МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ РАН

---

Выпускная квалификационная работа по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
НА ТЕМУ:

# Методы решения игр с неполной информацией (на примере игры "сороконожка")

Студент ______________________ Габдрахманова Л. И.

Научный руководитель к.ф-м.н. ______________ Бондаренко А.А.

Зав. кафедрой д.ф-м.н., профессор______________ Четверушкин Б.Н.

МОСКВА, 2020

# Содержание


**1 Введение** **2**

1.1 Актуальность . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

**2 Сильное и слабое секвенциальное равновесие** **4**

2.1 Основные определения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

2.2 Решение для игры «сороконожка» с 4 шагами . . . . . . . . 5

**3 Равновесие дискретного отклика** **8**

3.1 Основные определения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

3.2 Интерпретация РДО . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

3.3 Решение для игры с 4 шагами . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

**4 Описание работы программы** **12**

4.1 Пояснение (Рекурсивная версия) . . . . . . . . . . . . . . . . 12

4.2 Алгоритм (Рекурсивная версия) . . . . . . . . . . . . . . . . 14

4.3 Код программы на языке Python (Рекурсивная версия) . . 14

4.4 Код программы на языке Python (Динамическая версия) . 16

**5 Исследование стратегий игроков** **18**

5.1 Исследование классического варианта игры «сороконожка» 18

5.2 Сравнение результатов с экспериментом для классической версии длины 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

5.3 Исследование варианта игры «сороконожка» с постоянной ценой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

5.4 Исследование варианта игры «сороконожка» с тремя игроками . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

**6 Заключение** **34**

**Литература** **36**

# 1 Введение

Целый ряд предсказаний классической теории игр, основанных на рациональном поведении человека, идет в разрез с результатами экспериментов. В качестве примеров можно привести такие игры как «сороконожка», «ультиматум», «диктатор», «производство общественного блага». Действительно, метод обратной индукции для игры «сороконожка» дает нам однозначный ответ, что надо останавливать игру на первом ходе. Однако Маккельви и Полфри в своей работе 1992 года [8] показали, что более 60% игроков останавливались на 3 или на 4 ходе из 7 возможных в проводимых ими экспериментах. Причинами такого поведения могут являться, например, сложность полного обратного анализа игры, несмотря на ее простой внешний вид, или возможное альтруистичное поведение игроков. Моделирование поведения человека в приведенных выше играх до конца не изучено и продолжает оставаться актуальной темой для исследований.

## 1.1 Актуальность

Для иллюстрации необходимости применения описанных в работе методов рассмотрим игру "Ультиматум"и прогноз, который дает для нее классическая теория игр.

Описание игры:

Пусть есть два игрока, первый получает бесконечно делимую денежную единицу, и он в свой ход может предложить некоторый дележ этой единицы. Второй игрок в свою очередь может одобрить или не одобрить этот дележ, во втором случае оба теряют все, то есть их выигрыш становится равным (0,0)[1]. (см рис. 1 на стр. 3)

Будем использовать метод обратной индукции, который работает следующим образом:

После построения профиля стратегий берутся все вершины, такие, что ниже этих вершин игра заканчивается. Находится оптимальное действие каждого игрока в каждой такой вершине (если их несколько, то выбирается одно любое из них). Далее рассматриваются вершины одним уровнем выше и находятся оптимальные действия в них. В конечной игре рано или поздно будет достигнута начальная вершина. [3]

Принцип обратной индукции говорит о том, что при любом дележе кроме (1,0) второй игрок однозначно одобряет дележ, так как он для

[1]Будем обозначать выигрыши игроков в виде пары чисел: на первом месте выигрыш первого, на втором - второго.

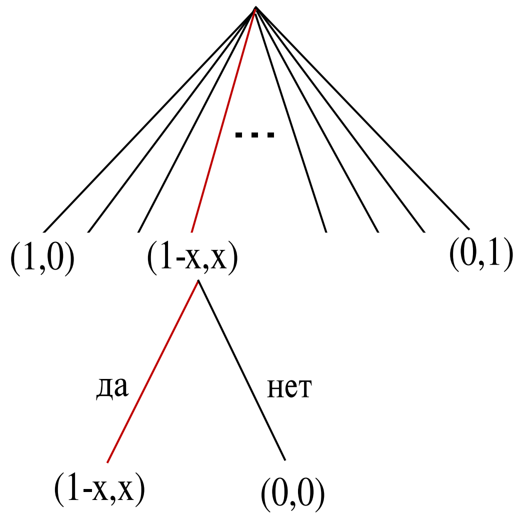


Рис. 1: Игра "Ультиматум"

себя сравнивает некоторую сумму (сколь угодно малую) и 0, при дележе (1,0) второй игрок может как одобрить, так и не одобрить дележ. Тогда по принципу обратной индукции единсветнное равновесие возникает, когда первый игрок предлагает дележ (1,0), а второй соглашается. Конечно, такая ситуация выглядит абсурдной. На практике (в экспериментах) возникает некоторое распределение согласий второго игрока на дележ. Это распределение имеет выраженный пик.[6] Можно выделить две основные причины иной реализации игры на практике. Первой причиной является альтруизм. Вторая причина заключается в том, что второй игрок часто отвергает дележ, который кажется ему несправедливым, и первый игрок вынужден делиться. В статье [7] описаны эксперименты, в которых игроки, отвергали дележи, приносящие им до половины денежной единицы.

Глава 2 описывает применение метода секвенциального равновесия к игре Сороконожка с 4 шагами. В главе 3 изложены основные определения и пример решения методом равновесия дискретного отклика. Главы 4 и 5 показывают процесс и результаты моделирования классической игры Сороконожка, игры с постоянной суммой и игры с тремя игроками.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Содержание диплома изложено на 37 страницах машинописного текста. В тексте имеется 26 рисунков. Список литературы включает 8 наименований.

# 2 Сильное и слабое секвенциальное равновесие

## 2.1 Основные определения

**Определение 2.1.** *Пусть* $\Gamma$ *- игра в развернутой форме,* $h$ *- информационное множество в этой игре. Назовем верой* $\mu_h$ *распределение вроятностей на вершинах, входящих в* $h$*. Обозначим через* $\mu = (\mu_h)$ *систему вер в игре* $\Gamma$ *- распределение вероятностей для всех информационных множеств.*

**Определение 2.2.** *Пусть* $\Gamma$ *- игра в развернутой форме,* $\sigma$ *- профиль поведенческих стратегий в этой игре. Пусть* $\mu$ *- система вер. Будем говорить, что* $\mu$ *слабо согласована с* $\sigma$*, если для всех информационных множеств* $h$ *таких, что при* $\sigma$ *существует положительная вероятность попадания игры в* $h$*, и для всех вершин* $a \in h$ *верно следующее:*

$$\mu_h(a) = \frac{P(a|\sigma)}{P(h|\sigma)}, \tag{1}$$

*где* $P(a|\sigma)$ *- вероятность того, что траектория игры пройдет через вершину* a*,* $P(h|\sigma) = \sum_{b\in h} P(b|\sigma)$ *- вероятность того, что таректория игры пройдет через информационное множество* $h$*.*

Пусть $\sigma$ - профиль поведенческих стратегий, $\mu$ - система вер. Пусть $h$ - информационное множество в котором игрок $i$ делает ход. Обозначим через $u_{i,h}(\sigma|\mu_h)$ ожидаемый выигрыш игрока $i$ при условии, что игра достигла множества $h$. Эта величина равна сумме выигрышей данного игрока во всех вершинах информационного множества $h$, помноженной на вероятности оказаться в этих вершинах, определяемые $\mu_h$. Будем говорить, что $\sigma_i$ секвенциально рациональна относительно $\mu$, если для всех $\sigma_i'$ мы имеем $u_{i,h}(\sigma_i, \sigma_{-i}|\mu_h) \geq u_{i,h}(\sigma_i', \sigma_{-i}|\mu_h)$. Можно дать следующее определение равновесия. [3]

**Определение 2.3.** *Пара* $(\sigma, \mu)$ *является слабо секвенциальным равновесием, если* $\sigma$ *секвенциально рациональна относительно* $\mu$ *и* $\mu$ *слабо согласована с* $\sigma$*.*

Назовем $\sigma$ вполне смешанным профилем стратегий, если в каждом информационном множестве каждое действие реализуется с положительной вероятностью. Для такого $\sigma$ уравнение 1 определяет веру для каждого информационного множества. Дадим определение. [3]

**Определение 2.4.** *Пусть $\sigma$ - профиль поведенческих стратегий. Будем говорить, что система вер $\mu$ является сильно согласованной с $\sigma$, если существует последовательность вполне смешанных профилей $\sigma^n \to \sigma$, таких, что $\mu^n \to \mu$, где $\mu^k$ - система вер, слабо согласованная с профилем стратегий $\sigma^k$.*

**Определение 2.5.** *Пара $(\sigma, \mu)$ является сильно секвенциальным равновесием или просто секвенциальным равновесием, если $\sigma$ секвенциально рациональна относительно $\mu$ и $\mu$ сильно согласована с $\sigma$.*

## 2.2 Решение для игры «сороконожка» с 4 шагами

Представим ситуацию, в которой первый игрок всегда преследует свои собственные интересы, а второй игрок может как преследовать свои интересы, так и быть абсолютным альтруистом (всегда передавать ход первому игроку). Первый игрок не знает, с каким типом игрока взаимодействует. Зададим вероятность $\beta$ - вероятность того, что игрок номер 2 является "альтруистом то есть вероятность перехода от точки $A$ к $B'$, и $(1-\beta)$ - вероятность, что игра пошла в другом направлении от точки $A$ к $B$. (см схему 2 на странице 6). [4]

На схеме красным пунктиром выделены информационные множества, то есть игрок номер 1 не может различить $B$ и $B'$, $D$ и $D'$, в этом состоит суть названия - игра с неполной информацией. В данном случае принцип обратной индукции применим только на последнем шаге в точке $E$: мы могли бы не записывать выигрыш, в случае передачи хода - $(64, 16)$, так как второй игрок всегда будет завершать игру в точке $E$. Теперь в точке $D'$ зафиксируем веру $\mu$ (интуитивно понимается как вероятность оказаться в данной точке с точки зрения первого игрока), тогда в точке $D$ вероятноть будет $(1-\mu)$. Рассматривать игру имеет смысл только при $\beta < \frac{1}{7}$

Вводятся дополнительно обозначения: $\sigma$ - вероятность передачи хода в точке $D$ $(D')$, тогда $(1-\sigma)$ - вероятность завершения игры в точке $D$ $(D')$, $\tau$ - вероятность передачи хода в точке $C$, $(1-\tau)$ - вероятность завершения игры в точке $C$, $\alpha$ - вероятность передачи хода в точке $B$ $(B')$, $(1-\alpha)$ - вероятность завершения игры в точке $B$ $(B')$.

Таким образом, вероятность оказаться в точке $D$ равна $(1-\beta)\cdot\alpha\cdot\tau$, а в точке $D'$ равна $\beta\cdot\alpha$.

Получаем соотношение:

$$\frac{(1-\beta)\cdot\alpha\cdot\tau}{\beta\cdot\alpha} = \frac{1-\mu}{\mu} \tag{2}$$

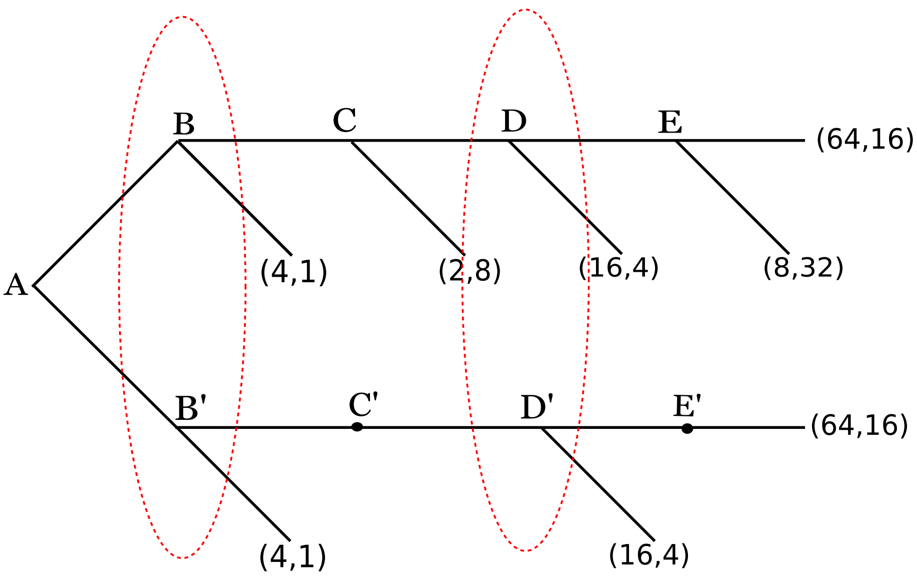


Рис. 2: Схема 4-х звенной игры

Случай $\alpha = 0$ рассматривается отдельно, он приводит к недостижимости второго информационного множества, равновесие, которое получается в этом случае, называется слабым секвенциальным равновесием, при этом $\sigma = \tau = \mu = 0$. Такой случай мы не рассматриваем, больший интерес представляет сильное секвенциальное равновесие, в этом равновесии веры должны быть определены в соответсвии с предыдущими шагами игры, даже если точки достигаются с вероятностью 0, ходы первого игрока направлены на максимизацию выигрыша с учетом этих вер.

Из формулы 2: $\mu = \dfrac{\beta}{\beta + \tau(1-\beta)}$

Покажем, что сильное секвенциальное равновесие существует только при $\mu = \frac{1}{7}$.

Зафиксируем некоторое $\beta < \frac{1}{7}$ Рассмотрим точку $D$, напишем условие использования смешанной стратегии в ней: $8(1-\mu) + 64\mu = 16 \Rightarrow \mu = \frac{1}{7}$

Пусть $\mu > \frac{1}{7}$ Тогда использование смешнанной стратегии не оправдано, то есть первый игрок выбирает передачу хода $\Rightarrow \sigma = 1 \Rightarrow \tau = 1$ Тогда из формулы 2: $\mu = \beta$ - противоречие

Пусть $\mu < \frac{1}{7}$ Тогда $\sigma = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \mu = 1$ - противоречие. Итак, показано, что в любом равновесии $\mu = \frac{1}{7}$, а значит $0 < \tau < 1$, это значит, что в точке $C$ второй игрок использует обе свои стратегии с положительными вероятностями, поэтому нужно приравнять выигрыши от использования каждой из стратегий: $8 = 32\sigma + 4(1-\sigma) \Rightarrow \sigma = \frac{1}{7}$ Из формулы 2 получаем $\tau = \dfrac{6\beta}{1-\beta}$. Найдем такое $\beta$, при котором в равновесии $\alpha = 1$ (То есть наша цель понять, при каком проценте "альтруистов"игра будет продвигаться, а не завершаться на первом шаге). Для этого нужно, чтобы в точке $B$ ($B'$) выигрыш от передачи хода был больше, чем выигрыш при завершении игры, то есть

$$(1-\beta)(2(1-\tau)+\tau(8\sigma+16(1-\sigma)))+\beta(16(1-\sigma)+64\sigma) > 4$$

$$(1-\beta)(2(1-\tfrac{6\beta}{1-\beta})+\tfrac{6\beta}{1-\beta}(8\cdot\tfrac{1}{7}+16(1-\tfrac{1}{7})))+\beta(16(1-\tfrac{1}{7})+64\cdot\tfrac{1}{7}) > 4$$

$$2-14\beta+6\beta\cdot\tfrac{104}{7}+\beta(\tfrac{96}{7}+\tfrac{64}{7}) > 4$$

$$14-98\beta+624\beta+160\beta > 28$$

$$\Rightarrow \beta > \tfrac{1}{49}$$

Результат получился контринтуитивным в том смысле, что процент игроков, всегда передающих ход вперед, с которого начинает существовать равновесие с $\alpha = 1$, неожиданно маленькое число.

Таким образом при $\alpha = 0$ возникает слабое секвенциальное равновесие, такое равновесие вводится формально, но не представляет интереса, так как допускает нерациональное поведение игроков в недостижимых информационных множествах. Добавлением дополнительного требования к определению слабой согласованности системы вер и профиля стратегий получается определение сильной согласованности и сильного секвенциального равновесия, которое уже представляет интерес для изучения. Было показано, что такое равновесие существует только при $\mu = \dfrac{1}{7}$.

# 3 Равновесие дискретного отклика

## 3.1 Основные определения

Рассмотрим конечную игру с n игроками в нормальной форме. Определим множество $N = \{1 \dots n\}$ игроков, и для каждого игрока $i \in N$ множество стратегий $S_i = \{s_{i1} \dots s_{iJ_i}\}$, состоящее из $J_i$ чистых стратегий. Для каждой $i \in N$ определим функцию выигрыша $u_i : S \to \mathbb{R}$, где $S = \prod\limits_{i \in N} S_i$.

Пусть $\Delta_i$ будет множеством вероятностных мер $S_i$. Элементы $\Delta_i$ имеют вид $p_i : S_i \to \mathbb{R}$, где $\sum_{s_{ij} \in S_i} p_i(s_{ij}) = 1$, и $p_i(s_{ij}) \geq 0$ для каждого $s_{ij} \in S_i$. Мы используем обозначение $p_{ij} = p_i(s_{ij})$. Таким образом $\Delta_i$ это изоморфный $J_i$ многомерный симплекс $\Delta_i = \{p_i = (p_{i1}, \dots, p_{iJ_i}) : \sum_j p_{ij} = 1, p_{ij} \geq 0\}$. Обозначим $\Delta = \prod_{i \in N} \Delta_i$ и $J = \sum_{i \in N} J_i$ Обозначим точки из $\Delta$ как $p = (p_1, \dots, p_n)$, где $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{iJ_i}) \in \Delta_i$.

Мы используем обозначение $s_{ij}$ чтобы определить стратегию $p_i \in \Delta_i$ с $p_{ij} = 1$. Также мы используем укороченное обозначение $p = (p_i, p_{-i})$. Следовательно, обозначение $(s_{ij}, p_{-i})$ представляет стратегию, где игрок $i$ выбирает чистую стратегию $s_{ij}$, а другие игроки выбирают их компоненты вектора $p$.

Функция выигрыша обобщается на область определения $\Delta$ по правилу $u_i(p) = \sum_{s \in S} p(s) u_i(s)$, где $p(s) = \prod_{i \in N} p_i(s_i)$. Вектор $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta$ является равновесием Нэша, если для всех $i \in N$ и для всех $p_i' \in \Delta_i, u_i(p_i', p_{-i}) \leq u_i(p)$.

Пишем $X_i = \mathbb{R}^{J_i}$ для представления простанства всех возможных выигрышей для стратегий, которые игрок $i$ может выбрать, $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Определим функцию $\overline{u} : \Delta \to X$ как

$$\overline{u}(p) = (\overline{u}_1(p), \dots, \overline{u}_n(p)),$$

где

$$\overline{u}_{ij}(p) = u_i(s_{ij}, p_{-i})$$

Далее мы определим равновесие дискретного отклика как статическую версию равновесия Нэша, где выигрыш каждого участника в результате каждого действия подвержен случайной ошибке. А именно, для каждого $i$ и для каждого $j \in \{1, \dots, J_i\}$, и для любого $p \in \Delta$ определим

$$\hat{u}_{ij}(p) = \overline{u}_{ij}(p) + \varepsilon_{ij}$$

Вектор $i$-го игрока, $\varepsilon = (\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iJ_i})$, распределен согласно совместному распределению с плотностью вероятности $f_i(\varepsilon_i)$. Предельное распределение $f_i$ существует для каждого $\varepsilon_{ij}$, и $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$. Назовем $f =$

$(f_1, \ldots, f_n)$ допустимой, если $f_i$ удовлетворяют свойствам выше для всех $i$. Наше предположение о поведении игроков заключется в том, что каждый игрок выбирает такое дейсвтвие $j$, что $\hat{u}_{ij} \geq \hat{u}_{ij} \forall k = 1, \ldots, J_i$. Учитывая это правило принятия решений ($i$ выбирает действие $j$, если $u_{ij}$ максимальна), для любой заданной $\overline{u}$ и $f$ подразумевается вероятностное распредление наблюдаемых действий игроков, вызванных вероятностных распредлением вектора наблюдаемых ошибок, $\varepsilon$. Формально, для любой $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ с $\overline{u}_i \in \mathscr{R}^{J_i}$ для каждого $i$, мы определяем множество $ij$-откликов $R_{ij} \subseteq \mathbb{R}^{J_i}$ как

$$R_{ij}(\overline{u}_i) = \{\varepsilon \in \mathscr{R}^{J_i} | \overline{u}_{ij} + \varepsilon_{ij} \geq \overline{u}_{ik} + \varepsilon_{ik} \forall k = 1, \ldots, J_i\}$$

.

При данном $p$, каждое множество $R_{ij}(\overline{u}_i(p))$ определяет множество ошибок, которые ведут к выбору игроком $i$ действия $j$. Наконец, положим

$$\sigma_{ij}(\overline{u}_{ij}) = \int_{R_{ij}(\overline{u}_i)} f(\varepsilon) d\varepsilon$$

равное вероятности, что игрок $i$ выберет стратегию $j$, при данном $\overline{u}$. Затем определим для любой допустимой $f$ и для игры $\Gamma = (N, S, u)$ равновесие дискретного отклика как вектор $\pi \in \Delta$, такой, что $\pi_{ij} = \int_{Rij(\overline{u}_i)} f(\varepsilon) d\varepsilon$, где $\overline{u} = \overline{u}(\pi)$. Формально,

**Определение 3.1.** *Пусть $\Gamma = (N, S, u)$ - игра в нормальной форме и пусть $f$ - допустимая функция. Равновесие дискретного отклика - любая $\pi \in \Delta$ такая, что для всех $i \in N, 1 \leq j \leq J_i$,*

$$\pi_{ij} = \sigma_{ij}(\overline{u}_i(\pi))$$

Назовем $\sigma_i : \mathscr{R}^{J_i} \to \Delta^{J_i}$ статистической функцией реакции (или дискретным равновесием отклика) игрока $i$. Несколько результатов о статистических функциях реакции могут быть легко проверены:

1. $\sigma \in \Delta$ не пусто.
2. $\sigma$ непрерывна на $\mathscr{R}^{J_i}$
3. $\sigma_{ij}$ монотонно возрастает в $\overline{u}_{ij}$
4. Если для любых $i$ и для любых $j$, $k = 1, \ldots, J_i, \varepsilon_{ij}$ и $\varepsilon_{ik}$ являются независимыми одинакого распределенными величинами, тогда для любых $\overline{u}$, для любых $i$, для любых $j, k = 1, \ldots, J_i$,

$$\overline{u}_{ij} > \overline{u}_{ik} \Rightarrow \sigma_{ij}(\overline{u}) > \sigma_{ik}(\overline{u})$$

Первые два свойства $\sigma$ означают Теорему 1.

**Теорема 1.** *Для любой* $\Gamma$ *и для любой допустимой* $f$*, существует равновесие дискретного отклика.*

**Доказательство**

Равновесие дискретного отклика это фиксированна точка $\sigma \circ \overline{u}$. Поскольку распредление $\varepsilon$ имеет плотность, $\sigma \circ \overline{u}$ непрерывно на $\Delta$. По теореме Брауэра о неподвижной точке, $\sigma \circ \overline{u}$ имеет неподвижную точку.

Третье и четвертое свойства говорят, что "лучшие дейтсвия будет выбраны более вероятно чем худшие". Конкретно третье свойство сравнивает статическую функцию наилучшего отклика, если один из $i$-го ожидаемого выигрыша, $\overline{u}_{ij}$, поменялся, а все остальные компоненты $u_i$ остались прежними. В этом случае область $R_{ij}$ расширяется, и каждая $\overline{u}_{ik}$ слабо уменьшается. Необходимо отметить, что это не то же самое, что сказать, что $\pi$ изменяется таким образом, что $\overline{u}_{ij}$ возрастает, так как изменение $\pi$, в принципе, меняет значение всех компонент $\overline{u}_{ij}$. Четвертое свойство утверждает, что $\sigma$ упорядочивает вероятность различных действий в порядке их ожидаемых выигрышей.

## 3.2 Интерпретация РДО

Рассмотрим однопараметрическое семейство распределний вида $e^{-e^{-\lambda x}}$. Зафиксируем некоторую игру $\Gamma$, при каждом $\lambda$ можно посчитать для нее равновесие дискретнго отклика. В частности при $\lambda = 0$ все игроки используют все стратегии с равными вероятностями.

Множество всевозможных смешанных стратегий это $\Delta(S_1) \times \cdots \times \Delta(S_n)$ (Прямое произведение нескольких симплексов), в нем есть точка, которая является центром каждого из симплексов, взятая n раз. Из нее выходит кривая, состоящая из равновесий при различных значениях параметра $\lambda$. Из множества всех равновесий дискретного отклика можно выделить непрерывную кривую, которая соединяет точку $\lambda = 0$ с точкой $\lambda = \infty$. В частности $\lambda = 0$ означает, что выбор игрока является совершенно случайным (то есть $p = \frac{1}{2}$), а $\lambda = \infty$ означает, что выбор игрока является абсолютно рациональным и не содержит ошибок. Промежуточные значения параметра генерируют различные уровни "зашумленности"игры. Важным аспектом данного метода является то, что рассчитываемая вероятность того, что игрок совершит ошибку будет тем меньше, чем дороже эта ошибка.

### 3.3 Решение для игры с 4 шагами

Рассматривается 4-х-звенная игра с заданными на схеме выигрышами (см схему 3)

В качестве функции распределения используется распределение Гумбеля: $\mathbb{P}(\xi \leq x) = e^{-e^{-\lambda x}}$, которое обладает следующими достоинствами:

- Данное распределение является однопараметрическим, что упрощает исследование и интерпретацию результатов.
- Для данного распределения удобно выражается вероятность того, что некоторая стратегия окажется наилучшей

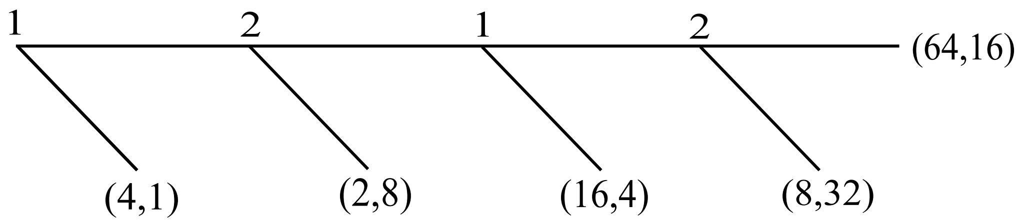


Рис. 3: Схема 4-х-звенной игры

Пусть есть некоторый набор выигрышей $u_1, \ldots, u_k$ от применения некоторых чистых стратегий заданным игроком. Перейдем от этого набора к набору $u_1 + \varepsilon_1, \ldots, u_k + \varepsilon_k$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ - независимая выборка из распределения Гумбельта. Обозначим $p_l = \mathbb{P}\{u_l + \varepsilon_l = \max(u_j + \varepsilon_j)\}$ - вероятность, что $l$-я стратегия для данного игрока окажется наилучшей.

$$p_l = \frac{e^{\lambda u_l}}{\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda u_j}} \tag{3}$$

Обозначим $p_1, p_2, p_3, p_4$ - эмпирические (посчитанные экспериментально) вероятности передачи хода вперед первым игроком на первом шаге, вторым игроком -на втором, первым - на втором шаге, и вторым - на втором соответсвенно. Необходимо подобрать такое $\lambda$, чтобы модель была близка к эксперименту.

# 4 Описание работы программы

Сначала небольшое пояснение работы программы (алгоритм см на стр 14). Далее будет приведен псевдокод и код рекурсивной версии программы, а также код динамической версии на языке Python.

## 4.1 Пояснение (Рекурсивная версия)

Будем обозначать $u_s$ - выигрыш игрока в данный момент в случае завершения хода (stop the game), $u_p$ - выигрыш игрока в данный момент в случае передачи хода дальше (pass the game)

Сначала небольшая заметка о вспомогательных функциях: player i - список(массив) выигрышей i-го игрока (i = 1,2) формируется функцией read win file, которая считывает данные из файла и заполянет списки с нулевого элемента. Функция file maker заполняет файл с значениями выигрышей.

Название основной функции "probability completion". Она вычисляет вероятность завершения игры на данном шаге, принимает на вход $\lambda$ - значение парметра распределния, n - количество узлов в игре, step - шаг, который нумеруется с 0 до n (не включительно), таким образом, если шаг четный, то решение принимается первым игроком, если нечетный - то вторым. При вычислении вероятностей завершения игры, мы должны двигаться от последнего шага к первому, так как каждый предыдущий шаг зависит от последующих, соотвественно, функция является рекурсивной, при больших n требуется довольно долгое время для вычисления вероятностей на первых шагах.

В начале описано поведение функции при вычислении последнего шага, оно зависит от того, какой игрок играет на последнем шаге, поэтому функция проверяет четность числа n, в этом случае решение получается сразу - оно задается конкретной формулой, которая зависит только от параметра $\lambda$ и выигрыша игрока.

Рассмотрим в качестве примера 4-х звенную игру, изображенную на рисунке 3 на странице 11. В этом случае n = 4, последний шаг - step = 3 и выбор на последнем шаге принадлежит игроку 2, функция вероятности завершения игры на последнем шаге задается формулой

$$p_3 = \frac{1}{1 + exp\lambda(1.6 - 3.2)}$$

Получено из формулы (3) на странице 11: выигрыш в случае продолжения равен $u_p = 1.6 + \varepsilon_1$, в случае завершения $u_s = 3.2 + \varepsilon_2$ поэтому

$$p = \frac{exp(3.2\lambda)}{exp(3.2\lambda) + exp(1.6\lambda)} = \frac{1}{1 + exp\lambda(1.6 - 3.2)}$$

Рассмотрим предыдущий шаг step $= 2$ (ход первого игрока), выигрыш в случае продолжения хода равен $u_p = 0.8p_3 + 6.4(1 - p_3) + \varepsilon_3$, в случае завершения хода $u_s = 1.6 + \varepsilon_4$. Тогда

$$p_2 = \frac{1}{1 + exp\lambda(0.8p_3 + 6.4(1 - p_3) - 1.6)}$$

Аналогично получаются вероятности для step $= 1$, и step $= 0$:

$$p_1 = \frac{1}{1 + exp\lambda(0.4p_2 + (1 - p_2)(3.2p_3 + 1.6(1 - p_3)) - 0.8)}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + exp\lambda(0.2p_1 + (1 - p_1)(1.6p_2 + (1 - p_2)(0.8p_3 + 6.4(1 - p_3))) - 0.4)}$$

Переменная result в данной функции содержит, по сути, выигрыш $u_p$ при продолжении хода. Она заполняется в цикле с использованием рекурсивного вызова функции для расчета вероятностей завершения и продолжения хода, которые входят в формулу выигрыша $u_p$. Проверка переменной step внутри цикла на четность также используется для определения номера игрока. Цикл пробегает от конечного узла до узла, следующего за расчитываемым, внутри цикла формула $u_p$ рассчитывается "с конца".Переменная p содержит итоговое значение вероятности завершения игры.

## 4.2 Алгоритм (Рекурсивная версия)

**Algorithm 1** Probability completion

**Require:** $\lambda$-параметр распределения, n-число узлов, step - текущий шаг, player1, player2 - массивы (списки) выигрышей первого и второго игрока соотвественно;

**Ensure:** $p$ - вероятность завершения игры на текущем шаге при заданном распределении в данной игре;

**if** $step = n - 1$ and $n$ - четное **then**
  $p = \frac{1}{1 + exp\lambda(player2[n] - player2[n-1]})$
**else if** $step = n - 1$ and $n$ - нечетное **then**
  $p = \frac{1}{1 + exp\lambda(player1[n] - player1[n-1])}$
**else**
  **if** $step$ - четное **then**
    $result = player1[n]$
  **else if** $step$ - нечетное **then**
    $result = player2[n]$
  **for** $i = n \ldots (step + 1)$ **do**
    $proba = Probability\_completion(\lambda, n, i - 1, player\_1, player\_2)$
    $result = result \cdot (1 - proba)$
    **if** $step$ - четное **then**
      $result = result + proba \cdot player\_1[i - 1]$
    **else**
      $result = result + proba \cdot player\_2[i - 1]$
    **if** $step$ - четное **then**
      $p = \frac{1}{1 + exp\lambda(result - player\_1[step])}$
    **else**
      $p = \frac{1}{1 + exp\lambda(result - player\_2[step])}$

## 4.3 Код программы на языке Python (Рекурсивная версия)

Данная версия работает очень медленно, так как делает рекурсивный вызов много раз, без запоминания результатов, но наглядно показывает процесс работы программы.

```
def file_maker(filename='win.txt'):
  a = str(0.4)
  b = str(0.1)
  with open(filename, 'w') as f:
    f.write(a+ ' '+ b + '\n')
    for i in range(100):
    a = float(a)
    b = float(b)
    a,b = b*2, a*2
    a = str(a)
    b = str(b)
    f.write(a + ' ' + b + '\n')

file_maker()

def read_win_file(filename='win.txt'):
  """The function reads the file and writes the values into two
    arrays - the winnings for the first and second players,
    respectively, the file must contain these values, in the form
     of two columns, floating-point values are allowed"""
  player_1 = []
  player_2 =[]
    with open(filename) as win_file:
    for line in win_file:
    numbers = line.split()
    player_1.append((float((numbers[0]))))
    player_2.append((float((numbers[1]))))
  return player_1, player_2

import numpy as np
def probability_completion(Lambda, n, step, player_1, player_2):
  if step == n-1 and n % 2 == 0:
    p = 1/(1+np.exp(Lambda*(player_2[n] - player_2[n-1])))
  elif step == n-1 and n % 2 != 0:
    p = 1/(1+np.exp(Lambda*(player_1[n] - player_1[n-1])))
  else:
    if step % 2 == 0:
      result = player_1[n]
    else:
      result = player_2[n]
    for i in range(n,step+1,-1):
      proba = probability_completion(Lambda, n, i-1, player_1,
    player_2)
      result *= (1-proba)
      if step % 2 == 0:
        result += proba*player_1[i-1]
      else:
        result += proba*player_2[i-1]
```

```
      if step % 2 == 0:
        p = 1/(1+np.exp(Lambda*(result - player_1[step])))
      else:
        p = 1/(1+np.exp(Lambda*(result - player_2[step])))
  return p

```

## 4.4 Код программы на языке Python (Динамическая версия)

Эта версия является оптимальной, так как запоминает вычисленные вероятности в массив и не требует повторных вычислений. Функция в этой версии программы возвращает список(массив) вероятностей завершения игры на каждом шаге.

```
n=100
def file_maker(filename='win.txt'):
  a = str(0.4)
  b = str(0.1)
  with open(filename, 'w') as f:
    f.write(a+ ' '+ b + '\n')
    for i in range(n):
      a = float(a)
      b = float(b)
      a,b = b*2, a*2
      a = str(a)
      b = str(b)
      f.write(a + ' ' + b + '\n')
file_maker()

def read_win_file(filename='win.txt'):
"""The function reads the file and writes the values into two
    arrays - the winnings for the first and second players,
    respectively, the file must contain these values, in the form
    of two columns, floating-point values are allowed"""
  player_1 = []
  player_2 =[]
  with open(filename) as win_file:
    for line in win_file:
      numbers = line.split()
      player_1.append((float((numbers[0]))))
      player_2.append((float((numbers[1]))))
  return player_1, player_2

import numpy as np
def probability_completion(Lambda, n, player_1, player_2):
  proba_list = [0]*n
```

```
  if n % 2 == 0:
    proba_list[n-1] = 1/(1+np.exp(Lambda*(player_2[n] - player_2[n-1])))
  elif n % 2 != 0:
    proba_list[n-1] = 1/(1+np.exp(Lambda*(player_1[n] - player_1[n-1])))
  for current_step in range(n-2, -1, -1):
    if current_step % 2 == 0:
      result = player_1[n]
    else:
      result = player_2[n]
    for i in range(n, current_step + 1, -1):
      proba = proba_list[i-1]
      result *= (1-proba)
      if current_step % 2 == 0:
        result += proba*player_1[i-1]
      else:
        result += proba*player_2[i-1]
      if current_step % 2 == 0:
        proba_list[current_step] = 1/(1+np.exp(Lambda*(result - player_1[current_step])))
      else:
        proba_list[current_step] = 1/(1+np.exp(Lambda*(result - player_2[current_step])))
  return proba_list
```

# 5 Исследование стратегий игроков

В данной главе будут рассматриваться различные вариации игры сороконожка (классический вариант с различными длинами, игра с постоянной ценой и игра с тремя игроками). Данный подход позволяет рассчитать вероятности продолжения/завершения игры в любые моменты времени, но наиболее интересными являются первые два момента времени (для каждого игрока), поэтому анализ будет проведен именно для них. Задача посмотреть, какова зависимость вероятности завершения игры от параметра $\lambda$ из стандартного распределения Гумбеля, то есть каким образом длина игры влияет на принятие решений в первых узлах игры, а так же в игре для 3-х игроков влияение случайного выбора номера игрока на стратегии игроков.

## 5.1 Исследование классического варианта игры «сороконожка»

Оптимальная версия программы позволяет быстро строить графики даже для n, равного нескольким сотням, ограничимся n = 100 (далее увидим, что результаты практически не меняются при больших n). Интерес представляют вероятности в первые моменты времени, поэтому будем рассматривать первые четыре шага и n = 4, 6, 8, 100, также рассмотрим случаи нечетной длины n = 5, 7

Как видно из графиков 6 и 7 на странице 20 уже начиная с игры с 8 шагами зависимости практически не отличаются друг от друга. Также видно, что при $\lambda \to \infty$ p = 1 (Равновесие Нэша) и при $\lambda = 0$ стратегии равновероятны (Все кривые выходят из точки $(0, 0.5)$) Также при малых $\lambda$ видно, что вероятность на каждом следующем шаге для любой длины быстрее стремится к единице, что соответсвует ожиданию.

Рассмотрим графики для каждого шага в отдельности при разных длинах игры (см стр. 22 - 23). На каждом шаге для малых $\lambda$ вероятность завершения при увеличении длины игры убывает. что также соответсвует интуитивному представлнию.

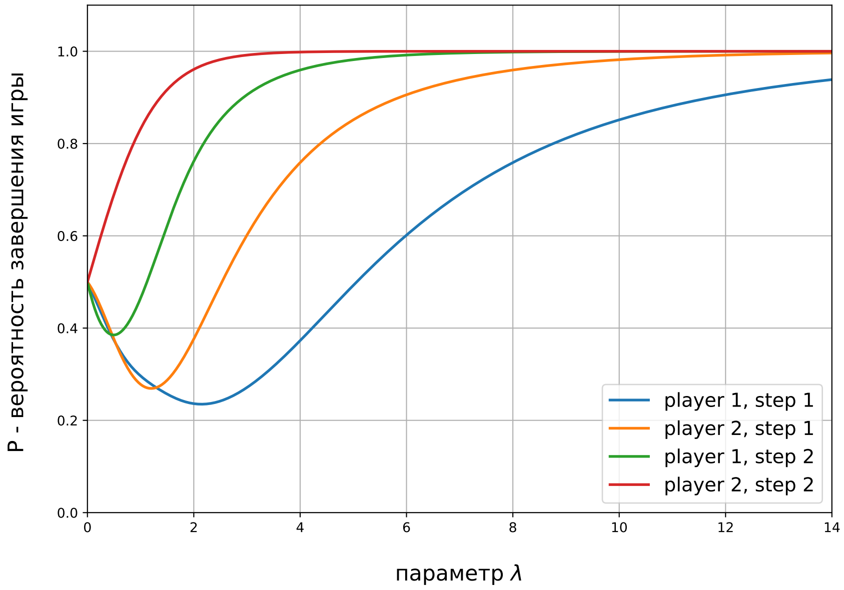


Рис. 4: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ для длины n=4

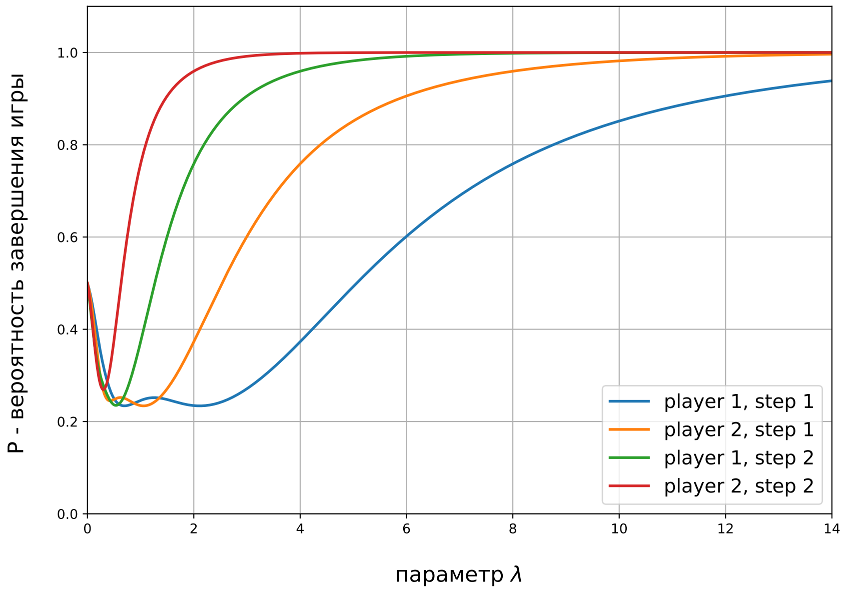


Рис. 5: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ для длины n=6

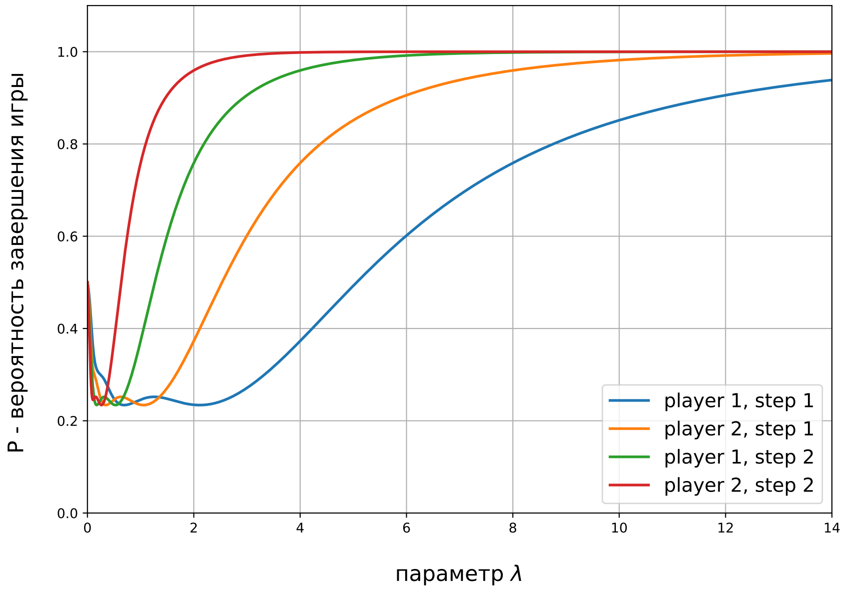


Рис. 6: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ для длины n=8

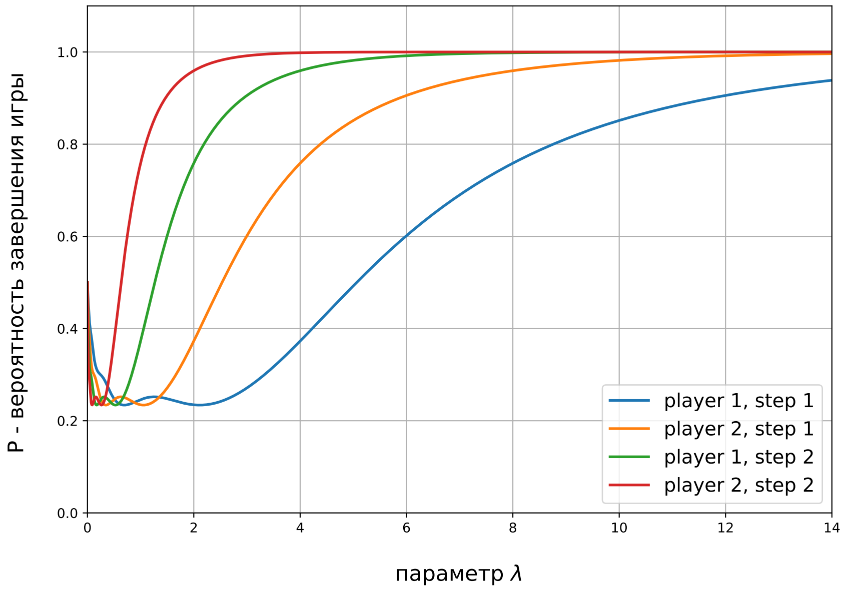


Рис. 7: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ для длины n=100

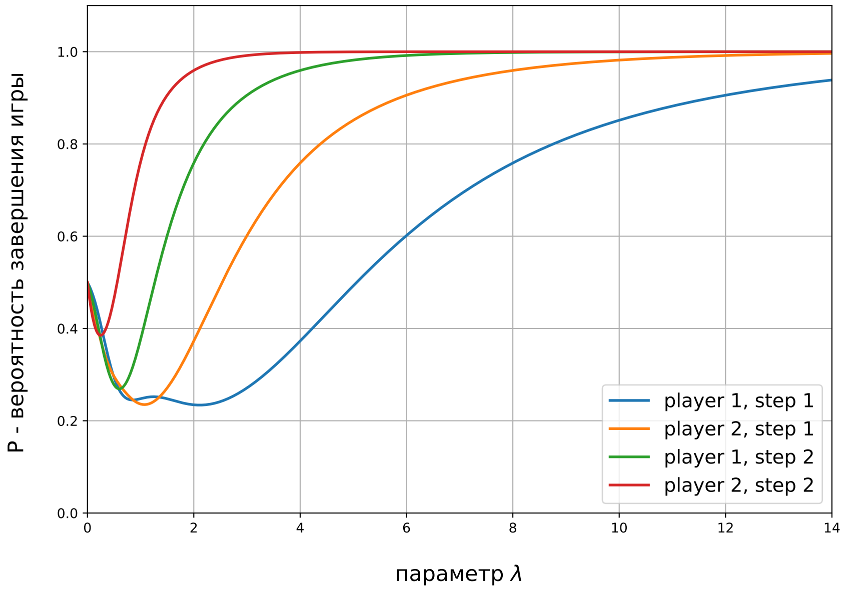


Рис. 8: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ для длины n=5

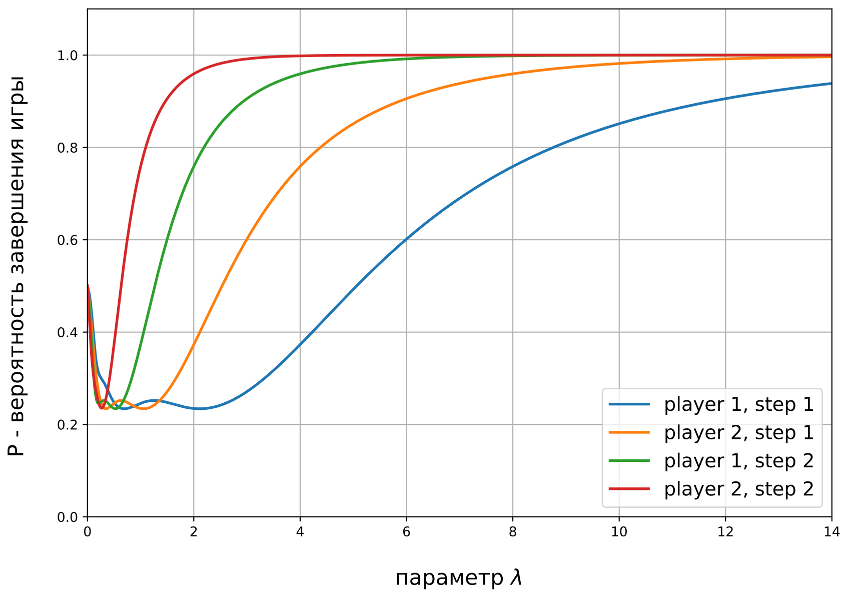


Рис. 9: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ для длины n=7

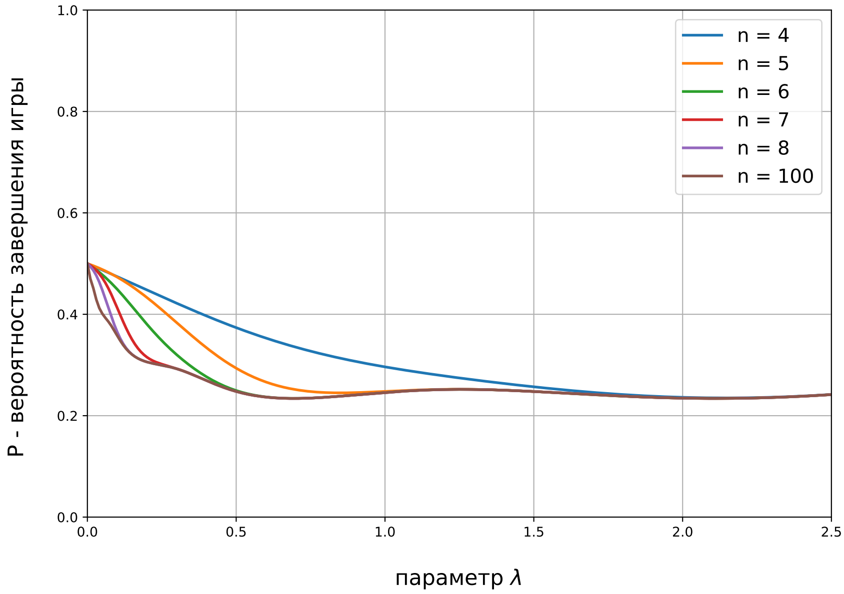


Рис. 10: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ на первом шаге

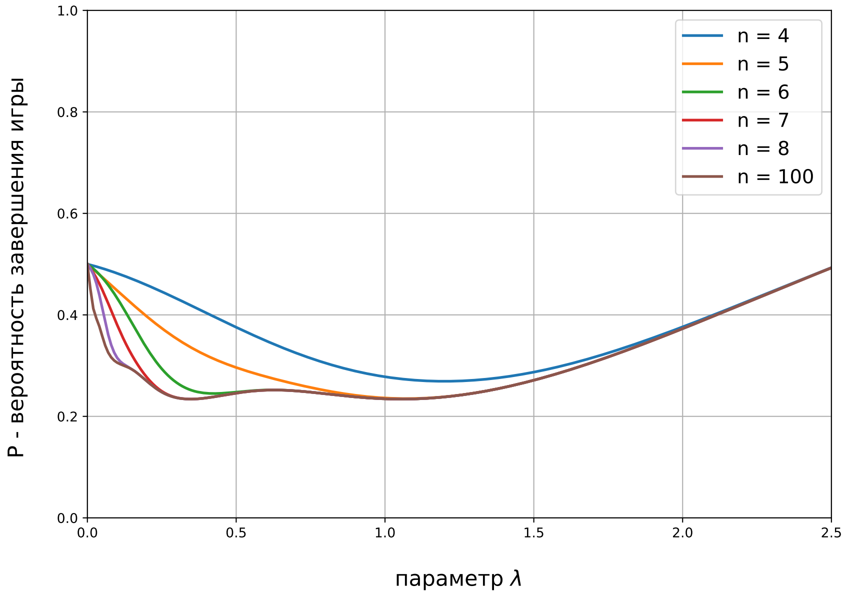


Рис. 11: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ на втором шаге

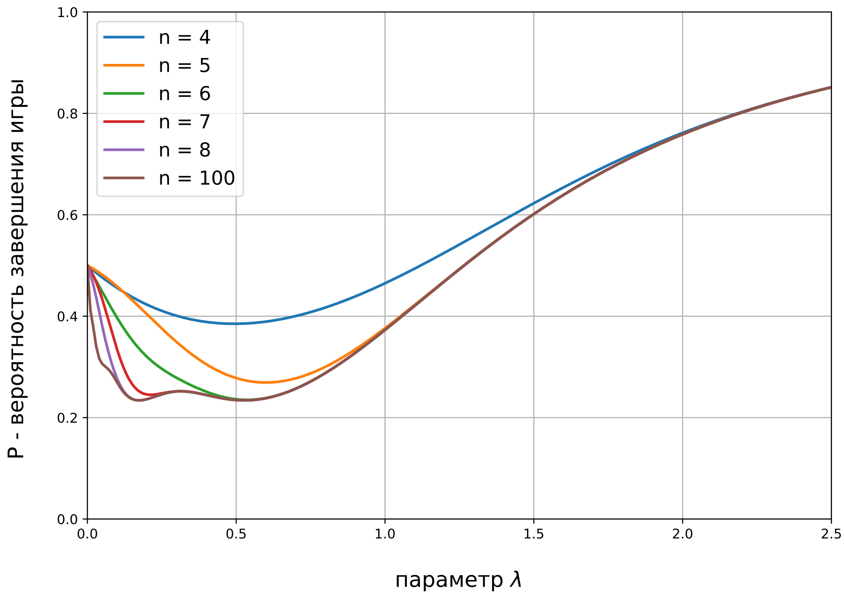


Рис. 12: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ на третьем шаге

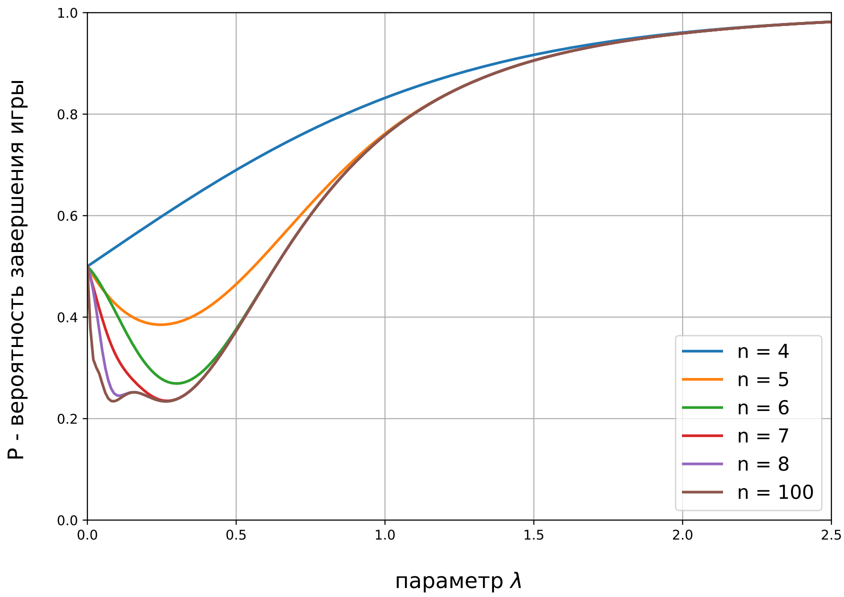


Рис. 13: Зависимость вероятности завершения игры от $\lambda$ на четвертом шаге

## 5.2 Сравнение результатов с экспериментом для классической версии длины 4

По результатам экспериментов подбирается параметр $\lambda$. Его значение зависит от многих факторов, включая ценность данного выигрыша для игроков, поэтому до начала эксперимента необходимо четко проговорить условия, включая валюту и правила проведения игры, а так же исключить возможность сотрудничества игроков (для максимизации выигрыша и последующего раздела его пополам). Так же парамтр $\lambda$ сильно отличается для групп людей, с разным типом мышления, психологические портреты игроков имеют большое значение. Например, известно, что шахматисты в экспериментах чаще всего выбирают стратегию "забрать выигрыш в первый момент времени", тем самым обеспечивая большое значение $\lambda$, близкое к тому, которое предсказывается принципом обратной индукции.

Рассмотрим эксперимент, подробно описанный в статье [8]. Было проведено четыре итерации игры "сороконожка" с 4 узлами в двух университетах (Pasadena Community College (PCC) и California Institute of Technology (CIT)). Для экспериментов в первых трех группах выигрыш в первом узле составлял $(0.4\$, 0.1\$)$, и далее, суммарный выигрыш на каждом узле увеличивался в 2 раза, то есть игра шла практически по схеме 3 (на стр. 11). Эксперимент в 4 группе проходил с увеличенными выигрышами, в первый момент игроку предлагался выигрыш $(1.6\$, 0.4\$)$

Количество взятий выигрыша $(n)$ делилось на количество игроков, оставшихся на данном узле, таким образом была вычислена вероятность завершения игры в каждом узле. Таблицы, взятые из источника [8] представлены ниже. Отдельно выделен 4 эксперимент, который отличается повышенным выигрышем.

Таблица 1: Постановка экспериментов

| Номер эксперимента | количество участников | всего игр | большой выигрыш |
|---|---|---|---|
| 1 (PCC) | 20 | 100 | нет |
| 2 (PCC) | 18 | 81 | нет |
| 3 (CIT) | 20 | 100 | нет |
| 4 (CIT) | 20 | 100 | да |

Таблица 2: Количество завершений игры в каждом узле

| Номер эксперимента | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 (PCC) | 6 | 26 | 44 | 20 | 4 |
| 2 (PCC) | 8 | 31 | 32 | 9 | 1 |
| 3 (CIT) | 6 | 43 | 28 | 14 | 9 |
| 4 (CIT) | 15 | 37 | 32 | 11 | 5 |

Таблица 3: Вероятность завершения в каждом узле

| Номер эксперимента | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 (PCC) | 0.06 | 0.28 | 0.65 | 0.83 |
| 2 (PCC) | 0.1 | 0.42 | 0.76 | 0.9 |
| 3 (CIT) | 0.06 | 0.46 | 0.55 | 0.61 |
| Усреднение по экспериментам 1-3 | 0.07 | 0.38 | 0.65 | 0.75 |
| 4 (CIT) | 0.15 | 0.44 | 0.67 | 0.69 |

Теперь, с помощью результатов из таблицы 3 можно задать функцию отклонения значений, предсказываемых моделью от полученных в эксперименте, например как сумму квадратов разностей экспериментальных значений вероятности и посчитанных с помощью РДО. Графики функций для каждой из групп 1-3 студентов и усредненной функции по трем группам представлены ниже на страницах 26 - 27.

Точные значения оптимальных $\lambda = \lambda^*$, при которых достигается минимум данной функции были рассчитаны численно с помощью стандартной функции оптимизации из библиотеки SciPy.

Для эксперимента в первой группе значение $\lambda_1^* = 1.57$, во второй $\lambda_2^* = 2.07$, в третьей $\lambda_3^* = 0.64$ и для усредненных значений $\lambda_a^* = 1.68$ (см график 18 на стр. 28 )

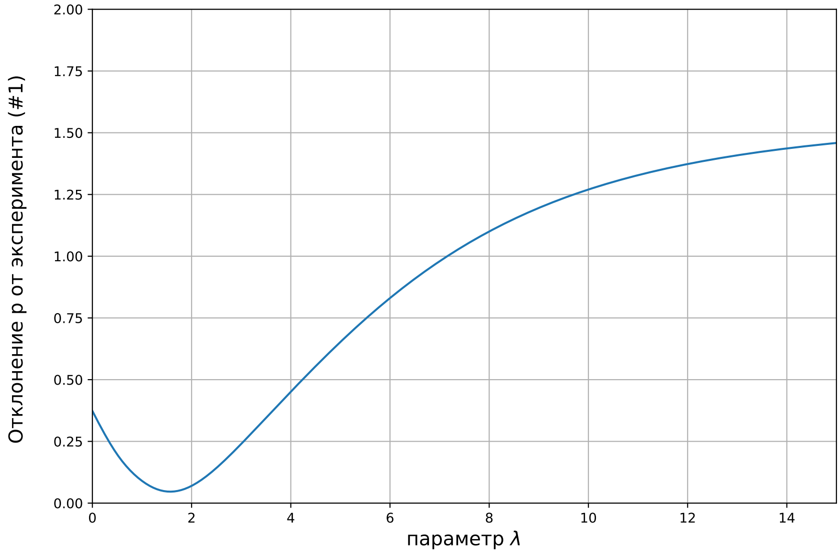


Рис. 14: Целевая функция метода наименьших квадратов для классической сороконожки с 4 шагами и результатов первого эксперимента

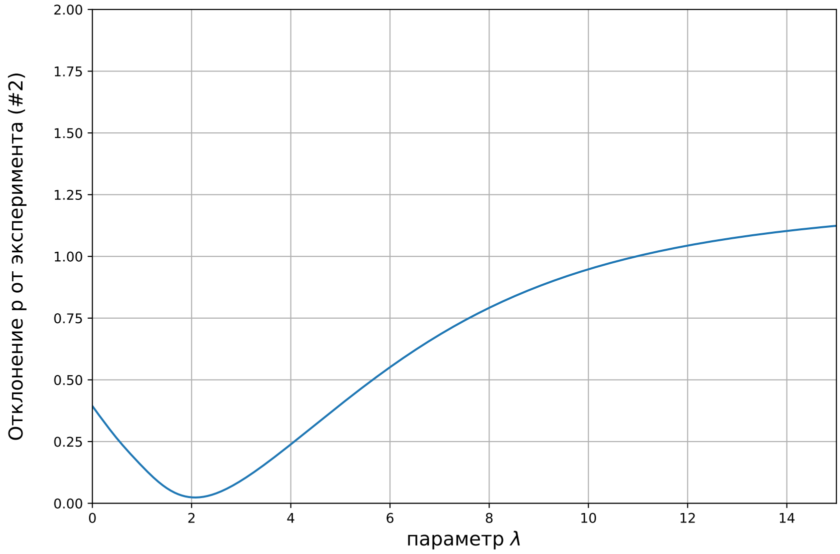


Рис. 15: Целевая функция метода наименьших квадратов для классической сороконожки с 4 шагами и результатов второго эксперимента

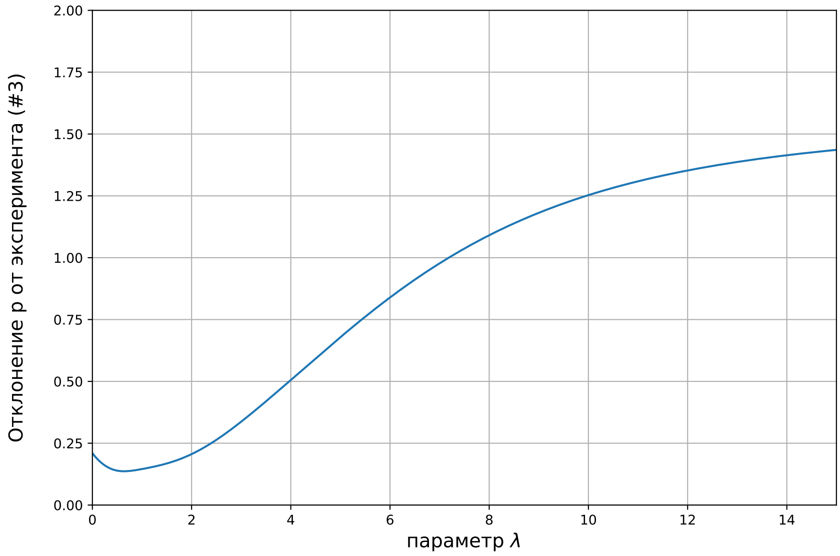


Рис. 16: Целевая функция метода наименьших квадратов для классической сороконожки с 4 шагами и результатов третьего эксперимента

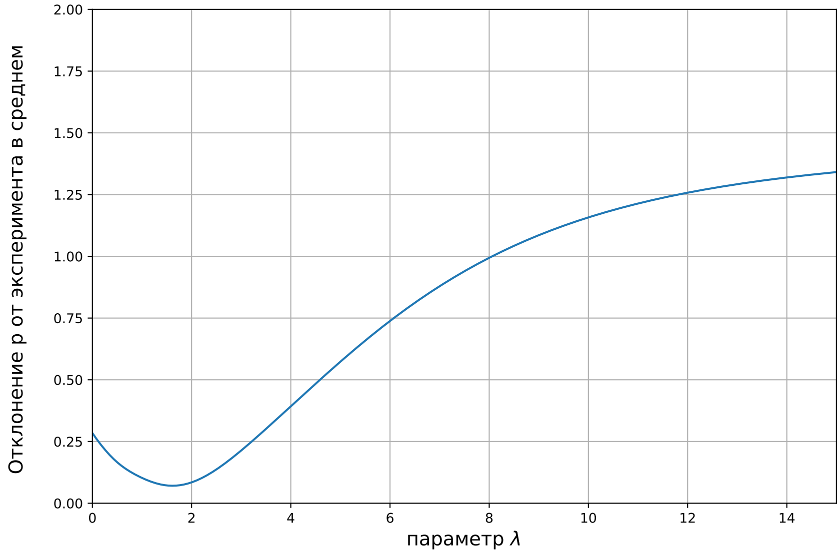


Рис. 17: Целевая функция метода наименьших квадратов для классической сороконожки с 4 шагами и усреднения результатов первого, второго и третьего экспериментов

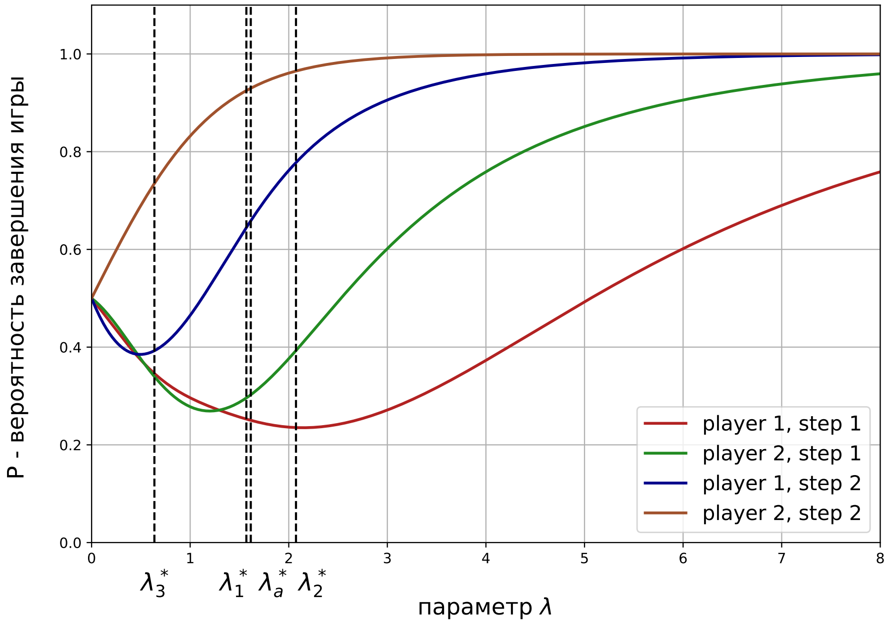


Рис. 18: Найденные из экспериментов $\lambda^*$ для классической игры "сороконожка" длины 4

Аналогичные вычисления для эксперимента в 4 группе приводят к следующей функции отклонения от экспериментальных значений:

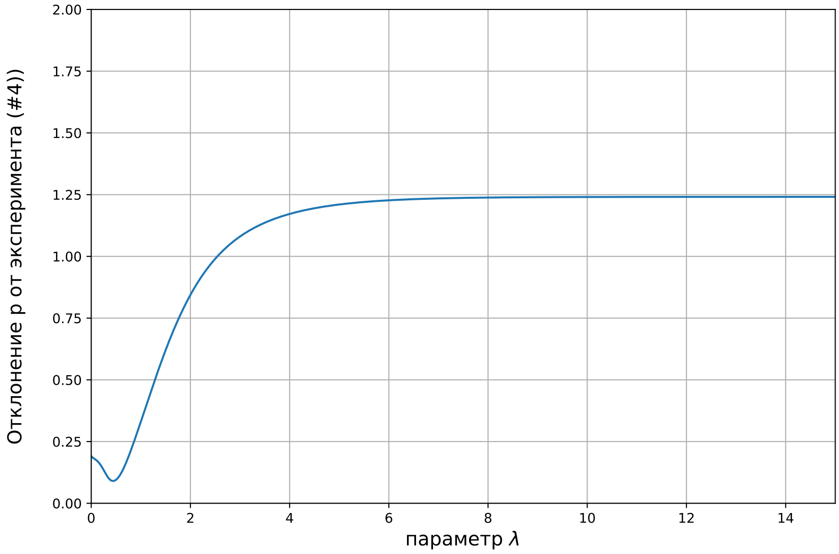


Рис. 19: Целевая функция МНК для сороконожки длины 4 с повышенными ставками и результатов четвертого эксперимента

При этом $\lambda* = 0.44$ (см график 20)

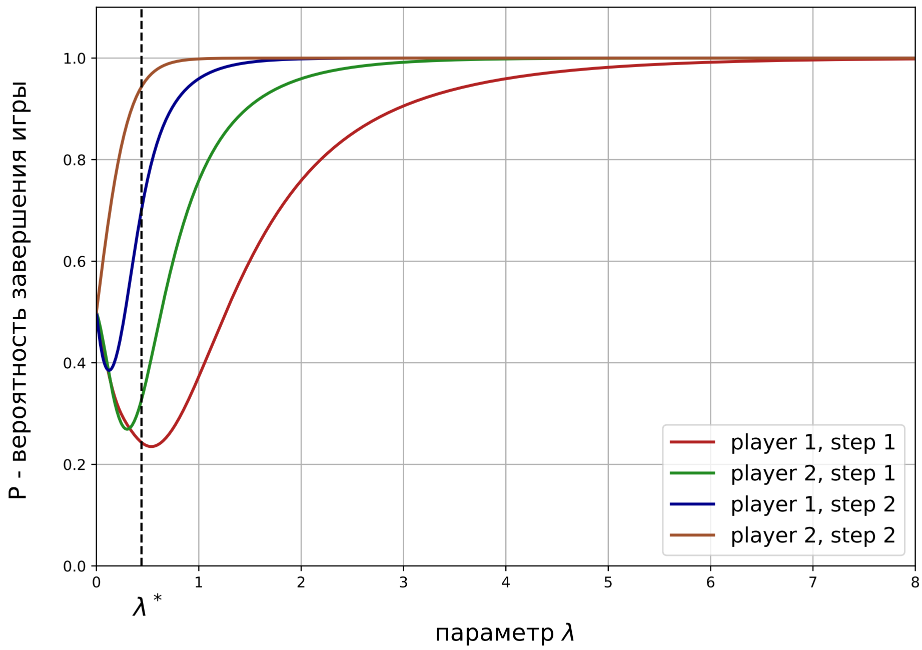


Рис. 20: Найденное из экспериментов $\lambda^*$ для классической игры "сороконожка" длины 4 с повышенными выигрышами

Сравнение равновесий для сороконожки с 4 шагами с обычными и с повышенными ставками, показывают, что с ростом параметра $\lambda$ в игре с повышенными ставками вероятности выхода из игры растут значительно быстрее.

## 5.3 Исследование варианта игры «сороконожка» с постоянной ценой

Игра, в которой суммарный выигрыш обоих игроков остается постоянным в каждый момент времени, главным образом отличается от классической сороконожки тем, что в ней игрок не может сделать выбор в пользу невыгодной для него стратегии в целях улучшения общего благосостояния. Таким образом, в классической сороконожке поведение игроков объясняется некоторым проявление альтруизма [1]. Однако и для игры с постоянной суммой равновесие дискретного отклика является наиболее точной[2] моделью среди множества других (например, рассмотренных в источнике [2]).

Рассмотрим игру с выигышами, описанными в источнике [2]. Рассмотрим две схемы: 10 шагов и 6 шагов:

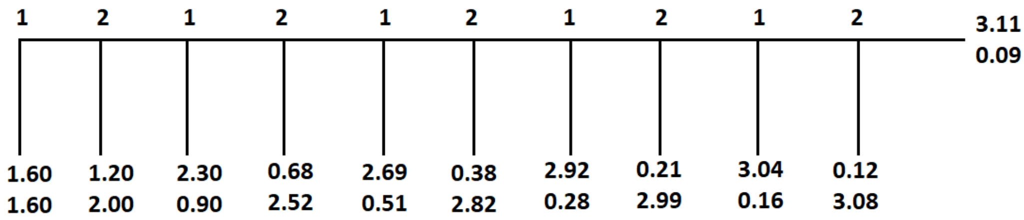


Рис. 21: Схема игры с постоянной суммой с 10 шагами

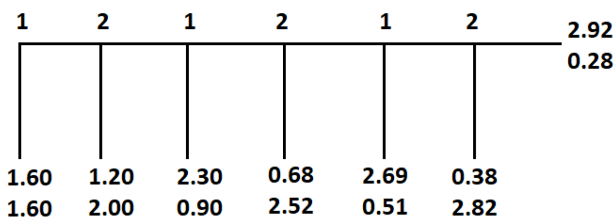


Рис. 22: Схема игры с постоянной суммой с 6 шагами

Ключевым отличием результатов этой игры от классической является то, что вероятность завершения игры представляет собой монотонную функцию от параметра $\lambda$, что означает, что при любых $\lambda > 0$ вероятность

[2]Наиболее точно предсказывает результаты экспериментов, описанных в источнике [2]

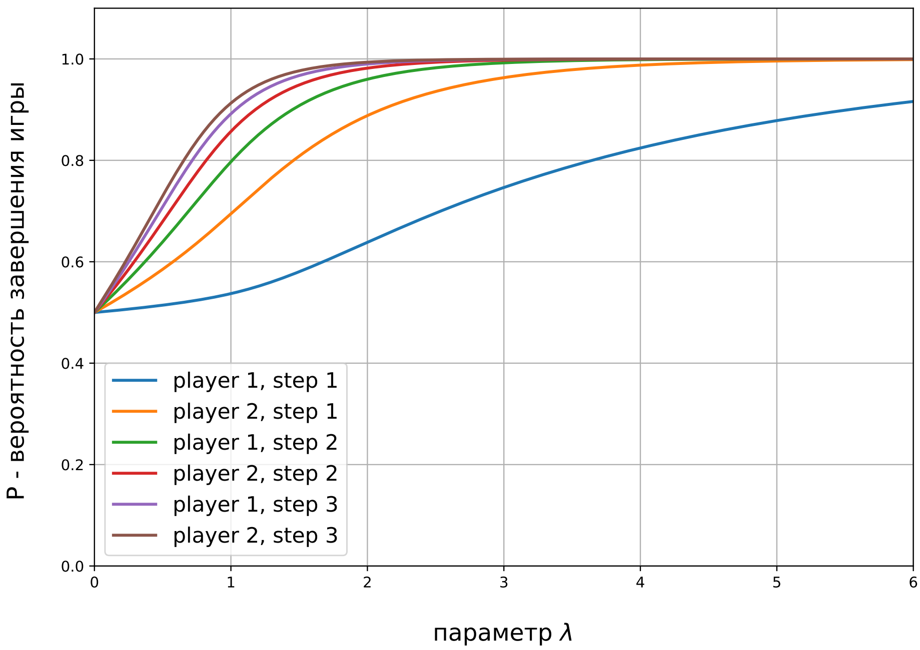


Рис. 23: Зависимость завершения игры на данном шаге от $\lambda$ для игры с постоянной суммой длины 6

завершения игры больше вероятности продолжения. Этот факт хорошо согласуется с реальным поведением, в силу того, что в этой модели исключается одна из мотиваций передачи хода - увеличние суммарного выигрыша.

График для игры с 10 шагами получается практически таким же.

## 5.4 Исследование варианта игры «сороконожка» с тремя игроками

Рассмотрим два варианта игры с тремя участниками длины 9 (см схему 24 на стр 32):

Первый вариант игры почти не отличается от классической версии, кроме того, что в конце выигрыш всех участников становится нулевым.

Во втором варианте добавим перемешивание игроков: после первых трех ходов, а также после первых шести выберем случайные номера участникам, то есть после первого хода третьего игрока каждый из игроков сможет стать игроком номер 1, 2 или 3 с вероятностью $\frac{1}{3}$ и то же самое произойдет после второго хода третьего игрока.

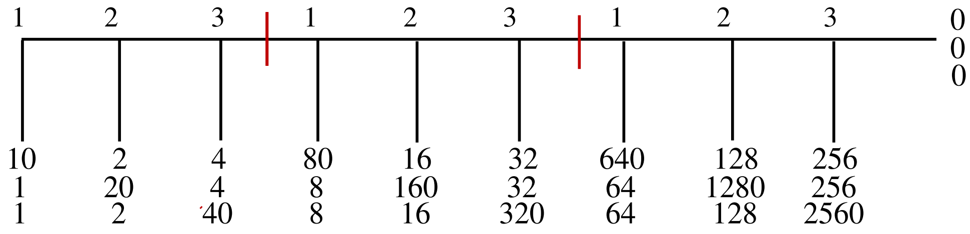


Рис. 24: Схема игры с 3 игроками

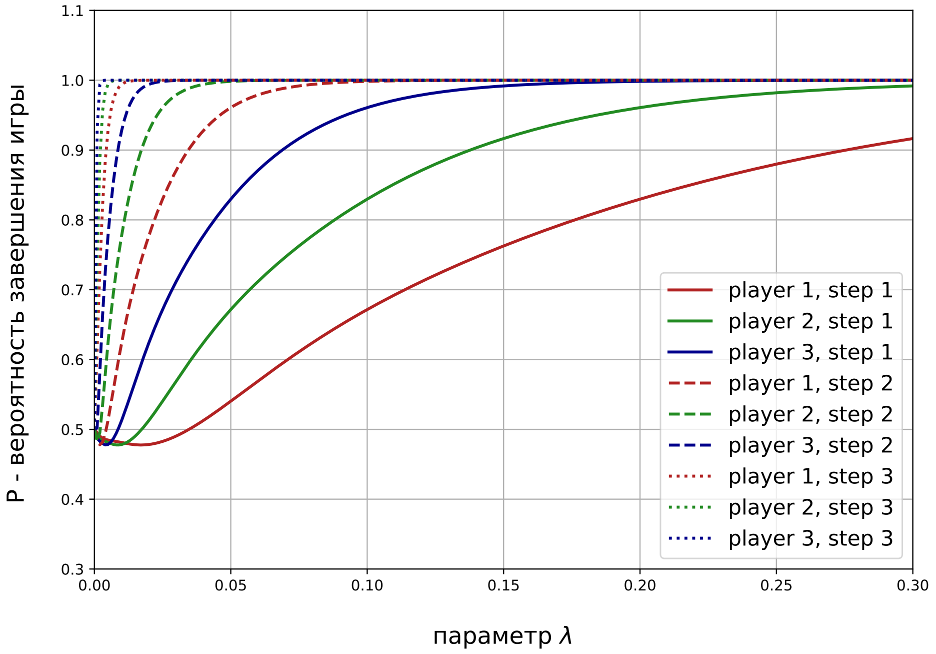


Рис. 25: Зависимость завершения игры на данном шаге от $\lambda$ для классической игры длины 9 с 3 игроками

В игре с тремя игроками графики монотонно возрастают(и довольно быстро), за исключением совсем маленьких $\lambda$, которые не имеет смысла рассматривать в силу их стремления к 0 (такой маленький параметр описывает почти хаотичное, безразличное поведение игрока).

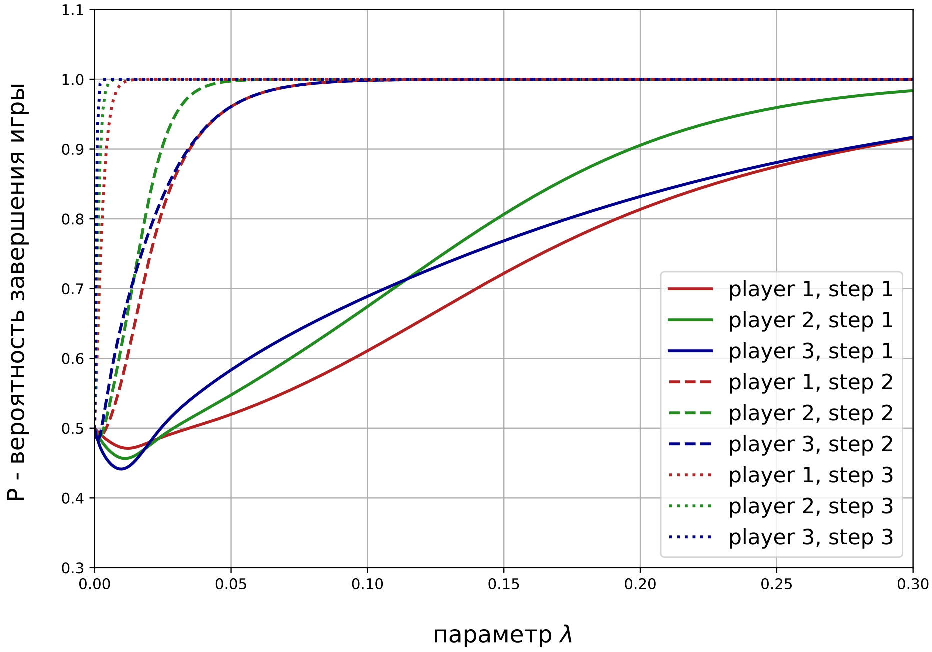


Рис. 26: Зависимость завершения игры на данном шаге от $\lambda$ для игры длины 9 с 3 игроками с перемешиванием

Из графиков 25, 26 видно, какое значение имеет перераспределение ходов между игроками, при $\lambda > 0.12$ на графике 26 вероятность завершения игры ближе к единице для второго игрока чем для третьего, что говорит о том, что завершение игры на следующем шаге менее вероятно, чем на предыдущем и невозможно в классической версии, аналогичное поведение кривых наблюдается перед повторным перераспределением.

# 6 Заключение

В рамках дипломной работы разработаны программы, позволяющее находить решение игр вида сороконожка с неполной информацией методом равновесия дискретного отклика (quantal response equilibrium). С помощью разработанного программного средства были проведены исследования для вариаций игры «сороконожка» с произвольным числом шагов:

- «Сороконожка» в классическом варианте,
- «Сороконожка» с постоянной суммой,
- «Сороконожка» с тремя игроками.

С помощью разработанных программ была получена динамика вероятностей для некоторых начальных узлов игры в зависимости от параметра $\lambda$. Значение параметра $\lambda = 0$ соответствует полностью произвольному поведению игроков в любых вершинах. А $\lambda = \infty$ соответствует безошибочной игре, когда взятие выигрыша и выход из игры происходит с вероятностью 1 в каждой вершине игры. Для промежуточных значений $\lambda$ модель РДО делает специфическое предсказание о векторе взятия и выхода из игры для каждой вершины.

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют осуществить сравнения решений в играх вида игры «сороконожка». Было замечено качественное отличие равновесия игры «сороконожка» с постоянной суммой от классической постановки, которое заключается в том, что все вероятности завершения игры представляют собой монотонные функции от параметра $\lambda$. Это означает, что при любых $\lambda > 0$ вероятность завершения игры больше вероятности продолжения. Этот факт хорошо согласуется с реальным поведением, в силу того что в этой игре исключается одна из мотиваций передачи хода - увеличение суммарного выигрыша.

В игре сороконожка для 3 игроков и 9 шагов графики зависимсостей вероятностей от параметра монотонно и довольно быстро возрастают, за исключением совсем маленьких $\lambda$, которые не имеет смысла рассматривать в силу их близости к 0, так как такой маленький параметр описывает почти хаотичное, безразличное поведение игрока.

В работе рассмотрены два варианта игры с тремя участниками. Первый вариант игры почти не отличается от классической версии, кроме того, что в конце выигрыш всех участников становится нулевым. Во втором варианте добавлено случайное перераспределение номерой игроков.

Сравнение равновесий показывает, что при перераспределении ходов между игроками (второй вариант) при $\lambda > 0.12$ вероятность завершения игры ближе к единице для второго игрока, чем для третьего. Это говорит о том, что завершение игры на следующем шаге менее вероятно, чем на предыдущем, чего не наблюдается для первого варианта игры, аналогичное поведение кривых и перед 6 шагом.

Дальнейшее продолжение работы связано с пополнением набора решаемых задач и с расширением метода РДО, позволяющего учитывать возможность обучения игроков в процессе разыгрывания серий игр.

# Список литературы


[1] Mckelvey, R.D., Palfrey, T.R. Quantal Response Equilibria for Extensive Form Games. Experimental Economics 1, 9–41 (1998). DOI: 10.1023/A:1009905800005

[2] Fey, M., McKelvey, R.D., Palfrey, T.R. An experimental study of constant-sum centipede games. Int J Game Theory 25, 269–287 (1996). DOI: 10.1007/BF02425258

[3] Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках [Текст] : учебник для вузов / А. В. Захаров ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. — (Учебники Высшей школы экономики). — 304 с. — 1500 экз. — ISBN 978-5-7598-1180-0 (в пер.).

[4] Алексей Савватеев "Теория игр. Лекция 26. Определение сильного и слабого секвенциальных равновесий"[Электронный ресурс] / авт. курса, А.В. Савватеев — видео лекция — Долгопрудный, МФТИ (НИУ), 2017 Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=MC46bNM42P8&list=PLK3uxQt OIYRjC_XsCxYQ-MrgD6n7pyypJ&index=26 — Загл. с экрана. (дата обращения: 01.06.2020)

[5] Алексей Савватеев "Теория игр. Лекция 17. Выборы мэра: формализация, алгоритм Цермело"[Электронный ресурс] / авт. курса, А.В. Савватеев — видео лекция — Долгопрудный, МФТИ (НИУ), 2017 Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=Rn3vc5kF6g4&list=PLlx2izuC9gjj4 crXUkw2luo8JfNCfmbkn&index=17 — Загл. с экрана. (дата обращения: 01.06.2020)

[6] Алексей Савватеев "Теория игр. Лекция 24. Игры "Ультиматум"и "Сороконожка"[Электронный ресурс] / авт. курса, А.В. Савватеев — видео лекция — Долгопрудный, МФТИ (НИУ), 2017 Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=oJ0ZOynVmwk&list=PLK3uxQt OIYRjC_XsCxYQ-MrgD6n7pyypJ&index=24 — Загл. с экрана. (дата обращения: 01.06.2020)

[7] Colin F. Camerer. Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction Princeton: Princeton, NJ, 2003, 568 c

[8] Richard D. McKelvey and Thomas R. Palfrey An Experimental Study of the Centipede Game Econometrica Vol. 60, No. 4 (Jul., 1992), pp. 803-836 Published by: The Econometric Society DOI: 10.2307/2951567 Page Count: 34