r_i^{(0)} + r_i^{(1)} - \lambda) \end{bmatrix}.$$

При $j(i+1) = 3, j(i) = 1$ получаем $\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-(r_i^{(0)} + r_i^{(1)} - \lambda))$.

Случай 4.3 Пусть $j(i+1) = 3, j(i) = 2$.

$$\tilde{D}_i^T \cdot \tilde{B}_i = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/r_i^{(2)} & 1/r_i^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ 0 & \frac{r_i^{(1)}}{r_i^{(2)}} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} \\ \frac{r_i^{(0)} - \lambda}{r_i^{(2)}} & \frac{r_i^{(0)} + r_i^{(1)} + r_i^{(2)} - \lambda}{(r_i^{(2)})^2} \end{bmatrix}.$$

При $j(i+1) = 3, j(i) = 2$ получаем

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-(r_i^{(0)} - \lambda)) + \text{ind}(-(r_i^{(1)} + r_i^{(2)})).$$

Случай 4.4 Пусть $j(i+1) = 3, j(i) = 3$.

$$\tilde{D}_i^T \cdot \tilde{B}_i = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} - \lambda \\ 0 & r_i^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} - \lambda \\ r_i^{(0)} - \lambda & r_i^{(0)} + r_i^{(1)} - \lambda \end{bmatrix}.$$

При $j(i+1) = 3, j(i) = 3$ получаем

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(-(r_i^{(0)} - \lambda)) + \text{ind}(-(r_i^{(1)})).$$

Были рассмотрены все значения для $j(i+1)$ и $j(i)$. Доказательство закончено. □

Таким образом, применяя к главному решению (1.3.17) с матрицей (3.3.1) ортогональные преобразования (3.2.7), можем определить число фокальных точек исходного главного решения Y_i согласно с формулами (3.2.11) и (3.3.3), (3.3.2), (3.3.4). Отметим, что подсчет фокальных точек для главного решения дискретного уравнения Штурма – Лиувилля 4 порядка основан на вычислении $N + 2$ индексов матриц 2×2 и не более чем $2(N + 1)$ знаков чисел, в зависимости от пути интегрирования $j(i)$.

3.4. Подсчет числа фокальных точек уравнений

Штурма – Лиувилля высшего порядка

Рассмотрим применение дополнения Шура [17, Глава 3.2] к вычислению фокальных точек главного решения симплектических систем (1.3.19) (см. [59]). Пусть A – симметричная матрица с $n \times n$ блоками $A = \begin{bmatrix} H & B \\ B & C \end{bmatrix}$ содержит невырожденный блок H , тогда

$$\text{ind}(A) = \text{ind}(LAL^T) = \text{ind}(A/H) + \text{ind}(H), \quad (3.4.1)$$

где $A/H = C - BH^{-1}B$ – дополнение Шура матрицы H в матрице A , а матрица L реализует блочное исключение Гаусса [17, пункт 3.4.7].

Замечание 3.4.1. Если в матрице A можно выделить главную невырожденную подматрицу H , то (3.4.1) остается верным, где матрица L реализует блочное исключение Гаусса с перестановкой строк, A/H – обобщенное дополнение Шура.

Пусть H – невырожденная главная подматрица матрицы $X^T U$. Из (1.2.10) следует, что для сопряженного базиса выполняется $X^T U = U^T X$. Откуда согласно виду матрицы Λ (1.3.51) и (1.3.53), получаем

$$\mu(Y, \widehat{Y}) = \text{ind}(\Lambda/H) + \text{ind}(H) - \text{ind}(X^T U/H) - \text{ind}(H) = \text{ind}(\Lambda/H) - \text{ind}(X^T U/H) \quad (3.4.2)$$

Ниже приведенная теорема, учитывающая преобразование (3.2.7) и свойства (1.4.1), позволяет применить обобщенное дополнения Шура (3.4.2) к численной реализации подсчета фокальных точек уравнений Штурма–Лиувилля высших порядков (1.2.12).

Теорема 3.4.2. Пусть в точке i сопряженный базис имеет вид $\begin{bmatrix} F_{j(i)} & -G_{j(i)} \\ G_{j(i)} & F_{j(i)} \end{bmatrix} Y_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Q_{j(i)}^i & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \end{bmatrix} H_1, H_2, \dots, H_p$ последовательность невырожденных симметричных матриц таких, что H_1 ведущая подматрица $Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})$, H_2 ведущая подматрица $Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})/H_1$, и т. д., H_p ведущая подматрица $((Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})/H_1)/H_2)/\dots/H_{p-1}$, причем $\text{rank}(H_1) + \dots + \text{rank}(H_p) = \text{rank}(Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)}))$, тогда число фокальных точек на $[i, i+1)$:

$$m^*(Y_i) = \text{ind}(\Lambda_i), \Lambda_i = (((V_i/H_1)/H_2)/\dots)/H_p, \quad (3.4.3)$$

$$\text{где } V_i = \begin{pmatrix} Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)}) & b_i \\ b_i^T & a_i \end{pmatrix}, a_i = (F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)})(n, n) + r_i^{(n)}, b_i = (I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)})(\alpha_{j(i)}, n).$$

Здесь $\alpha_{j(i)}$ – множество индексов строк, однозначно определяемое позициями единиц на диагонали $G_{j(i)}$. Матрица $A(\alpha, \beta)$ – подматрица матрицы A , стоящая в строках множества α и в столбцах множества β . Отметим, что матрица V_i получена симметричным окаймлением блока $Q_{j(i)}(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})$ ровно одной строкой и столбцом и имеет максимальную размерность $n+1$.

Таким образом, вычисление $m^*(Y_i)$ связано с симметрическим оператором Λ_i размером не более $(n+1) \times (n+1)$.

Доказательство.

$$\begin{bmatrix} X_i \\ U_i \end{bmatrix} R_i^{-1} = \left(P_{j(i)}^i \right)^T \begin{bmatrix} I \\ Q_{j(i)}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j(i)} + G_{j(i)} Q_{j(i)}^i \\ -G_{j(i)} + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

Существует такая блочная нижнетреугольная матрица L

$$L = \begin{bmatrix} I + G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} & 0 \\ F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} & I - F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)} \end{bmatrix}, \quad (3.4.5)$$

что

$$\begin{bmatrix} F_{j(i)} + G_{j(i)} Q_{j(i)}^i \\ -G_{j(i)} + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} F_{j(i)} + G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)} \\ -G_{j(i)} \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

Отметим, что L^{-1} будет иметь вид

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} & 0 \\ -F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} & I + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)} \end{bmatrix} \quad (3.4.7)$$

Согласно замечанию 3.2.2 вычисляем фокальные точки у \tilde{Y}_i определенного в (3.4.4). Таким образом, из (1.3.20) и свойств 1), 2) из (1.3.18), получаем

$$\begin{aligned} m^*(Y_i) &= \mu^* \left(L \begin{bmatrix} F_{j(i)} + G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)} \\ -G_{j(i)} \end{bmatrix} R_i, \begin{bmatrix} -B_i^T \\ A_i^T \end{bmatrix} \right) = \\ &= \mu^* \left(\begin{bmatrix} F_{j(i)} + G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)} \\ -G_{j(i)} \end{bmatrix}, L^{-1} \begin{bmatrix} -E_i \\ I \end{bmatrix} \right), \quad (3.4.8) \end{aligned}$$

где матрица E_i определена в (2.1.3). Второй столбец из (3.4.8) примет вид

$$L^{-1} \begin{bmatrix} -E_i \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} & 0 \\ -F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} & I + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E_i \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)}\right) E_i \\ F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} E_i + I + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)} \end{bmatrix} \quad (3.4.9)$$

Преобразуем (3.4.8) согласно 1.3.17, (1.3.53), (3.4.9)

$$\begin{aligned} m^*(Y_i) = \\ \mu \left(\begin{bmatrix} -F_{j(i)} - G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)} \\ -G_{j(i)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left(I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)}\right) E_i \\ F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} E_i + I + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)} \end{bmatrix} \right) = \\ ind \left(\begin{pmatrix} G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)} & P \\ P^T & T \end{pmatrix} \right) - ind(G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)}), \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

где $P = -G_{j(i)} \left(I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)}\right) E_i$,

$$\begin{aligned} T = E_i^T \left(I - F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)}\right) \left(F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} E_i + I + F_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)}\right) = \\ E_i^T F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)} E_i + E_i^T \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Отметим, что матрицы $G_{j(i)}$ и E_i диагональные. Пусть $\alpha_{j(i)}$ – множество номеров ненулевых строк матрицы $G_{j(i)}$. Тогда число отрицательных собственных значений у симметричных матриц $G_{j(i)} Q_{j(i)}^i G_{j(i)}$ и $Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})$ одинаково. Так как в матрице E_i ненулевой строкой будет n -ая строка, то аналогично получаем, что число отрицательных собственных значений у симметричных матриц $\begin{pmatrix} G_{j(i)} Q_{j(i)} G_{j(i)} & P \\ P^T & T \end{pmatrix}$ и $V_i = \begin{pmatrix} Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)}) & b_i \\ b_i^T & a_i \end{pmatrix}$ одинаково. Здесь

$$a_i = (F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)})(n, n) + r_i^{(n)}, b_i = \left(I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)}\right)(\alpha_{j(i)}, n). \quad (3.4.12)$$

Теперь выберем H_1, H_2, \dots, H_p последовательность невырожденных симметричных матриц таких, что H_1 ведущая подматрица $Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})$, H_2 ведущая подматрица $Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})/H_1$, и т. д., H_p ведущая подматрица $((Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)}))/H_1)/H_2 \dots)/H_{p-1}$, причем $\text{rank}(H_1) + \dots + \text{rank}(H_p) = \text{rank}(Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)}))$. Пусть тогда из (3.4.10) получаем

$$\begin{aligned} m^*(Y_i) &= \text{ind}(V_i) - \text{ind}(G_{j(i)}Q_{j(i)}G_{j(i)}) = \\ &= \text{ind}(V_i/H_1) + \text{ind}(H_1) - \text{ind}(Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})/H_1) - \text{ind}(H_1) = \dots \\ &= \text{ind}((((V_i/H_1)/H_2)\dots)/H_p) - \text{ind}((((Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})/H_1)/H_2)\dots)/H_p) = \\ &= \text{ind}(\Lambda_i), \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

где $\Lambda_i = (((V_i/H_1)/H_2)\dots)/H_p$ □

Замечание 3.4.3. Отметим, что $m^*(Y_i)$ согласно структуре Λ_i

$$m^*(Y_i) = \text{ind} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{b}_i \\ \tilde{b}_i^T & \tilde{a}_i \end{bmatrix} = \begin{cases} 1, \tilde{b}_i^T \tilde{b}_i \neq 0, \\ 1, \tilde{a}_i < 0, \tilde{b}_i^T \tilde{b}_i = 0, \\ 0, \tilde{a}_i \geq 0, \tilde{b}_i^T \tilde{b}_i = 0, \end{cases} \tag{3.4.14}$$

где столбец \tilde{b}_i и число \tilde{a}_i получаются в процессе вычислений обобщенных дополнений Шара в (3.4.13) из столбца b_i и числа a_i в (3.4.12)

Замечание 3.4.4. Понижение размерности оператора Λ_i в (1.3.53) связано с двумя факторами – использованием новой концепции числа фокальных точек $m^*(Y_i)$ на и структуры блоков симплектической системы, отвечающей уравнению Штурма – Лиувилля.

3.5. Дискретная краевая задача Штурма – Лиувилля второго порядка с периодическими граничными условиями

Краевые задачи с общими самосопряженными граничными условиями представляют более сложный случай для осцилляционной теории симплектических систем. Сложность их исследования обусловлена переходом к расширенным симплектическим системам.

Свойства дискретных уравнений второго порядка со связными граничными условиями, в том числе периодическими, исследованы в работах [79], [78]. В данном параграфе мы рассмотрим, частный случай общих самосопряженных граничных условий для задачи (1.2.12) второго порядка, а именно периодические условия. Даже для уравнения Штурма–Лиувилля второго порядка, в осцилляционной теореме с периодическими условиями будут присутствовать, дополнительные члены связанные с фундаментальной матрицей соответствующей симплектической системы.

Дискретное уравнение Штурма – Лиувилля второго порядка

$$-\Delta(r_i^{(1)}\Delta y_i) + r_i^{(0)}y_{i+1} = \lambda y_{i+1}, r_i^{(1)} \neq 0, 0 \leq i \leq N-1 \quad (3.5.1)$$

с граничными условиями

$$y_0 = y_{N+1}, r_0^{(1)}\Delta y_0 = r_N^{(1)}y_{N+1} + (r_N^{(0)} - \lambda)y_{N+1} - r_N^{(1)}y_N \quad (3.5.2)$$

равносильно задаче на собственные значения для симметричной матрицы

$$(A - \lambda I)\hat{y} = 0, A = \begin{bmatrix} p_0 & -r_1^{(1)} & 0 & \cdots & -r_0^{(1)} \\ -r_1^{(1)} & p_1 & -r_2^{(1)} & \cdots & 0 \\ 0 & -r_2^{(1)} & p_2 & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & -r_N^{(1)} \\ -r_{N+1}^{(1)} & 0 & \cdots & -r_N^{(1)} & p_N \end{bmatrix}, \quad (3.5.3)$$

где $p_i = r_{i+1}^{(1)} + r_i^{(1)} + r_i^{(0)}$, $\hat{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{N+1}\}^T$. Для задачи (3.5.3) известен метод обобщающий бисекцию основанный на последовательностях Штурма [23, §3.16, 3.17]

Задача (1.3.9),(3.5.2) при замене $x_i = y_i, u_i = r_i^{(1)} \Delta y_i$ равносильна задаче (1.3.19) с матрицей

$$W_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/r_i^{(1)} \\ r_i^{(0)} & r_i^{(0)}/r_i^{(1)} + 1 \end{bmatrix}, \quad (3.5.4)$$

и граничными условиями

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_0 \\ u_{N+1} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.5.5)$$

$\#\{\lambda \in \sigma | \lambda \leq \tilde{\lambda}\}$ - число собственных значений задачи (1.3.19),(3.5.4),(3.5.5), не превосходящих $\tilde{\lambda}$, можно вычислить согласно, теореме 4 (формула 2.15)¹, по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \#\{\lambda \in \sigma | \lambda \leq \tilde{\lambda}\} &= l(Y_i^{(0)}(\tilde{\lambda}), 0, N) + \\ &+ \mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\tilde{\lambda}) \rangle, R[0 \ I]^T) - p. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Здесь $Z^{(0)}(\tilde{\lambda})$ - фундаментальная матрица решений при $\lambda = \tilde{\lambda}$ для (1.3.19) с матрицей определенной в (3.5.4), согласно [21, формула 2.10]

$$\langle V \rangle = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & -I \\ C & D \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad (3.5.7)$$

из формулы 2.18¹

$$p = l(Y_i^{(0)}(\lambda_0), 0, N) + \mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\lambda_0) \rangle, R[0 \ I]^T), \quad \lambda_0 < \min \sigma. \quad (3.5.8)$$

¹ J. Elyseeva. A note on relative oscillation theory for symplectic difference systems with general boundary conditions. Appl. Math. Lett. (2012), doi: 10.1016/j.aml.2012.02.024

Учитывая, что для (1.2.12) $l(Y_i^{(0)}(\lambda_0), 0, N) = 0$ при $\lambda_0 < \min \sigma$, получим

$$p = \mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\lambda_0) \rangle, R[0 \ I]^T), \lambda_0 < \min \sigma. \quad (3.5.9)$$

Отметим, что $[I \ 0]R = [R_1, R_2]$, где

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

матрицы определяющие периодические краевые условия (3.5.5). По этому из условия симплектичности (1.2.4) матрицы R получаем R^{-1} ,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для применения формулы (3.5.6), вычислим $\mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\tilde{\lambda}) \rangle, R[0 \ I]^T)$.

Пусть $Z_{N+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, тогда

$$\mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\lambda_1) \rangle, R[0 \ I]^T) = \mu(Y, \hat{Y}), \quad (3.5.11)$$

где $Y^T = [X^T U^T]$, $\hat{Y}^T = [\hat{X}^T \hat{U}^T]$ - удовлетворяют (3.4.1) и

$$Y = \begin{bmatrix} -c & 1-d \\ a-1 & b \\ 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}, \hat{Y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.12)$$

Найдем значение (3.5.11) из определения сравнительного индекса. Найдем Вронскиан $\omega(Y, \hat{Y})$ по (3.4.1), получаем

$$\omega(Y, \hat{Y}) = \begin{bmatrix} 0 & a-1 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (3.5.13)$$

Так как $Z_{N+1}^{(0)}$ фундаментальная матрица, то $ad - bc = 1$. Из $\det(X) = ad - bc + 1 - (a + d)$ следует, что X - невырожденная матрица, если $a + d \neq 2$. При $a + d \neq 2$ и (3.5.12)

$$\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(\omega^T X^\dagger \hat{X}) = \text{ind} \left(\frac{1}{ad-bc+1-(a+d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & d-1 \\ 1-a & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{ind} \left(\frac{-b}{ad-bc+1-(a+d)} \right).$$

Пусть $a+d = 2$, в (3.5.12) X вырожденная. Согласно [13] и учитывая $\det(X) = ad - bc + 1 - (a + d) = 0$, при $b \neq 0$ получаем

$$X = \begin{bmatrix} (a-1)^2/b & (a-1) \\ (a-1) & b \end{bmatrix}, \quad X^\dagger = \frac{1}{(b^2 + (a-1)^2)^2} \begin{bmatrix} (a-1)^2b & (a-1)b^2 \\ (a-1)b^2 & b^3 \end{bmatrix}, \quad (3.5.14)$$

откуда

$$\mathcal{M} = (I - XX^\dagger) \hat{X} = \frac{1}{(b^2 + (a-1)^2)^2} \begin{bmatrix} -b^2 & -b^2 \\ b(a-1) & b(a-1) \end{bmatrix}. \quad (3.5.15)$$

Используя алгоритм вычисления псевдообратной матрицы [13] получим

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{1}{2b^2(b^2+(a-1)^2)} \begin{bmatrix} -b^2 & b(a-1) \\ -b^2 & b(a-1) \end{bmatrix}. \text{ Таким образом,}$$

$$\mathcal{T} = (I - \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (3.5.16)$$

Вычислим

$$\omega^T X^\dagger \hat{X} = \frac{1}{(b^2+(a-1)^2)^2} \begin{bmatrix} -(a-1)^2b & -(a-1)^2b \\ -a(a-1)^2b - (a-1)b^3 & -a(a-1)^2b - (a-1)b^3 \end{bmatrix},$$

откуда $\mathcal{P} = \mathcal{T}^T (\omega^T X^\dagger \hat{X}) \mathcal{T} = 0$. Значит, при $a + d = 2, b \neq 0$, $\mu(Y, \hat{Y}) = \text{rank}(\mathcal{M}) = 1$.

Рассмотрим случай $a + d = 2, b = 0$. Откуда из условия $\det(Z_{N+1}^{(0)}) = 0$ (симплектичности матрицы $Z_{N+1}^{(0)}$) получаем $a = d = 1$, значит $X = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Если $c = 0$, то $\text{rank } \mathcal{M} = 1$, $\mathcal{P} = 0$, значит $\mu(Y, \hat{Y}) = 1$.

Если $c \neq 0$, то $\mathcal{M} = 0$ и

$$\mathcal{P} = w^T X^\dagger \hat{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/c & 1/c \\ 1/c & 1/c \end{bmatrix},$$

значит $\mu(Y, \hat{Y}) = \text{ind}(c)$.

Таким образом получили, что если $Z_{N+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, тогда

$$\mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\tilde{\lambda}) \rangle, R[0 \ I]^T) = \quad (3.5.17)$$

$\text{ind} \frac{-b}{2-(a+d)}$, если $a + d \neq 2$;

1, если $a + d = 2$, $b \neq 0$;

1, если $a = 1 = d$, $b = 0$, ≤ 0 ;

0, в противном случае.

Замечание 3.5.1. Отметим, если в уравнении (3.5.1), старший коэффициент $r_i^{(1)}$ положительный, то при достаточно большом $|\lambda_0|$ отрицательном $\lambda_0 < \min \sigma$ коэффициенты в матрице $W_i(\lambda_0)$ (3.5.4) будут положительными и фундаментальная матрица $Z_{N+1}^{(0)} = \left(\prod_{k=0}^{i-1} W_k \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, будет содержать в себе положительные элементы, причем для достаточно больших $|\lambda_0|$ отрицательных λ_0 $a > 1, d > 1$. Таким образом, согласно (3.5.17) $\mu(R\langle Z_{N+1}^{(0)}(\lambda_0) \rangle, R[0 \ I]^T) = 0$, а значит и $p = 0$ (3.5.9).

Используя (3.5.6), полученную формулу (3.5.17), замечание 3.5.1 был разработан алгоритм вычисления собственных значений для задачи (3.5.1), (3.5.2). Он был программно реализован, но не включен в комплекс программ выносимых на защиту. Результаты расчетов данным алгоритмом для модельной задачи представлены в 4.4.1.

3.6. Основные результаты главы 3

В главе 3 предлагается два подхода к вычислению фокальных точек сопряженных базисов симплектических систем, соответствующих уравнениям Штурма – Лиувилля высших порядков. Первый подход основан на ортогональной прогонке с перестановками строк [19], [65], [59] и методах теории трансформаций [67]. При этом лично автором получены следующие результаты.

1. Для частного случая симплектических трансформаций – симплектических матриц перестановок – доказана теорема 3.2.4, связывающая число фокальных точек сопряженного базиса симплектической системы и сопряженного базиса трансформированной симплектической системы. Доказательство основано на использовании результатов работы [67], относящихся к общему случаю симплектических трансформаций.

2. Получены расчетные формулы алгоритма вычисления фокальных точек для дискретного уравнения Штурма – Лиувилля 4-го порядка. Данные формулы представлены в теореме 3.3.1. При получении данных расчетных формул существенно использовано, что матрица симплектической системы для случая дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков имеет специальный вид. В частности, блок B_i имеет ранг, равный единице, что позволило существенно упростить общие формулы теоремы 3.2.4.

3. Второй подход к вычислению фокальных точек основан на использовании связи между числом фокальных точек, сравнительным индексом и индексом симметрического оператора размерности $2n$. Данные общие результаты перенесены на частный случай уравнений Штурма – Лиувилля $2n$ -го порядка следующим образом. Доказано, что для уравнения Штурма – Лиувилля $2n$ -го порядка максимальная размерность симметрического оператора равна $n + 1$. Соответствующие расчетные формулы алгоритма вычисления фокаль-

ных точек, основанного на вычислении индекса симметрического оператора размерности $n + 1$, выведены в теореме 3.4.2.

4. Разработан алгоритм, лежащий в основе вычисления собственных значений дискретной краевой задачи Штурма – Лиувилля второго порядка с периодическими граничными условиями. Для рассматриваемой частного случая краевых условий получены новые расчетные формулы алгоритма, вычисляющего фокальные точки сопряженного базиса и сравнительный индекс краевых условий.

Предлагаемые в главе 3 алгоритмы подсчета фокальных точек лежат в основе алгоритмов вычисления собственных значений дискретных краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля $2n$ -го порядка.

Алгоритмы вычисления собственных значений дискретной краевой задачи

Штурма – Лиувилля высшего порядка

В четвертой главе предложены алгоритмы решения частичной проблемы собственных значений дискретных задач Штурма–Лиувилля высших порядков с различными краевыми условиями. Приводятся расчеты собственных значений для тестовых задач, в том числе конечно-разностных аппроксимаций дифференциальных задач возникающих при анализе механических колебаний линейных систем.

4.1. Алгоритмы вычисления фокальных точек и их применение в методе бисекции

Метод бисекции (деления пополам) [16, Глава 4], [39, Глава 5. §39], обладает очень большой гибкостью. Его можно использовать для нахождения специально выделенных собственных значений $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \dots, \lambda_{r_m}$ собственных значений в заданном интервале (a, b) или для нахождения предписанного числа собственных значений слева или справа от заданного значения. Можно определять собственное значение с требуемой для него точностью можно очень просто изменять точность изменением числа шагов деления пополам. Если интересует лишь общее распределение собственных значений, а не их точное определение, то метод особенно эффективен.

4.1.1. Классический метод бисекции

Метод бисекции решения проблемы собственных значений для трехдиагональных матриц (см. 1.3.2) может быть использован для решения краевых задач Штурма – Лиувилля (1.2.12) с различными граничными условиями. Применение метода бисекции к некоторым разделенным и периодическим граничным условиям рассматривается в §4.3, §3.5.

Рассмотрим как использовать метод бисекции для задачи (1.2.12) с граничными условиями Дирихле. Для этого необходимо реализовать процедуру вычисления $Count^*(\tilde{\lambda})$ – число собственных значений задачи (1.2.12), (1.2.13) меньших данного $\tilde{\lambda}$ и $Count(\tilde{\lambda})$ – число собственных значений задачи (1.2.12), (1.2.13) не превосходящих данного $\tilde{\lambda}$. Алгоритмы вычисления которых представлены в 4.1.3 и 4.1.4.

Опишем локализации k -го собственного значения независимо от остальных. Предположим, что у нас есть два числа a_0 и b_0 ($a_0 < b_0$) такие, что

$$Count(a_0) < k, k \leq Count(b_0), \quad (4.1.1)$$

тогда мы знаем, что λ_k лежит в интервале $(a_0, b_0]$. Если

$$Count^*(a_0) < k, k \leq Count^*(b_0) \quad (4.1.2)$$

получаем, что λ_k лежит в интервале $[a_0, b_0)$. Теперь используя (4.1.1) и (4.1.2) можно локализовать λ_k в интервале (a_p, b_p) длиной в $(b_0 - a_0) / 2^p$ за p шагов итерационного процесса, r - й шаг которого состоит в следующем. Пусть

$$c_r = \frac{1}{2} (a_{r-1} + b_{r-1})$$

– середина интервала (a_{r-1}, b_{r-1}) . Тогда согласно 1.3.10, 2.3.1 вычисляя числа фокальных точек

$$\sum_{i=0}^N m(Y_i(c_r)) = Count(c_r), \quad (4.1.3)$$

$$\sum_{i=0}^N m^*(Y_i(c_r)) = \text{Count}^*(c_r), \quad (4.1.4)$$

определим $\text{Count}(c_r)$ и $\text{Count}^*(c_r)$. Если $\text{Count}(c_r) < k$ или $\text{Count}^*(c_r) \leq k$, то принимаем

$$a_r = c_r, b_r = b_{r-1}. \quad (4.1.5)$$

Если $\text{Count}(c_r) \geq k$ или $\text{Count}^*(c_r) \geq k$, то принимаем

$$a_r = a_{r-1}, b_r = c_r. \quad (4.1.6)$$

В любом случае λ_k находится в интервале (a_r, b_r) . Решение вопроса с выбором подходящих начальных значений для a_0 и b_0 основано на связи (1.2.12) с разделенными граничными условиями и ленточными матрицами (1.2.15). В качестве a_0 и b_0 можно взять $\pm \|A\|_\infty$ или воспользоваться теоремой о кругах Гершгорина [17], [39].

4.1.2. Вычисление нескольких собственных значений с помощью бисекции

Рассмотрим некоторые аспекты, связанные с конструкцией алгоритма, а в конце параграфа формально опишем схему вычислений. В алгоритме используется классический метод деления отрезка пополам для отыскания нулей функции. Осцилляционные теоремы 1.3.10, 2.3.1 и алгоритмы вычисления фокальных точек основанные на теоремах 3.3.1, 3.4.2 предоставляют конструктивное решающее правило, позволяющее правильно выбрать из двух отрезков тот, который содержит искомое собственное значение.

Для применения алгоритма деления отрезка пополам потребуется интервал $[X, Y]$, заключающий в себе все собственные значения. В соответствии с теоремой о кругах Гершгорина [17, Теорема 7.2.1], [39, Глава 2. п.13] в каче-

стве X и Y можно взять

$$X = \min_i \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, Y = \max_i \left\{ |a_{ii}| + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad (4.1.7)$$

где a_{ij} - элементы соответствующей симметричной матрицы 1.2.15.

В процессе расчета λ_j собственного значения, уточняются (сближаются) параметры x_j, y_j такие, что

$$x_j \leq \lambda_j \leq y_j$$

Параметры x_j, y_j будем называть соответственно нижней и верхней границами для собственного значения λ_j .

Очевидно, для любого j в качестве границ λ_j могут быть взяты X и Y . Такие значения используются в качестве начальных и в дальнейшем уточняются. Вычисления проводятся так, что границы для собственных значений будут сближаться до тех пор, пока собственное значение не будет локализовано достаточно точно, т. е. до тех пор, пока не станет справедливым неравенство $y_j - x_j < \varepsilon_1$. Параметр точности ε_1 определен арифметикой с плавающей точкой и числами обусловленности матриц $W_i(\lambda)$ симплектической системы (1.3.19). В следствии собственные значения имеют разную погрешность вычислений, как правило растущую с ростом $|\lambda_i|$.

Вычисления в условиях возможных погрешностей накладывают определенный отпечаток на конструкцию и возможности алгоритма, отметим их.

Замечание 4.1.1. В связи с погрешностью вычислений в арифметике с плавающей точкой для некоторых задач наблюдается не монотонность при вычислении функций $\text{Count}^*(\lambda)$ и $\text{Count}(\lambda)$ (первым 4.1.3 и вторым 4.1.4 алгоритмами соответственно) в области $\lambda \in (\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon)$, то есть в некоторой малой окрестности λ_i некоторых собственных значений. Данная немонотонность, также характерна и для метода бисекции при вычислении собственных значений трехдиагональных матриц [77]. Чтобы из-

бежать данную проблему в работе будем использовать идею реализованную в [77, Алгоритме *SerBisec*].

Замечание 4.1.2. Метод бисекции для трехдиагональных матриц не гарантирует, что малые собственные значения будут определяться с малыми относительными ошибками [39, Глава 5 §44]. Аналогичная проблема наблюдается и в разрабатываемом методе, который фактически является обобщением метода бисекции на случай ленточных матриц. Причина этой трудности связана с необходимостью вычислять с малой относительной погрешностью число вида $r_i^{(0)} - \lambda$, где λ параметр счета метода бисекции.

В комплексе программ реализованы следующие режимы:

1. Вычисление отдельного собственного значения с данным номером.
2. Вычисление группы собственных значений с заданными номерами r_1, r_2, \dots, r_n .
3. Вычисление собственных значений на заданном интервале (a, b) .

В случае 1 - вычисления отдельного собственного значения с номером k , определяем $x_k = X$, $y_k = Y$ и применяем процедуру уменьшения интервала описанную выше.

В случае 2, 3 - вычисления группы собственных значений с номерами из множества η . Для некоторых задач в силу симметрии (и соответственно симметрии форм колебаний), требуется найти четные/ нечетные собственные частоты, что описывается случаем 2. Определение устойчивости некоторых систем связана с определением положения спектра в единичном круге, определения зон отсутствия собственных значений колебаний, и многие другие задачи приводят к случаю 3. Для случая 3 характерно, что в множестве η номера упорядочены или множество η пусто.

Вычисления группы собственных значений организуется так, что вначале сближаются границы x_n, y_n n -го собственного значения λ_{r_n} , а получаемая промежуточная информация используется для уточнения границ некоторых других собственных значений (см. 4.1.3). При достижении неравенства $y_l - x_l < \varepsilon_l$ ($i = n, n - 1, \dots, 2$) дальнейшее сближение границ для λ_{r_l} нецелесообразно, и процесс переключается на уточнение границ $(l - 1)$ -го собственного значения (в случае $l = 1$). В конце концов для каждого из собственных значений исходной задачи вычисляется интервал, содержащий это собственное значение и имеющий длину не больше ε_l . Взяв в качестве приближенных собственных значений λ_{r_l} исходной задачи центры этих интервалов $\tilde{\lambda}_{r_l} = (x_l + y_l)/2$, ошибёмся в вычислении собственных значений не более чем на $\varepsilon_l/2$. Удобно считать результатом расчета упорядоченную последовательность.

$$\tilde{\lambda}_{r_1} \leq \tilde{\lambda}_{r_2} \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_{r_n}$$

приближенных собственных значений.

Замечание 4.1.3. Развитием метода бисекции для вычисления собственных значений и собственных векторов занималась группа ученых под руководством Годунова С. К. Один из результатов полученной этой группой может быть использован для изменения интервалов не только рассчитываемого значения, но и некоторых других собственных значений [16, Глава 4 §2] в зависимости от значений $Count(\tilde{\lambda})$ ($Count^*(\tilde{\lambda})$). Данный результат используется в разработанном комплексе.

Опишем сам алгоритм метода бисекции для 3-го режима, то есть вычисление собственных значений на заданном интервале.

Input: Numbers – искомые номера собственных значений; a, b – параметры интервала расчета; $Epsilon_i$ – требуемая точность вычисления, i -ого собственного значения;

Output: $\tilde{\sigma}$ – массив оценок собственных значений.

1. Вычисляем номера минимального и максимального собственного значения на заданном интервале (a, b) :

$$n_{min} = Count^*(a) + 1; n_{max} = Count^*(b)$$

2. Определяем число вычисляемых собственных значений $M = n_{max} - n_{min}$.

3. Запрос у пользователя значений $Epsilon_i$. Определяем $i = M$, $x_j = a$, $y_j = b$ для всех $n_{min} \leq j \leq n_{max}$.

4. **while** $i \geq 1$

5. **while** $|y_i - x_i| \geq Epsilon_i$

6. $z = (y_i + x_i)/2$.

7. $p = \min(\max(Count^*(z), x_i), y_i)$ (см. замечание 4.1.1).

8. В зависимости от значения p меняем границы x_j , y_j для некоторых $n_{min} \leq j \leq i$ (см. замечание 4.1.3).

9. **end while**

10. **end while**

11. $\tilde{\sigma}_i = (y_i + x_i)/2$, $n_{min} \leq i \leq n_{max}$.

12. **return** $\tilde{\sigma}$

4.1.3. Функция $Count^*(\tilde{\lambda})$ для задач Штурма – Лиувилля

Отметим, что в работе предлагаются 2 алгоритма вычисления фокальных точек $m(Y_i)$ и $m^*(Y_i)$, которые основаны на теоретических результатах

главы 3. Для обоих алгоритмов необходимо вычислять параметры ортогональной симплектической факторизации сопряженного базиса (3.2.1), которые затем передаются процедуре подсчета числа фокальных точек.

Первый алгоритм

Первый алгоритм основан на вычислении индекса симметричной матрицы размером не превосходящей $(n + 1) \times (n + 1)$ (см. 3.4). Первая часть алгоритма вычисляет параметры ортогональной симплектической факторизации сопряженного базиса.

Input: Coef – матрица коэффициентов уравнения Штурма–Лиувилля

$\tilde{\lambda}$ – пробная точка метода бисекции

Output: $\# \left\{ \lambda_i \in \sigma \mid \lambda_i < \tilde{\lambda} \right\} (Count^*(\tilde{\lambda}))$

1. Задаем начальные данные $S = 0$, $Y = [0 \ I]^T$, $i = 0$
2. **while** $i \leq N$
3. Поиск симплектической матрицы перестановок $P_{j(i)}^i$, удовлетворяющей условию $\max_{l \in \{0,1,\dots,2^n-1\}} |\det ([I \ 0] P_l^i Y)| = \left| \det ([I \ 0] P_{j(i)}^i Y) \right|$.
4. Вычисление симметричной матрицы $Q_{j(i)}^i = [0 \ I] P_{j(i)}^i Y \times ([I \ 0] P_{j(i)}^i Y)^{-1}$
5. Вызов функции $m^*(Y_i) =$
Get_Number_Focal_Points($Q_{j(i)}^i, P_{j(i)}^i, r_i^{(n)}$)
6. Прибавить к S вычисленное $m^*(i)$ число фокальных точек на $[i, i + 1)$
7. Вычислить сопряженный базис в следующей точке $i + 1$,
т. е. $Y = W_i P_{j(i)}^i \begin{bmatrix} I & Q_{j(i)}^i \end{bmatrix}^T$

8. Изменить $i = i + 1$

9. **end while**

10. **return** S

Подсчет фокальных точек на $[i, i + 1)$ главного решения (1.3.19) соответствующего уравнениям Штума – Лиувилля высших порядков (1.2.12) осуществляется в процедуре $\text{Get_Number_Focal_Points}(Q_{j(i)}^i, P_{j(i)}^i, r_i^{(n)})$.

Input: $Q_{j(i)}^i$ симметричная матрица из разложения (3.2.2)

$P_{j(i)}^i$ матрица симплектических ортогональных трансформаций

Output: число фокальных точек на $[i, i + 1)$

1. Если $i \leq n$, **return** 0

2. Формируем $\alpha_{j(i)}$. Пусть $T = Q_{j(i)}^i(\alpha_{j(i)}, \alpha_{j(i)})$. Формируем матрицу $V = \begin{pmatrix} T & b_i \\ b_i^T & a_i \end{pmatrix}$, где $a_i = (F_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)})(n, n) + r_i^{(n)}$,
 $b_i = (I - G_{j(i)} Q_{j(i)}^i F_{j(i)})(\alpha_{j(i)}, n)$.

3. **while** $\text{norm}(T) > \text{eps}_1$

4. Находим H ведущую подматрицу первого или второго порядка матрицы T , с помощью алгоритма Банча-Парлетта [17, п. 4.4.4.]

5. Формируем $V = V/H$, $T = T/H$.

6. **end while**

7. Вычисляем $\text{ind}(V) = \text{ind} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ \tilde{b}^T & \tilde{a} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \|\tilde{b}\| > \text{eps}_2 \vee \tilde{a} < 0 \\ 0, & \end{cases}$

8. **return** $\text{ind}(V)$

Замечание 4.1.4. Величины eps_1 , eps_2 пропорциональны машинной точности, зависят от размера матрицы V .

4.1.4. Функция $\text{Count}(\tilde{\lambda})$ для задач Штурма – Лиувилля

Второй алгоритм

Второй алгоритм основан на формулах связи чисел фокальных точек (1.3.19) при симплектических трансформациях (см. 3.3) для уравнений Штурма–Лиувилля четвертого порядка (1.2.16). Первая часть этого алгоритма, как и в первом алгоритме 4.1.3, вычисляет параметры симплектической ортогональной трансформации и имеет вид:

Input: Coef – матрица коэффициентов уравнения Штурма–Лиувилля,

$\tilde{\lambda}$ – пробная точка метода бисекции

Output: $\# \left\{ \lambda_i \in \sigma \mid \lambda_i \leq \tilde{\lambda} \right\}$ ($\text{Count}(\tilde{\lambda})$)

1. Задаем начальные данные $S = 0$, $Y = [0 \ I]^T$, $i = 0$
2. Для главного решения получаем $P_{j(0)}^0 = J$, $Q_{j(0)}^0 = I$
3. **while** $i \leq N$
4. Вычислить сопряженный базис в точке $i + 1$, т. е. $Y_{i+1} = W_i P_{j(i)}^i \left[I \ Q_{j(i)}^i \right]^T$
5. Поиск симплектической матрицы перестановок $P_{j(i+1)}^{i+1}$, удовлетворяющей условию $\max_{l \in \{0,1,\dots,2^n-1\}} \left| \det \left([I \ 0] P_l^{i+1} Y_{i+1} \right) \right| = \left| \det \left([I \ 0] P_{j(i+1)}^{i+1} Y_{i+1} \right) \right|$.
6. Вычисляем симметричную матрицу $Q_{j(i+1)}^{i+1} = [0 \ I] P_{j(i+1)}^{i+1} Y_{i+1} \times ([I \ 0] P_{j(i+1)}^{i+1} Y_{i+1})^T$
7. Вызов функции $m(Y_i) = \text{Get_Number_Focal_Points_4}(Q_{j(i+1)}^{i+1}, P_{j(i)}^i, P_{j(i+1)}^{i+1}, \text{Coe}f_i, \tilde{\lambda})$

8. Прибавить к S вычисленное $m(Y_i)$ число фокальных точек на $(i, i + 1]$
9. Изменить $P_{j(i)}^i = P_{j(i+1)}^{i+1}$, $Q_{j(i)}^i = Q_{j(i+1)}^{i+1}$, $i = i + 1$
10. **end while**
11. **return** S

Подсчет фокальных точек на $(i, i + 1]$ главного решения (1.3.19) соответствующего уравнениям Штурма – Лиувилля четвертого порядка, основан на процедуре `Get_Number_Focal_Points_4` ($Q_{j(i+1)}^{i+1}, P_{j(i)}^i, P_{j(i+1)}^{i+1}, Coef_i, \tilde{\lambda}$), опишем алгоритм ее вычисления

Input: $Q_{j(i+1)}^{i+1}$ симметричная матрица из разложения (3.2.2)

$P_{j(i)}^i$ матрица симплектических ортогональных трансформаций

Output: число фокальных точек на $(i, i + 1]$ (см. замечание 4.1.5)

1. Если $i \leq n$, **return** 0
2. Формируем матрицы $B_i, D_i, \tilde{B}_i, \tilde{D}_i$ согласно формуле (3.3.1) и трансформации системы (3.2.9).
3. Определяем новую переменную $RESULT = 0$.
4. Записываем в $RESULT$ индекс матриц 2 на 2 согласно с (3.3.2).
5. Прибавляем к $RESULT$ значение (3.3.3).
6. Вычитаем из $RESULT$ значение (3.3.4).
7. Если $i = N + 1$, вычитаем из $RESULT$ $ind(-G_{j(N+1)} Q_{j(N+1)}^{N+1} G_{j(N+1)})$.
8. **return** $RESULT$

Замечание 4.1.5. Выше описанная процедура *Get_Number_Focal_Points_4*, не дает число фокальных точек на интервале $(i, i + 1]$ и применима только в общем алгоритме для вычисления фокальных точек на $(n, N + 1]$. Для того, чтобы вычислить фокальные точки на интервале $(i, i + 1]$ согласно (3.2.10), к *RESULT* надо прибавить разность

$$\text{ind}(-G_{j(i)}Q_{j(i)}^iG_{j(i)}) - \text{ind}(-G_{j(i+1)}Q_{j(i+1)}^{i+1}G_{j(i+1)}).$$

Замечание 4.1.6. Применение метода бисекции для решения краевых задач Штурма – Лиувилля (1.2.12) с разделенными граничными условиями (см. главу 4.3) и применение теоремы 2.4.2 сопряжено с необходимостью считать фокальные точки $m(Y_i)$, $m^*(Y_i)$ главного решения системы (1.3.19) с матрицами системы отличными от (1.2.14). Подсчет фокальных точек $m(Y_i)$, $m^*(Y_i)$ главного решения системы (1.3.19) с матрицами произвольной структурой описан в [59, §3].

Замечание 4.1.7. Для главного решения системы (1.3.19) с матрицами $\hat{W}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\lambda \hat{L}_i & I \end{bmatrix} \cdot \hat{S}_i$, где \hat{S}_i, \hat{L}_i определены в (2.4.4), (2.4.5), алгоритм вычисления $m^*(Y_i)$ отличается от первого алгоритма (см. выше) матрицей V , которую над взять согласно формулам [59, 3.14 и 3.18]. В этом случае вычисление $m^*(Y_i)$ связано с индексом симметричной матрицы размера не превосходящего $2n \times 2n$.

Замечание 4.1.8. Для вычисления отдельного собственного значения с точностью ε на заданном интервале (a, b) необходимо применить процедуру деления отрезка пополам $N \approx \log_2 \frac{(b-a)}{\varepsilon}$ раз. Заметим, что вычисление $\text{Count}^*(\tilde{\lambda})(\text{Count}(\tilde{\lambda}))$ требует для каждого $i \in (n, N+1]$, $([n, N+1))$ определения матриц $Q_{j(i)}^i, P_{j(i)}^i$ и вычисления $m^*(Y_i)(m(Y_i))$. Таким образом, метод

бисекции и процедуры вычисления функций $\text{Count}(\lambda)$, $\text{Count}^*(\lambda)$ позволяют вычислять отдельное собственное значение за $O(N)$ операций.

4.2. Примеры вычислений собственных значений дискретных краевых задач Штурма–Лиувилля с граничными условиями Дирихле

4.2.1. Краевые задачи Штурма – Лиувилля 4 порядка

Рассматривается разностные краевые задача Штурма – Лиувилля 4 – ого порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^2 r_k^{(2)} \Delta^2 y_{k-1} - \Delta r_k^{(1)} \Delta y_k + r_k^{(0)} y_{k+1} &= \lambda y_{k+1}, r_k^{(2)} \neq 0, \\ y_{-1} = y_0 = y_N = y_{N+1} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

В примерах 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 собственные значения вычислялись вторым алгоритмом 4.1.4

Пример 4.2.1. Рассмотрим уравнение (4.2.1) с постоянными коэффициентами, имеющее аналитическое решение.

Пусть $r_k^{(0)} = r^{(0)}$, $r_k^{(1)} = r^{(1)}$, $r_k^{(2)} = r^{(2)}$ постоянные коэффициенты. Тогда исходное уравнение (4.2.1) можно привести к виду:

$$y_{k+3} - \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(2)}} + 4 \right) y_{k+2} + \left(\frac{r^{(0)}}{r^{(2)}} + 6 + \frac{2r^{(1)}}{r^{(2)}} - \frac{\lambda}{r^{(2)}} \right) y_{k+1} - \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(2)}} + 4 \right) y_k + y_{k-1} = 0$$

Наложив ограничения:

$$\begin{aligned} r^{(1)}/r^{(2)} + 4 &= 0, \\ 0 \leq 1 + \lambda/2r^{(2)} - r^{(0)}/2r^{(2)} &= \cos \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

получим уравнение

$$y_{k+3} - 2 \cos \alpha \cdot y_{k+1} + y_{k-1} = 0. \quad (4.2.3)$$

Согласно определению 1.3.9, λ – собственное значение задачи (4.2.1) тогда и только тогда, когда вырождена матрица верхнего блока главного решения в точке $N+1$ соответствующей симплектической задачи (1.3.19), (1.2.17). Для построения главного решения соответствующей симплектической задачи используем два решения уравнения (4.2.3)

$$y_k^{(1)} = - \left(\frac{1}{2r^2 \sin \alpha} \right) \cdot \left(\left(1 + (-1)^k \right) \sin \frac{k\alpha}{2} \right),$$

$$y_k^{(2)} = - \left(\frac{1}{2r^2 \sin \alpha} \right) \cdot \Delta \left(\left(1 + (-1)^k \right) \cdot \sin \frac{k\alpha}{2} \right).$$

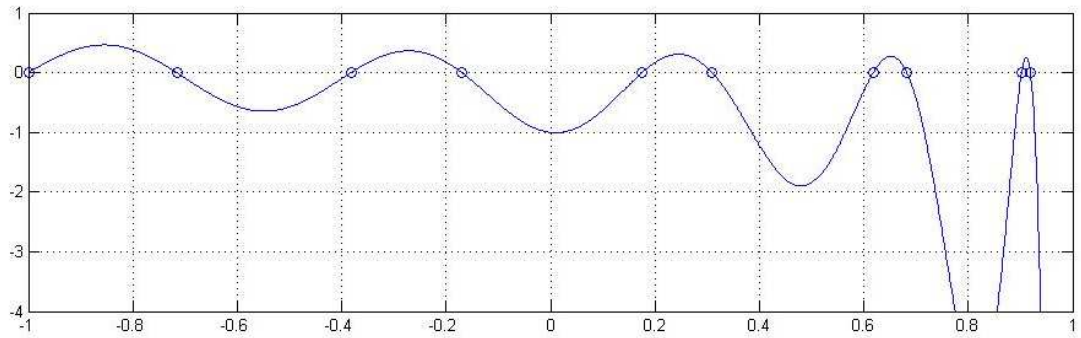


Рис. 4.1. Значение определителя верхнего блока главного решения $\det(X_{N+1}(\lambda))$ на интервале $\lambda \in [-1, 1]$

Определитель верхнего блока главного решения соответствующей симплектической задачи (1.3.19) с матрицей (1.2.17) имеет вид:

$$\det(X_{N+1}(\lambda)) = y_{N+1}^{(1)} \cdot \Delta y_N^{(2)} - y_{N+1}^{(2)} \cdot \Delta y_N^{(1)}$$

Положив $r^{(0)} = 1$, $r^{(1)} = -4$, $r^{(2)} = 1$, $N = 20$, построим $\det(X_{N+1}(\lambda))$

На Рис. 4.2 по оси ординат отмечаем разницу между собственными значениями, рассчитанными вышеописанным алгоритмом, и собственными значениями, рассчитанными стандартными средствами MATLAB - функцией `eig` для соответствующей пятидиагональной матрицы.

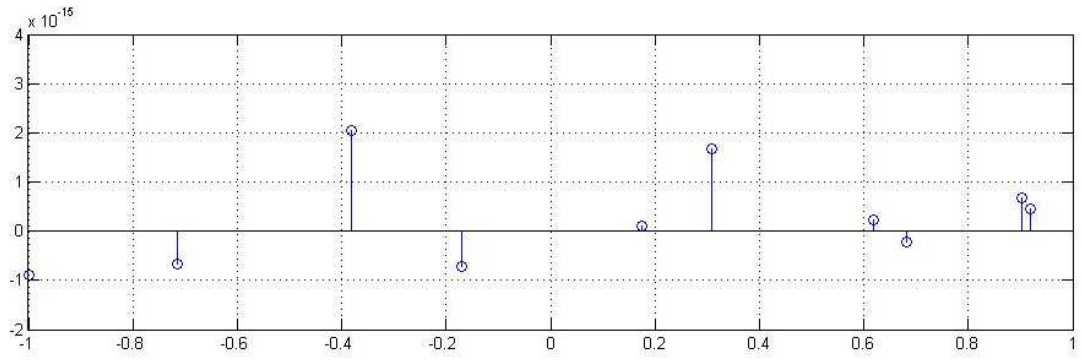


Рис. 4.2. Собственные значения на интервале $\lambda \in [-1, 1]$

Пример 4.2.2. Рассмотрим уравнение (4.2.1) с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} r_k^{(0)} &= 0.2 \cdot k + 2, \\ r_k^{(1)} &= 0.3 \cdot k - 3, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 26, \\ r_k^{(2)} &= 1. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Приведем график функции $Count(\lambda)$ вычисленной для данной задачи на конкретном интервале.

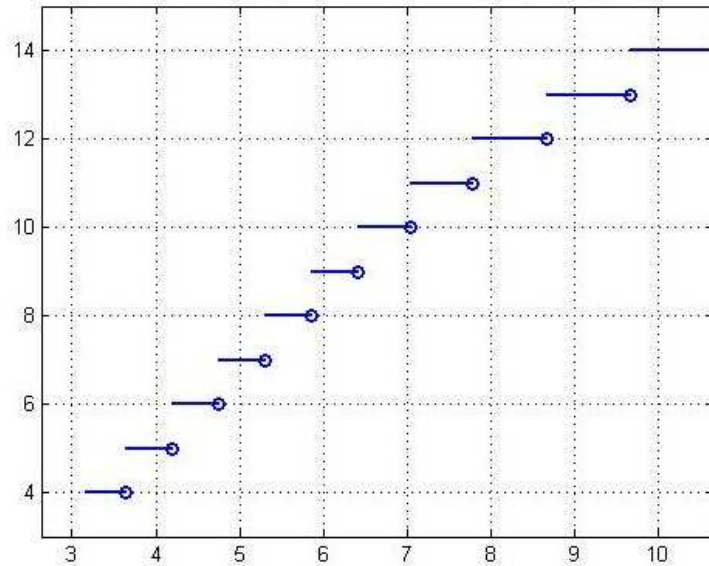


Рис. 4.3. Значения функции $Count(\lambda)$ на отрезке $[3.2, 10.5]$

На рис. 4.4 представлен спектр, где по оси абсцисс отмечены рассчитанные собственные значения, а на оси ординат разница между собственными значениями, рассчитанными алгоритмом, и собственными значениями

ями, рассчитанными стандартными средствами MATLAB - функцией *eig* для соответствующей пятидиагональной матрицы.

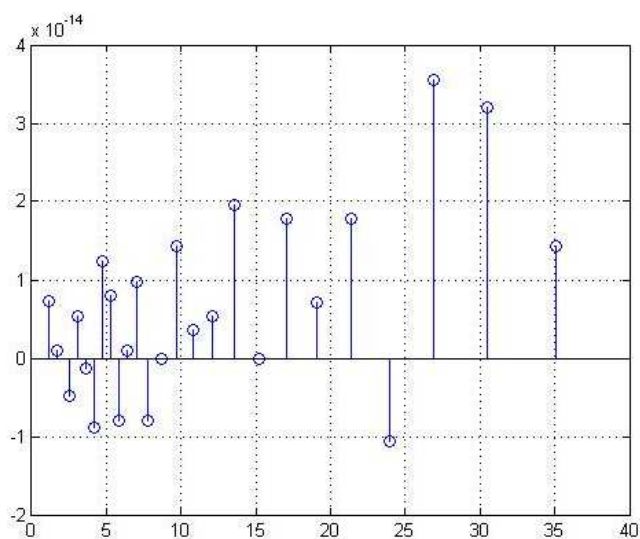


Рис. 4.4. Собственные значения (4.2.1) с коэффициентами (4.2.4)

Пример 4.2.3. Рассмотрим пример вычисления отдельных собственных значений задачи (3.1.2) заданной на достаточно большом интервале $N \in 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$. Для Штурма–Лиувилля 4 порядка

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_{k-1} &= \lambda y_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N+1, \\ y_{-1} &= y_0 = y_N = y_{N+1} = 0,\end{aligned}$$

для различных N вычислялись собственные значения $\lambda_{N/2}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Алгоритм 2 – описан 4.1.4 Алгоритм 3 – основан на теореме 2.4.4 и замечании 4.1.7. Оценивались временные характеристики расчетов на PC Pentium 4 3GHz. Результаты представлены в таблице 1.

В результате вычислительных экспериментов было подтверждено, что применение теоремы 3, позволяет сократить вычисления собственных значений в 2 раза.

$\varepsilon = 10^{-5}$	Алгоритм 2		Алгоритм 3	
	$t(c)$	$\lambda_{N/2}$	$t(c)$	$\lambda_{N/2}$
$N = 10^2$	0.79	3.917823	0.41	3.917823
$N = 10^3$	7.78	3.991645	3.89	3.991645
$N = 10^4$	77.5	3.999168	39.1	3.999168
$N = 10^5$	776.7	3.999916	389.7	3.999916

Таблица 4.1. Пример расчета собственных значений для модельной задачи

4.2.2. Вычисление собственных значений краевых задач высшего порядка

Для демонстрации возможностей программного комплекса в вычислении отдельных собственных значений дискретных краевых задач Штурма–Лиувилля высших порядков рассмотрим пример решения полной проблемы собственных значений для соответствующих симметричных ленточных матриц A (см. (1.2.15)) размерности $M \times M$, где $M \in \{125, 250, 500\}$, с шириной ленты $b \in \{5, 9, 13\}$. Построение тестовых ленточных матриц проводилось с помощью вращений Гивенса [76] матриц $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_M)$, где числа λ_i , $i = 1, \dots, M$ принадлежат некоторому распределению. Были выбраны 4 типа различных распределений собственных значений, где $\varepsilon = 1/M$:

1. однородное (от ε до 1): $\lambda_i = \varepsilon + (i - 1) \cdot \varepsilon$;
2. равномерное распределение собственных значений на интервале $[-1, 1]$;
3. геометрическое (от ε до 1): $\lambda_i = \varepsilon^{(M-i)/(M-1)}$;
4. случайное: собственные значения случайные числа, равномерно распределены на $[0, 1]$.

Переход от компонент ленточных матриц к коэффициентам уравнения Штурма – Лиувилля (1.2.12) проводился согласно [85, теорема 1]. В таблице 4.2 приведены максимальные абсолютная погрешности $\varepsilon_1 = \max_i |\lambda_i - \tilde{\lambda}_i|$, в таблице 4.3 приведены относительные погрешности $\varepsilon_2 = \max_i (|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i| / |\lambda_i|)$, где $\tilde{\lambda}_i$ - вычисленные собственные значения тестовых матриц.

№	M	ε_1		
		$b = 5$	$b = 9$	$b = 13$
1	125	1.2212e-015	6.7724e-015	1.1015e-011
	250	2.1094e-015	1.2546e-014	1.8653e-012
	500	3.2196e-015	1.1391e-013	3.6079e-012
2	124	7.7716e-016	7.1054e-015	1.0439e-013
	250	1.2212e-015	2.4203e-014	5.9974e-013
	500	1.0547e-015	1.1956e-014	4.4531e-013
3	125	3.1086e-015	2.4758e-014	8.4355e-013
	250	5.9952e-015	2.5979e-014	9.7589e-013
	500	6.7724e-015	4.9183e-014	1.2703e-012
4	125	1.8874e-015	2.0883e-013	6.5649e-012
	250	1.8874e-015	7.8604e-014	2.4639e-012
	500	3.3307e-015	3.2485e-013	1.2211e-011

Таблица 4.2. Таблица максимальных абсолютных погрешностей вычисленных собственных значений симметричных $M \times M$ матриц с шириной ленты b

Проведенные численные эксперименты определения собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с граничными условиями Дирихле демонстрируют точность программного комплекса. Отметим, что несмотря на результаты представленные в таблицах 4.2, 4.3 решение полной проблемы собственных значений не является эффек-

№	M	ε_2		
		$b = 5$	$b = 9$	$b = 13$
1	125	3.0791e-014	2.1337e-013	5.0413e-011
	250	2.8189e-014	5.0220e-013	6.6665e-012
	500	8.4134e-014	1.8213e-012	1.3079e-009
2	124	3.1760e-015	9.3472e-014	1.2448e-012
	250	5.9063e-015	1.2829e-013	2.7811e-012
	500	7.6332e-015	3.0091e-013	2.9199e-012
3	125	6.7847e-014	1.4785e-012	3.3515e-012
	250	1.4005e-012	1.2682e-012	6.9798e-012
	500	2.6590e-012	2.5118e-013	2.1426e-011
4	125	5.5927e-015	3.0874e-013	2.3509e-011
	250	1.2958e-014	7.8418e-012	1.2899e-011
	500	3.1163e-014	9.4353e-013	5.6240e-011

Таблица 4.3. Таблица максимальных относительных погрешностей вычисленных собственных значений симметричных $M \times M$ матриц с шириной ленты b

тивным для предлагаемого комплекса.

4.3. Примеры задач с разделенными граничными условиями

В работе [87] рассматривается процедура сведения задачи Штурма – Лиувилля высших порядков с различными разделенными краевыми условиями к задаче на собственные значения для ленточных матриц.

В данном параграфе рассмотрим сведение аппроксимаций, предложенных в работах [40], [41], самосопряжённых дифференциальных краевых задач

4-ого порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[r^{(2)}(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[r^{(1)}(x) \frac{du}{dx} \right] + r^{(0)}(x) u = \lambda w(x) u, r^{(2)}(x) > 0, \quad (4.3.1)$$

с некоторыми граничными условиями к дискретной задаче Штурма – Лиувилля 4 порядка с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta^2 r_i^{(2)} \Delta^2 y_{i-1} - \Delta r_i^{(1)} \Delta y_i + r_i^{(0)} y_{i+1} = \lambda w_i y_{i+1}, r_i^{(2)} \neq 0, 0 \leq i \leq N-2, \quad (4.3.2)$$

$$y_{-1} = y_0 = y_N = y_{N+1} = 0, \quad (4.3.3)$$

Для задачи (4.3.2) матрицы соответствующей системы (1.3.19) будет отличаться от (1.2.17), только

$$\mathcal{W}_i = \begin{bmatrix} w_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Согласно [40], [41] введем сетку G_h и сеточную функцию $u(x_i) = u_i$

$$G_h = \{x_0 = 0, \dots, x_i = iM, \dots, x_M = Mh = 1\}, \quad (4.3.5)$$

вводятся обозначения

$$u_{\bar{x}_i} = \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_{i-1})), u_{x_i} = \frac{1}{h} (u(x_{i+1}) - u(x_i)), u^{(-1)} = u_{i-1}, u^{(+1)} = u_{i+1}. \quad (4.3.6)$$

Соответствующая разностная консервативная схема согласно [40]:

$$(au_{\bar{x}x})_{\bar{x}x} - (bu_{\bar{x}})_x + du = \lambda^h e u, h < x < 1 - h, \quad (4.3.7)$$

$$a = \left[\int_0^1 \frac{1-s}{r^{(2)}(x+sh)} ds + \int_0^1 \frac{1-s}{r^{(2)}(x-sh)} ds \right]^{-1}, b = \int_{-1}^0 r^{(1)}(x+sh) ds, \quad (4.3.8)$$

$$d = \int_{-1/2}^{1/2} r^{(0)}(x+sh) ds, e = \int_{-1/2}^{1/2} w(x+sh) ds.$$

Уравнение (4.3.4) сводится к уравнению (4.3.7) на сетке G_h (4.3.5) при следующей замене:

$$\begin{aligned} N &= M - 2, \quad y_i = u_{i+1}, \quad r_i^{(2)} = \left[\int_0^1 \frac{1-s}{r^2((i+1)h+sh)} ds + \int_0^1 \frac{1-s}{r^2((i+1)h-sh)} ds \right], \\ r_i^{(1)} &= h^2 \int_0^1 r^{(1)}((i+1)h+sh) ds, \quad r_i^{(0)} = h^4 \int_{-1/2}^{1/2} r^{(0)}((i+2)h+hs) ds, \quad (4.3.9) \\ w_i &= h^4 \int_{-1/2}^{1/2} w((i+2)h+hs) ds \end{aligned}$$

Рассмотрим граничные условия типа "защемления" и "шарнирного закрепления" для уравнения (4.3.1) и его аппроксимации для схемы (4.3.7).

Условие "защемления" на левом конце имеет вид

$$\begin{aligned} u(0) &= u'(0) = 0, \\ y_1 &= 0, \quad y_{\bar{x},0} - \frac{h}{2} y_{xx,0} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

При переходе от (4.3.7) с (4.3.10) к дискретному уравнению (4.3.2) с граничными условиями Дирихле (4.3.3), в котором коэффициенты вычисляются согласно (4.3.9), получим что изменится значение одного коэффициента

$$\tilde{r}_0^{(0)} = r_0^{(0)} - \frac{1}{3} r_0^{(2)}$$

Аналогично и для условия "защемления" на правом конце:

$$\begin{aligned} u(1) &= u'(1) = 0, \\ y_{N-1} &= 0, \quad y_{\bar{x},N} + \frac{h}{2} y_{\bar{x}\bar{x},N} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

в (4.3.9) изменится значение одного коэффициента $\tilde{r}_{N-2}^{(0)} = r_{N-2}^{(0)} - \frac{1}{3} r_N^{(2)}$.

Данные результаты получены непосредственным сравнением коэффициентов перед (4.3.7) с соответствующими аппроксимациями граничных условий и уравнения (4.3.2) с граничными условиями Дирихле (4.3.3).

Условие "шарнирного закрепления" на левом конце имеет вид

$$\begin{aligned} u(0) &= u''(0) = 0, \\ y_1 - h y_{x,1} &= 0, \quad a_1 y_{xx,0} - h(a^{(+1)} y_{xx})_{x,0} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

При переходе от (4.3.7) с (4.3.12) к дискретному уравнению (4.3.2) с граничными условиями Дирихле (4.3.3) в котором коэффициенты вычисляются согласно (4.3.9), получим что изменится значение двух коэффициентов

$$\begin{aligned}\tilde{r}_0^{(0)} &= r_0^{(0)} - \frac{7}{8}r_1^{(2)} - r_0^{(2)} - \frac{1}{2}r_0^{(1)} \\ \tilde{r}_1^{(1)} &= r_1^{(1)} - \frac{1}{2}r_1^{(2)}.\end{aligned}$$

Аналогично и для условия "шарнирного закрепления" на правом конце

$$\begin{aligned}u(1) &= u''(1) = 0, \\ y_{N-1} + hy_{\bar{x},N-1} &= 0, a_{N-1}y_{\bar{x}\bar{x},N} + h(a^{(-1)}y_{\bar{x}\bar{x}})_{\bar{x},N} = 0,\end{aligned}\tag{4.3.13}$$

и в (4.3.9) изменится значение двух коэффициентов

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{N-2}^{(0)} &= r_{N-2}^{(0)} - \frac{7}{8}r_N^{(2)} - r_{N-1}^{(2)} - \frac{1}{2}r_{N-1}^{(1)} \\ \tilde{r}_{N-2}^{(1)} &= r_{N-2}^{(1)} - \frac{1}{2}r_{N-1}^{(2)}.\end{aligned}$$

Данные результаты позволяют вычислять собственные значения (4.3.1) с граничными условиями (4.3.10) или (4.3.12), (4.3.11) или (4.3.13) с помощью аппроксимаций предложенных в [40], [41] предлагаемыми в алгоритмах 4.1, с погрешностью $O(h^2)$.

Для граничных условий "свободного правого конца" $u''(l) = (r^{(2)}(l)u''(l))' = 0$ используем естественные граничные условия

$$\Delta^2 y_{N-2} = 0, \Delta r_{N-1}^{(2)} \Delta^2 y_{N-2} = 0, r_{N-1}^{(1)} = 0,\tag{4.3.14}$$

которые также могут быть сведены к (4.3.2), (4.3.3). Однако, следует отметить, что в этом случае получается схема имеющая первый порядок аппроксимации, что согласуется с численными расчетами собственных значений для вращающегося стержня 4.4.4.

4.4. Вычисление собственных частот колебаний моделей с распределенными параметрами

4.4.1. Расчет краевой задачи Штурма – Лиувилля 2-ого порядка периодическими граничными условиями

Рассмотрим пример модельной задачи с периодическими граничными условиями [1]

$$y'' + \lambda y = 0, 0 \leq t \leq 1$$

$$y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$$

№ СЗ	$N = 10^3$	$N = 10^6$	Точное СЗ
1	3.556266392e-009	3.637982445e-009	0
10	9.868794306e+002	9.869604400e+002	9.869604401e+002
11	9.868794306e+002	9.869604400e+002	9.869604401e+002
50	2.462341995e+004	2.467401095e+004	2.467401100e+004
200	3.819912734e+005	3.947841630e+005	3.947841760e+005
300	8.245532151e+005	8.882643303e+005	8.882643961e+005
500	2.000857267e+006	2.467400593e+006	2.467401100e+006

Таблица 4.4. Расчет собственных значений дифференциальной задачи Штурма – Лиувилля 2-ого порядка с периодическими граничными условиями

Точным решением в этом случае является $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2k} = \lambda_{2k+1} = (2\pi k)^2$ при $k = 1, 2, \dots$. Несмотря на предельную с аналитической стороны простоту этой задачи, при численном ее решении возникает трудность связанная с тем, что все СЗ, кроме первого, кратные.

Используя центральную схему аппроксимации второй производной получили дискретную краевую задачу Штурма – Лиувилля 2 порядка с периоди-

ческими граничными условиями рассмотренную в 3.5. Результаты расчетов представлены в таблице 4.4.

4.4.2. Поперечные колебания призматических стержней

При решении дифференциальных краевых задач Штурма–Лиувилля четвертого порядка использовались однородные схемы [40], [41], которые приводили к дискретной краевой задаче Штурма–Лиувилля 4 порядка с граничными условиями Дирихле (согласно с §4.3).

Рассмотрим пример поперечных колебаний призматических стержней для модели Эйлера–Бернулли 1.1.3. Оно описывается уравнением [35]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (4.4.1)$$

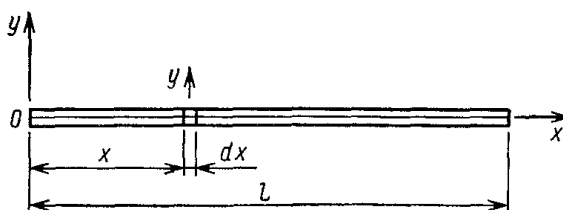


Рис. 4.5. Призматический стержень

Используя метод разделения переменных получим к следующее уравнение (1.1.26)

$$\left(EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4}\right) - \lambda X(x) = 0. \quad (4.4.2)$$

Для стержня с жестко зашечленными концами граничные условия имеют вид

$$(X)_{x=0,L} = 0, (X')_{x=0,L} = 0. \quad (4.4.3)$$

Для определения собственных частот $\lambda = \gamma^4$ колебаний решают следующее частотное уравнение [35]:

$$\cos(\gamma L) \operatorname{ch}(\gamma L) = 1.$$

Приведем результаты расчета параметра γ для граничных условий (4.4.3) в таблице 4.5.

№	$N = 100$	$N = 500$	$N = 1000$	Решение ЧУ
1	4.730159722	4.730045715	4.730041538	4.730040744
2	7.852743906	7.853185641	7.853199799	7.853204624
3	10.99318449	10.99550798	10.99558272	10.99560784
4	14.13063917	14.13689658	14.13709799	14.13716549
5	17.26524448	17.27820285	17.27861992	17.27875966

Таблица 4.5. Расчет параметра γ для призматического стержня с заземленными концами

№	$N = 100$	$N = 500$	$N = 1000$	Решение ЧУ
1	1.875152813	1.875102353	1.875104152	1.875104069
2	4.694202785	4.694095420	4.694092285	4.694091133
3	7.854290751	7.854738466	7.854752747	7.854757438
4	10.99306860	10.99544044	10.99551566	10.99554073
5	14.13051198	14.13689839	14.13710075	14.13716839
6	17.26497480	17.27820049	17.27861951	17.27875953

Таблица 4.6. Расчет параметра γ для заземленного правого конца и свободного левого

Для стержня с одним жестко заземленным концом и свободным правым граничные условия имеют вид

$$(X)_{x=0} = 0, (X')_{x=0} = 0, (X'')_{x=L} = 0, (X''')_{x=L} = 0 \quad (4.4.4)$$

Для определения собственных частот $\lambda = \gamma^4$ колебаний решают следующее частотное уравнение [35]:

$$\cos(\gamma L) \operatorname{ch}(\gamma L) = -1.$$

Приведем результаты расчета параметра γ для граничных условий (4.4.4) в таблице 4.6.

4.4.3. Поперечные колебания неоднородного стержня

Колебаниям неоднородных стержней, соответствует самосопряженная краевая задача на собственные значения и функции в безразмерных переменных описывается соотношениями

$$(r^{(2)}(x)u'')'' = \left(\lambda w(x) - r^{(0)}(x)\right) u, 0 \leq x \leq l \quad (4.4.5)$$

$$0 < p^- \leq p \leq p^+ < \infty, 0 < r^- \leq r \leq r^+ < \infty, 0 < q^- \leq q \leq q^+ < \infty$$

$$u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0 \quad (4.4.6)$$

Неизвестные параметр $\lambda > 0$ и функция $u(x)$ характеризуют частоты и формы свободных колебаний стержня соответственно. Коэффициент $r^{(0)2}(x)$ - определяет жесткость на изгиб, $w(x)$ - линейную плотность, $r^0(x)$ - упругость внешней среды.

Требуется найти последовательность собственных значений $\lambda = \lambda_n$ (частот $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$) и функций $u = u_n$ (форм колебаний). В теоретическом и прикладном аспектах основной интерес представляют низшие моды колебаний $n = 1, 2, \dots$ (условно $n \leq 10$).

Рассмотрим собственные колебания стержней переменной конической формы. Геометрические и инерционные характеристики стержня конической формы определяются выражениями:

$$\begin{aligned} R(x) &= R_0(1 - \alpha x/L), \quad S(x) = \pi R^2(x), \quad I(x) = (\pi/4) R^4(x), \\ V_\alpha &= V_1(3 - 3\alpha + \alpha^2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad r^{(2)}(x) = EI(x), \quad r^{(0)}(x) = dS(x), \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Здесь R - радиус, S - площадь, I - момент инерции поперечного сечения стержня, α - коэффициент, V_α - объем стержня, V_1 - объем при $\alpha = 1$ ($V_1 = \frac{1}{3}\pi R_0^2 L$),

E - модуль Юнга материала, d - объемная плотность. Значения всех параметров, кроме α , считаются фиксированными.

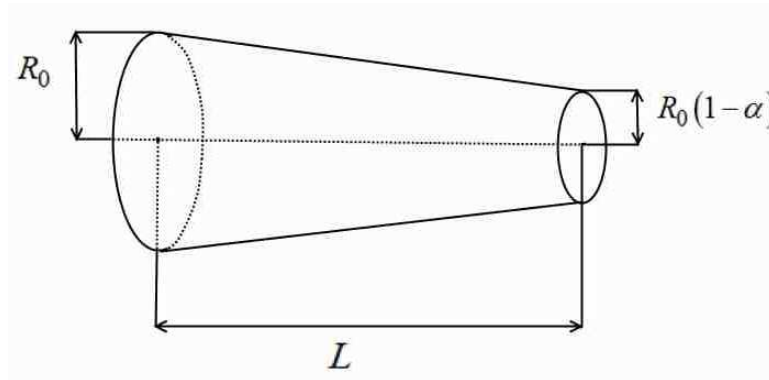


Рис. 4.6. Стержень конической формы, угол наклона определяется значением параметра α на правом конце

Введем безразмерные параметры и аргумент x , $0 \leq x \leq 1$, тогда коэффициенты жесткости и линейная плотность в уравнении (4.4.5), (4.4.7) будет иметь вид:

$$r^{(2)}(x) = (1 - \alpha x)^4, w(x) = (1 - \alpha x)^2. \quad (4.4.8)$$

Рассмотрим собственные колебания семейства конических стержней фиксированной длины и радиуса при $x = 0$ и переменного объема. При $\alpha = 0$ получается, однородный стержень цилиндрической формы. При $\alpha = 1$ получается, заостренный конический стержень, для которого в $x = 1 = l$ имеем особенность ($r^{(2)}(1) = w(1) = 0$) в уравнении (4.4.5) с (4.4.7).

Исследование собственных значений колебаний конических стержней при различных граничных условиях представляет интерес для прикладных задач. Рассмотрим варианты краевых условий:

1) оба конца жестко защемлены

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$$

2) жесткое закрепление (защемление) левого конца стержня; правый конец

шарнирно закреплен

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u''(1) = 0$$

3) жесткое закрепление (защемление) правого конца стержня; левый конец шарнирно закреплен

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u'(1) = 0$$

4) оба конца стержня шарнирно закреплены

$$u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0$$

Для различных граничных условий построены графики 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 зависимости от параметра $\alpha = 0, 0.01, \dots, 0.99$ для первых четырех собственных значений.

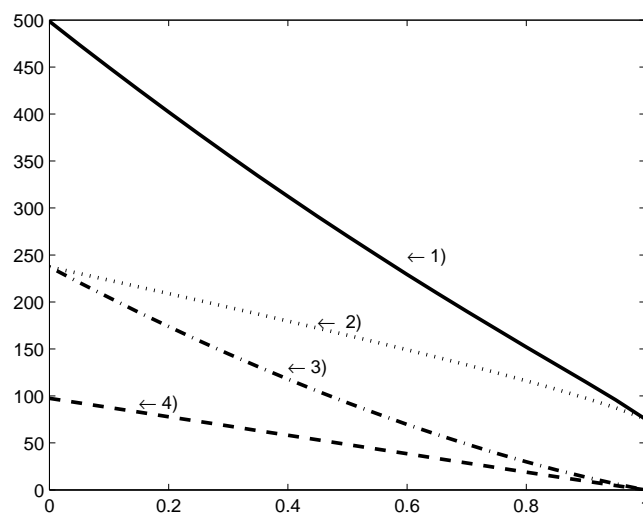


Рис. 4.7. Зависимость первых собственных значений от α при различных граничных условиях

Вычислительный эксперимент подтверждает, результаты полученные в [49] для первого собственного значения $\lambda_1(\alpha)$, отвечающего главной моде колебаний.

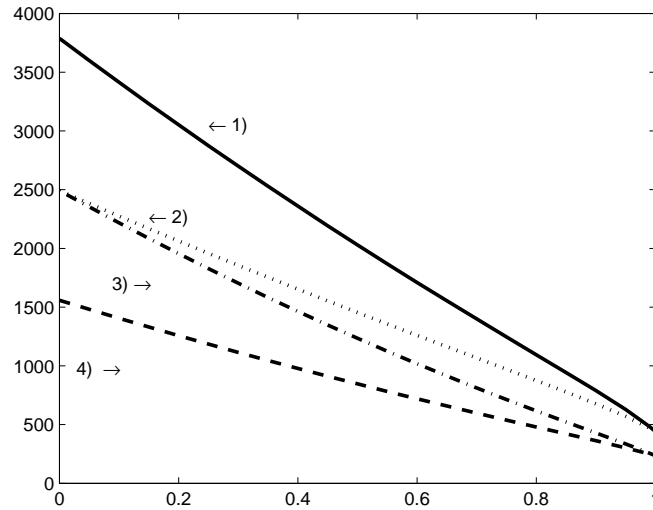


Рис. 4.8. Зависимость вторых собственных значений от α при различных граничных условиях

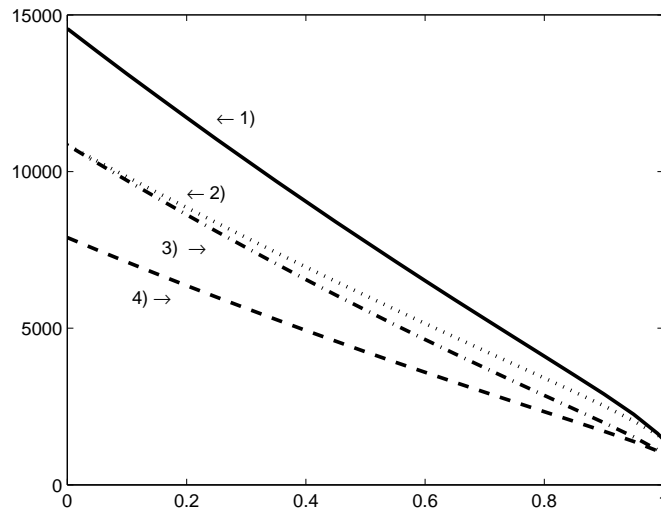


Рис. 4.9. Зависимость третьих собственных значений от α при различных граничных условиях

Для шарнирно закрепленного стержня при $\alpha \rightarrow 1$ первое собственное значение стремиться к 0.

Если левый конец защемлен, а правый шарнирно закреплен, первое собственное значение значительно больше, чем для первого типа граничных условий. При $\alpha \rightarrow 1$ первое собственное значение $\lambda_1(\alpha)$ стремиться к $\lambda_1(\alpha) \approx 76.5$,

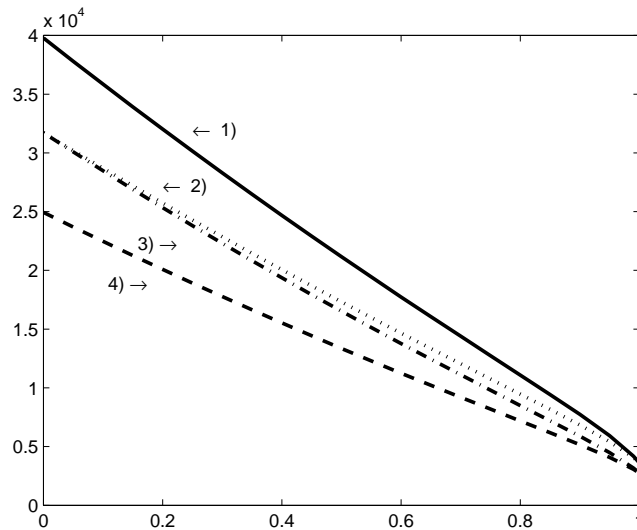


Рис. 4.10. Зависимость четвертых собственных значений от α при различных граничных условиях

что отвечает консольно закрепленной балке конической формы [49], [35].

В случае жестко закрепленных концов собственные значения $\lambda_1(\alpha)$ существенно больше, однако при $\alpha \rightarrow 1$ имеет место быстрое стремление к величине $\lambda_1(\alpha) \approx 76.5$.

4.4.4. Собственные поперечные колебания неоднородного вращающегося стержня

Исследуются собственные частоты поперечных колебаний вращающегося нерастяжимого прямолинейного упругого стержня. Во избежание неоправданного чрезвычайного усложнения модели предполагается, что направление вектора угловой скорости вращения постоянно в инерциальном пространстве. Смещения точек нейтральной линии могут происходить в плоскости вращения или ей ортогонально. Крутильные и продольные колебания не учитываются; верчение стержня отсутствует. Эти предположения для модели быстро вращающегося нерастяжимого прямолинейного упругого стержня приводят

к задаче [4]:

$$(EI(x)u'')'' = -\rho(x)\ddot{u} + \omega^2 (h(x)u')' + \omega^2 \rho(x)u \quad (4.4.9)$$

$$h(x) = \int_x^l s\rho(s) ds \quad (4.4.10)$$

Здесь E - модуль Юнга материала, $I(x)$ - момент инерции поперечного сечения стержня, $\rho(x)$ - линейная плотность, ω - угловая скорость. Для определенности рассмотрим практически важный случай жесткого закрепления (защемления) левого конца, через который проходит ось вращения, и свободного правого конца стержня:

$$u(0, t) = u'(0, t) \equiv 0, EI(x)u'' = (EI(x)u'')' \equiv 0 \quad (4.4.11)$$

Краевая задача (4.4.9-4.4.11) допускает разделения переменных x и t :

$$u(x, t) \sim X(x)\Theta(t) \quad (4.4.12)$$

Для координатной функции $X(x)$ 4.4.12 получим краевую задачу на собственные значения и функции:

$$(EI(x)X'')'' - \lambda\rho X - \omega^2 (h(x)X')' = 0, \lambda = \nu^2 + \omega^2 \quad (4.4.13)$$

$$X(0) = X'(0) = 0, EI(l)X''(l) = (EI(l)X'')' = 0 \quad (4.4.14)$$

Здесь ν^2 - параметр разделения переменных, ν - частота колебания во времени (переменной $\Theta \sim e^{i\nu t}$). Обобщенная задача (4.4.13), (4.4.14) является самосопряженной. В теоретическом и прикладном аспектах значительный интерес представляет исследование зависимостей собственных значений λ_n (частот) и функций X_n (форм $X_n/\|X_n\|$) для больших величин ω , сопоставимых и существенно больших низшей частоты ν_1 при $\omega = 0$, то есть $\lambda_1(0) = \nu_1^2(0)$. Научная литература содержит разночтения по вопросу зависимости $\nu_1(\omega)$ для

быстро вращающегося стержня; последующие собственные значения $\nu_n(\omega)$ исследованы весьма слабо. Рассмотрим, применение разработанного комплекса к решению данной задачи.

В рассмотрим искомые зависимости в случае однородного стержня $I, \rho = \text{const}$.

Введем единицу длины $L = l$ и частоты $\Omega = ((EI) / \rho l^4)^{1/2}$, тогда задача (4.4.13), (4.4.14) приводится к безразмерному виду

$$X^{IV} - (\omega^2/2)((1 - x^2)X')' - \lambda X = 0, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.4.15)$$

$$X(0) = X'(0) = X''(1) = X'''(1) = 0 \quad (4.4.16)$$

для которой $l = El = 1$, переменные x, X нормированы на l , а λ и ω^2 на Ω^2 . После приведения задача содержит один свободный параметр ω^2 , от которого зависят собственные значения $\lambda(\omega^2)$ и функции $X(x, \omega^2)$.

Приведем таблицу 4.7 демонстрирующую возможности применения программного комплекса для локализации собственных значений дифференциальных краевых для дальнейшего применения специальных методов, например, метод ускоренной сходимости Л. Д. Акуленко [3, 49].

В строчках таблицы 4.7 начинающихся знаком **‡** жирным шрифтом приведены значения полученные Л. Д. Акуленко [4]. В последних двух строках приведены расчеты для параметра $w^2 = 300$. В работе [4] отсутствует расчет при данном значении w , что обозначено прочерком. Из последней строки таблицы следует следующая локализация первых трех собственных значений при $w = 300$

$$340.6 < \lambda_1 < 341.6, \quad 2406 < \lambda_2 < 2416, \quad 9020 < \lambda_3 < 9030.$$

‡ При $w^2 = 5$	18.2996	517.914	3895.79
N=100	18.462046	518.83869	3897.2495
N=1000	18.304616	517.95446	3.895.9069
‡ При $w^2 = 20$	35.8300	615.113	4162.69
N=100	36.454812	618.67525	4171.4036
N=1000	35.891890	615.45957	4163.7951
‡ При $w^2 = 100$	125.494	1131.71	5571.55
N=100	128.40662	1149.2429	5618.1244
N=1000	125.78032	1133.3997	5577.0813
‡ При $w^2 = 200$	233.797	1771.75	7305.21
N=100	239.44563	1806.4761	7396.0476
N=1000	234.07178	1773.3194	7309.6723
При $w^2 = 300$	—	—	—
N=100	348.68626	2458.3276	9147.5986
N=1000	341.16039	2411.4257	9025.6021

Таблица 4.7. Локализации собственных значений для задачи о вращающемся стержне

4.5. Основные результаты главы 4

В главе 4 предложено два основных алгоритма вычисления собственных значений краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков. Работоспособность алгоритмов проверена на ряде дискретных краевых задач, в том числе полученных как конечноразностные аппроксимации дифференциальных краевых задач, описывающих колебания линейных систем. Основные результаты данной главы следующие:

1. Проведен обзор преимуществ использования алгоритмов вычисления собственных значений краевых задач, основанных на бисекции и вычислении функций от числа собственных значений, строго меньших, или не превосходящих заданный параметр $\tilde{\lambda}$ (функций $Count^*(\tilde{\lambda})$, и $Count(\tilde{\lambda})$). Описаны детали применяемого в работе варианта алгоритма бисекции.

2. Приводятся схемы двух алгоритмов вычисления собственных значений краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков. Первый алгоритм, предназначенный для вычисления собственных значений краевых задач с граничными условиями Дирихле для дискретных уравнений Штурма – Лиувилля порядка $2n$, основан на вычислении индекса симметрического оператора размерности $n + 1$. Второй алгоритм основан на формулах связи чисел фокальных точек (1.3.19) при симплектических ортогональных трансформациях (см. теорему 3.3) для уравнений Штурма–Лиувилля четвертого порядка (1.2.16). Данные алгоритмы лежат в основе программного комплекса DiscreteSturm для расчета собственных значений краевых задач для уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков.

3. Проведено тестирование программ комплекса DiscreteSturm для модельных дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля 4-го, 8-го, 12-го порядка с известными собственными значениями. При этом вычислительный эксперимент, организованный для некоторых из данных задач, связан с вы-

числением спектра соответствующих им ленточных симметрических матриц. Достигнутая высокая точность вычислений всех собственных значений подтверждает возможности приложений результатов данной работы для вычислений спектров ленточных матриц без приведения их к трехдиагональной форме, а также правильность теоретических результатов работы.

4. На примерах практических задач, возникающих при математическом моделировании колебаний линейных систем с распределенными параметрами, проиллюстрированы возможности программного комплекса DiscreteSturm. Рассмотрены примеры расчетов отдельных собственных значений или локализации отдельных собственных значений при моделировании поперечных колебания призматических стержней; стержней переменного поперечного сечения; неоднородных вращающихся стержней. Результаты проведенных исследований показали, что программный комплекс DiscreteSturm может быть важной составной частью существующих программных комплексов для расчета собственных значений непрерывных краевых задач и особенно полезен при локализации отдельных собственных значений с заданными номерами.

Заключение

1. В работе решена задача о разработке качественных и количественных методов исследования осцилляционных свойств решений дискретных уравнений Штурма – Лиувилля высших порядков, имеющая большое значение для численных методов исследования колебаний линейных систем.
2. Доказана осцилляционная теорема, позволяющая использовать метод бисекции для решения частичной проблемы собственных значений дискретной краевой задачи Штурма – Лиувилля высшего порядка.
3. Доказана теорема о совпадении осцилляционных свойств дискретного уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка и некоторого трехчленного уравнения, что позволяет сократить число операций в n раз при подсчете фокальных точек решения дискретного уравнения Штурма – Лиувилля порядка $2n$.
4. Разработаны алгоритмы подсчета фокальных точек главного решения уравнения Штурма – Лиувилля высшего порядка, отличительной особенностью которых является использование ортогональных трансформаций главного решения и структуры симплектической системы, соответствующей уравнению Штурма – Лиувилля высшего порядка.
5. Разработан метод решения частичной проблемы собственных значений дискретных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с заданной точностью, требующий $O(N)$ операций для вычисления отдельного собственного значения.
6. Создан комплекс программ, реализующий разработанный метод решения частичной проблемы собственных значений дискретных краевых

задач Штурма – Лиувилля высших порядков с заданной точностью. Проведены эксперименты вычисления собственных значений дискретных и дифференциальных краевых задач Штурма – Лиувилля высших порядков с различными граничными условиями, которые демонстрируют точность программного комплекса.

7. Результаты работы могут быть рекомендованы к исследованию продольных, крутильных и поперечных колебаний линейных систем с распределенными и сосредоточенными параметрами, а также к использованию в учебном процессе по направлению 231300 “Прикладная математика”.

Литература

1. Абрамов А. А. Нелинейная спектральная задача для уравнения типа Штурма–Лиувилля со связанными граничными условиями, зависящими от спектрального параметра // ЖВМ. 1999. Т. 39. С. 1119–1133.
2. Абрамов А. А. Модификация одного метода решения нелинейной самосопряженной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ЖВМ. 2011. Т. 51. С. 39–43.
3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Костин Г.В.. Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // МТТ. 1995. № 5. С. 180–191.
4. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Коровина Л. И.. Собственные поперечные колебания вращающегося стержня // МТТ. 2007. № 1. С. 3–14.
5. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
6. Бахвалов Н.С., Кобельков Г.М., Жидков Н.П.. Численные методы. Москва: Наука, 2001.
7. Бондаренко А. А., Елисеева Ю. В.. Один метод вычисления собственных значений дискретных задач Штурма–Лиувилля высших порядков // ВЕСТНИК МГТУ Станкин. 2011. Т. 13, № 1. С. 91–101.
8. Бондаренко А.А. Дискретная краевая задача Штурма–Лиувилля четвертого порядка и соответствующая трехчленная рекуррентная задача. // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. М.: Янус-К, 2011. Т. 14. С. 83–90.

9. Бондаренко А. А., Елисеева Ю. В. Применение теории Штурма при расчете собственных значений разностной задачи Штурма–Лиувилля четвертого порядка. // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. М.: Янус-К, 2009. Т. 12. С. 4–17.
10. Бондаренко А. А., Елисеева Ю. В. Вычисление собственных значений разностной задачи Штурма–Лиувилля высшего порядка. // Материалы XIII научной конференции МГТУ Станкин и Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ Станкин - ИММ РАН по математическому моделированию и информатике: Сборник докладов /Под ред. Казакова О.А. М.:ИЦ ГОУ ВПО МГТУ Станкин, 2010. С. 20–22.
11. Бондаренко А.А. Об одном методе расчета собственных значений разностной задачи Штурма–Лиувилля высшего порядка. Материалы XIII научной конференции МГТУ Станкин и Учебно-научного центра математического моделирования МГТУ Станкин - ИММ РАН по математическому моделированию и информатике: Сборник докладов /Под ред. Казакова О.А. М.:ИЦ ГОУ ВПО МГТУ Станкин, 2009. С. 23–25.
12. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. Москва: Издательство иностранной литературы, 1959.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 1998. 352 с.
14. Гельфанд И. М., Лидский В. Б.. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10, № 1. С. 3–40.
15. Глазман И. М. Осцилляционные теоремы для дифференциальных урав-

- нений высших порядков и спектр соответствующих дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1958. Т. 118, № 3. С. 423–426.
16. Годунов С.К., Костин В.И., Кирилюк О.П., Антонов А.Г.. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука Сиб. отделение, 1992. 360 с.
 17. Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
 18. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
 19. Елисеева Ю.В. Об одном алгоритме решения матричного разностного уравнения Риккати // ЖВМ. 1999. Т. 39, № 2. С. 187–194.
 20. Елисеева Ю.В. Сравнительный индекс для решений симплектических систем разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 431–444.
 21. Елисеева Ю.В. Теоремы сравнения для симплектических систем разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 9. С. 1329–1342.
 22. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1966. 472 с.
 23. Ильин В. П., Кузнецов Ю. И.. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.
 24. Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // УМН. 1969. Т. 24. С. 43–96.
 25. Корнев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний. Москва: Наука, 1988. 304 с.

26. Лидский В. Б. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1955. Т. 102, № 5. С. 877–880.
27. Николенко Л. Д. Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + f(x)y = 0$ // ДАН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 929–931.
28. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. Москва: Наука, 1968.
29. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
30. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. Москва: Мир, 1983. 384 с.
31. Рабинович М. И., Трубецков Д. И.. Введение в теорию колебаний и волн. Москва: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999. 560 с.
32. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. 616 с.
33. Свешников А.Г., Кравцов В.В., Боголюбов А.Н.. Лекции по математической физике. М.: Издательство Московского Университета, 1993. 352 с.
34. Стальмахов В. С. Магнитостатические спиновые волны в технике сверхвысоких частот // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике: 5-я зимняя школа-семинар инженеров. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1981. Т. 4. С. 37–41.
35. Тимошенко С. П., Уивер У., Янг Д. Х.. Колебания в инженерном деле. Москва: Машиностроение, 1985. 472 с.
36. Тихонов А. Н., Самарский А. А.. Разностная задача Штурма–Лиувилля // ЖВМ 1961. Т. 1. С. 784–805.

37. Тихонов А. Н., Самарский А. А.. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972. 736 с.
38. Уилкинсон Дж., Райнш Г.. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. Москва: Машиностроение, 1976. 389 с.
39. Уилкинсон Д. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970. 564 с.
40. Шоу Хао. Разностная задача Штурма-Лиувилля для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // ЖВМ 1963. Т. 3, № 6. С. 1014–1031.
41. Шоу Хао. Однородные разностные схемы для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // ЖВМ 1963. Т. 3, № 5. С. 841–860.
42. Якубович В. А.. Осцилляторные свойства решений линейных канонических систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 533–536.
43. Якубович В. А.. Условия колебательности и неколебательности для линейных канонических систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 5. С. 994–997.
44. Якубович В. А. Аргументы на группе симплектических матриц // Математический сборник. 1961. Т. 55, № 3. С. 255–279.
45. Якубович В. А. Осцилляционные свойства решений канонических уравнений // Математический сборник. 1962. Т. 56, № 1. С. 3–42.

46. Agarwal R., M. Bohner A. Peterson, C. Ahlbrandt. Discrete Linear Hamiltonian Systems: A Survey // Dynamic systems and Applications. 1999. Vol. 8. Pp. 307–333.
47. Ahlbrandt C.D. Dominant and Recessive solutions of symmetric three term recurrences // Journal of differential equations. 1994. Vol. 107. Pp. 238–258.
48. Ahlbrandt C. D. Equivalence of discrete Euler equations and discrete Hamiltonian systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1993. no. 180. Pp. 498–517.
49. Akulenko L. D., Nesterov S. V.. High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2005.
50. Amrein W. O., Hinz A. M., Pearson D. B. Sturm-Liouville theory past and present. Basel: Springer, 2005. 348 pp.
51. Auckenthaler T., Bungartz H. J., Huckle T., Blum V. et al. Parallel solution of partial symmetric eigenvalue problems from electronic structure calculations // Parallel Computing. 2011. Vol. 37. Pp. 783–794.
52. Bailey P.B., Everitt W.N., Zettl A. The SLEIGN2 Sturm-Liouville Code // ACM Trans. Math. Software. 2001. Vol. 21. Pp. 143–192.
53. Bohner M. Linear Hamiltonian difference systems: Disconjugacy and Jacobi-type conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1996. no. 199. Pp. 804–826.
54. Bohner M. On disconjugacy for Sturm-Liouville difference equation // Journal of Difference Equations and Applications. 1996. Vol. 2. Pp. 227–237.
55. Bohner M. Discrete Sturmian Theory // Mathematical Inequalities and Applications. 1998. Vol. 1. Pp. 375–383.

56. Bohner M., Došlý O. Disconjugacy and transformations for symplectic systems // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1997. no. 3. Pp. 707–743.
57. Bohner M., O. Došlý, Kratz W. Inequalities and asymptotics for Riccati matrix difference operators // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1998. Vol. 221, no. 1. Pp. 262–286.
58. Bohner M., O. Došlý, Kratz W. Discrete Reid roundabout theorems // Dynamic systems and Applications. 1999. Vol. 8. Pp. 345–352.
59. Bondarenko A. A., Elyseeva J. V. The Schur complement in an algorithm for calculation of focal points of conjoined bases of symplectic difference systems // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. Vol. 67, no. 4. Pp. 455–474.
60. Bondarenko A. A., Elyseeva J. V. Calculating eigenvalues of discrete fourth order Sturm-Liouville problems. // Mathematical Models of Non-Linear Phenomena, Processes and Systems, Nova Science Publishers NY, USA, 2009. Pp. 272–281.
61. Chen S., Erbe L.. Oscillation and nonoscillation for systems of self-adjoint second-order difference equations // Siam J. Math. Anal. 1989. Vol. 20, no. 4. Pp. 939–949.
62. Coppel W.A. Disconjugacy. Berlin: Springer, 1971.
63. Došlý O., Kratz W. A Sturmian separation theorem for symplectic difference systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 325. Pp. 333–341.
64. Coddington E.A., Levinson N.. Theory of ordinary differential equations. London: McGRAW W-HILL BOOK COMPANY, INC., 1955. 474 pp.

65. Elyseeva J. V. A transformation for symplectic systems and the definition of a focal point // Computers & Mathematics with Applications. 2004. T. 47, № 1. C. 123–134.
66. Elyseeva J. The comparative index for conjoined bases of symplectic difference systems // Difference equations, Special functions and Orthogonal polynomials, Proceedings of the International Conference Munich, Germany, 25 – 30 July 2005 / Ed. by Elaydi S., Cushing J., Lasser R., all. Singapore: World Scientific, 2007. Pp. 168–177.
67. Elyseeva J.V. Transformations and the number of focal points for conjoined bases of symplectic difference systems // Journal of Difference Equations and Applications. 2009. T. 15, № 11. C. 1055–1066.
68. Elyseeva J.V. On relative oscillation theory for symplectic eigenvalue problems // Applied Mathematics Letters. 2010. T. 23, № 10. C. 1231–1237.
69. Erbe L., Yan P. Disconjugacy for linear Hamiltonian difference systems // J. Math. Anal. Appl. 1992. Vol. 167. Pp. 355–367.
70. Givens J.W. Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix // Oak Ridge National Laboratory. 1954. Vol. ORNL-1574.
71. Gladwell G. Inverse Problems in Vibration. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer academic publishers, 2004.
72. Greenberg L. A. Prüfer method for calculating eigenvalues of selfadjoint systems of ordinary differential equations Part 1 // University of Maryland Technical Report TR91-24. 1991.
73. Greenberg L., Marletta M.. Oscillation theory and numerical solution of fourth

- order Sturm-Liouville problems // IMA J. Numer. Anal. 1995. Vol. 15. Pp. 319–356.
74. Greenberg L., Marletta M.. The code SLEUTH for solving fourth order Sturm-Liouville problems // ACM Trans. Math. Software. 1997. Vol. 23. Pp. 453–493.
 75. Greenberg L., Marletta M.. Oscillation theory and numerical solution of sixth order Sturm-Liouville problems // SIAM J. Numer. Anal. 1998. Vol. 35. Pp. 2070–2098.
 76. LAPACK Working Note 9 // Ed. by Demmel J., McKenney A. Computer science dept. technical report. New York: Courant Institute, 1989. 19 pp.
 77. On the correctness of Parallel Bisection in Floating Point // Ed. by H. Ren J. Demmel, I. Dhillon. Computer science division technical report. University of California: Berkeley, 1994. 38 pp.
 78. Shi Y., Lv H.. Error estimate of eigenvalues of perturbed second-order discrete Sturm-Liouville problems // Linear Algebra and its Applications. 2009. Vol. 430. Pp. 2389–2415.
 79. Shi Y., Sun H.. Eigenvalues of second-order difference equations with coupled boundary conditions // Linear Algebra and its Applications. 2006. Vol. 414. Pp. 361–372.
 80. Hartman P. Ordinary differential equations. New York: John Wiley & Sons, 1964. 612 pp.
 81. Higham N. J. Accuracy and stability of numerical algorithms. Philadelphia: SIAM, 2002. 680 pp.

82. Hilscher R.S., Zeidan V. Symmetric Three-Term Recurrence Equations and Their Symplectic Structure // Advances in Difference Equations. 2010. Vol. 2010.
83. Kahan W. Accurate eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix. Technical report No CS41. Computer science department School of Humanities and Sciences: Stanford University, 1966. 53 pp.
84. Kratz W. Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory. Berlin: Akademie Verlag, 1995.
85. Kratz W. Banded matrices and difference equations // Linear Algebra and its Applications. 2001. no. 337. Pp. 1–20.
86. Kratz W. Discrete Oscillation // Journal of Difference Equations and Applications. 2003. Vol. 9. Pp. 127–135.
87. Kratz W. Banded matrices and discrete Sturm-Liouville Eigenvalue Problems // Advances in Difference Equations. 2009. 18 pp.
88. Kratz W., Došlý O. Oscillation theorems for symplectic difference systems // Journal of Difference Equations and Applications. 2007. Vol. 13. Pp. 585–605.
89. Kratz W., Tentler M.. Recursion formulae for the characteristic polynomial of symmetric banded matrices // Linear Algebra and its Applications. 2008. Vol. 428. Pp. 2482–2500.
90. Pryce J. D. Classical and vector Sturm-Liouville problems: recent advances in singular-point analysis and shooting-type algorithms // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. Vol. 50. Pp. 455–470.
91. Reid W.T. Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations. New York - Berlin - Heidelberg: Springer-Verlag, 1980.

Приложение А

Описание программного комплекса

Описание комплекса программ для расчета собственных значений разностной задачи Штурма-Лиувилля высшего порядка.

А.1. Основные характеристики комплекса.

А.1.1. Назначение программного комплекса

Комплекс программ предназначен для решения частичной проблемы собственных значений

1. Дискретных краевых задач Штурма–Лиувилля
 - высших порядков с граничными условиями Дирихле,
 - 4 порядка с разделенными граничными условиями типа "защемления" и "шарнирного закрепления".
2. Симметричных ленточных матриц.

Под частичной проблемой собственных значений понимают задачу вычисления

- отдельного собственного значения с данным номером;
- группы собственных значений с заданными номерами r_1, r_2, \dots, r_n ;
- собственных значений на заданном интервале (a, b) .

Эти задачи также определяют тип метода бисекции используемого при решении задачи.

А.1.2. Структура и организация программного комплекса

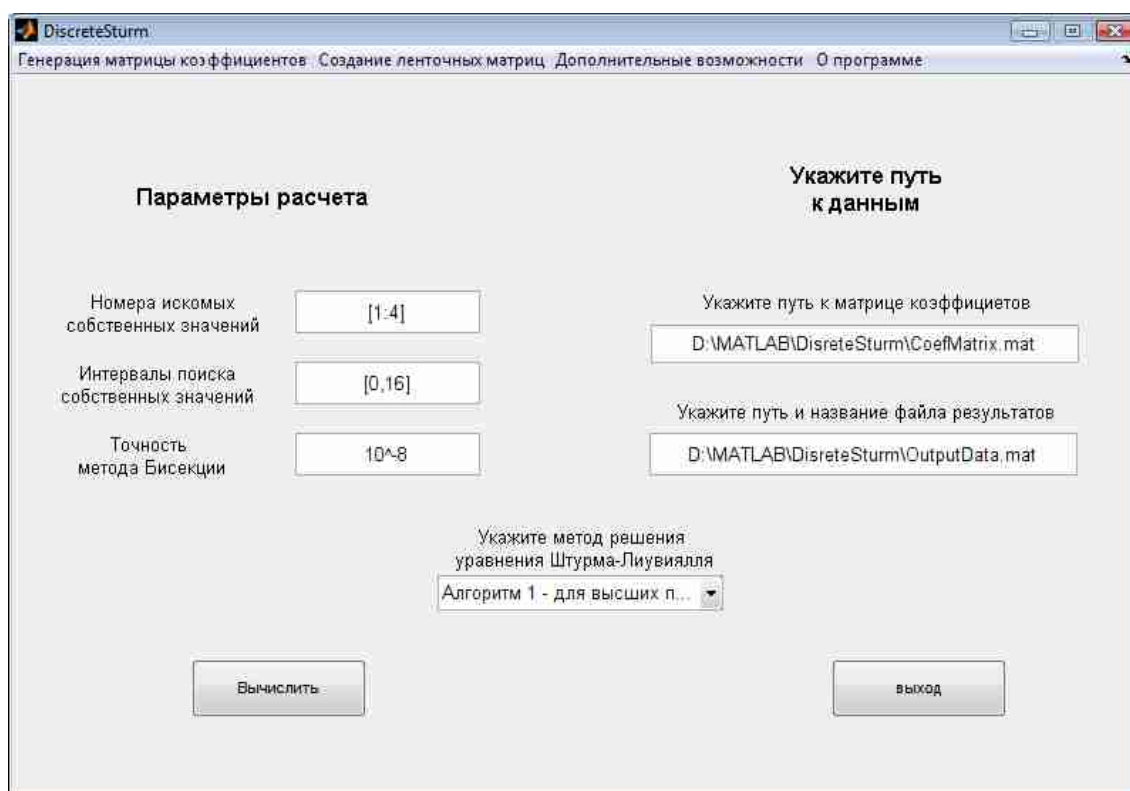


Рис. А.1. Главное диалоговое окно комплекса программ DiscreteSturm

Программный комплекс состоит из несколько функционально взаимосвязанных модулей.

Диалого-графический модуль отображает на мониторе компьютера результаты процесса взаимодействия пользователя и программного комплекса. Он упрощает процесс формирования задачи программному комплексу и позволяет

- формировать задачи из базы данных задач
- указывать путь к файлам содержащим данные необходимые для постановки задачи
- формировать задачи введением необходимых данных в режиме создания задачи

- удобно определять параметры расчетов

Он отображает результаты вычислений в виде графиков, таблиц данных, сообщений о некорректно поставленных условиях и другое. Его особенностью является возможность управлять процессом вычислений в интерактивном режиме.

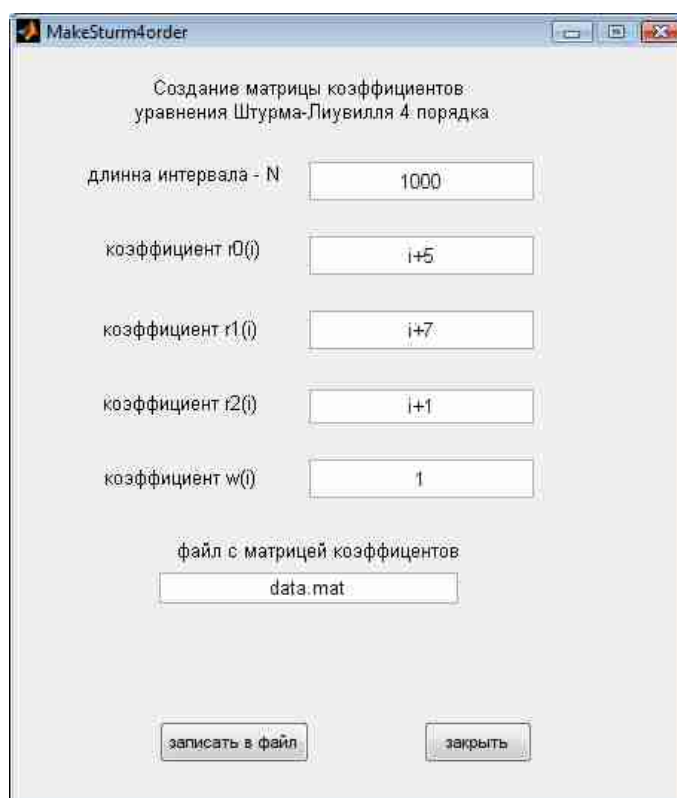


Рис. А.2. Окно создания матрицы коэффициентов для уравнения Штурма–Лиувилля 4-го порядка программного комплекса DiscreteSturm

Модуль предварительной работы с данными. Необходимость создания этой структурной единицы объясняется большой размерностью разностных задач Штурма-Лиувилля и необходимостью функционального задания коэффициентов системы. А также необходимостью сравнения точности вычисления собственных значений. Для чего реализованы процедуры:

1. *MakeSturm4order* – создания матрицы коэффициентов уравнения

Штурма-Лиувилля четвертого порядка, используя аналитическое задание функций коэффициентов от переменных $i \in \mathbb{N}$;

2. *ApproxSturm4order* – создания матрицы коэффициентов уравнения Штурма-Лиувилля возникающих при аппроксимации соответствующих дифференциальных задач четвертого порядка с граничными условиями заземления и шарнирного закрепления;
3. *BM2Coef* – создания матрицы коэффициентов краевой задачи Штурма-Лиувилля высшего порядка с нулевыми граничными условиями Дирихле соответствующей данной ленточной матрице;
4. *Coef2BM* – создания ленточной матрицы на основе матрицы коэффициентов данной краевой задачи Штурма-Лиувилля граничными условиями Дирихле;
5. *BandedMatrix* – создания ленточных матриц с помощью вращений Гивенса [76] с заданными собственными значениями, как из базы типов распределений, так и с помощью распределения заданного пользователем.

В результате работы программ пользователь может произвести сравнение вычисленных собственных значений рассчитанных разработанными алгоритмами и собственными значениями рассчитанными для соответствующей ленточной матрицы встроенными средствами *MATLAB*.

Комплекс вычислительных алгоритмов включает в себя основные процедуры:

Вычисление функции $Count^*(\lambda)$ (§4.1.3), использующей $Get_Number_Focal_Point(i)$ – подсчет фокальных точек главного решения уравнения Штурма-Лиувилля высшего порядка на полуинтервале $[i, i + 1)$.

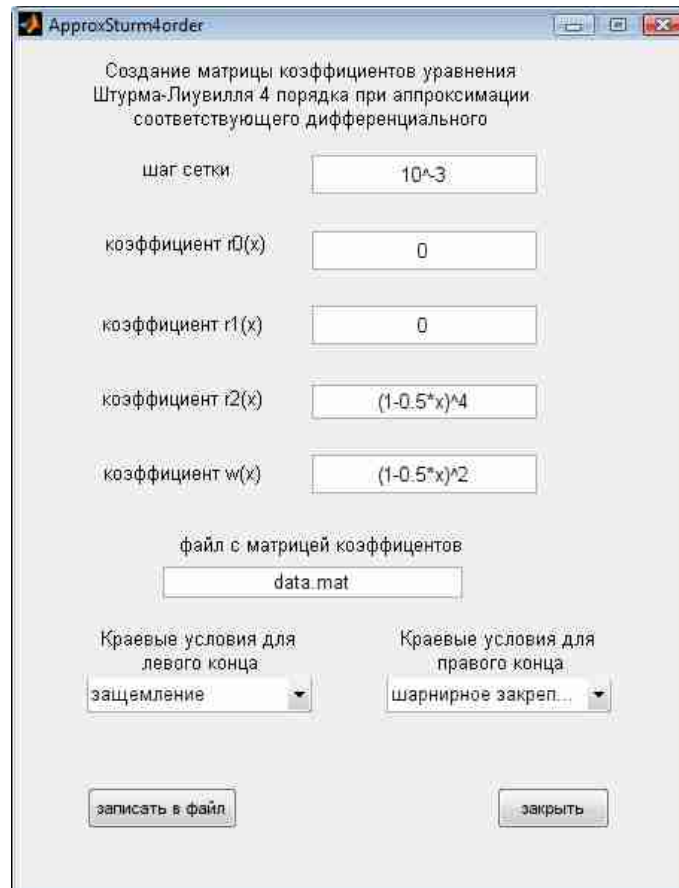


Рис. А.3. Окно создания матрицы коэффициентов для уравнения Штурма–Лиувилля 4 порядка, возникающего при аппроксимации соответствующей дифференциальной задачи, программного комплекса DiscreteSturm

Вычисление функции $Count(\lambda)$ (§4.1.4), использующей $Get_Number_Focal_Point4(i)$ – подсчет фокальных точек главного решения уравнения Штурма–Лиувилля четвертого порядка на полуинтервале $(i, i + 1]$.

Вычисление функции $Count_cut(\lambda)$, использующей $Get_Number_Focal_Point4_cut(i)$ – подсчет фокальных точек главного решения симплектической системы соответствующей уравнению Штурма–Лиувилля 4 порядка на полуинтервале $[i, i + 2)$ получаемой согласно теореме 2.4.4 и замечанию 4.1.7.

Bisection – реализация метода бисекции для вычисления отдельного или

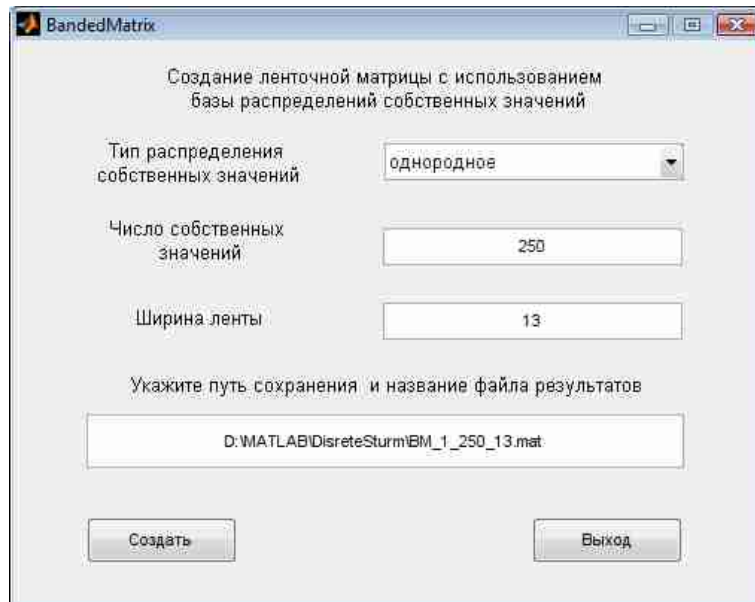


Рис. А.4. Окно создания ленточной матрицы программного комплекса DiscreteSturm

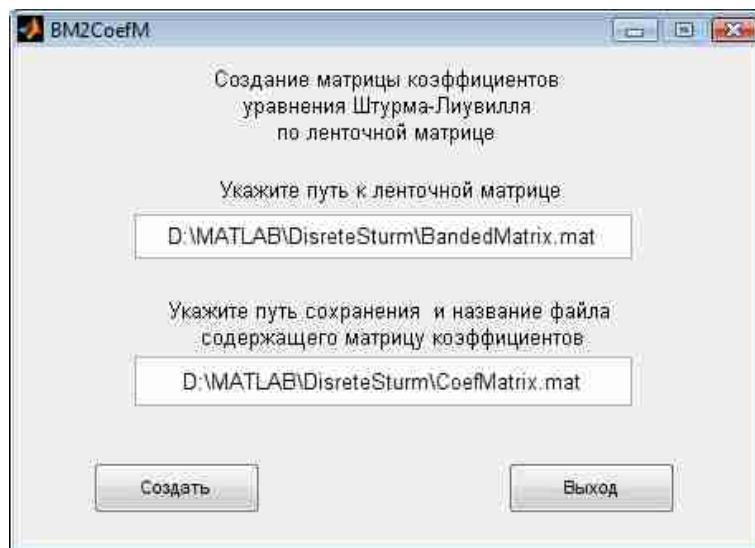


Рис. А.5. Окно создания матрицы коэффициентов программного комплекса DiscreteSturm

нескольких (M) собственных значений с заданными номерами и с заданной погрешностью за $O(N)$ операций (§4.1.1 и §4.1.2, замечание 4.1.8).

$MAX_{\varepsilon_{abs}}$ – сравнение вычисленных собственных значений с исходными собственными значениями задачи и определения наибольшей по модулю абсолютной погрешности.

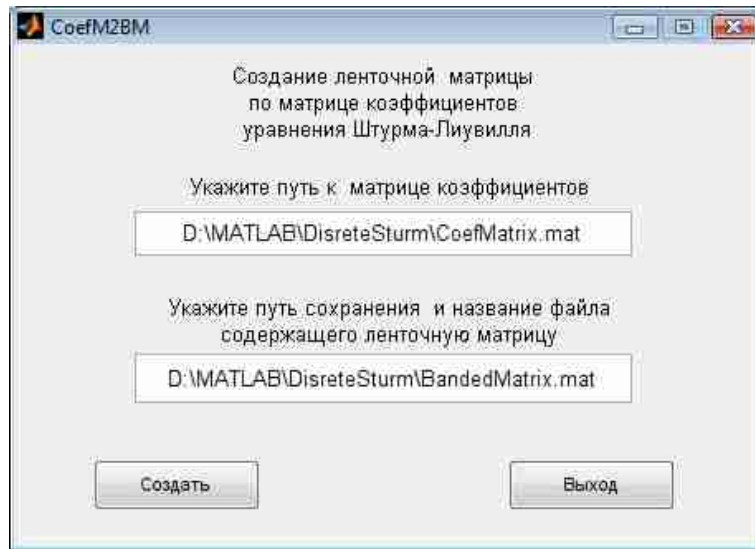


Рис. А.6. Окно создания ленточной матрицы программного комплекса DiscreteSturm

$MAX_{\varepsilon_{rel}}$ – сравнение вычисленных собственных значений с исходными собственными значениями задачи и определения наибольшей по модулю относительной погрешности.

$draw_graph$ – построение графиков функций $Count^*(\lambda)$, $Count(\lambda)$, $Count_cut(\lambda)$.

Программный комплекс оснащен процедурами тестирования проводимых вычислительных экспериментов с использованием разнообразных модельных данных, генерируемых с использованием вышеописанного модуля предварительной работы с данными.

На рисунке [А.7](#) представлена схема программного комплекса DiscreteSturm.

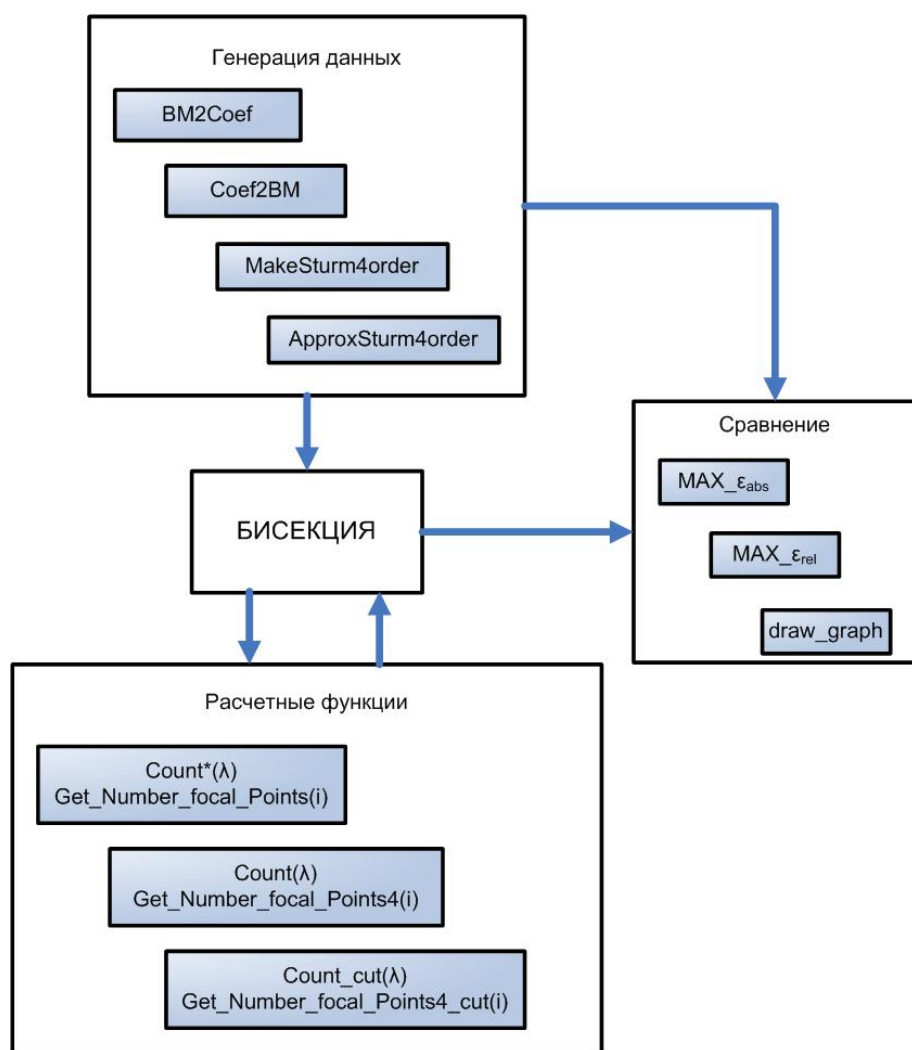


Рис. А.7. Схема программного комплекса DiscreteSturm