Теории вероятностей: *критика исходных* понятий, разработка *новой исходной* системы

Бондарчук Игорь Иванович кандидат физико-математических наук

2 мая 2018 г.

Название статьи нетрадиционно и, вообще говоря, несколько вызывающе, но именно оно отражает ее цель, – критический анализ *тех понятий* теории, которые *используются* три столетия, *устоялись*, *повторяются* в многочисленной литературе и *воспринимаются* как нечто *неизменно данное.* Т.е. «посеять» сомнения там, где никаких сомнений не возникает. По крайней мере, в многочисленных работах о сомнениях ничего не говорится. Основная же *цель* – показать, *какой должна быть теория вероятностей.* Надеюсь, что найдутся Читатели, которые прочтут ее, хотя бы просто из любознательности.

Вклад в разработку понятий, внесла плеяда выдающихся ученых XVI – начала XVIII веков[1]. Вызывают искреннее восхищение и удивление их *размышления* (оставшиеся в основном «за кадром»), *догадки* и те *открытия*, которые привели к системе понятий, правил обращения с событиями и их вероятностями. Созданная ими *исходная* система позволила и позволяет *правильно* решать задачи *теории* событий (ее называют элементарной теорией). Однако всегда следует *принимать во внимание* то, что теория создавалась на «пустом месте». Они – первопроходцы, которым всегда намного сложнее, чем их последователям. Не менее важно *само время*, в которое *происходило ее создание*, но об этом по мере изложения.

Нетрадиционно, ибо содержание критики теории вероятностей в работах: философские споры о роли случайности и причинности в природе, следовательно, и обоснования теории вероятностей. В общем-то, полезно, иногда бывает интересно, но пока оставим это философам. Мы в большей степени придерживаемся мысли, выраженной В. Феллером [6,19]: «Философское рассмотрение оснований теории вероятностей должно быть отделено от математической теории вероятностей и математической статистики

[1] Подробно об этом можно почитать в работе [1,386-412] и др. работах по истории теории вероятностей, например [2-5]

в такой же мере, как рассмотрение наших интуитивных представлений о пространстве отделяется теперь от геометрии».

Замечание **1. Ссылки на цитируемые работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. При ссылке на не несколько работ, они разделяются знаком «;». Понятия, используемые в настоящее время, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита. Предположения, уточняющие понятия – римскими цифрами. Уточненные и вновь введенные определения понятий – арабскими цифрами. Выводы обозначаются номерами W.1, W.2, ... О понятиях, которые не используются при анализе и разработке** ***новой исходной*** **системы, говорится в приложениях I-IV (стр.45-58).**

Для справки, приведем *трактовки* (**интерпретации, определения**) вероятности, которые, в той или иной степени, затрагиваются при последующем анализе.

С начала XVIII века применялись три трактовки вероятности: ***классическая, статистическая*** **(Я. Бернулли) и** ***геометрическая*** **(Т. Симпсон). 1-я и 3-я** ***не предполагают*** **обращения к** ***эмпирическому*** **исследованию, а 2-ю часто называют** ***эмпирической*** **вероятностью.**

В XX веке появились: ***Аксиоматическая*** **трактовка (А.Н. Колмогоров), в которой вероятность понимается как** ***исходное*** **понятие, не получившее** ***определения*** **и поставленное в** ***условие системы аксиом. Диспозиционная*** **трактовка (К. Поппер), в которой вероятность рассматривается как** ***зависимость*** **относительной** ***частоты*** **от** ***данной конкретной опытной*** **ситуации.**

Т.е. мы будем придерживаться понимания вероятности, которое прекрасно сформулировано в работе В. Феллера[2][6,20]:

«Успех современной математической теории вероятностей, приобретен следующей ценой: теория ограничивается лишь одной стороной «случайности». Интуитивное понятие вероятности связано с индуктивными умозаключениями и суждениями .... Суждения такого рода интересны философам и логикам и являются также законным объектом математической теории. Следует подчеркнуть, однако, что мы будем иметь дело не с модальностями индуктивных умозаключений, а с тем, что может быть названо физической или ***статистической вероятностью.*** **Грубо говоря, мы можем охарактеризовать это понятие, сказав, что наши вероятности относятся не к мнениям, а к возможным исходам** ***мыслимого эксперимента*»**.

[2] **Автор, к своему огорчению, смог ознакомиться с этой работой после издания работы [9]. Великолепный учебник, написанный нестандартно, в отличии от многочисленных работ по теории вероятностей. Если кто не читал, то советуем посмотреть – там много интересного**

Математическая модель имеет дело с абстрактными *математическими* объектами [7]. Названия объектов и *основные отношения*, которым они подчиняются, даются в *исходной* системе *математической* модели. В теории вероятностей она приводится в *теории* событий.

Отметим, во-первых, что *исходная* система понятий теории *не зависит* от приведенных *интерпретаций* вероятности. Во-вторых, *основные* идеи *аксиоматического* подхода, которые, по мнению автора, важны для построения теории

1. *Связи* теории и практики [8,12-14], исходя из «*основных* свойств вероятности, подмеченных на примерах *классического* и *статистического* определений» [1,49]. 2. Образования *сложных* событий на основе *элементарных* [8,10].

Замечательные идеи. Однако в работах подчеркивается значение аксиоматизации, применения теорий меры и множеств, а о важности этих идей практически ничего. Например:

«Статистический или эмпирический подход к вероятности был развит главным образом Фишером и Мизесом. Понятие пространства элементарных событий идет от Мизеса. Это понятие сделало возможным построение строгой математической теории на основе теории меры. Такой подход развивался постепенно в течение 20-х годов под влиянием многих авторов. Аксиоматический подход на современном уровне был разработан А.Н. Колмогоровым» [6,22].

Вопрос только в том, что 2-я идея высказана, но не реализована, т.е. осталась только идеей, что будет показано при анализе. А это не позволило довести до логического завершения и 1-ю идею (**приложение II, стр.46**).

Критика сама по себе – *пустозвонство*, в чем автор твердо убежден. Поэтому понятия, которые не *совсем точно* соответствуют *экспериментам, исправляются* и *дополняются*, а вместо тех, которые не следуют из *экспериментов*, вводятся *новые*, соответствующие *экспериментам.*

В результате разработана *новая исходная* система понятий теории, *не противоречащая экспериментам,* которая привела к *качественному* уточнению *теории* событий. Именно благодаря этому *уточнению* стал возможен *плавный* и *строгий математический* переход [9, стр.34-48] от событий к случайным величинам[3].

Все дело в том, что на его основе создана *новая теория* случайных величин. Многие ее *положения* (**начиная с *определения случайной* величины**) [9, стр.49-120] «*вступают в противоречие*» с соответствующими *положениями* теории, существующей в настоящее время.

Т.е. последствия проведенных изменений очень сильно повлияли на *теорию* случайных величин. А это требует, во-первых, ясного понимания *что*, *почему* и *как изменено*, во-вторых, серьезного обсуждения того, к чему приводят эти изменения.

Поэтому анализ дается преднамеренно подробно и Читателю надо набраться много терпения, чтобы дочитать сие сочинение до конца.

Во многом, изложение «страдает» излишними подробностями из-за того, что рассчитано как на профессионалов[4], занимающихся теорией, так и на Читателей, просто хорошо знающих и применяющих ее в других областях знаний, не задумываясь о ее строгости[5], и, конечно же, тех, кто только начал изучать ее азы[6].

Теперь перейдем непосредственно к анализу.

Если определена *исходная* система *математической* модели, остальное изложение должно строиться *исключительно* на этой системе. Это в полной мере относится к теории вероятностей [8,9]. Две цитаты:

"Назрела необходимость разработать аксиоматику и для теории вероятностей, поскольку *старое*, *полу интуитивное* и *неформальное* обоснование Бернулли и Лапласа *давно устарело. Строгое аксиоматическое обоснование* было разработано в 1929 году" [5].

"До недавнего времени теории вероятностей представляла собой *не сложившуюся математическую* науку, в которой *основные понятия* были *недостаточно четко* определены. Эта нечеткость приводила нередко к па-

[3] **Он, вроде бы, реализован в аксиоматическом подходе, но лишь формально**

[4] **Впрочем, им часто бывает намного сложнее: нал ними довлеют стереотипы, существующие 3-и столетия, и укоренившиеся в мышлении за время работы**

[5] **Такое же отношение было и у автора этой работы. Но до тех пор, пока не были получены, в строгом соответствии с существующей теорией надежности, абсурдные результаты (например, отрицательные вероятности). «Подвело» любопытство: а что будет, если .... Так как в литературе по теории надежности объяснения не нашлось, пришлось искать его в теории случайных величин. Вместо объяснения пришло понимание того, что, по крайней мере, два положения теории случайных величин не соответствуют теории событий: и «потянулось» ..., вплоть до исходных понятий**

[6] **Вообще-то, оно больше рассчитано на тех, кого заинтересует теория вероятностей. Будущее ее развитие за ними**

радоксальным выводам (вспомним парадоксы Бертрана[7]) ... Аксиоматическое построение основ теории вероятности отправляется от основных свойств вероятности, подмеченных на примерах классического и статистического определений. *Аксиоматическое* определение вероятности ... включает в себя и *классическое* и *статистическое* определения .... На этой базе удалось построить *логически совершенное* здание современной теории вероятностей" [1,49].

Красиво сказано, сильные утверждения – попробуй возразить. Тем более что подобного рода высказывания можно найти во многих современных работах по теории вероятностей, по крайней мере, издаваемых с 50-х годов XX века. Итак, «*само совершенство*»: – *критика просто неуместна.*

Однако осмелимся задать нескромный, но очень интересный вопрос: *всегда ли в теории вероятностей «должно следовать» и «следует» совпадают*? У математиков, особенно тех, кто профессионально занимается теорией вероятностей (**не всех, но их будет немало**), вопрос вызовет возмущение, ибо теория – «само совершенство» и уже *сама постановка* вопроса – «крамола». Тем не менее, ответ автора – *отрицательный.* Учитывая название и цель статьи, – это, безусловно, полная «ересь». *А если еще учесть, что автор механик, а не математик*[8]?

Возмущение автору понятно. Успешное и *правильное* решение большого числа задач *теории* событий[9] на основе разработанной *исходной* системы понятий и определило, по-видимому, ее «неприкосновенность».

«История показывает, что первоначально теория вероятностей развивалась для описания очень ограниченного круга опытов, связанных с азартными играми, и основные усилия были направлены на вычисление определенных вероятностей. ... При этом следует иметь в виду, что вовсе не отыскание этих численных значений вероятностей является целью общей теории. Объектом последней является раскрытие общих законов и зависимостей, а также построение абстрактных моделей, которые могут в удовлетворительной степени описывать физические явления» [6,20-21].

---

[7] **Связанные с неоднозначностью решения задачи на геометрическую вероятность, но, в принципе, они определяются разными постановками задачи [1,41-43]. Определение геометрической вероятности дается в виде: "наудачу бросается точка в область G ... вероятность попадания брошенной «наудачу» точки «в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой области (длине, площади и т.п.)". 2-я часть является предположением, которым, по факту, постулируется равномерное распределение вероятностей. Слово «наудачу» не имеет конкретного математического смысла и допускает разные трактовки**

[8] **"Корпоративный дух», не в лучшем понимании, к сожалению, «имеет место быть» и в научных кругах**

[9] **Есть неточные решения (приложения III и V, стр.50,60)**

Развитие теории случайных величин определило переход к открытию более общих статистических закономерностей. Но как раз в этой теории больше всего очевидных причин, которые приводят к *отрицательному* ответу. Их достаточно много, однако сейчас обратим внимание на одну: «*мирное сосуществование*» 2-х *разных теорий* – событий и случайных величин. «*Мирное сосуществование*», ибо *строгой математической* связи *теории* случайных величин, применяемой в настоящее время, с *теорией* событий не существует: то, что *недопустимо* во второй – применение операций с действительными числами к случайным событиям, – *закономерно* в первой.

***Замечание* 2. Возможно, что некоторые из Читателей, профессионально занимающиеся теорией (исходя из определения случайной величины) сразу сделают вывод: причин для отрицательного ответа здесь нет. Но не следует торопиться: они все же есть. Убедиться в этом можно, заглянув в конец статьи (приложение VI, стр. 76) и попробовав ответить на заданные там вопросы. Можно посмотреть работу [9]. Но лучше последовательно «проработать материал» данной статьи: в нем показаны определенные противоречия между *исходными ма*тематическими понятиями и *экспериментами* и введены *новые*, *устраняющие* противоречия. По крайней мере, это значительно облегчит поиск ответов хотя бы на некоторые вопросы**.

Как следствие, *теория* случайных величин *не согласуется* с *теорией* событий[10], а это приводит к тому, что многие ее *положения* попросту неверны.

Не затрагивая существующую *исходную* систему, можно исправить только *некоторые неверные* положения теории случайных величин. Но даже дать вразумительное объяснение *этих исправлений* на ее основе не получается: при этом возникают некоторые вопросы, на которые нет ответа. Создать же *единую неформальную*[11]*математическую теорию* событий и случайных величин опираясь существующую *исходную* систему – дело безнадежное.

“Насколько удачно проведена схематизация явлений, насколько удачно выбран математический аппарат для его изучения, мы можем судить по согласию теории с опытом, с практикой. Развитие естествознания, в частности физики, показывает, что аппарат теории вероятностей оказал-

---

[10] **Некоторые примеры этого несоответствия даны в работе [9, 8-12] и в приложении VI (стр.76)**

[11] **Т.е. теорию, которая обеспечивала бы плавный и строгий математический переход от событий к случайным величинам**

ся весьма хорошо приспособленным к изучению многочисленных явлений природы” [1,14].

Спорить по поводу 2-ой части цитаты бессмысленно: – она точно отражает существующие реалии. А вот первая часть, которая, «как ни крути», достаточно спорная, ибо об удачном выборе «судить по согласию теории с опытом» всегда сложно, а теории вероятности – особенно. Но, в принципе, она отражает цель сего повествования, только уж в очень общих чертах. Поэтому сформулируем ее в другом более конкретном виде:

Насколько *правильно математическая* модель описывает явление *реального* мира, зависит от того, насколько *точно исходная* система отражает *основные закономерности*, присущие *данному* явлению.

Именно с этой точки зрения будем рассматривать *исходную* систему понятий теории вероятностей. А для этого нет необходимости «влезать в дебри философских споров», а вообще говоря, и «в дебри» самой теории.

Об этом говорится не часто, но всегда подразумевается, что построение *математической* модели, описывющей *реальное* явление, начинается с его *идеализации* (**схематизации, введения аксиом, постулатов**[12].). Создание *математической* модели *реального* явления без его *идеализации* невозможно. В теории вероятностей она определяется *предположением*:

А. *Существуют некоторые комплексы условий, допускающие неограни-ченное число повторений.*

В работах [1; 6-7; 10-13; 16] (**как и многих других**) оно приводится в разных вариациях.

Например. “Основное *допущение* теории вероятностей (*постулат*[13] *существования математической* вероятности) состоит в том, что существуют <u>такие</u> <u>*комплексы*</u> <u>*условий*</u>, которые (*теоретически, по крайней мере*) могут быть реализованы <u>*неограниченное*</u> <u>число</u> <u>раз</u>, при наличии которых в данном опыте

[12] “Аксиома (греч. axioma) – положение, принимаемое в качестве исходного, отправного положения данной теории. Обычно выбирается из истинных положений, т.е. ранее проверенных практикой” [18,31]. “Постулат (от лат. postulo – «требую»), – суждение, принимаемое без доказательств в качестве исходного положения к.л. теории” [19,238]. В более поздних работах [20, 21, 570] нюансов, определяющих отличие понятий нет. Однако это отличие необходимо. Хотя бы для того, чтобы знать, что данная теория основана на положениях, проверенных практикой, а другие– на утверждениях возможных, но с практикой не связанных. Считать, что этих отличий не существует, как и то, что положение, проверенное практикой – «безусловная истина», одинаково вредно для развития науки. Но это почти философия, поэтому - в другой раз

[13] По существу, это аксиома, ибо подтверждается практикой (приложение II, стр.49)

наступление факта А имеет определенную *вероятность*, выражающуюся *математическим* числом" [10,2].

«Прежде чем говорить о вероятностях, мы должны условиться насчет *идеализированной модели* рассматриваемого мыслимого *эксперимента*». . . . мы будем анализировать абстрактные модели. В глубине души мы сохраняем интуитивное истолкование смысла вероятности, и это истолкование в ряде приложений приобретает и практическое значение. Мы представляем себе *эксперимент, выполняемый очень много раз*» [6,20-21].

Если в первой работе имеется намек (***теоретически, по крайней мере***) на то, что это *предположение идеализирует реальное* случайное явление, то во второй об этом говорится непосредственно и много.

Предположение (А), в общем-то правильное, да, к сожалению, не совсем корректное, иначе трудно пояснить появление примера: "**комплекс условий состоит в том, что бросают два раза одну монету" [8,12]**.

С тем же успехом можно сказать: **комплекс условий состоит в том, что: одновременно бросаются три игральных кости; бросают игральную кость, вынимают наугад карту из колоды и кость домино из партии и т.п.**

Но вот в чем «закавыка»: – *относятся ли эти примеры к комплексу условий*?

В работах этот *комплекс условий* часто называют *испытанием*, *опытом*, *экспериментом* или *наблюдением*, но смысл от этого не меняется: название зависит только от «пристрастия» автора. Далее в эти термины будет вкладываться отличающийся смысл.

Под *испытанием* будем понимать *идеальную* модель случайного явления. Наряду с ним будут применяться понятия: простого (или просто) *опыта* и *сложного* опыта. Что под ними понимается, будет пояснено после рассмотрения понятия случайного события.

Под *экспериментом* – *реальное* проведение случайного явления (или наблюдение за ним) при *данных* условиях.

Проведем анализ того, как *предположение* (А) согласуется с *экспериментами*. А для этого поговорим о *данных* условиях поподробнее. Например, при *экспериментах* с игральной костью предполагается выполнение следующих *условий*:

***Пример 1*. Игральная кость – *идеальный куб с равномерной* плотностью и изображением *чисел 1,2,3,4,5,6* очков на его гранях. Подбрасывается на *достаточную высоту* с некоторым вращением. Падает на *жесткую гладкую плоскость*.**

Подобные условия должны выполняться и при бросании монеты. В *экспериментах* с выниманием наугад одной карты из колоды, кости домино из партии или одного шара из урны они другие.

***Пример* 2. Все карты в колоде, кости домино в партии или шары в урне должны быть одного размера и изготовлены из одного материала (по крайней мере, не отличаться при внимательном осмотре или ощущаться на ощупь), обратные стороны карт или костей домино не должны отличаться. Перед выниманием их следует тщательно перемешать. При вынимании мы не должны видеть: лицевую сторону карт или костей домино; шаров в урне.**

Условия проведения *испытания* на примерах азартных игр рассматриваются целенаправленно (**хотя об их особой конкретности говорить не приходится**).

Во-первых. *Именно* они, в первую очередь игра в кости, были *основой* становления теории вероятностей как науки: разрабатывались правила обращения с событиями; придумывались и «шлифовались» понятия и правила, необходимые для правильного вычисления вероятностей событий. *Именно* азартные игры явились *базой* для создания *классической* теории.

Во-вторых. Разговор об условиях проведения *экспериментов*, в той или иной степени, в работах [1; 4; 6; 10-13; 15-16] и многих других. Но когда приводятся эти примеры, то об *условиях* говорится мало и вскользь, а часто не упоминается. В примерах из механики, физики, химии, техники и т.п. они достаточно конкретны и, возможно, поэтому рассматриваются намного чаще и подробнее.

***Замечание* 3. Например, в работе [12,11-12], по нашему мнению, дано удачное понимание случайного явления: "Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном повторении одного и того же опыта, протекает каждый раз несколько по-иному". Затем проведен анализ некоторых примеров из техники и сделан вывод: "*Основные* *условия* опыта, определяющих в общих и грубых чертах его протекание, сохраняются неизменными. Второстепенные – меняются от опыта к опыту и вносят различия в их результаты".**

К сожалению, на разговорах о том, какими являются условия, все заканчивается. Но чтобы сделать какой-либо вывод надо бы ответить на простой вопрос: *что будет, если изменить одно или несколько из этих условий*?

***Пример* 3. Грани кости неодинаковы или/и смещен центр тяжести, или/и с изображением *одинакового числа* очков на 2-х гранях; или/и бросается**

низко над плоскостью и вдоль нее так, что плоскость одной из граней параллельна ей; или/и падает на *гладкую плоскость из мягкой глины.*

Об *изменении условий* и их *влиянии* на результат говорил еще Я. Бернулли: **"Так было бы, если бы грани были различной формы или кость в одной части изготовлена из более тяжелого материала, чем в другой"**[14][4,41]. Подобные изменения условий в других примерах Читатель легко «изобретет» сам. Но и на этом примере вполне очевидно, что *изменение условий* приведет к *другим результатам.* Из анализа, в том числе многих других работ, следуют два важных момента. Во-первых, уточнение *предположения* (А):

Предположение **I. При повторении *испытания основные условия* его проведения *не изменяются.***

Для уточнения *предположения* (А) использована фраза, подчеркнутая в цитате (**замечание 3, стр.9**) потому, что именно в этом виде оно обеспечивает *неизменность* вероятности появления любого события *испытания* при любом числе повторений. В *эксперименте предположение* выполняется только *приближенно*[15].

На основе анализа можно утверждать, что бросание 2-х раз одной монеты (как и др. примеры, данные перед вопросом) не имеет *никакого отношения* к *комплексу условий*, о котором говорится в *предположении* I. Эти примеры относятся к *постановке* задачи. Например, определить вероятность: появления 2-х «гербов» при 2-х бросаниях монеты или появление *суммы* очков 9 на 3-х игральных костях и т.п. *Предположение* же I должно выполняться при всех бросаниях монеты или игральной кости, ибо его нарушение может привести к другим, в том числе непредсказуемым результатам.

Во-вторых. *Условия* проведения *испытания* (*эксперимента*) разделяются на две группы: *внутренние* – *форма* игральной кости, *положение* ее *центра* тяжести; *число* шаров в урне и т.п.; *внешние* – *состояние поверхности,* на которую падает кость , как она *бросается* и т.п**.**

Конечно же, *изменение основных условий* проведения *испытания* (*эксперимента*) может привести к *изменению* вероятностей его событий,

---

[14] **Он, как и пример с бросанием монет, встречается других работах [1,52; 6,39-40; 15,25-26], но только для иллюстрации того, что "...в одном и том же пространстве элементарным событиям вероятности можно приписывать по-разному" [6,40].**

[15] **Самыми близкими к испытанию являются азартные игры: кости, лотерея, карты, домино и т.п. Их изобретатели постарались сделать так, чтобы шансы игроков были бы равными [4,40]. Однако их идеальные модели существуют только в нашем воображении, т.е. мысленно, виртуально, теоретически**

но не обязательно, вероятности его событий могут и *не измениться.* Все *зависит* от того, *как* и *какие условия изменяются.*

Разделение условий проведения *испытания* и *зависимость результата* от их *изменения* хотя и условно, но вполне естественно и давно используются в других областях знаний. Почему теория вероятностей до сих пор является исключением, – это под вопросом.

Замечание 4. Создание теории вероятностей происходило в то же время, в которое такие науки как механика, физика, некоторые разделы математики только начали свой путь к тому виду, который они приобрели к концу XIX началу XX века. Понятно, что в этих условиях провести аналогию между теорией вероятностей и другими науками было крайне сложно. Однако одна аналогия появилась еще в самом начале XVIII века у Н. Бернулли [1,434]. В своей работе он обратил внимание на "...особое и исключительное совпадение ..." правил определения математического ожидания и центра тяжести системы сосредоточенных масс.

С нашей точки зрения, можно сказать: Н. Бернулли было подмечено, что *распределение вероятностей* и *масс* являются *действительными* функциями *действительной* переменной; об этом в следующей статье.

Замечание 5. Пример аналогии, данный Н. Бернулли, только иногда приводится в работах [11,80; 12,86], но просто как «механическая интерпретация» математического ожидания, используемая для «большей наглядности» его понимания. Т.е. трактуется _только исключительно_ как _совпадение_, не более. Иначе весьма сложно пояснить появление, например, _теоремы_ о _математическом_ ожидании _произведения_ случайных величин[16]: таковой – _произведения_ центров тяжести – в механике не существует. Можно возразить: теория вероятностей – это не механика. Конечно же, это так. Но для описания в обоих случаях используются действительные функции действительной переменной: – их свойства не зависят от того, в какой области знаний они применяются.

По идее хотя бы это могло привести к мысли, что здесь что-то не так. Но не случилось .... По-видимому, на это сильно повлиял стереотип, сложившийся в течение длительного времени. До конца XIX века просто говорилось о некой величине [10,93], принимающей значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Название же – «случайная величина» начало применяться вначале XX века, а ее определение «подведено» под это понимание.

---

[16] **Не появилась бы и теорема о математическом ожидании суммы случайных величин. Эти и некоторые другие вопросы, связанные с математическим ожиданием, рассмотрены в приложении VI (стр.78)**

Замечание **6. Такое понимание, по-видимому, начало слагаться с работ Галилея, Гюйгенса и продолжено Д. Бернулли, первым применившим к вероятностным задачам методы математического анализа. Вычисление математического ожидания, ошибки измерений (развитие теории началось в XVIII веке) и определение геометрической вероятности (сноска 7, стр.4) связаны с действительными числами. Это привело к тому, что *случайная величина* воспринималась как *действительная* функция *действительной* переменной. Существенную роль в таком понимании сыграли: 1. Использование Я. Бернулли [4,47] членов ряда, выражающего степень бинома $(a + b)^n$, для доказательства своей знаменитой теоремы (открытие закона больших чисел). 2. Блестящие исследования А. Муавра, открывшего «Метод аппроксимирования суммы членов бинома . . . » [4, 109] кривой $\exp(-t^2/2)$ для больших значений степени бинома n. 3. Работы П. Лапласа, который широко применил методы математического анализа *действительных* функций *действительных* переменных к случайным величинам, К. Гаусса и А. Лежандра, внесших большой вклад в развитие тории ошибок измерений.**

Это понимание не изменилось и в настоящее время[17]. А если говорить по существу, то понятие *случайной величины* было *отождествлено* с понятием *функции распределения вероятностей* случайной величины. Но анализ случайных величин не соответствует заявленной цели: об этом – «в другом месте и в другое время».

И еще об одном всем давно и хорошо известном предназначении *математической* модели, о котором приходится говорить вынуждено.

***Математическая* модель, описывающая явление, позволяет *предсказать* результат *эксперимента* на *основе* выявленных *закономерностей*, присущих данному явлению.**

Конечно же, именно это подразумевается и делается в теории вероятностей. Казалось бы, очевидно, но этого момента, как бы, не существует, ибо из «очевидности» ничего не следует. Как напоминание об этом предназначении *математических* моделей теории вероятностей, введем *предположение*:

Предположение **II. *Вероятности* событий вычисляются при *условии*, что *испытание* проводится *мысленно* (*виртуально*, но не *реально*) и только *один раз*.**

Это *предположение* отделяет *идеальную* модель от *эксперимента*. Но в теории вероятностей, к сожалению, этого разделения в принципе не

[17] Аксиоматический подход не изменил его: оно просто дается в формализованном виде и ее определение, по сути, подводится под исторически сложившееся понимание

существует, – они смешаны «в одну кучу». Анализируя пояснение того или иного положения теории, понять, где говорится об *эксперименте* (***реальном* явлении**), а где – о *математике* (**модели, описывающей явление**), – весьма сложно. Теперь следствие из *предположений*, которого, несмотря на очевидность рассмотренных фактов, как раз и не хватает в теории.

W.1 Если *изменение* условий приводит к *изменению* вероятностей событий – это *другое испытание*, если *испытание* повторяется – это тоже *другое испытание*.

Вроде бы и уточнение (I) предположения (A) незначительно, и введение предположения (II) не имеет большого смысла, ибо хорошо понятно и известно. «Мелочи?». В принципе можно согласиться. Однако если бы следствие учитывалось, то, возможно, теория была бы другой, и не пришлось бы говорить об этих «мелочах», – в общем-то, очевидных фактах.

Акцент на этом поставлен потому, что следствие важно для построения теории. В нем уже «заложена мина» под одно из понятий теории – *независимости* (*зависимости*) событий (***испытаний*, случайных величин**), которое «играет значительную роль в теории вероятностей» [1,56]. Следствие W.1 приводит к *другому пониманию* этого понятия: по существу, оно связывает *зависимость* вероятностей событий *испытания* (**или *эксперимента***) с *условиями* его проведения. Объясним на примерах.

***Примеры* 4. А. Вынутый наугад шар не возвращается в урну: это *изменяет число* шаров, т.е. *внутреннее условие испытания*, и вероятности *всех* событий при 2-м вынимании. Следовательно, *отбор* 2-го шара из урны – это другое *испытание*, вероятности событий которого *зависят* от *возможного* исхода 1-го *испытания*. Но как 1-е, так и 2-е *испытание* проводятся при *неизменных условиях*. В. Вынутый наугад шар возвращается в урну. После тщательного перемешивания, снова вынимается шар. Условия *испытания не изменяются*, но оно *повторяется*, следовательно, это другое *испытание*, вероятности событий которого *не зависят* от *возможного* исхода 1-го *испытания*.**

С. Приведем примеры из механики. Попадание в мишень зависит от стрелка и оружия, из которого он стреляет (*внутренние* условия), дальности до мишени и ее размеров (*внешние* условия). Прочность детали зависит от материала, из которого она изготовлена, и ее формы (*внутренние* условия), вида и направления действующей на деталь нагрузки (*внешние* условия). В обоих примерах изменение условий приведет к изменению вероятностей событий.

О *независимости* и *зависимости* событий (**в том числе, исхода 2-го *испытания* от исхода 1-го *испытания***) в теории вероятностей говорится в любой работе и большей частью – много. Но эти понятия никоим образом не связывалось и не связывается с *изменением условий* проведения *испытания*[18]. Но *именно* их *изменение* определяет эту *зависимость* (**приложение III, стр.50: более подробно – в работе [9,90-103]**).

Также легко видеть, что понимание *зависимости* вероятностей событий от *условий проведения испытания*, «перекликается» с *диспозиционной* интерпретацией вероятности. Учитывалось бы следствие в теории, то, возможно, эта *трактовка* не появилась бы.

Т.е., «мелочное» *уточнение* понятий ведет к достаточно серьезным последствиям. Другие *изменения*, к которым оно привело , будут показаны при разработке *новой исходной* системы.

Далее используются *испытания, вероятности* событий которых вычисляются *без проведения экспериментов,* т.е. по *классической* формуле.

Понятно, что к ним относятся только *идеальные* модели азартных игр, о чем говорил еще Я. Бернулли: «**...так как только крайне редко это возможно сделать, и почти нигде не удается, кроме игр**» [4,40].

Подчеркивая это, мы тем самым утверждаем, что вся *математическая* теория вероятностей может быть строго построена на *классическом* подходе к вычислению вероятностей. Т.е. применяя "**...старое, полу интуитивное и неформальное обоснование Бернулли ...**", которое "**давно устарело**". Придется каяться: не «вся», а почти «вся». Забегая далеко вперед, отметим, что для того чтобы связать теорию с *экспериментами* и «замкнуть» теорию потребуется парочка аксиом из тех, которые уже предложены в работе [8, 11] (**переформулированные аксиомы 2 и 3**[19]) и приводятся в других работах. Поэтому – только «почти».

А теперь обратимся к одному из *основных* понятий теории – события.

В."Под событием понимается *всякий факт*, который в результате опыта может *произойти или не произойти*" [12,23].

Самое раннее понимание случайного события. Когда появилась такая формулировка, мы не знаем. В работе [14, 5] она более длинная, а в более

[18] **Например, в работах [1,56-74; 6,143-162; 11,44-54; 12,48-61] и др. Для иллюстрации зависимости и независимости событий часто используются примеры 4.A и 4.B**

[19] **Вообще говоря, достаточно одной аксиомы – существования математической вероятности, о чем будет разговор в приложении II (стр.46)**

ранних работах [10; 11] – отсутствует[20]. Но из этих работ понятно, что это понятие относится к событию вообще. Например, появление: данного числа очков, или четного числа очков, или некоторой *суммы* очков при бросании одной игральной кости; конкретной *суммы* очков при бросании 2-х или 3-х игральных костей: одной карты, или карты данной масти, или карты данного наименования и т.п., – это все события. Т.е. понятие расплывчато, неконкретно.

C. "Пусть $\mathbf{\Omega}$ – множество элементов ω, которые будем называть *элементарными* событиями, а $\mathbf{\Theta}$ – множество[21]подмножеств из множества $\mathbf{\Omega}$. Элементы множества $\mathbf{\Theta}$ будем называть случайными событиями (**или просто событиями**), а множество $\mathbf{\Omega}$ – пространством *элементарных* событий" [8,10].

Т.е. в аксиоматическом подходе дополнительно к понятию события, вводятся *новые* понятия – *элементарного* события и их множество Ω (пространство *элементарных* событий[22]). По сути, они постулируются (сноска 12, стр.7). Но что это такое? При более тщательном анализе работ становится понятным, что в аксиоматическом подходе *элементарные* события и их множество Ω, как и вероятность, – *исходные неопределяемые* понятия. Вот и понимай, как хочешь. Практически так и поступают, что следует из комментариев вида: ". . . . Ввиду большого разнообразия случайных явлений нельзя дать более конкретное определение множества *элементарных* событий. Для описания каждой реальной задачи множество выбирается наиболее подходящим образом" [15,14]. Вся «конкретность» определения понятий – в этих предложениях. Положительной и весьма полезной в этом определении является *идея*[23]*построения сложных* событий (множества Θ) на *основе множества Ω элементарных* событий. Но неопределенность понятий множества Ω и *элементарного* события приводит и к неопределенности множества Θ.

Элементарные события связывают с *возможными* исходами *испытания*:

D. "*Возможные исключающие* друг друга исходы *эксперимента* называются *элементарными* событиями" [16,777].

---

[20] **Впрочем, при большом желании и развитой фантазии определение, в завуалированном виде, можно «найти» в цитате (стр.7) из работы [10] . Также, например, как в рассуждениях Галилея об ошибках измерений (они значительно опередили развитие этой теории) «находят» [5], что ". . . эти качественные рассуждения стали первым в истории предсказанием нормального распределения ошибок"**

[21] **Множество Θ называется алгеброй, что связано с применением теории множеств. По-другому [1,26; 11,26; 14,12] – поле событий (приложение I, стр.45)**

[22] **«Понятие пространства элементарных событий идет от Р. Мизеса (в его работе – это пространство меток)» [6,22-23]**

[23] **Она отмечена в начале статьи (стр.2). При ее использовании и учитывая, что элементарные события тоже случайны, более уместно говорить не о случайном, а о сложном (или просто) событии**

Или: "Всякий *неразложимый* исход случайного *эксперимента* называется его *элементарным* событием ..." [17]. Не совсем ясно, что понимается под «неразложимым» исходом. Словосочетание «случайный «*эксперимент*» подчеркнуто потому, что звучит оно, мягко говоря, как-то странно.

Определения вида (D), казалось бы, как-то конкретизируют понятие. Поэтому поводу приведем рассуждения из работы [6,21-23]:

«С самого начала мы должны условиться о том, что представляют собой *возможные* исходы такого *эксперимента* (их совокупность будет нашим пространством элементарных событий) и каковы соответствующие им вероятности. Это аналогично обычному образу действий в теоретической механике, когда вводят воображаемую модель, включающую две, три или семнадцать материальных точек, и эти точки лишаются своих индивидуальных свойств. ... Если мы хотим говорить об «опытах» и «наблюдения» в рамках нашей теории, и без каких бы то ни было неясностей, то мы должны, прежде всего, условиться, каковы *элементарные* (неразложимые далее) события, представляющие собой *мыслимые* исходы *опыта* или *наблюдения. Они определяют идеализированный опыт* (заметим, что термин «элементарное (или неразложимое) событие» остается столь же неопределенным, что и «точка» или «прямая» в геометрии). По определению *каждый неразложимый исход* (идеализированного) *опыта представляется одним и только одним элементарным событием.* Совокупность всех элементарных событий будем называть пространством элементарных событий, а сами элементарные события – *точками* этого пространства. Все события, связанные с данным (идеализированным) опытом, могут быть описаны как совокупности элементарных событий».

К чему приводит такое понимания понятий события и *элементарного* события, будет показано при последующем изложении. А сейчас приведем определения *математических операций* с событиями[24], позволяющих составлять одни события на основе других событий.

E. *Суммой* (***логической***) событий **A** и **B** называется событие **S**, которое состоит (**далее – *предположение***) в появлении «*или события* **A**, *или события* **B**», или *обоих* событий *вместе*, т.е. хотя бы одного из них. Операция записывается в виде **S=A+B**.

F. *Произведением*(***логическим***[25]) событий **A** и **B** называется *событие* **C**,

---

[24] По аналогии с теорией множеств в теорию вероятностей введена операция разности событий [8,10]. Она рассмотрена в приложении IV (стр. 58), ибо в последующем изложении не используется

[25] Логические в том смысле, что для определения операций используются логические связки. На этом, пожалуй, применение логики в теории вероятностей заканчивается

которое состоит (**далее – *предположение***[26]) в появлении ***«и события* A, *и события* B»**. Т.е. при *одновременном* появлении обоих событий. Операция записывается в виде **C=A·B** или **C=AB.**

Выше понятие *испытание* (***идеальная* модель случайного явления**) было отделено от *эксперимента* (***реального* проведения случайного явления при *данных* условиях**). Это позволяет провести анализ того, как *согласуются* определения понятий события (B) и *элементарного* события (D) с *экспериментами*[27]. Рассмотрим конкретные примеры.

Будем вынимать наугад один шар из урны с числами шаров:
***Пример* 5. 4 шара: белый, синий, красный, черный.**
Пример 6. 400 шаров: 30 белых, 90 синих, 120 красных, 160 черных.

Исход (*результат*) *эксперимента* с каждой из урн: появление только *одного* шара *данного цвета*. Отметим три важных момента: **1.** Появление *одного* шара *исключает* появление *любого другого* (**совершенно неважно, какого он *цвета***) шара в данном *эксперименте*. **2.** В данном *эксперименте* появление *одного* шара из числа всех шаров, находящихся в урне, неизбежно[28]. **3.** По *цвету* шара мы различаем события, т.е. *цвет* шара – это *признак* появления события. Следовательно, в *экспериментах* с каждой из урн будем наблюдать *только* **4** события.

Однако в примере 6 невозможно определить, какой шар из числа $m_j = 30, 90, 120, 160$ шаров *данного цвета* появился в *эксперименте*. Т.е. событие в нем определяется числом m_j шаров *данного цвета*, а не *одним* шаром, наблюдаемым в *эксперименте*. Это *качественно* отличает его от примера 5.

1. Определение (B), вроде бы, соответствует *эксперименту*. Но оно относится к событию вообще: *сумма* и *произведение* (**определения (E, F), стр.16**) событий – тоже события. Т.е. неконкретно, расплывчато (**замечание к определению (B), стр.14**).

Во-вторых. В примере 6, для вычисления вероятностей по *классической* формуле, события разделяются на *частные* случаи[29] [10, 5] – шары

[26] **Почему предположения будет пояснено при рассмотрении операций с событиями (стр. 36)**

[27] **Когда далее говорится об экспериментах, то все они проводятся не реально, а мысленно, ибо результат экспериментов в приводимых примерах очевиден. Но, чтобы убедиться в этом, ничто не мешает провести их реально**

[28] **Такое событие называется достоверным, если событие не может произойти в данном испытании, то оно называется невозможным [1,25; 11,24; 14,8]**

[29] **Они были придуманы именно для того, чтобы вычислять вероятности событий по классической формуле. Т.е. при классической трактовке вероятности, частные случаи**

данного цвета мысленно нумеруются. Имеем 400 *частных* случаев (**они тоже часто называются событиями, т.е. понятие еще больше «расплывается»**). Вроде бы, теория учитывает его отличие от примера 6.

Но дело в том, что для отличия их в *экспериментах*, шары следует пронумеровать *реально*, а это будет *испытание* другого *вида*. Однако его нет в теории вероятностей.

2. Так как появление *одного* шара *исключает* появление *другого*, то из определения (D, **стр.15**) сразу следует: в примере 5 – **4-е**, а в примере 6 – **400** *элементарных* событий. Но здесь тоже «нестыковки». **1.** Число *элементарных* событий *зависит* только от *числа шаров в урне*, но *не связано* с *числом* событий *испытания*, появляющихся в *экспериментах*. **2.** Из *элементарных* событий, в соответствии с определением (C), образуются более *сложные* события. В примере (5) будем иметь множество $\mathbf{\Theta}$, состоящее из $2^4 - 1$ [1,23; 11,20] *сложных* событий. А вот в примере (6), в соответствии с определением (C, **стр.15**) из 400 *элементарных* событий определяется множество $\mathbf{\Theta}$**,** которое будет содержать $2^{400} - 1$ *сложных* событий (**калькулятор показывает, что это больше** $2,58 \cdot 10^{120}$). *Но так ли это*?

Вопрос интересен, ибо результатом *экспериментов* в обоих примерах являются только 4-е *исходных* события. Не менее интересен и другой вопрос: *почему при объяснении понятия элементарных событий очень редко приводятся опыты, типа данного в примере 6*? Подобный пример был еще у Я. Бернулли (**3000 белых и 2000 черных камешков в урне [4,43]**). Подобные примеры есть в большинстве других работах, но чаще всего не при объяснении понятия, а в других местах – при объяснении других положений теории событий (**например, *условной вероятности* и *зависимости* событий, пример 4 и комментарий к нему, стр.13**).

Приведем вид *испытания*, которое получается постановкой на шарах *дополнительных* номеров. Для сравнения, приведем также другой пример, который дает более общее представление об этом виде *испытания*.

***Пример 7*.**

белые	**с №№1÷30;**
синие	**с №№1÷90;**
красные	**с №№1÷120;**
черные	**с №№1÷160.**

***Пример 8*.**

30 белых:	**— ,**	**11 с №2,**	**19 с №3,**	**— ;**
90 синих:	**12 с №1,**	**18 с №2,**	**27 с №3,**	**35 с №4;**
120 красных:	**36 с №1,**	**— ,**	**39 с №3,**	**45 с №4;**
160 черных:	**— ,**	**46 с №2,**	**53 с №3,**	**61 с №4.**

К этому виду относятся также: вынимание наугад одной карты из колоды или кости домино из партии. При определении (B) события делятся на

связаны (в основном) с теми событиями, которые возможны в экспериментах

***частные* случаи. Из примера 7 следует наглядное представление о связи *частных* случаев с событиями *испытания* (сноска 29, стр.17). В примере 8 прочерк означает, что шаров с такими номерами нет. В примере 7 имеем 400 событий, а в примере 8 – только 12 событий.**

1. В примерах этого вида в *эксперименте* будет появляться: *один* шар, *одна* карта, *одна* кость домино, т.е. как и примерах 5-6 – *одно* событие. Однако *каждое* событие имеет 2-а *признака*: *цвет* и *номер* шара; *масть* и *наименование* карты; *два числа* очков на кости домино, *разделенные* чертой.

2. Карта тоже делится на частные случаи. Например, появление туза – событие, а масть туза – его *частные* случаи [6,143; 10,5]. Шары в урне, в принципе, допускают деление. Но карта одна и именно она (а не отдельно масть или наименование) появляется в *эксперименте.* И как ее делить? *Масть* и *наименование* – это ведь только ее элементы, а карта без них – это картонка (с рубащкой на одной стороне). Вряд ли можно будет их отличить. Эти рассуждения справедливы и для примера с «домино». Такое деление приводит к *потере связи частных* случаев с событиями, появляющимися в *экспериментах.*

3. Для подсчета вероятностей в примере 8, необходимо на шарах *одного* номера *мысленно* поставить (деление на *частные* случаи) еще какой-то *признак.* А чтобы отличать шары с *одним* номером в *экспериментах*, на них *необходимо* поставить этот *признак реально.* Т.е. получим тех же 400 событий, каждое из которых будет иметь *три признака.*

4. Число *элементарных* событий в примерах 6-8 одинаково, ибо не зависит от числа событий.

Пример с картами часто приводится в работах. Так бывает: пример есть, а отличия как бы и нет. *Но вот почему в просмотренных работах не нашлось места для примера с домино*[30]? Тоже вызывает интерес.

Итак, *что же имеем в результате этого подробного «разбирательства»*? Во-первых, *противоречия* между понятиями и *экспериментами.* Во-вторых, *качественное отличие* между *испытаниями*, данными в примерах 5 и 6, а также между *испытаниями*, данными в примерах 5-6 и 7-8. Существующая теория его не учитывает.

Картина сложилась не очень радостная: исключением оказалось только *испытание*, данное в примере 5. Оно подобно лотерее. К этому же виду относятся такие *испытания* как бросание одной игральной кости или монеты. Но эти примеры самые простые[31]. Стоило чуть усложнить, –

[30] Впрочем, этот пример в наших рассуждениях появился тоже не сразу: попытки объяснить этот вид испытания только на примере с картами продолжались достаточно долго

[31] Примеры такого рода часто приводятся в работах (например [1,21; 6,24-32; 11,22-23;

вместо «монеты» взять «урну с шарами», отличающихся *цветом* и числом шаров *одного цвета* больше единицы (**а такой пример был дан еще Я. Бернулли [4,43], стр.13**), как «горохом посыпались неприятности».

Однако продолжим анализ, ибо необходимые понятия и правила теории разрабатывались на более сложных примерах: бросании 2-х или 3-х игральных костей. Но мы снова используем «урны с шарами».

***Пример 9. Одновременное вынимание наугад по одному шару из 2-х урн с числами шаров*:**

1. 400 шаров: 40 белых, 80 синих, 110 красных, 170 черных;

2. 400 шаров: 20 с №1, 60 с №2, 140 с №3, 180 с №4.

Исход *эксперимента* – появление 2-х шаров: *одного данного цвета* и *одного данного номера.* Подчеркнем *важные факты*: **1**. В данном *эксперименте* появление *одного* из шаров, принадлежащих *одной* урне, *не исключает* появление *любого* из шаров, принадлежащих *другой* урне. **2**. В данном *эксперименте* неизбежно появляется *один* шар из 1-й урны, и *один* шар из 2-й урны, т.е. их появление – *достоверное* событие (**сноска 28, стр.17**). **3.** Так как они появляются *одновременно*, то имеем (**определение (F), стр.16**) *произведение*[32] событий. **4.** *Цвет* или *номер* шара – это *признаки* появления события: *одного* шара из 1-й и *одного* – 2-й урны в данном *эксперименте.* Следовательно, в *экспериментах* будем наблюдать *только* **8** событий. **5.** Они будут появляться в разных *произведениях*, но это никак *не влияет* на их число. Появление одного из возможных *произведений* тоже неизбежно, т.е. это – *достоверное* событие.

Таким образом, этот пример *качественно* отличается как от примеров 5-6, так и от примеров 7-8. Но это также не учитывается теорией.

1. При определении (B, **стр.14**), каждое *произведение* считается одним событием[33]: имеем **16** событий. Несмотря на то, что в *экспериментах* появляются два события, что подчеркнуто выше. Но опять же, для вычисления вероятностей по *классической* формуле следует *мысленно* определить **160 000** *частных* случаев.

15,14-15]) как иллюстрация понятия элементарных событий

[32] **Их часто называют комбинациями. Однако комбинация – понятие весьма общее (например, комбинация в какой-либо игре, сумма событий – тоже комбинация). В математике – это перестановки, размещения и сочетания [16,199-203]. Комбинаторика – «инструмент» для вычисления вероятностей событий, но она не имеет отношения к операциям с ними (приложение V, стр.60)**

[33] **Это понимание, по-видимому, предопределила постановка и решение задачи [1,386], которая послужила началу развития теории: подсчет вероятности того, что при бросании 2-х или 3-х игральных костей появится данная сумма числа очков**

2. При определении (D, **стр.15**) они тоже трактуются как *одно элементарное* событие. Имеем **160 000** *элементарных* событий. А из них можно составить «невообразимую уйму» *сложных* событий – $2^{160\,000} - 1$ (**их калькулятор считать «напрямую отказывается категорично», а по частям – больше** $6,29 \cdot 10^{48164}$), которых просто нет, и не может быть в этом *испытании.*

Число *частных* случаев и *элементарных* событий одинаково, но оно не *совпадает* ни с *числом* шаров в каждой из урн, ни с *общим числом* шаров в урнах. Очевидно, что чем *большее число* шаров в урнах, тем *существеннее* это отличие. Но оно совершенно не зависит от числа событий: можно рассматривать 2-а (**и даже одно**), а можно и 2-е сотни.

В *экспериментах* будут появляться только **8** событий, а не **16**, и тем более – не **160 000**. Мало того: попытка какой-либо постановкой *дополнительных* знаков на шарах достичь *согласия математических* понятий с *экспериментами* окончится неудачей, – это просто *невозможно.*

Противоречия между *математическими* понятиями и *экспериментами* только увеличились. Теперь вырисовалась картина весьма печальная.

I. Из анализа, данного в примерах 5-9, вроде бы следует, что понятие *элементарного* события *отождествляется* с *частным* случаем. *Но верно ли в этом случае определение* (D, **стр.15**)? Ведь в *эксперименте* с *одновременным* выниманием наугад по одному шару из 2-х урн появляются *два возможных* исхода, *не исключающих друг друга.* При анализе примера 9 это обстоятельство подчеркнуто. Сюда же «примыкают» *испытания* с *одновременным* бросанием двух и более игральных костей или монет.

II. Шары в урне «отделены» друг от друга естественным образом, т.е. каждый из шаров является *возможным* исходом *эксперимента. Но как быть с примером* [6,143; 10,5] *вынимания одной карты из колоды, которая тоже делится на частные случаи? Что в этом случае считать элементарным событием?* Вопросы становятся интереснее при рассмотрении примера «с домино».

III. *Частные* случаи являются *виртуальными* и связаны с *конкретными* событиями *испытания*, которые появляются в *экспериментах* (**сноска 29, стр. 17**): по числу *частных* случаев, из которых состоит событие, вычисляется его вероятность. *Элементарные* события, в соответствии с определениями (C) и (D), существуют сами по себе: они не связаны с какими-либо *конкретными* событиями *испытания*, которые *реально* появляются в *экспериментах.* Используя такое понимание, в примерах 6 или 9 из них можно построить очень много *сложных* событий, которых нет в *испытании* (**например: событие, состоящее из 5-ти белых и 12-ти синих шаров; событие, состоящее из 40-ка черных шаров и 20-ти шаров с №3**). Таких событий можно построить очень много[34]. Но они не появляются в *эксперименте. А вот каким образом посчитать по вероятностям элементарных событий вероятности конкретных существующих в испытании событий*? В общем-то, не только непонятно, но и *невозможно*: необходимы *дополнительные* действия. Например, перейти к *частным* случаям, на которые *мысленно* делятся события. Именно это и делается в теории, но только об этом почему-то не говорится.

Приведем пример[35] из работы [6]

***<u>Пример</u>* 10. «Урна содержит b черных и r красных шаров. Случайно извлекается шар. Он возвращается обратно, и, кроме того, добавляется c шаров одного с ним цвета и d шаров другого цвета. Производится новое случайное вынимание из урны (теперь содержащей $b{+}r{+}c{+}d$ шаров), и описанная процедура повторяется» (стр.137). С одной стороны: « О каком-либо событии А имеет смысл говорить только тогда, когда для *каждого* исхода опыта известно, произошло или не произошло событие А» (стр.31). Т.е. событие может состоять из любых исходов опыта. И с другой: «Точку пространства *элементарных* событий, соответствующую n извлечениям, можно представить как последовательность n букв $Ч$ и K. Событие "первым извлечен черный шар" (т.е. множество всех последовательностей, начинающихся с $Ч$) имеет вероятность $b/(b{+}r)\dots$» (стр.137). чтобы найти вероятность некоторого события А, мы должны разделить число элементарных событий в А (благоприятные случаи) на общее число элементарных событий (возможные случаи).**

Проще. Имеется $b{+}r$ *элементарных* событий, из них: b – обозначены буквой $Ч$, а r – буквой K. Каждый раз число *элементарных* событий с буквой $Ч$ увеличивается на c, а с буквой K – на число d. Т.е. *элементарные* события (так же, как и частные случаи) связываются с событиями, появляющимися в *эксперименте.* Только молчаливо»: *почему*?

Но зачем тогда нужно понятие элементарного события?

Таким образом, понятие *элементарного* события (**в понимании, данном в определении (D)**) тоже теряет конкретику. Т.е. «расплывается» и с «хорошей скоростью». Рассмотрим подобнее примеры с бросанием монет.

***<u>Пример</u>* 11. При бросании *одной* монеты имеем два события: появление**

[34] **2-й пункт анализа примеров 5-6, стр.17 и примера 9, стр.20**

[35] **В работе [6] он дан для иллюстрации применения понятия условной вероятности (приложение III, стр.56)**

«герба» или «числа». Каждое из них соответствует одному *возможному* исходу *испытания*, т.е. является *элементарным* событием. И бросая монету много раз, мы будем наблюдать «герб» или «число» и ничего другого.

***Пример* 12. Два события: – 1) «герб-герб», 2) «герб-число», 3) «число-герб» или 4) «число-число» – могут появиться *только* при *одновременном* бросании 2-х разных монет[36]. В соответствии понятием *произведения* событий (определение (F), стр.16), рассматривается *произведения элементарных* событий, которые появляются при бросании одной монеты. Следовательно, появляются *сложные* события, которые в теории полагаются *элементарными* событиями [8,12]. Из анализа примера 9 следует, что в *экспериментах* будут *одновременно* появляться два *возможных не исключающих друг друга* исхода *испытания*.**

***Пример* 13. Три события: – 1) «герб-герб-герб» или 2) «число-число-число»; 3) «герб-герб-число», 4) «герб-число-герб» или 5) «число-герб-герб»; 6) «герб-число-число», 7) «число-герб-число» или 8) «число-число-герб» – могут появиться только при одновременном бросании 3-х разных монет. В соответствии с работой [8,12] имеем 8 *элементарных* событий, которые определяются *сложными* событиями, образованные *произведениями* 3-х *элементарных* событий, появляющихся при бросании одной монеты. Опять же, из анализа примера 9 следует, что в *экспериментах* будут *одновременно* появляться три *возможных не исключающих друг друга* исхода *испытания*.**

При бросании 2-х раз *одной* монеты, по сути, *предполагается* (**но об этом не говорится**): *при 1-ом и 2-ом бросаниях монеты два события появляются вместе* (**в *эксперименте* – *одновременное* бросание разных монет**). Бросание одной монеты два или несколько раз рассмотрено в работах [6,42; 15,14-15]. То, что изложено в примерах 11-13, вроде бы тоже очевидно. *Почему на это не обращается внимание*? Далее. Если *произведения* считаются *элементарными* событиями, то почему бы не продолжить этот процесс: считать что и *сумма* событий также является *элементарным* событием. Ведь это ничем не ограничено: их "**... множество ? выбирается наиболее подходящим образом**" [15,14]. Вопрос в том, *как выбрать наиболее подходящее множество*? Об этом «ни гу-гу», – примеры есть, но правил то нет.

***Пример* 14. В примере 12 *произведения* 3) и 4) одинаковы. В примере 13 две группы *произведений* 3)-5) и 6)-8) одинаковы. Почему бы не определить *суммы* этих *произведений* и считать их *элементарными* событиями? Это может показаться странным, но так и поступают в теории. Например. При построении формулы Бернулли *элементарными* событиями по-**

[36] **Об одновременном бросании 2-х одинаковых монет разговор будет на стр. 40**

лагаются *произведения элементарных* событий «герб»= a и «число»= b. При этом одинаковые *произведения* записываются [1,73] в виде *суммы* $A_n^m = n!/m!/(n-m)! \cdot a^m \cdot b^{n-m}$, где $m = 0, 1, ..., n$ – номер *суммы*[37]. А при аппроксимации (замечание 6, стр.11) биноминального распределения кривой $\exp(-t^2/2)$ эти суммы (события A_n^m) молчаливо полагаются *элементарными* событиями [1,77].

Приведем еще цитату из предисловия переводчика к работе [6,6].

«Часто начинающие изучать теорию вероятностей запутываются, так как, скажем, слово "событие" на одних и тех страницах учебников используют и в описательном «донаучном» смысле, и в смысле, предписываемом аксиоматической теорией».

Таким образом, понятие *элементарного* события так «расплылось», что стало ничуть не лучше «старого, интуитивного» понятия события (**определение (B, стр.14)**). Противоречия при таком понимании *элементарного* события очевидны. Но возникают еще вопросы: **1.** Ч*ем отличается «донаучный» смысл события, от смысла, предписываемого аксиоматической теорией*? **2.** *Что понимается под разложением* [8,15] м*ножества* $\mathbf{\Omega}$ *элементарных событий и что такое неразложимый исход опыта*?

Из анализа также понятно, что такое понимание *элементарного* события не дает никакой возможности построения на его основе, по крайней мере, хотя бы *сложных* событий. Отсюда следует очевидный вывод:

W.2 ***Идея, заложенная в определении* (C) *остается только идеей, – она не осуществлена, а при таком понимании элементарного события в принципе неосуществима.***

Фактически, ни введение понятия (**определение (C, стр.15)**) *элементарного* события, ни его отождествление с *возможными* исходами (**определение (D, стр.15)**) *идеализированного опыта*, не внесли что-либо новое в теорию вероятностей. Скорее оно «запутывает» ее, что еще больше усложняет понимание теории. Уж лучше просто использовать старые понятия: события, *благоприятствующие* ему *исходы* (**которые хоть связаны с событиями, появляющимися в *экспериментах***) и общее число *исходов испытания*. Они появились раньше, чем *частные* случаи.

---

[37] Более подробный вывод формулы дан в работе [9,82-83]. Заменяя события их вероятностями: $P(A_n^m)$, $P(a) = p$ и $P(b) = 1 - p = q$, получим принятый вид формулы Бернулли [1,73-74]. Вероятности $P(A_n^m)$ записывают в виде $P_n(m)$ и, учитывая, что она равны коэффициентам при степенях x^m переменной x в разложении бинома $(q + px)^n$, называют биноминальным распределением.

Совершенно очевидно, что на основе таких «расплывчатых» понятий, которые не соответствуют *экспериментам*, невозможно учесть качественные отличия *испытаний*, отмеченные при анализе. Таким образом, из сравнительного анализа *математических* понятий события с *экспериментами* следует:

W.3 ***Как определение* (B) *события, так и определения* (D) *элементарного события противоречат экспериментам. Они также не учитывают следствие* (вывод W.1) *из предположений (I), (II) и качественного отличия испытаний.***

Итак, противоречия показаны, – этому «как раз и способствовало отделение» *математической* модели от *реального* явления (*эксперимента*). «Обещание», данное Читателю выполнено. А много их или мало – пусть каждый Читатель судит сам.

О *строгом неформальном математическом* переходе от событий к случайным величинам[38] говорить просто не приходится. А желание осуществить эту возможность у автора сего трактата было. Оно было непреодолимым. Но больше, вообще говоря, необходимым: задолго до этого (**сноска 9, стр. 5**) уже были *исправлены* некоторые *неверные*, по существу, положения *теории* случайных величин. Однако попытки как-то просто и внятно пояснить *эти исправления* на основе существующей *исходной* системы понятий заканчивались неудачей, – каждый раз получалось какое-то «бульканье». Постепенно пришло понимание того, что ее *необходимо изменить*. Это давалось с трудом и заняло достаточно много времени: во многих случаях стереотипы, сложившиеся в мышлении, незаметно «вкрадывались» в рассуждения при проведении исследований, что приводило к множеству ошибок. Преодоление стереотипов было наиболее сложным и существенно «замедляло» работу, в том числе и над монографией. Не исключено, что некоторые «незримо присутствуют» и в данном изложении (**в монографии, как это ни грустно, они «вкрались» в некоторые пояснения**).

---

[38] **Если по сути, то (как одномерные, так и многомерные) случайные величины постулируются, во-первых, просто потому, что они существуют на практике. Во-вторых, их можно как-то образовать (правил образования в теории нет) из сложных событий. Многомерные величины также называют системой или функцией случайных величин, или функцией случайных аргументов, но они имеют один и тот же смысл. Более подробный разговор об этом пойдет в следующей статье, в которой будут рассмотрены случайные величины**

Но это все же было сделано: желание обращено в реальность и все «легло на свои места». Появилась стройная *теория* событий, на *основе* которой определен *строгий неформальный математический* переход от событий к случайным величинам, а конечный результат перехода – *единая теория* событий и случайных величин. Как следствие: *исправление неверных* положений теории случайных величин[39], их *правильное* объяснение и понимание.

Однако анализ положений теории случайных величин не относится к заявленной цели, поэтому об этом – «в другом месте и в другое время».

Ниже, изложим результаты тех исследований, которые направлены на разработку *новой исходной* системы *теории* событий[40].

Чтобы устранить серьезные недостатки, которые выявлены при анализе существующих понятий события и *элементарного* события, введем вспомогательные понятия:

1. Для краткости *признак* появления события будем называть *меткой*[41].

2. Число m_j $(j = 1, 2, ..., n)$ *возможных неразличимых* исходов, т.е. с одинаковой *меткой*, будем назвать числом *возможных* исходов события.

3. Число n будем называть числом *возможных* событий, а число $M = \sum_1^n m_j$ – числом *возможных* исходов *испытания.*

Таким образом, мы воспользовались понятием *возможных* исходов *испытания*, а заодно учли и «*частные* случаи», введя понятие *возможных* исходов события[42].

Тоже «мелочь». О последствиях этого «мелочного» изменения можно будет судить в процессе формирования *новой исходной* системы. Но не обо всех, ибо в сем трактате не рассматриваются случайные величины, а для них они гораздо серьезнее, о чем сказано в самом начале (**стр.2**).

---

[39] **Их оказалось много больше, чем предварительно исправленных, сноска 9, стр.5**

[40] **В "телеграфном стиле» они приведены в работе [9, стр.16-22]. Чуть подробнее – в работе [21], однако эта работа носит, в большей степени, «рекламный характер»**

[41] **Термин «метка» использован Р. Мизесом (сноска 22, стр.15). Пожалуй, это слово является и наиболее подходящим, ибо для того, чтобы отличать грани кубика (т.е. события), на них следует нарисовать разные изображения. Т.е. пометить события**

[42] **Неопределяемым является понятие возможных исходов (цитата из работы [6], (стр.15) испытания, но мы не отождествляем возможный исход с понятием элементарного события. Неразличимость возможных исходов события в экспериментах, повидимому, и привела к введению понятия «частных случаев»**

Введенные понятия приводят *математические* понятия в соответствие с *экспериментами* (**это легко проверить на примерах 5-10**). Назовем их совокупность *математической* моделью *испытания*. Из нее и анализа примеров 5-9 сразу же следует:

W.4 ***Возможные исходы испытания исключают друг друга и являются равновозможными, а возможные события – не равновозможны. Возможные исходы события неразличимы.***

W.5 ***В данном эксперименте появление одного из возможных исходов испытания является достоверным событием.***

Если $m_j = m \geq 1$ **для любого значения** $(j = 1, 2, ..., n)$**, то события будут тоже равновозможными. Понятно, что это только частный случай.**

Опять же, используется понятие *равновозможности*, но теперь оно отнесено к *возможным* исходам *испытания*, а не к событиям.

Замечание **7. В приложении II (стр.46) обозначен переход к *не равновозможным* исходам *испытания.* Более подробно – в работе [9,104-119].**

Математическая модель *испытания* позволяет строго определить *элементарное* событие, – *первое основное* понятие теории.

Определение **1.** Совокупность *возможных неотличимых* друг от друга исходов *испытания* будем называть *элементарным* событием.

***Элементарные* события будем обозначать строчными буквами:** a_j, b_j, **где j=1,2,. . . ,n – номер события. По сути, *буква с номером* в индексе – это просто замена *метки элементарного* события. Чтобы не писать «герб», «число очков», «цвет» или «№» шара. Даже если на гранях кубика изобразить *действительные* числа (например: -2, -1.2, 0.06, 0.5, 0.9, 3) их надо брать в кавычки, ибо это только *метки – недействительные* величины.**

А так и запись «смотрится вполне» как *математическая*, и кавычек не надо. Но забывать, что это всего лишь *метка элементарного* события все же не стоит – может привести к ошибкам.

Определение придало понятию *новый* и *конкретный* смысл. Оно выделяет самые простые события *испытания* – *неделимые* объекты теории вероятностей. Именно *элементарные* события являются *основой* построения любых *сложных* событий. Именно они (**точнее – их возможные исходы**) появляются в *экспериментах*, в том числе – с *непрерывными* случайными величинами.

Из определения (1) и анализа примеров 2-9, данного выше, следует: результат *эксперимента* с урнами примера 9 – появление 2-х *элементарных* событий. Учитывая следствие из уточненного понимания *испытания* и результаты анализа, введем два *новых* понятия.

Определение **2.** *Испытание*, в котором появляется *одно элементарное* событие, будем называть простым или просто *опытом*, а *испытание*, в котором появляются *два* и более *элементарных* события – *сложным* опытом.

Учитывая анализ примера 6, и следующий из него другой вид *испытания* (**примеры 7-8 и пояснения к ним**) введем еще два понятия.

Определение **3.** *Опыт*, в котором *каждое элементарное* событие имеет *одну метку,* будем называть *одномерным опытом.* А *опыт*, в котором *каждое элементарное* событие имеет *две* (**и более**) *метки* – *двумерным* (*многомерным*) *опытом.*

Простой *опыт* разделен на 2-а *вида. Опыт* с одной *меткой элементарных* событий (бросание монеты или игральной кости, вынимание наугад шара из урны, с шарами разных цветов и т.п.) можно представить в виде *одномерной* таблицы: геометрически – в виде точек расположенных на линии. *Опыт* с *двумя метками элементарных* событий (вынимание наугад карты из колоды или кости домино из партии, шара из урны, в которой находятся шары, отмеченные 2-мя числами и т.п.) – в виде *двумерной* таблицы, которая не обязательно заполненная (пример 8 и опыт с домино, стр.18). Это дает лучшее понимание его свойств. Геометрически – в виде точек расположенных на поверхности. Эти отличия в представлении определили названия *опытов*[43].

Таким образом, **«монета или игральная кость»** отделены от **«карт или домино»**[44]. Опять же, этого нет в теории. А это привело к *виду испытания*, которого в теории не существовало (**стр.18**). Введем еще одно понятие:

Определение 4. Все *возможные элементарные* события *опыта* будем называть его множеством *элементарных* событий: $\cancel{a}_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ – с 1-ой *меткой*, $\cancel{a}_{j,k}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ $(k = 1, 2, ..., M_j)$ – с 2-мя *метками* и т.д.

Взамен неопределенного множества $\boldsymbol{\Omega}$, мы вводим *конкретное конечное* множество *элементарных* событий *опыта.*

---

[43] **Чтобы придать большую наглядность отличий видов испытания, их представление в виде таблиц будут рассмотрены после формирования новой исходной системы (стр.41), а геометрические представления – в приложении VI (стр.76)**

[44] **Первое разделение на эти виды определило сравнение «монеты» и «карты». Однако необходимость разделения появилась только после появления примера с «домино», а затем и «моделей с урнами» (типа примеров 7-8, стр. 18)**

Из понятий *математической* модели *испытания*, *элементарного* события и *опыта* следует:

W.6 ***Появление элементарного события с данной меткой исключает появление любого другого элементарного события опыта.***

W.7 ***Появление одного элементарного события из множества элементарных событий опыта неизбежно, т.е. является достоверным событием.***

W.8 ***Равновозможность исходов опыта позволяет вычислить математические вероятности его элементарных событий по классической формуле*** $P(\cancel{a}_j) = m_j/M$, $P(\cancel{a}_{j,k}) = m_{j,k}/M$ **и т.д.**

W.9 ***Вероятность элементарного события является функцией, однозначно отображающей недействительную величину – элементарное событие – на ограниченное множество*** R $(0 < r < 1)$ ***рациональных чисел.***

<u>*Замечание 9*</u>. ***Достоверное*** **и** ***невозможное*** **(его нет в *испытании*) события обозначим заглавными буквами U и V соответственно. Их вероятности** $P(U) = 1$, $P(V) = 0$ **являются следствием определения этих понятий (сноска 28, стр.17) в *классическом* подходе и определяют границы вероятности появления любого события в данном *испытании.***

В современных работах их чаще обозначают Ω и $\emptyset$ (пустое множество). Однако есть одно «но». Множество Ω – *исходное неопределяемое* понятие (замечание к определению (C), стр.15), вероятности *элементарных* событий которого, могут быть любыми $(0 < r < 1)$ ***действительными*** **числами (по сути, они могут им приписываться [8,11]). Отсюда следует, что 3-я аксиома** $P(\Omega) = 1$ **(введенная как *мера* множества Ω *элементарных* событий) определяет равенство** $P(\Omega) = \sum_1^n P(\omega_k) = 1$. **Оно, если подходить принципиально, является *условием нормировки* множества Ω. А пустое множество $\emptyset$ не имеет отношения к *испытанию.***

Т.е. при *аксиоматическом* подходе *достоверность* события Ω является *следствием нормировки* вероятностей *элементарных* событий. Чтобы не было «путаницы, между причинами и следствиями» (в классическом и аксиоматическом подходах) обозначения Ω и $\emptyset$ не применяются.

Математическая вероятность *элементарного* события – *второе основное* понятие теории, ибо является *основой* для вычисления вероятностей любых *сложных* событий. Снова используется известное понятие, но оно отнесено к *элементарному* событию, а не к событию вообще.

Из вывода W.4 и определения 2 следует: 2-а и более *элементарных* события могут появиться только при проведении *2-х* и *более опытов.*

Исходя из *уточненного* понимания *испытания* и *элементарного* события сделано то, чего нет в теории: **«бросание одной монеты»** отделено от **«*одновременного* бросания 2-х разных монет»**. По сути, это позволило разделить *испытание* на *два класса*, но такое разделение не является полным. Дело в том, что при анализе использовались только те понятия, которые имеются в существующей *исходной* системе. Но понятий простого *опыта* и *сложного* опыта в ней не существовало. А наличие 2-х и более простых *опытов* определяет возможность 2-х вариантов их проведения в *сложном* опыте:

1. *Проводить «наугад» один из опытов.*
Например: бросать наугад одну монету из 2-х и более монет; один выстрел наугад по одной из 2-х и более мишеней; бросание монеты или игральной кости, или вынимание наугад одного шара из урны, или выстрел по мишени, или вынимание наугад одной карты из колоды и т.п.

2. *Проводить одновременно оба опыта*.
Например: Одновременно бросать 2-е и более монеты; одновременное попадание в мишень 2-х и более стрелков, сделавших по одному выстрелу; одновременное бросание монеты и игральной кости, и вынимание наугад одного шара из урны, и выстрел по мишени, и вынимание наугад одной карты из колоды и т.п.

1-й вариант соответствует *предположению* «***или ..., или ...***», а 2-й – *предположению* «***и ..., и ...***». Каждый из *опытов* имеет свое множество *элементарных* событий. Отсюда следует:

W.10 ***Логические предположения, определяющие алгебру событий, применимы к множествам элементарных событий двух и более* (простых) *опытов. В алгебре опытов, предположение «или ..., или ...» исключает предположение «и ..., и ...».***

То, что *одно предположение исключает другое предположение*, означает только то, что эти два *вида сложного* опыта *не могут* быть проведены *одновременно*.

Учитывая анализ, данный выше, и вывод W.10 введем два понятия, разделяющие *сложный* опыт на два *вида*:

<u>*Определение **5***</u>. *Сложный* опыт, в котором *объединяются 2-а* множества *элементарных* событий, будем называть *объединением опытов.* А *сложный*

опыт, в котором *совмещаются 2-а* множества *элементарных* событий – *совмещением*[45] (*декартовым произведением*) *опытов.*

В отличие от *алгебры* событий, в *алгебре опытов* будем применять термины *объединение* и *совмещение* (*декартово произведение*) и обозначать их знаками «$\bigcup$» и «$\times$», которые используются в теории множеств.

Таким образом, на основе анализа мы логично пришли к необходимости дополнения *алгебры* событий *алгеброй* множеств *элементарных* событий (**простых**) *опытов. Алгебры опытов* в теории не существовало, а она, в свою очередь, привела к разделению *сложного* опыта на *два вида*, которые имеют совершенно *разные* свойства.

***Пример* 15. Рассмотрим два *одномерных опыта*. Каждый из *опытов* имеет свое множество *элементарных* событий:** a_j^1 $(j = 1, 2, ..., n1)$ **и** a_k^2 $(k = 1, 2, ..., n2)$**. Нижний индекс – номер события в *опыте*, верхний – номер *опыта*. Если говорить по существу – это *метки элементарных* событий, принадлежащих 1-му или 2-му *опыту*[46]**

I. Результат *объединения опытов* – (простой) *опыт*, множество *элементарных* событий которого состоит из множеств *элементарных* событий исходных *опытов* $\{a_1^1, a_2^1, ..., a_{n1}^1;\ a_1^2, a_2^2, ..., a_{n2}^2\}$**. Будем называть его *объединенным* опытом.**

В соответствии с определением (5), появление одного *элементарного* события из множеств 1-го или 2-го *опытов неизбежно*. Если в *эксперименте* появилось *элементарное* событие одного из *опытов*, то это *исключает* появление любого другого *элементарного* события в этом *эксперименте*. При *одномерных опытах* их *объединение* представимо в виде *одномерной* таблицы.

II. Результат *совмещения опытов* – *декартово произведение* их множеств *элементарных* событий $A_{j,k} = a_j^1 \times a_k^2 (j = 1, 2, ..., n1)(k = 1, 2, ..., n2)$**. Будем называть его *совмещенным* опытом.**

В соответствии с определением (5), *одновременное* появление 2-х *элементарных* событий из множеств a_j^1 $(j = 1, 2, ..., n1)$ **1-го и** a_k^2 $(k = 1, 2, ..., n2)$ **2-го *опытов неизбежно*. Если в *эксперименте* появились *элементарные* события с №j 1-го *опыта* и №k 2-го *опыта*, то это *исключает одновременное* появление *элементарных* событий с любыми другими номерами (в том числе, с №k 1-го и №j $(k \neq j)$ 2-го *опытов* соответственно). При *одномерных опытах* их *совмещение* представимо в виде *двумерной* полностью *заполненной* таблицы (это одно из отличий *совмещения опытов* от *двумерного опыта* (замечание к определению 3, стр.28)).**

---

[45] **Смысл слова «совместный» – происходящий с чем-то, отражает предположение «и . . . , и . . . » правильно, но термин *совмещение* не точно отражает суть этого вида *сложного* опыта. Точное название – *декартово произведение*, которое дает правильное понимание его свойств. Просто слово «совмещение» короче, потому будет употребляться чаще**

[46] **В принципе, такое обозначение элементарных событий 2-х и более опытов было придумано еще Галилеем [1,391]. Мы просто привел его к удобному математическому виду. Не надо придумывать метки для различия опытов и их элементарных событий: достаточно различия чисел в верхнем индексе.**

Мы логично пришли к еще одному понятию *объединения опытов*, которого не существовало в теории вероятностей. *Объединять* или *совмещать* можно *опыты*, имеющие как одинаковую, так и разную размерность (**в том числе, *сложные* опыты, образованные *объединением* и *совмещением***). Это не имеет принципиального значения – суть остается такой же[47].

Из определений *элементарного* события (1), *сложного* опыта (2), *объединения*, *совмещения опытов* (5) и примера 15 можно сделать выводы:

W.11 ***Появление в объединенном опыте одного элементарного события из множеств элементарных событий 2-х*** **(и более)** ***опытов, образующих объвдиненный опыт, неизбежно, т.е. является достоверным событием.***

W.12 ***В объединенном опыте, появление одного элементарного события из множества его элементарных событий исключает появление любого другого элементарного события. Число элементарных событий объединенного опыта равно сумме элементарных событий всех объединяемых опытов.***

W.13 ***В совмещенном опыте, появление одного произведения из множества его произведений, неизбежно, т.е. является достоверным событием. При этом появление одного произведения исключает появление любого другого произведения. Число произведений совмещенного опыта определяется произведением чисел элементарных событий всех совмещаемых опытов.***

Из определений 2 и 5 следует:

1. При *совмещении опытов* одновременность их проведения вовсе не обязательна: можно бросить одну игральную кость, затем 2-ю и т.д. или бросать одну кость несколько раз. Главное то, что рассматривается совокупность событий «***и 1-го, и 2-го и* т.д.**» *опытов.*

2. *Объединение* 2-х *опытов* можно получить другим способом. Например: 1) смешать шары из 2-х урн в одной из урн; 2) вынимать наугад один или несколько шаров из 1-й и 2-й урн и складывать их в 3-й урне до тех пор, пока все шары не окажутся в 3-ей урне. При вынимании наугад одного шара из урны, в которой находятся все шары, будет появляться

[47] **Кратко об этом – при представлении видов испытания в виде таблиц (стр.41)**

одно элементарное событие из множества *элементарных* событий «***или* 1-го, *или* 2-го**» *опытов.*

*Определение **6**. Объединение опытов*, полученное проведением «наугад» *одного* из *2-х* и *более опытов,* будем называть 1-м *типом объединения*, а полученное «смешением» *2-х* и *более* множеств *элементарных* событий – 2-м *типом объединения*[48].

Т.е. «смешивать» можно не только «шары в урнах». Можно, например, «смешать» *элементарные* события *опыта* с «урной» и *опыта* с «монетой». Но если в 1-м случае *реально* «смешиваются» шары, то во 2-м – «искусственно смешиваются» *возможные* исходы *опытов.*

Замечание* 10. При 1-м *типе объединения*, «*наугад*» предполагает выполнение условия: *неизвестно*, какой *опыт* из *объединяемых опытов* проводится, а известен только результат *сложного* опыта: появилось *элементарное* событие с конкретным номером a_j^k $(j = 1, 2, ..., n_k;\ k = 1, 2, ..., N)$, где n_k – число *элементарных* событий в *опыте* с номером k, N – число *опытов.

Используя *опыт*, который не связан с *объединяемыми опытами*, понятие 1-го *типа объединения опытов* можно расширить.

Например, урну, в которой находится шары с номерами j=1,2,. . . ,N (где N – число *опытов*) по числу m_j $(M = \sum_1^N m_j)$ шаров каждого номера. Будем *предполагать*:

1. Номера *объединяемых опытов* совпадают с номерами шаров. 2. Проводится тот из *объединяемых опытов*, номер которого *совпадает* номером шара, который появляется при каждом *повторении опыта* с урной.

При этих *предположениях*, *объединяемые опыты* будут проводиться «*наугад*» в соответствии с вероятностями появления *элементарных* событий *используемого опыта.* Если $m_j = m$ (в том числе m=1), то вероятности проведения всех *опытов* одинаковы.

Примеры 2-го *типа объединения* «встречаются» в практике.

1. В математической статистике *объединяются* 2-е выборки, полученные в двух сериях *экспериментов* по изучению случайного явления при *данных* (*неизменных*) *условиях.* Имеем 1-й способ образования 2-го *типа объединения.*

2. Сборка узлов из разных деталей при серийном производстве[49] Характеристики детали (масса, размеры и т.п.) являются случайными величинами. От них будут зависеть характеристики узла (масса, центр тяжести, зазоры и т.п.). По сути, из «урн»,

---

[48] **Различие между типами объединения опытов будет показано при определении вероятностей элементарных событий объединенного опыта (замечание 12, стр.28)**

[49] **Автор долго считал, что извлечение наугад одного шара из одной или другой урны и смешивание шаров в одной из урн это одно и то же. Разделение появилось только при подготовке окончательной редакции монографии. Но по «стереотипу, раз берутся наугад», этот пример в монографии отнесен к 1-му типу объединения, что неверно .**

число которых равно числу разных деталей, отбирается наугад необходимое число деталей для сборки, и «складываются в одну «урну» (с необходимым числом узлов). Т.е. имеем 2-й *тип объединения*.

Дело только в том, что в 1-м примере задача связана с *элементарными* событиями и решена правильно, чего никак нельзя сказать о решении задачи во 2-м примере. Распределение характеристик узла будут зависеть от взаимного расположения деталей в пространстве, способами их соединения и т.п. Эта задача тоже как-то решается, но это решение трудно назвать даже 1-м приближением.

Таким образом, *алгебра опытов* «уничтожает» отличие между ***«одновременным*** **бросанием 3-х монет», «бросанием одной игральной кости 2-а раза», «выниманием наугад кости домино из партии»** и т.д. Конечно же, при разработке основ ни *объединение* (**тем более – его типы**), ни *совмещение*, как и вообще – «деление» *испытаний* не появились в теории. *Было ли возможно их появление в то время или позже*? Риторический вопрос, – у истории нет сослагательного наклонения.

Тем не менее, некоторые «намеки»[50]на деление» в работах имеются.

1. Если проанализировать «более тщательно», то можно считать, что 1-й *тип объединения* – это, в определенном смысле, *расширение* формулы *полной* вероятности[51]. По крайней мере, можно показать (исходя из замечания 10, стр.33), что формула полной вероятности легко может быть получена из *объединения опытов*. 2. *Совмещение опытов* в литературе называют то повторением [12,59], то композицией [11,52], то последовательностью *испытаний* [13,34] и встречается даже *совмещение испытаний* [7], но только всегда употребляется словосочетание «независимые испытания». Однако о понятии «*независимости*» здесь вообще не упоминалось.

Отметим, что только в работе [6,147-148] из цитируемых (и не только) работ говорится о *декартовом произведении,* но только в применении к «независимым испытаниям»: «Прямым произведение двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a,b) из их элементов. ... термины "прямое произведение" и "декартово произведение" – синонимы. ... Понятие прямого произведение настолько естественно, что мы его уже неявно использовали. Например, *мыслимый эксперимент*, состоящий в трехкратном бросании монеты, описывается пространством *элементарных* событий, содержащим *восемь точек*. .... Это позволяет нам говорить, что пространство *элементарных* событий является *прямым произведением трех пространств*, каждое из которых состоит из двух точек (элементов) *Г* и *Р*» (примеры 12-13 стр.22.

Декартово произведение **применяется в теории множеств. Задолго до появления теории множеств Р. Декартом и П. Ферми (первая половина XVII века) был изобретен новый метод представления геометрических кривых на плоскости.**

На этом с «делением *испытаний*» закончено. Уточнение понятия *испытания* и введение понятия его *математической* модели позволили:

W.14 ***Строго определить понятие элементарного события и вычислять его вероятность по классической формуле.***

[50] **Впрочем, если что-то уже известно из исследований, то какие-то намеки на это в предыдущих исследованиях можно найти во многих случаях (сноска 20, стр.14)**

[51] **Эта формула впервые дана П. Лапласом [1, 411]**

W.15 ***Разделить испытания на классы и их виды, т.е. учесть качественное отличие испытаний, следующие из экспериментов.***

Однако формирование *новой исходной* системы не завершено. Для этого необходимо рассмотреть составление *сложных* событий из *элементарных* событий с применением операций *суммы* и *произведения*.

Приведем определения еще 2-х понятий, которые придуманы и введены для *правильного* вычисления вероятностей *сложных* событий:

G. Два события называют *несовместимыми*, если появление *одного* из них *исключает* появление *другого* [10,24]. В противном случае их называют *совместными*[52].

В современных работах (с 30-50-х годов XX века) вместо слова «несовместимый» чаще применяется слово «несовместный». Слово «совместимый» означает входящий во что-то, а слово «совместный» – происходящий с чем-то (сноска 45, стр.30).

Непосредственно из определения *элементарного* события (1), *опыта* (2), множества (4) *элементарных* событий *опыта*, вывода W.6 и определения (G) *несовместимости* событий следует:

W.16 ***Появление одного элементарного события исключает появление любого другого элементарного события опыта, следовательно, они несовместимы.***

Из вывода W.16 и *суммы* (**определение (E), стр.16**) событий следует:

W.17 ***Для элементарных событий опыта правило суммы событий – единственное. Сумма элементарных событий опыта – достоверное событие.***

Из выводов W.16-W.17 следует, во-первых, *уточнение* определения (G) понятий *несовместимости* и *совместимости* событий:

Определение 7. Если в события **A** и **B** *опыта* входит хотя бы *одно одинаковое элементарное* событие, то события будем называть *совместимыми*; в противном случае – *несовместимыми*.

Смысл терминов «*совместимый*» и «*несовместимый*» правильно отражает суть этих понятий (замечание к определению (G), стр.34). В отличие от терминов «*совместный*» и «*несовместный*», употребляемых в современных работах. Если говорить по существу, то их употребление применительно к *сложным* событиям (*опыта* и *сложного* опыта) мы вообще исключаем.

---

[52] **Понятие несовместимости событий и теорема о вероятности их суммы впервые даны Т. Байесом в 1763г. [1,410]**

Во-вторых, *уточнение отношений*[53] между *сложными* событиями *опыта.*

1. $A \subset B$**: в событие В входят все *элементарные* события, из которых состоит А.**

2. $A = B$**: события А и В состоят из *одинаковых элементарных* событий.**

Операция *суммы* определяет образование *сложных* (**или просто**) событий **A**, **B**, ... из *элементарных* событий *опыта.* А операции *суммы* и *произведения* – создавать более сложные «конструкции» из событий **A**, **B**, ...,.

Рассмотрим образование *сложных* событий и вычисление их вероятностей (***вероятностные* модели**) на примере *одномерного опыта.*

***Пример 16*. *Вынимание наугад одного шара из урны с составом шаров*: 80 шаров: 1 с №1, 3 с №2, 6 с №2, 10 с №4, 12 с №у, 14 с №6, 15 с №7, 19 с №8.**

Имеем 1-й *опыт* с множеством a_j^1 (**j=1,2,...,8**) *элементарных* событий. Пусть $A_1^1 = \{a_1^1 + a_2^1 + a_3^1 + a_4^1\}$ и $A_2^1 = [a_3^1 + a_4^1 + a_5^1 + a_6^1 + a_7^1]$ события 1-го *опыта.* **Их в**ероятности, определяются *суммой* вероятностей *элементарных* событий, из которых состоит каждое из событий. События A_1^1 и A_2^1 *совместимы.* Их *произведение* $C = A_1^1 A_2^1$ равно *сумме элементарных* событий $[a_3 + a_4\}$, а вероятность его появления – *сумме* их вероятностей $P(C) = P(a_3) + P(a_4)$ $\{1\}$. *Сумма* событий A_1^1 и A_2^1 равна: $\Sigma = A_1^1 + A_2^1 = \{a_1^1 + a_2^1 + [a_3^1 + a_4^1\} + a_5^1 + a_6^1 + a_7^1]$. Но в *сумму* их вероятностей *дважды* входит вероятность их *произведения.* Вычитая ее из *суммы* вероятностей, получим: $P(\Sigma) = P(A_1^1) + P(A_2^1) - P(C)$ $\{2\}$. Если события A_1^1 и A_2^1 *несовместимы*, то *произведение* – *невозможное* событие: $C = A_3^1 A_4^1 = V$, $P(V) = 0$ и $P(\Sigma) = P(A_3^1) + P(A_4^1)$ $\{3\}$.

Отметим, что такие же рассуждения есть в работе [6,42-43]:

«Рассмотрим теперь два произвольных события A_1 и A_2. Чтобы вычислить вероятность $P(A_1 + A_2)$ того, что имеет место либо событие A_1, либо событие A_2, либо оба эти события вместе, мы должны сложить вероятности всех точек, содержащихся в событии A_1, и всех точек, содержащихся в A_2, считая, однако, каждую точку по одному разу. Мы имеем поэтому $P(A_1 + A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$. Если теперь C – любая точка, содержащаяся и в A_1, и в A_2, то $P(C)$ входит два раза в праву. и один раз в левую часть неравенства. Поэтому правая часть превосходит левую на $P(A_1 A_2)$, и мы получаем простую, но имеющую полезные следствия теорему $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$».

Только никаких выводов отсюда не следует. Формулы $\{2\}$-$\{3\}$ не отличаются от существующих формул, но из анализа и формулы $\{1\}$ сле-

[53] **Существующая трактовка отношений дана при рассмотрении понятия поля событий (приложение I, стр.45), которое в новой исходной системе не используется**

дует, что смысл теорем о вероятности *произведения* и *суммы* событий *опыта* отличается от принятого понимания. Т.е. их формулировки необходимо изменить.

Признак появления события A_1^1 или A_2^1 – появление *метки* одного из *элементарных* событий[54], которые входят в событие A_1^1 или A_2^1. А *признак* появления события **C** – появление *метки* одного из *элементарных* событий, которые *одновременно* входят в события A_1^1 и A_2^1. Следовательно:

W.18 ***Сложные* события *опыта* являются *виртуальными* (*математическими* конструкциями), не имеют своей *метки* и *никогда* не появляются в *эксперименте, ни по отдельности, ни вместе.***

Поэтому появление *сложных* событий – это только *предположение*, которое необходимо для определения *математических* операций (**определения (E) и (F), стр.16**) с событиями.

Из анализа следует[55]:

W.19 ***Любое сложное событие опыта состоит, в конечном счете, из его элементарных событий. Вероятности сложных событий опыта однозначно определяются вероятностями элементарных событий.***

W.20 ***Вероятности событий опыта не зависят от их совместимости. Совместимость определяет их произведение и одновременное виртуальное появление событий* A, B *и* C=AB.**

W.21 ***Вероятность* P(AB) *произведения событий* A *и* B *опыта равна сумме вероятностей элементарных событий, входящих в оба события, и не содержит произведения вероятностей.***

W.22 ***В сумму вероятностей* P(A)+P(B) *совместимых событий опыта дважды входит вероятность их произведения* P(AB).**

[54] **В некоторых работах [6,31; 16,777; 15,18-19] об этом говорится, но опять же – без каких-либо выводов**

[55] **Выводы W.16-W.24 сделаны, исходя из анализа одномерных опытов. Отличие двумерного (многомерного) опыта от одномерного опыта связано с тем, что он представим в виде двумерной (многомерной) таблицы. Из этого представления следуют два свойства (будут показаны на стр.30), которые необходимо учитывать при построении его вероятностных моделей. Это отличает его от одномерного опыта. Выводы не зависят от этих свойств**

При вычислении вероятности их суммы вероятность* P(AB) *следует вычесть из суммы их вероятностей.

W.23 ***Для правильного построения вероятностных моделей опыта достаточно понятия совместимости событий. Введение других понятий не требуется.***

Рассмотрим 2-й *опыт* с множеством a_k^2 (**k=1,2,...,8**) *элементарных* событий.

***<u>Пример 17</u>. Вынимание наугад одного шара из урны с составом шаров*: 120 шаров: 7 с №*a*, 9 с №*b*, 12с №*c*, 14 с №*d*, 17 с №*e*, 18 с №*f*, 20 с №*g*, 23 с №*h*.**

Пусть $A_1^2 = \{a_1^2 + a_2^2\}$ и $A_2^2 = [a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_6^2]$ события 2-го *опыта*.

Для событий A_1^1, A_2^1 1-го и A_1^2, A_2^2 2-го *опытов* нельзя написать отношения $A_1^2 \subset A_1^1$ и $A_2^2 \subset A_2^1$, ибо в них входят *элементарные* события <u>*разных*</u> *опытов*. Очевидно, что отношение *эквивалентности*, понятия *совместимости* событий и *противоположного* события также неприменимы к событиям 2-х *опытов*.

Их можно применять только тогда, когда оба события **A, B, ...** состоят из совокупности *элементарных* событий 2-х (**или более**) *опытов*, т.е. событий *сложного* опыта образованного *объединением* или совмещением этих *опытов*.

Результат *объединения* 2-х *опытов* – *объединенный опыт* (**пример 15, стр.31**), множество *элементарных* событий которого состоит из множеств *элементарных* событий a_j^1 (**j=1,2,...,8**) 1-го и a_k^2(**k=1,2,...,8**) 2-го *опытов*. Число *элементарных* событий *объединенного опыта* равно $n^o = n1 + n2$. Вероятности *элементарных* событий исходных *опытов* в *объединенном опыте* уменьшаются. Действительно.

<u>*Замечание 12*</u>. При 1-и *типе объединения* вероятности *элементарных* событий исходных *опытов* в *объединенном опыте* уменьшаются пропорционально вероятностям $P(b_1)$ и $P(b_2)$, где $b_r (r = 1, 2)$ – *элементарные* события *опыта*, вероятности которого определяют проведение «наугад» одного из опытов (замечание 10, стр.24). Если $m_j = m$ (в том числе m=1), то вероятности уменьшаются пропорционально числу *объединяемых опытов*. В любом случае при 1-м *типе объединения* число *возможных* исходов *объединяемых опытов* и числа *возможных* исходов их *элементарных* событий не изменяются.

При 2-м *типе объединения* число *возможных* исходов *объединенного опыта* равно $M^o = M^1 + M^2$ (число шаров в урнах из примеров 13, 14), а числа *возможных* исходов каждого из *элементарных* событий не изменяются.

Их вероятности в *объединенном опыте* $P(a_i^o) = m_i^1/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n1)$ и $P(a_{n1+i}^o) = m_i^2/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n2)$. Учитывая, что в исходных *опытах* они равны $P(a_j^1) = m_i^1/M^1$ $(j = 1, 2, ..., n1)$ и $P(a_k^2) = m_k^2/M^2$ $(k = 1, 2, ..., n2)$, то можно записать: $P(a_i^o) = P(a_i^1) \cdot M^1/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n1)$ и $P(a_{n1+i}^o) = P(a_i^2) \cdot M^2/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n2)$. Т.е. вероятности уменьшаются пропорционально отношениям M^1/M^o и M^2/M^o. Независимо от формы записи увеличивается число возможных исходов *объединенного* опыта. Это и определяет отличие 2-го *типа объединения* от 1-го. Но числа возможных исходов *элементарных* событий *объединяемых опытов* не изменяются.

Отметим два момента: 1. Если положить $P(b_1) = M^1 \,/\, M^o$ и $P(b_2) = M^2 \,/\, M^o$, то он похож на 1-й *тип объединения*. 2. Если $M^1 = M^2 = M$, то $M^o = 2 \cdot M$, то вероятности уменьшаются пропорционально числу *объединяемых опытов*, т.е. также как и при 1-м *типе объединения*. Но забывать, что при 2-м *типе объединения* уменьшение вероятностей связано с *возможными* исходами *опытов* не стоит.

Эти свойства могут быть распространены на *объединение N опытов*. Из вывода W.12 и данного анализа следует:

W.24 ***Элементарные события объединенного опыта несовместимы.***

W.25 ***При объединении опытов, вероятности элементарных событий исходных опытов уменьшаются. Уменьшение вероятностей зависит от типа объединения.***

W.26 ***Вероятности элементарных событий объединенного опыта однозначно определяются вероятностями элементарных событий исходных опытов. Вероятность суммы элементарных событий объединенного опыта равна 1.***

Результат *совмещения* 2-х *опытов* – *совмещенный* опыт (**пример 15, стр.31**), который состоит из множества *сложных* событий – *произведений* $A_{j,k} = a_j^1 \times a_k^2$ *элементарных* событий, образованных *декартовым произведением опытов*. Вероятности *произведений* равны $P(A_{j,k} = a_j^1 \times a_k^2) = P(a_j^1) \times P(a_k^2)$ (**j, k=1,2,. . . ,8**), что определяется *декартовым произведением* исходных *опытов*. Это свойство легко распространяется на *совмещение N опытов*. Из анализа, с учетом вывода W.13, следуют выводы:

W.27 ***Сложные события, образованные произведениями элементарных событий,* попарно *несовместимы* между собой.**

W.28 ***При совмещении опытов, вероятности элементарных событий исходных опытов не изменяются.***

W.29 ***Вероятности произведений элементарных* событий *совмещаемых опытов однозначно определяются произведением их вероятностей* в исходных *опытах.* Вероятность *суммы произведений равна* 1.**

Применяя операцию *суммы*, из *элементарных* событий каждого из *опытов* можно образовать *сложные* события A_1^1, A_2^1, $\ldots$; A_1^2, A_2^2, $\ldots$ и т.д.

В свою очередь, из событий A_1^1, A_2^1, $\ldots$; A_1^2, A_2^2, $\ldots$ и т.д., применяя операции *суммы* и *произведения* событий, образуются более *сложные* «конструкции». Однако отметим, что при *совмещении опытов*, применяя операции *суммы* и *произведения*, более сложные «конструкции» можно также образовать из *произведений* $A_{j,k}$ *элементарных* событий *опытов*. Отсюда, с учетом выводов W.25-W.26 и W.28-W.29, следует:

W.30 ***События сложного опыта, как и простого опыта, состоят из элементарных событий и образуются с применением операций суммы и произведения событий. Вероятности событий сложного опыта однозначно определяются вероятностями элементарных событий исходных* (простых) *опытов.***

А сейчас обратим внимание на то, что до сих пор мы рассматривали только *опыты*, в которых *метки всех элементарных* событий одного *опыта* отличались от *меток элементарных* событий другого *опыта*. Но их *метки* могут и не отличаться.

<u>Пример 18</u>. Имеются две абсолютно одинаковые монеты или игральные кости.

В примерах *метки элементарных* событий обоих *опытов* не отличаются. Учитывая это, введем последнее *новое* понятие, которое необходимо для *правильного* понимания и построения событий *сложного* опыта.

*<u>Определение **8**</u>*. Если в 2-х *опытах* есть хотя бы по *одному элементарному* событию с *одинаковой меткой*, то *опыты* будем называть *пересекающимися*[56]; в противном случае - *непересекающимися*.

Понятие *пересечения опытов* существенно отличается по смыслу от понятия *совместимости сложных* событий. *Пересечение опытов* определяет как *<u>минимум</u>* два *<u>элементарных</u>* <u>события</u> с *<u>одинаковой</u>* меткой, которые относятся к *разным опытам.* А *совместимость* событий А и В

[56] **Т.е. наше понимание понятие пересечения отличается от понимания, принятого в теории множеств**

означает, что в _оба**_ _**события**_ входит хотя бы _**одно**_ _**одинаковое**_ _**элементарное**_ событие _**одного**_ _**опыта**_.**

Опыты, приведенные в примерах 5 и 6, 9, 10, 15, 16 и 17, – *непересекающиеся*, а в примере 18 – *опыты* полностью *пересекаются*: *метки* всех *элементарных* событий обоих *опытов* одинаковы. Но возможно множество промежуточных вариантов, в которых *опыты пересекаются* частично.

Пример 19*. *Две урны с числами шаров:
80 шаров: 1 с №1, 3 с №2, 6 с №3, 10 с №4, 12 с №5, 14 с №6, 15 с №7, 19 с №8.
120 шаров: 7 с №1, 9 с №2, 12с №3, 14 с №4, 17 с №e, 18 с №f, 20 с №g, 23 с №h.

Элементарные события с *одинаковой меткой неразличимы* и в *экспериментах* воспринимаются как исход *одного элементарного* события. Число *элементарных* событий, наблюдаемых в *экспериментах*, зависит от числа *элементарных* событий с *одинаковыми метками*.

Замечание 13. **При *пересечении* 2-х *опытов*, образованных их *объединением* или *совмещением*, число наблюдаемых в *экспериментах элементарных* событий уменьшается и равно $n1 + n2 - K$, где K – число *элементарных* событий с *одинаковой меткой*. Так *в опытах*, данных в примерах 18, будем наблюдать 6 и 2 *элементарных* события, а не 12 и 4 при *разных метках*: в примере 19 – 12, а не 16 *элементарных* событий.**

Число же наблюдаемых в *экспериментах произведений* при *одновременном* проведении *опытов* изменяется другим образом: оно вычисляется по формуле $n1 \cdot n2 - K \cdot (K-1)/2$. Так в *опытах*, данных в примерах 18, будем наблюдать 21 и 3 разных *произведения*, а не 36 и 4 при *разных метках*: в примере 19 – 58, а не 64 *произведения*.

Влияние *пересечение опытов* на виды *сложных* опытов существенно отличается.

Замечание 14. **При *пересечении* 2-х *опытов* число *элементарных* событий *объединенного* опыта уменьшается также как и число наблюдаемых в *экспериментах*. Соответственно, вероятности *элементарных* событий с *одинаковой меткой в объединенном опыте суммируются*. Это становится очевидным, если в примере 17 смешать шары из 2-х урн в одной урне, но легко показывается и при 1-м *типе объединения*.**

При *пересечении* 2-х *опытов* число *произведений совмещенного* опыта, не изменяются. Это следует из *несовместимости произведений* (вывод W.27, стр.39). Если проводить много *экспериментов* с *одновременным* бросанием 2-х *одинаковых* монет, то получим, что событие «*герб-число*» будет появляться приблизительно в 2 раза чаше, чем событие «*герб-герб*» (или «*число-число*»). Т.е. *пересечение* не влияет на вероятностные модели *совмещенного опыта*.

На этом формирование *новой исходной* системы завершено.

Теперь рассмотрим представление *классов* и *видов испытаний* в виде таблиц и отметим характерные свойства *разновидностей испытаний.*

I. *Одномерный опыт* (**рис. 1**).

***Одномерный опыт* определяется *элементарными* событиями с одной *меткой.* Для разнообразия показаны *совместимые* события А и В *одномерного опыта.*. Ничего нового это представление к пониманию его свойств не добавляет.**

II. *Объединение* 2-х и более *одномерных опытов* представляется также как и *одномерный опыт* (**рис. 2, *непересекающиеся опыты* вверху, а *пересекающиеся* – внизу**).

Рассмотрим события $A^1 = a_3^1 + a_4^1 + a_5^1 + a_6^1$ 1-го и $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$ 2-го *опытов.* Если *опыты пересекаются*, то появление одного из *элементарных* событий a_5^1, a_6^1, a_1^2 или a_2^2 является *признаком одновременного* появления событий A^1 и A^2, т.е. событие $C = a_4^1 + a_5^1 + a_1^2 + a_2^2$ является их *произведением.* Очевидно, что *произведение* событий A^1 и A^2 2-х *опытов* возможно, когда в оба события входит хотя бы одно *элементарное* событие $a_w^o(w = 5, 6, 7, 8)$ *объединенного опыта,* которые находятся в области их *пересечения.* Эту область можно назвать *произведением* 2-х *опытов* при их *объединении.* Если опыты *не пересекаются*, то *их произведение* не существует.

III. В отличие от одномерного *опыта*, *двумерный опыт* представляется в виде двумерной таблицы (**рис.3, прямоугольник с утолщенными линиями**).

В общем случае таблица не заполнена (еще примеры 7, 8 и с домино, стр.18). При вынимании наугад одной кости домино из партии таблица треугольная. Это не влияет на *алгебру* событий, но приводит к свойствам, которые следует учитывать при построении *вероятностных* моделей: 3.2. В *сложных* событиях A_j $(j = 1, 2, ..., N)$ (или $B_k(k = 1, 2, ..., M)$) нет одинаковых *элементарных* событий, т.е. они *несовместимы.* Это свойство распространяется и на *суммы* событий A_j (или B_k). Например: A_2, A_3, A_4 и A_5, A_6 (или B_1, B_2 и B_3, B_4). 3.3. События A_j и B_k – *совместимы*, ибо в них есть одно одинаковое *элементарное* событие $a_{k,j}$. 3.4. Из *совместимости* событий A_j и B_k следует $P(A_j \cdot B_k) = P(a_{j,k}) \neq P(A_j) \cdot P(B_k)$, т.е. вероятность *произведения* событий A_j и B_k не равна *произведению* их вероятностей. Соответственно вероятность их *суммы* равна $P(A_j + B_k) = P(A_j) + P(B_k) - P(a_{j,k})$. Это свойство распространяется и на *суммы* событий A_j и B_k, например A_2, A_3, A_4и B_3, B_4.

IV. *Совмещение* 2-х *одномерных опытов* представляется в виде двумерной таблицы, т.е. так же, как и *двумерный опыт.*

Если таблица *двумерного опыта* полностью заполнена, то представления становятся похожими. Эта схожесть увеличивается подобием свойств. 4.1. *Сложные* события $A_{j,k}$, образованные *произведением элементарных* событий *опытов* – *несовместимые* события. 4.2. События A_j (или B_k) – *несовместимы.* Это свойство распространяется и на суммы событий A_j (или B_k). 4.3. События $A_j(j = 1, 2, ..., n1)$ и $B_k(k = 1, 2, ..., n2)$ – *совместимы* (в оба входит одно и то же *произведение* $A_{j,k}$). Т.е. схожесть свойств определяется тем, что *произведения*, являющиеся *сложными* событиями, обладают свойством *несовместимости*, как и *элементарные* события *двумерного опыта.* Это свойство распространяется и на суммы событий A_j и B_k. 4.

V. Свойства *совмещенного* и *двумерного опытов* значительно отличаются.

5.1. Исходными являются *элементарные* события a_j^1 и a_k^2 2-х *одномерных опытов* (прямоугольники с утолщенными линиями), а *произведения* – *сложные* события, образованные декартовым произведением множеств *элементарных* событий *опытов.* 5.2. События A_j и B_k равны $A_j = \sum_{k=1}^{4} A_{j,k} = a_j^1 \cdot \sum_{k=1}^{4} a_k^2 = a_j^1$ и $B_h = \sum_{j=1}^{6} A_{j,k} = a_k^2 \cdot \sum_{j=1}^{6} a_j^1 = a_k^2$ соответственно, т.е. *элементарным* событиям соответствующих *опытов.* 5.4. Из *совместимости* событий A_j и B_k, с учетом свойства 2.1, следует $P(A_j \cdot B_k) = P(A_j) \cdot P(B_k) = P(a_j^1) \cdot P(a_k^2) = P(a_j^1 \cdot a_k^2)$, т.е. вероятность *произведения* событий A_j и B_k равна *произведению* их вероятностей. Т.е. *произведению* вероятностей соответствующих *элементарных* событий *опытов.* Соответственно вероятность *суммы* событий A_j и B_k равна $P(A_j + B_k) = P(A_j) + P(B_k) - P(A_j) \cdot P(B_k) = P(a_j^1) + P(a_k^2) - P(a_j^1) \cdot P(a_k^2)$. Т.е. *сумме* вероятностей соответствующих *элементарных* событий *опытов* за вычетом их *произведения.* 5.5. Свойства 2-3 распространяются на *суммы* событий A_j и B_k. Например, вероятности *произведения* и *суммы* событий $A = A_2 + A_4$ и $B = B_1 + B_3$ равны $P(A \cdot B) = a_2^1 \cdot a_1^2 \cdot + a_4^1 a_1^2 + a_2^1 \cdot a_3^2 + a_4^1 \cdot a_3^2$ и $P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Из проведенного анализа следует:

W.31 ***При объединении опытов произведение существует только при пересечении опытов. Произведение* событий 2-х *опытов* возможно при выполнении условия: *события находятся в области пересечении опытов* и *совместимы* (в них входят одинаковые *элементарные* события *объединенного опыта*).**

W.32 ***При совмещении опытов сумма событий существует независимо от пересечения опытов и является следствием совместимости событий A_j; B_k* (или сумм этих событий) *опытов.***

Замечания к *объединению* и *совмещению многомерных опытов.*

<u>*Замечание*</u> <u>15</u>. Если исходные *опыты* разной *размерности*, то каждый из них в *объединенном опыте* представляется своей таблицей, т.е. они никогда *не пересекаются.*

Если исходные *опыты* одной *размерности*, то в *объединенном опыте* они представляются одной таблицей той же *размерности*. В этом случае *опыты* могут *пересекаться.*

Размерность таблицы *совмещаемого опыта* определяется *суммой размерностей* исходных *опытов.*

Правила образования событий и вычисления их вероятностей не зависят от этого. Некоторые общие выводы, следующие из проведенных исследований:

W.33 ***Алгебра событий как*** (простого) ***опыта, так и сложного опыта одинакова, изменяются вероятностные модели.***

W.34 ***Теоремы о вероятности суммы и произведения событий следует формулировать и доказывать отдельно для*** (простого) ***опыта и для сложного опыта, образованного совмещением опытов.***

W.35 ***Для построения вероятностных моделей событий как*** (простого) ***опыта, так и сложного опыта достаточно понятие совместимости событий дополнить понятием пересечения опытов. Введение других понятий не требуется.***

Таким образом, на основе проведенного анализа разработана *новая исходная* система теории вероятностей, которая полностью согласуется с *экспериментами.* Она включает в себя:

I. ***Базовые*** **понятия: – *уточненное* понятие *испытания* и *введенное* понятие *математической* модели *испытания.***

II. ***Основные*** **понятия: – *элементарное* событие и его *математическая* вероятность.**

III. ***Алгебру*** **событий, дополненную *алгеброй опытов* и уточненное понятие *совместимости* событий, дополненное понятием *пересечения опытов.***

Новая исходная система обусловила:

***Строгое* построение и *расширение математических* моделей, *правильное* понимание и *качественное* уточнение *теории* событий.**

Приложение I. О понятиях *поля* и *полной группы* событий.

Н. *Полем* называется **[1,27; 11,26; 14,12]** множество **Θ** событий **A, B, C, . . . ,** удовлетворяющее условиям: **1. Для каждых двух событий A и B определено, влечет ли событие A за собой событие B** $A \subset B$**. Если *одновременно* выполняются отношения** $A \subset B$ **и** $B \subset A$**, то события называют эквивалентными** $A = B$**. 2. Полю принадлежат *достоверное* и *невозможное* события (сноска 28, стр.17). 3. Если A и B принадлежат полю S, то ему принадлежат: *сумма* A+B и *произведение* AB событий; события** $\overline{A}$ **и** $\overline{B}$**, *противоположные* событиям A и B, т.е.** $\overline{A} + A = U$ **и** $\overline{B} + B = U$**.**

Т.е. введено аморфное *математическое* образование, которое не связано ни *испытанием*, ни с *экспериментом*. Подчеркивая это, приведем цитаты и пример из работы [14,11-12].

"Ни в одной задаче нам, конечно, не придется иметь дело со всеми событиями, какие вообще возможны. В каждом отдельном случае мы будем рассматривать то или иное множество событий, рассмотрение которых достаточно для решения данной задачи. При этом в зависимости от условий задачи конкретное событие может фигурировать в одной задаче как достоверное, а в другой – нет".

***Пример* 1. Подсчет суммы очков при бросании 2-х игральных костей: 1) ". . . в *предположении*, что одна из костей уже брошена и появилось одно очко"; 2) ". . . в *предположении*, что ни одна из костей не брошена". В 1-м случае появление суммы очков 2,3,4,5,6 и 7 будет достоверным событием, во 2-м случае – нет.**

"Однако в каждой задаче нам, во всяком случае, будет необходимо иметь так называемое *поле* событий, т.е. такой запас событий, который обеспечивал бы возможность образования *произведений*, *сумм* и *противоположных* событий для всех имеющихся в этом запасе событий".

Смысл этих цитат ничем не отличаются от смысла цитаты в работе [15] (**замечание к определению (С), стр.15**), хотя и говорится о разных вещах. Более конкретным является 2-е понятие, которое связано с понятием *достоверного* события:

I. Группа событий **A, B, C, . . . , S** называется *полной*, если *одно из них непременно должно* произойти **[1,26; 12,25; 14,11]**.

Особую роль в теории играет *полная* группа событий попарно *несовместимых* и *равновероятных* между собой [1,26; 12,25-26; 14,11-13]. Это связано с тем, что именно такая *полная* группа позволяет вычислять вероятности событий по *классической* формуле (применяя комбинаторные методы). Но, по существу, на этом применение *классической* формулы и заканчивалось.

В аксиоматическом подходе *поле* событий называется *алгеброй* (**множество Θ, сноска 21, стр.15**), однако понятие *полной группы* событий в нем отсутствует.

По-видимому, это связано сидей построения *сложных* событий (множества Θ) на *основе множества Ω элементарных* событий [1,10]. Однако *элементарное* событие, множества Ω и Θ являются неопределяемыми понятиями (замечание к определению (С), стр.15). Т.е. идея осталась только идеей: она *не осуществлена реально* (выводы W.2 и W.3, стр. 24).

Из выводов W.19 и W.30 следует: множество *элементарных* событий *опыта* (**определение 4, стр.28**) и является той *полной группой*, которая определяет построение *сложных* события любого *испытания*. Никакого «запаса событий» создавать не требуется, а понятия *поля* и *полной группы* событий – искусственные образования, в которых нет никакой необходимости. Они только «запутывают» понимание теории.

Приложение II. Бесконечные множества *элементарных* событий. Равномерное распределение вероятностей.

Покажем, что классический подход определяет образование *испытаний* с бесконечным множеством *элементарных* событий. Сначала рассмотрим способ, который непосредственно следует из видов *сложного* опыта.

Рассмотрим N *одномерных опытов* с множествами *элементарных* событий $a^n_{jn} (n = 1, 2, ..., N;\; jn = 1, 2, ..., Kn)$, $P(a^n_{jn}) = m^n_{jn}/Mn$ $(Mn = \sum_{jn=1}^{Kn} m^n_{jn})$. Kn – число *элементарных* событий в *опыте* с номером n, а Mn – число возможных исходов *опыта* с номером n.

1. *Объединение опытов.* Для упрощения положим $Kn = K(n = 1, 2, ..., N)$ и применим 1-й *тип объединения опытов* (замечание 10, стр.33). Получим *объединенный* опыт с *элементарными* событиями $a^o_j (j = 1, 2, ..., K \cdot N)$. Их вероятности равны (замечание 12, стр.38) $P(a^o_{v+K\cdot(n-1)}) = P(a^n_v)\,/\,N$ $(n = 1, 2, ..., N;\; v = 1, 2, ..., K)$, а *сумма* вероятностей всех *элементарных*

событий равна 1 (вывод W.26, стр.39) при любом конечном значении N. При неограниченном увеличении числа N *опытов* число *элементарных* событий стремится к бесконечности, а их вероятности – к нулю.

Отметим, что если *опыты* полностью *пересекаются*, а вероятности *элементарных* событий равны $P(a_j^n) = P(a_j)$ (принято для простоты изложения) для любого значения $n = 1, 2, ..., N$, то получим *опыт* с тем же числом K *элементарных* событий и теми же вероятностями.

2. *Совмещение опытов*. Для упрощения положим $Kn = 2$ $(n = 1, 2, ..., N)$. Результат *совмещения* – 2^N *несовместимых сложных* событий $A_{j1} \cdot A_{j2} \cdot ... \cdot A_{jn}$, образованных *произведением элементарных* событий. Их вероятности равны $P_{j1, j2, ..., jn}$, а *сумма* вероятностей всех *произведений* равна 1 (вывод W.29, стр.39) при любом конечном значении N. При неограниченном увеличении числа N *опытов* число *произведений* стремится к бесконечности, а их вероятности – к нулю.

Вероятность *элементарного* события – это *единственная известная* функция, которая *однозначно* отображает *элементарное* событие (**т.е. *недействительную* величину**) на *ограниченное* множество R $(0 < r < 1)$ *рациональных* чисел (**вывод W.9, стр.29**). Учитывая это, покажем, к чему приводит неограниченное увеличение числа *опытов* (**т.е. предельный переход при значении** $N \to \infty$) при *объединении* или *совмещении* N *опытов*.

Разделим отрезок $0 \le r \le 1$ *действительной* числовой оси точками $v = 0, 1, 2, ..., V$ с координатами r_v на части Δ_j $(j = 1, 2, ..., V)$. Положим, что длины отрезков Δ_j равны вероятностям $P(a^o_{w+K\cdot(n-1)}) = P(a^n_w)/N$ $(w = 0, 1, 2, ..., N)$ *элементарных* событий a^o_w $(w = 0, 1, 2, ..., V = K \cdot N)$ *объединенного опыта* или вероятностям $P_{j1,j2,...,jn}$ $(V = 2^N)$ *произведений совмещенного опыта*. В обоих случаях $p(r_0)=0$, $p(r_j)=p_j$ $(j = 1, 2, ..., V)$, где $r_j = \sum_{w=0}^{j} \Delta_w$, p_j - вероятности *элементарных* событий или *произведений*. При увеличении числа опытов, отрезки Δ_j уменьшаются и точки $v = 0, 1, 2, ..., V$ сближаются друг с другом. При неограниченном увеличении числа N *опытов*, отрезки Δ_j стремятся к нулю. Каждая точка $v = 0, 1, 2, ..., V$ с координатой r_v *принадлежит одному элементарному событию* (или произведению), т.е. они *становятся неразличимыми*. Но, так как *элементарные* события (или произведения) *несовместимы*, то *каждому событию*, из бесконечного множества событий, *соответствует один исход – одна точка на отрезке* $0 \le r \le 1$. Т.е. при значении $n \to \infty$ каждое *элементарное* событие (или *произведение*) стремится к *элементарному* событию, имеющему один исход, а его вероятность сходится к нулю.

Образуем функцию $P(0 < r \le r_v) = \sum_{w=0}^{v} p(r_w)$ $\quad v = 0, 1, 2, ..., V$. При значении $v = V$ значение функции при любом значении N равно $P(r \le r_V) = 1$. При значениях $v = 0, 1, 2, ..., V$ значения функции $P(0 < r \le r_v)$ принадлежат

прямой линии $P = r$.

Пусть A точка на отрезке $0 \le r \le 1$, координата r_A которой равна некоторому *действительному* числу. Тогда отрезок $0 \le r \le r_A$ определяет вероятность $P(A) = r_A$ некоторого *сложного* события A. Значение $P(A)$ тоже принадлежит прямой $P = r$.

При любом значении N, всегда можно определить точки v' и v'', значения координат $r_{v'}$, $r_{v''}$ которых будут ближайшими к точке с координатой r_A и для них выполняется неравенство $r_{v'} \le r_A \le r_{v''}$. При увеличении числа N *опытов*, значения v' и v'' увеличиваются. Координаты $r_{v'}$ и $r_{v''}$, соответствующие этим точкам, сближаются между собой и приближаются к точке с координатой r_A. Т.е. вероятности $P(0<r \le r_{v'})$ и $P(0<r \le r_{v'})$ сближаются между собой. При неограниченном увеличении числа N *опытов*, число *элементарных* событий (точек $v = 0, 1, 2, ..., V$) на отрезках $0 \le r \le r_A$ и $r_A \le r \le 1$ стремится к бесконечности. Вероятности $p(r_{v'})$ и $p(r_{v''})$ сходятся к нулю, а координаты $r_{v'}$ и $r_{v''}$ стремятся к точке A. Однако *суммы* вероятностей $P(r \le r_{v'}) = \sum_{w=0}^{v'} p(r_w)$ и $P(r \le r_{v''}) = \sum_{w=0}^{v''} p(r_w)$ сближаются между собой и сходятся к конечному пределу: значению вероятности $P(0 \le r < r_A)$, которое тоже принадлежит прямой $P = r$. Таким образом, отрезок $0 \le r \le r_A$ определяет вероятность $P(A) = r_A$ некоторого *сложного* события A, которое состоит из бесконечного множества элементарных событий с нулевыми вероятностями. Это справедливо при любом значении координаты r_A. Следовательно, и для любого отрезка $0<a \le r \le b<1$.

Доказательство не совсем строгое. Но достаточное, чтобы сделать выводы.

Показано: при неограниченном увеличении числа N объединяемых или совмещаемых опытов (предельный переход при значении $N \to \infty$):

1. **Число *элементарных* событий стремится к бесконечности. Каждое *элементарное* событие (или *произведение*) стремится к *элементарному* событию, имеющему *один возможный* исход, а его вероятность сходится к нулю. Это *приводит к равномерному непрерывному распределению вероятностей на отрезке $0 \le r \le 1$.***

2. ***Из равномерного распределения вероятностей следует, что вероятность* $P(A)$ любого *сложного события A является действительным числом $0 < P(A) < 1$.***

Замечание. **Понимание того, что *рациональные* числа не обладают свойством *непрерывности* [22, стр.24-25], установилось еще вначале изучения математического анализа. Убежденность в этом и определила его появление на стр.114 в монографии [9]. Отсюда последовали п.1 (стр.115) и вывод S7.2 (стр.116). Дело в том, что мы, в отличие от работ [22; 23], рассматривается неограниченное увеличение числа рациональных чисел на**

ограниченном отрезке $0 \leq r \leq 1$ (при неограниченном делении отрезка) и их *сумму* на конечном отрезке. Понимание этого различия пришло совсем недавно, поэтому и сейчас мы не можем гарантировать, что какой-либо из стереотипов не «присутствует» в некоторых из рассуждений.

Казалось бы, что вывод W.1, следующий из теории, противоречит реальному положению вещей. Однако противоречия нет.

Во-первых. Равномерное распределение вероятностей на отрезке $0 \leq r \leq 1$ позволяет определить произвольный *опыт*: 1) с конечным множеством или бесконечным (**счетным**) множеством *элементарных* событий, которые не будут равновозможными; 2) с бесконечным (**несчетным**) множеством *элементарных* событий (***непрерывное* распределение**), исходы которых будут *не равновозможны*.

1. Разделив его на М равных частей, получим множество точек $j = 0, 1, ..., M$. Отрезки - это аналог *равновозможных* исходов *опыта*. На них можно построить *опыт* с числом $n < M$ *элементарных* событий с *неравновозможными* исходами. 2.1. Теоретические бесконечные несчетные множества *элементарных* событий с *неравновозможными* исходами определяются преобразованием равномерного распределения с использованием *действительной нелинейной* функции *действительной* переменной [9,49-54,112-113]. 2.2. *Неравновозможные* исходы появляются в результате *экспериментов*. Результаты многочисленных *экспериментов*, необходимых для определения распределения, аппроксимируют некоторой теоретической кривой, которую можно получить на основе п.2.1.

Коротко о результатах *экспериментов*.

Результат любого *эксперимента* – появление *элементарного* события. *Относительная* частота L/N появления *элементарного* события (где L – число его исходов в N экспериментах) определяется *рациональным* числом и является характеристикой объективной реальности. Свойства *математической* вероятности и *относительной* частоты (как рациональных чисел) *тождественны*. Введения аксиом *о вероятности суммы и произведении сложных событий не требуется – достаточно теорем*. Однако *доказать*, что *относительная* частота сходится к *математической* вероятности, как и ее *существование, невозможно*. Можно *опираться* только на многочисленные эксперименты, *подтверждающие свойство относительных* частот: *приближение к математической вероятности при увеличении числа экспериментов и устойчивость при повторении серий с большим числом экспериментов*.

Из проведенного анализа следует:

для построения теории вероятностей достаточно введения одной аксиомы: *существования математической вероятности события*

как рационального числа.

Она приводится в большинстве работ. Учитывая, что основными понятиями теории вероятностей являются: элементарное событие и его математическая вероятность, необходимо только немножко изменить ее формулировку.

Рассмотрим *искусственное* образование *опытов*. Чтобы *рациональные* числа a_j $(j = 1, 2, ..., N)$ могли быть вероятностями *элементарных* событий некоторого опыта, они *должны подчиняться условиям*:

I. *$0 < a_j < 1$*. **. II. При любом значении сумма всех чисел должна равняться единице** $S_N = \sum a_j = 1$ **(условие нормировки вероятностей).**

***Пример 1*. Рассмотрим ряд** $a_j = 1/j/(j+1)(j = 1, 2, ..., N)$**. Первое условие выполняется, а второе – нет, ибо *сумма* ряда** $S_N = \sum a_j = (N-1)/N < 1$ **при любом конечном числе** N**. Пусть** $a_{N+1} = 1 - S_N = 1/N$**, тогда числа** $a_j(j = 1, 2, ..., N+1)$ **будут вероятностями** $P(a_j) = 1/j/(j+1)$ $(j = 1, 2, ..., N)$, $P(a_{n+1}) = 1/N$ $\{1\}$ **множества *элементарных* событий** a_k $(k = 1, 2, ..., N+1)$, $\sum_{j=1}^{N+1} P(a_j) = 1$ **некоторого *опыта* с числами *возможных* исходов *опыта* и его *элементарных* событий соответственно:** $M = N!$ **и** $m_k = N!/k/(k+1)$ $(k = 1, 2, ..., N)$, $m_{N+1} = N!/(N-1)!$**.**

***Пример 2*. В соответствии с аксиоматическим подходом, вероятностям *элементарных* событий можно приписывать любые *действительные* числа, отвечающие условиям I и II. Учитывая выводы W.1 и W.2 будем называть (*сложными*) событиями. Рассмотрим геометрическую прогрессию** $a_j = a_1 \cdot q^{j-1}$ $(j = 1, 2, ..., N)$ **при значении** $0<q < 1$, $S_N = \sum_{j=1}^{N} a_j = a_1 \cdot (1 - q^N)/(1-q) \neq 1$**. Положим** $a_1 = 1$**, умножим числа** a_j **на значение** $1 - q$ **и дополним ряд числом** $a_{N+1} = 1 - S_N \cdot (1-q) = q^N$**. Условия I и II выполняются, тогда числа** a_j $(j = 1, 2, ..., N+1)$ **являются вероятностями** $P(A_k) = (1-q) \cdot q^{k-1}$ $(k = 1, 2, ..., N)$, $P(A_{N+1}) = q^N$ $\{2\}$ **множества *несовместимых* событий** A_k $(j = 1, 2, ..., N+1)$, $\sum_{j=1}^{N+1} P(A_j) = 1$ **некоторого *опыта*. Отметим, что при значениях** $q = 1/w(w = 2, 3, ..., W)$ **числа** $a_j(j = 1, 2, ..., N+1)$ **будут множеством *элементарных* событий** $a_k(j = 1, 2, ..., N+1)$ **некоторого *опыта* с числами *возможных* исходов *опыта* и его *элементарных* событий:** $M = w^N$ **и** $m_k = (w-1) \cdot w^{N-k}(k = 1, 2, ..., N)$, $m_{N+1} = 1$**.**

В обоих примерах увеличение числа N *элементарных* (**в примере 2 - сложных**) событий на число n не изменяет вероятности *элементарных* событий с номерами $j = 1, 2, ..., N$. Они дополняются вероятностями *элементарных* событий с номерами $j = N+1, N+2, ..., N+n$, вероятности которых при увеличении числа $N+n$ также не изменяются. При неограниченном увеличении числа N получим бесконечное (счетное) множество *элементарных* событий. При этом: 1) $\lim\limits_{N\to\infty} P(a_N) = 0$ и $\lim\limits_{N\to\infty} P(a_{N+1}) = 0$; 2) для любого конечного значения $j < N$ вероятности *элементарных* *событий* равны значениям, определяемым формулами {1} или {2}; 3) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N+1} P(a_j) = 1$.

Этот способ применен для того, чтобы показать:

1. При бесконечном (счетном) множестве *элементарных* событий их вероятности могут вычисляться по классической формуле.

2. В аксиоматическом подходе *действительные* числа в общем случае определяют *сложные* события.

3. Ни из *аксиомы непрерывности*, ни из равносильной ей *расширенной аксиомы сложения*[57].

Приложение III. О понятиях *условной* вероятности, *независимости* и *зависимости* событий.

1. Вероятность события A_1, вычисленная *при условии*, что *имело место* (т.е. произошло) событие A_2 называется *условной* вероятностью события A_1 [11,46].

2. Два события называются *независимыми* (*зависимыми*), если появление *одного* из них *не влияет* (*влияет*) на вероятность появления *другого* [12,45-46].

Замечание. Считается, что *условие* $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ {1} является *необходимым* и *достаточным* для *независимости* событий. Исходя из *условной* вероятности, оно записывается в виде: $P(A_1|A_2) = P(A_1)$ *если* $P(A_2) \neq 0$ *или* $P(A_2|A_1) = P(A_2)$ *если* $P(A_1) \neq 0$ {2}. *Условия независимости* N событий: $P(A_jA_k) = P(A_j)P(A_k)$, $P(A_jA_kA_m) = P(A_j)P(A_k)P(A_m)$, ..., $P(A_1, A_2...A_N) = P(A_1)P(A_2)...P(A_N)$ {3}.

Понятия *независимости* (*зависимости*) событий и *теорема* умножения вероятностей, впервые даны А. Муавром в 1718г [1,57]. Они были придуманы и введены для того чтобы правильно вычислять вероятности событий. Понятия *условной* вероятности у Муавра нет [1,410]: оно содержится в неявной форме в формулировке теоремы умножения вероятностей .

«Понятие условной вероятности является основным инструментом теории вероятностей, и удручает тот факт, что его крайняя простота отчасти затемняется чрезвычайно сложной терминологией. ... Хотя обозначение $P(A\,|\,H)$ само по себе является практичным, его словесная расшифровка этим свойством не обладает и используется реже. ... Короче говоря, наши формулы и символы недвусмысленны, но словесные выражения часто

[57] **Формулировки обеих аксиом приведены в работе [1,52-53].** не следует *непрерывность* вероятностей

неформальны и требуют четкого истолкования» [6,132-133].

При этом *условия независимости* сопровождаются комментариями вида:

«В практических вопросах для определения *независимости* данных событий редко обращаются к проверке выполнения равенств $\{1\}$ или $\{2\}$. Обычно для этого пользуются *интуитивными* соображениями, *основанными* на опыте. Так, например, ясно, что выпадение герба на одной монете не изменяет вероятности появления герба на другой монете, если только эти монеты во время бросания не связаны между собой .... Эти события *независимы*» [1,56]. «Вся система $\{3\}$ выглядит как сложное множество условий, однако скоро станет ясно, что ее справедливость обычно очевидна и не нуждается в проверке» [6,147].

Когда появилось понятия *условной* вероятности, точно сказать мы не можем. Возможно, это связано с аксиоматическим подходом, в котором формулы $\{2\}$ принимаются как ее определение [1,57; 6,133; 8,14]. Но это не имеет какого-либо значения. Важны другие обстоятельства.

Во-первых, в теории понятия *условной* вероятности и *независимости* (*зависимости*) событий считаются взаимосвязанными, но это не соответствует реальности.

Во-вторых, до сих пор мы обходились без понятия *условной* вероятности. Это уже говорит о том, что вряд ли оно «является основным инструментом»: мы можем только сказать, что в определенных случаях его применение полезно.

Наши выводы связаны как раз с тем, что **«словесные выражения ... требуют четкого истолкования»**, а это требует пояснения.

Рассмотрим пример решение задачи, иллюстрирующий понятия *условной* вероятности и *зависимости* событий [12,9]. Примеры такого типа часто используются в теории вероятностей для этой цели.

***Пример 1*. В урне находится m_1 белых и m_2 черных шаров, $m_1 + m_2 = M$. Из урны извлекается наугад один шар, который не возвращается в урну (выбор без возвращения). Необходимо определить вероятность появления *белого* шара при $N < m_1$ отборах.**

Вероятность появления белого шара при 1-м отборе (событие A_1) $-\ p_1^1 = P(A_1) = m_1/M$. При 2-м отборе вероятность его появления (событие A_2), *при условии*, что произошло событие A_1, равна: $p_1^2 = P(A_2|\, A_1) = (m_1 - 1)/(M - 1)$. Вероятность появления белого шара при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$ (событие A_n), *при условии*, что произошло событие $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}$, равна $p_1^n = P[A_n|\,(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1})] = (m_1 - n)/(M - n)$ $\{1.a\}$. При $N < m_1$ отборах вероятность появления *белого* шара (событие $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_N$) равна $P(A) = p_1^1 \cdot p_1^2 \cdot ... \cdot p_1^N$ $\{1.b\}$. Вероятность появления черного шара при отборе

с номером $n = 1, 2, ..., N$ (**событие** B_n) ***при условии,*** **что произошло событие** $B_1 \cdot B_2 \cdot ... \cdot B_{n-1}$ $p_2^n = P[B_n | (B_1 \cdot B_2 \cdot ... \cdot B_{n-1})] = (m_2 - n)/(M - n)$ $\{2.a\}$. **Вероятность появления** ***черного*** **шара (событие** $B = B_1 \cdot B_2 \cdot ... \cdot B_N$**) при** $N < m_2$ **отборах равна** $P(B) = p_2^1 \cdot p_2^2 \cdot ... \cdot p_2^N$ $\{2.b\}$**.**

Из *условий* $\{3\}$ следует, что события $A_1, A_2, ..., A_N$ (**или** $B_1, B_2, ..., B_N$) *зависимы.*

При условии означает, что оно должно быть выполнено, т.е. событие A_1 (**или** B_1) – должно быть *достоверным.* Однако при отборе наугад одного шара из урны может появиться как белый, так и черный шар, т.е. условие не выполняется. Чтобы выполнить условие необходимо теоретически (**т.е. мысленно, виртуально**) вычислить вероятность появления белого (**черного**) шара до отбора. Затем, заглянув в урну, найти белый (**черный**) шар и извлечь его. Далее операции повторяются. Отсюда следует:

Достоверность появления белого **(черного)** ***шара*** **(событий** $A_1, A_2, \ldots, A_k$ **или** $B_1, B_2, ..., B_N$**)** ***при каждом извлечении, может быть обеспечена только проведением реальной операции – целенаправленным извлечением белого шара из урны.***

Очень не естественный способ обеспечения *достоверности* события. В теории об этом не говорится, а в практике он не применяется (**используется результат теоретического решения для «предсказания» появления события, но оно неточно**).

Это связано с тем, что при отборе наугад одного шара из урны, появление белого шара является только *предположением*[58]. Следовательно, необходимо учитывать, что при *каждом* вынимании *возможно* появление и *черного* шара.

Дело как раз в том, что при решении задач происходит «путаница» между выражениями «*при условии*» и «*в предположении*». Это приводит к неправильному пониманию и применению *условной* вероятности событий, усложнению решения и (**в определенных случаях**) к неточному решению некоторых задач. Покажем это на более сложном примере.

Пример 2*. Пусть в урне находятся одинаковые непрозрачные сферы с номерами** $j = 1, 2, ..., K$ **по числу** m_j^0 **шаров каждого номера,** $M^0 = \sum_{j=1}^{K} m_j^0$ (**индекс 0 означает, что отбора не было**). **Номера находятся** ***внутри сферы. **Т.е.**

[58] **Предположение определяет только возможность чего-либо, а, следовательно, необходимо рассматривать и другие возможности. Формулировка «в предположении, что произошло событие B» встречается в работах (пример 1 в приложении I, формулировка теоремы в редакции Т. Байеса [1,411])**

имеем исходный (простой) *опыт* с множеством *элементарных* событий a_j^0, $P(a_j^0) = m_j^0/M^0$, *признак* появления *которых* скрыт. Полагаем (как и в примере 1): 1) $m_j^0 > N(j = 1, 2, ..., K)$); 2) после отбора наугад одной сферы из урны она не возвращается.

При случайном отборе одной сферы из урны появление *элементарного события* с конкретным номером $j = k1$ (**он скрыт**) не является *достоверным.*

В этом случае справедливо только *предположение*:

I. *В результате вынимания с номером* $n = 1, 2, ..., N$ *может появиться только одна* сфера с номером: «*или 1, или 2, . . . , или K*». Т.е. возможно появление только одного *из множества элементарных* событий *опыта*: «*или* a_1^n, *или* a_2^n,. . . , *или* a_K^n».

Однако, для последующего сравнения, сначала используем выполнение *условия достоверности* с *целенаправленным* отбором.

Решение 1. **Осуществить это можно тогда, когда в урне находятся не сферы, а шары с номерами на поверхности. Будем целенаправленно отбирать шар с номером $j = k1$ $(k1 = 1, 2, ..., K)$. Отбор шара из урны изменяет *внутреннее условие* проведения *опыта,* которое привело к изменению вероятностей. Следовательно (вывод W.1, стр.12), имеем *другой опыт* с тем же числом *элементарных* событий, но с другими вероятностями их появления. При числе $n = 1, 2, ..., N$ отборов имеем (с учетом исходного *опыта*) $n+1$ *опытов* (*виртуальных* урн) с вероятностями *элементарных* событий a_j^n: $p_{k1}^n = [P(a_{k1}^0) - n/M]/(1 - n/M)$ $(j = k1)$ и $p_j^n = P(a_j^0)/(1 - n/M)$ $(j \neq k1)\{3.a\}$. Вероятность одновременного появления события a_{k1}^0 в $N+1$ *опытах* определяется *совмещением опытов* (определение 5, стр.30) и равна $P(a_{k1}^N) = p_{k1}^0 \cdot p_{k1}^1 \cdot ... \cdot p_{k1}^N$ $(k1 = 1, 2, ..., K)$ $\{3.b\}$.**

Пусть число m_1^0 *возможных* исходов *элементарного* события a_1^0 намного больше суммы *возможных* исходов всех других *элементарных* событий $m_1^0 << M^0 - m_1^0$. Например, при значениях $m_1^0 = 9990$ и $M^0 = 10000$. В этом случае мы будем практически уверены, что при небольших значениях N будут появляться возможные исходы только события a_1^0. Однако это не гарантирует, что при N случайных отборах не появится какое-либо другое *элементарное* событие. Учитывая, что при оборах вероятность события a_1^0 уменьшается, а других *элементарных* событий – увеличивается. Такая «неприятность», несмотря на «практическую уверенность», в практике случается. Например, при контроле качества изделий. Формулы $\{3.b\}$ не предусматривают того, что это может случиться

При решении мы даже не упоминали о понятиях *условной* вероятности и *независимости* событий. Использован вывод W.1 (**стр.12**) и понятие *совмещения опытов.* Теперь рассмотрим естественный способ обеспечения выполнения *условия*, при котором *элементарное* событие неизбежно происходит.

Решение 2. ***После каждого отбора будем вскрывать сферу***[59] **(т.е. определять ее номер). Это обеспечивает *достоверность* появление *элементарного* события a^n_{kn} с номером $j = kn(kn = 1, 2, ..., K)$ при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$.**

Этот случай отличается от решения 1 тем, что при каждом отборе может появиться *элементарное* событие a^0_j с любым номером $j = 1, 2, ..., K$. Пусть при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$ появилась сфера с номером $j = kn(kn = 1, 2, ..., K)$, т.е. *элементарное* событие a^{n-1}_{kn}. Получим *опыт* (*виртуальную урну*) с номером $n = 1, 2, ..., N$. Вероятностями *элементарных* событий опыта: $P(a^n_{kn}) = [P(a^{n-1}_{kn}) - 1 / M^{n-1}] / (1 - 1 / M^{n-1})(j = k1)$, $P(a^n_j) = P(a^{n-1}_j) / (1 - 1 / M^{n-1})(j \neq k1)$ $\{4.a\}$. Верхний индекс $n - 1$ в формулах означает, что значения получены при предыдущем отборе.

Таким образом, в результате N отборов имеем $N + 1$ *опытов* (*виртуальных урн*) с вероятностями *элементарных* событий, определяемых формулами $\{4.a\}$. Нам необходимо определить вероятность $P(A_N)$ события $A_N = \prod_0^N a^n_{kn}$ при *совмещении* $N + 1$ *опытов*. Очевидно, что при отборах могут появляться *элементарные* события с одинаковыми номерами, а некоторые могут вообще не появиться. Учитывая это, положим, что *элементарное* событие $a^{(\mathbf{??})}_{kn}(kn = 1, 2, ..., K)$ появилось в N отборах n_{kn} раз $\sum_{v=1}^N n_v = N$. Тогда вероятность $P(A_N)$ принимает вид $P(A_N) = \prod_{n=0}^N] P(a^0_{k\,n}) - n_{kn} / M^0] / (1 - n / M^0)$ $\{4.b\}$.

И здесь нам не потребовались понятия условной вероятности и *независимости* событий. Полученное решение учитывает возможность появления «практически невозможных» событий. Теперь построим решение на основе *предположения* **I**. Можно попытаться построить решение, используя понятия *условной* вероятности, но сделать это не просто[60].

Решение 3. **Этот случай отличается от решения 2 тем, что номер отобранной сферы $j = k1$ неизвестен. Следовательно, это может быть *элементарное* событие a^0_{k1} с любым номером $k1 = 1, 2, ..., K$. Учитывая все эти возможности, при 2-м отборе необходимо рассматривать K *виртуальных опытов* (урн) с числом *возможных* исходов каждого из *опытов*, которые определены в решении 1. *Предположение* «*или* a^0_1, *или* a^0_2,. . . , *или* a^0_K» соответствует *объединению опытов* (определение 5, стр.30). Используя 1-й тип *объединения* (определение 6, стр.34) , и учитывая, что *опыты* полностью *пересекаются* (определение 8, стр.40), получим *виртуальный объединенный опыт* (одну виртуальную урну) с числами возможных исходов $K \cdot M^1$**

---

[59] **В примере 1 и решении 1 задачи примера 2 это соответствует невозвращению случайно отобранного шара**

[60] **Можно попробовать сделать это на примере 1**

***опыта* и элементарных событий $K \cdot m_j^0 - 1 (j = 1, 2, ..., K)$. Их вероятности равны $P(a_j^1) = [P(a_j^0) - 1/(K \cdot M^0)]/(1 - 1/M^0)(j = 1, 2, ..., K)$. Второй отбор выполняется из этой *виртуальной* урны (*опыта*). Опять получим K *виртуальных опытов* (урн) и снова используем 1-й тип *объединения опытов*. Повторяя эти операции, при отборе с номером $n = 0, 1, 2, ..., N$ получим *объединенный опыт* с *элементарными* событиями a_j^n $P(a_j^n) = [P(a_j^0) - n/(K \cdot M^0)]/(1 - n/M^0)$ $(j = 1, 2, ..., K)$ $\{5.a\}$. Появление *элементарного* события с номером $j = kn$ $(kn = 1, 2, ..., K)$ в $n = 0, 1, 2, ..., N$ *опытах* (событие A_N) соответствует *совмещению опытов*. Вероятность его появления в N *опытах* равна: $P(A_N) = \prod_{j=0}^{N} [P(a_{kn}^{(0)}) - j/(K \cdot M^0)]/(1 - j/M^0)$, $(kn = 1, 2, ..., K)$, $(N = 1, 2, ...)$ $\{5.b\}$.**

В этом решении также не было упоминания о понятиях *условной* вероятности и *независимости* событий. В решениях 1-3 изменяется *внутренние условия* проведения *опытов*, однако все *виртуальные опыты* проводятся при *неизменных условиях*. Это привело к существенному упрощению решения задачи: при этом оно определено для всех *элементарных* событий исходного *опыта*.

Обратимся к задаче, данной в работе [6,137] (**пример 10, стр.22**). Приведем комментарии к решению задачи из работы:

«Чтобы *<u>придать</u>* нашему *<u>образному</u>* *<u>описанию</u>* *<u>точный</u>* *<u>математический</u>* *смысл*, заметим, что оно *<u>определяет</u>* *<u>условные</u>* вероятности, из которых могут быть *<u>вычислены</u>* некоторые *<u>основные</u>* вероятности. ... Точные выражения для вероятностей получить нелегко, за исключением следующего, самого важного и лучше всего изученного частного случая. *Схема Пойа.* Характеризуется значениями $c>0$ и $d=0$» (стр.138). Далее, при рассмотрении «независимых» испытаний: «*Выбор без возвращения.* ... Таким образом, выборка объема r без возвращения превращается в последовательность r экспериментов. Мы припишем равные вероятности всем исходам отдельного эксперимента и постулируем независимость r экспериментов. ... Мы видим, что понятие независимых испытаний позволяет изучать выбор как последовательность независимых операций» (стр.150).

Используя вывод W.1, понятия *объединения* и *совмещения опытов* мы получим также (**задача в примере 2**) два решения. И в этом случае нам не потребуется ни понятие *условной* вероятности, ни приписывания **«равных вероятностей всем исходам отдельного эксперимента»**, ни постулирования **«независимости r экспериментов»**. А решение задачи существенно упрощается.

Отметим следующее:

1. Решение 3 дает *точное* прогнозируемое значение вероятности появ-

ления *элементарного* события при N случайных отборах. Отметим, что оно соответствует последовательному отбору, который применяется при проверке качества изделий в производстве.

2. По решению 2 определяется вероятность появления *элементарного* события по *экспериментальным* результатам N случайных отборов (т.е. после проверки качества изделий).

3. Решение 3 позволяет учитывать появление *в экспериментах* маловероятных событий.

Примеры *зависимости* и *независимости* событий (**простого**) *опыта*, хотя и редко, но тоже иногда «попадаются» в литературе.

***<u>Пример 3</u>*. Однократное бросание игральной кости: a_j ($j=1,2,\dots,6$ – число очков) – *элементарные* события *опыта*. Вариант а): событие $A_1 = a_1 + a_2$ – выпадение числа очков не больше 2-х. Вариант b): событие $A_2 = a_1 + a_2 + a_3$ – выпадение числа очков не больше 3-х. В обоих вариантах событие $B = a_2 + a_4 + a_6$ – выпадение четного числа очков [14].**

Пояснение [14]. «Вероятности событий: $P(A_1) = 1/3$, $P(A_2) = 1/2$, $P(B) = 1/2$. Условные вероятности – $P(B|A_1) = 1/2$, $P(B|A_2) = 1/3$. В соответствии с *условием* $\{2\}$: в варианте а) – $P(B) = P(B|A_1)$, события A_1 и В *независимы*; в варианте b) – $P(B) \neq P(B|A2)$, события A_2 и В *зависимы*». Но с другой стороны: в обоих вариантах вероятности п*роизведений* A_1B, A_1B (и A_1A_2) событий выражаются через *условную* вероятность $P(A_1B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1)$, $P(A_2B) = P(A_2)\cdot P(B|A_2)$(и $P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)$). Из условия $\{1\}$ следует, что события *в обоих вариантах* (а также A_1 и A_2) *зависимы*. Таким образом, получаем противоречивым выводам при использовании *условий независимости* событий в вариантах $\{1\}$ и $\{2\}$.

В события A_1, A_2 и B входит одно *одинаковое элементарное* событие a_2, следовательно, они *совместимы* (**определение 7, стр.35**). Противоречие определяется тем, что *условная* вероятность связана с *совместимостью* событий *опыта*, но не имеет отношения к *зависимости* (*независимости*) событий. Появление *элементарного* события a_2 является признаком появление событий A_1, A_2, B и их *произведений*, но они являются искусственными образованиями и *никогда* не появляются в *эксперименте ни по отдельности, ни вместе*. А понятие *условной* вероятности требует проведения лишних операций, «запутывает» понимание теории и для *опыта* является просто лишним.

Считается, что *независимость* N событий $A_1\ A_2 ... A_N$ обеспечивается при выполнении системы условий $\{3\}$, ибо попарной независимости (**т.е. выполнения условий** $P(A_j\ A_k) = P(A_j)\,P(A_k)(j,k = 1,2,...,N)$) недостаточно. Чтобы показать это, даются примеры вида: **3-и грани тетраэдра выкрашены в красный (событие А), зеленый (событие В) и синий (событие С) цвета**

соответственно, а 4-я – в 3-и этих цвета (событие ABC) [1, 58]. Мы слегка усложним задачу.

***<u>Пример 4</u>*. Одна урна содержит 1 белый шар, 4 черных, 6 красных, 9 синих шаров и 10 шаров с номером 3. Вторая урна содержит: белые шары с номерами 1,3,5,6; черные шары с номерами 1,2, 4-7; синие шары с номерами 1-10. Имеем *одномерный опыт* (5 *элементарных* событий $M^1 = 30$) и *двумерный опыт* (20 *элементарных* событий $M^2 = 20$). Смешаем шары в одной урне и будем вынимать из нее наугад один шар[61]. Требуется определить вероятность появления шара определенного цвета (данного номера).**

Мы просто показали, что задача сводится к *объединению* 2-х *опытов* (в нашем случае 2-го *типа*) *разной* размерности, которые никогда не *пересекаются* (замечание 15, стр.43). По *объединенному опыту* (25 *элементарных* событий $M^o = 50$), учитывая, что числа *возможных* исходов *элементарных* событий не изменяются (замечание 12, стр.29) легко определяются вероятности искомых и других событий. Например: вероятность появления черного шара (событие A) $P(A) = (4+6)/50$; вероятность шара с номером 3 (событие B) $P(B) = (10+2)/50$; вероятность появления или события A, или события B (событие C) $P(C) = P(A) + P(B) = (1/5 + 6/25) = 11/25$.

Ни понятие *независимости* (*зависимости*), ни *условной* вероятности не упоминались при решении задачи. И последний пример: - выборка с возвращением.

Пусть в примере 1 после каждого отбора шар возвращается в урну, затем шары тщательно перемешиваются. Имеем повторение *опыта* при *неизменных условиях* его проведения. Так как требуется определить вероятность одновременного появления *элементарного* события при N отборах, то *испытание* равносильно *сложному* опыту с *n=1,2,. . . .N* с одинаковыми (*виртуальными*) урнами, в котором вынимается наугад по одному шару из каждой урны, т.е. имеем *совмещение опытов* с 2-мя *элементарными* событиями a_1, $P(a_1) = m_1/M$ и a_2, $P(a_2) = m_2/M$.

Понятие *независимости* событий здесь также не упоминается, а снова использованы вывод W.1 (**стр.12**) и понятие *совмещения опытов*.

Отметим, что существующее понимание *независимости* (*зависимости*) в теории вероятностей приводит не только к противоречивым выводам (**пример 3**), при применении *условий* в 2-х вариантах, но и к противоречиям между понятием и *условиями независимости*. Это отчетливо проявляется при его применении к случайным величинам [9,96-101].

Иначе обстоит дело с понятием *условной* вероятности. Примеры, когда это понятие является лишним и усложняет решение задачи, можно

[61] **Полагаем, что шары обоих урн не отличаются на ощупь и тщательно перемешаны**

продолжить. Но не меньше можно привести примеров, когда *условие достоверности* события *безусловно* *выполняется*.

Например. Изучение влияния: 1) вакцинации, условий обитания, труда и т.п. на заболеваемость; 2) температуры и технологии на прочность материала, вида и направления и действующей нагрузки на прочность детали; тех или иных факторов на точность стрельбы и т.п.

Во всех этих случаях понятие *условной* вероятности полезно. Но во всех случаях прослеживается четкая связь *условной* вероятности с *условиями* проведения *испытания.*

Таким образом, проведенный анализ показал:

В **(простом)** ***опыте понятие условной вероятности связано с понятием совместимости сложных событий.*** **Оно** ***является избыточным.***

Понятие независимости и зависимости связаны с условиями **(внутренними или внешними)** ***проведения испытания. Если условия испытания не изменяются, то вероятности его событий тоже не изменяются.***

Понятие условной вероятности может применяться тогда, когда проведение испытание подчинено некоторым условиям.

Приложение IV. Об операции *разности* событий. Введение теорем о *разности* и *делении* вероятностей

Приведем ее формулировку из работы [6,34], которая близка к формулировке в теории множеств [25,9; 26,6]:

«Событие B–A содержит все точки[62] события B, не являющимися точками события A».

Иногда она формулируется для событий. Например: «происходит событие A, но не происходит событие B»». Естественный вопрос: ***если событие*** **B** ***не происходит, то почему оно вообще нас интересует*****? Отметим следующее: 1. В любой работе есть** ***теоремы*** **о вероятности** ***произведения*** **и** ***суммы*** **событий, но в просмотренных работах не «повстречалась»** ***теоремы*** **о вероятности** ***разности*** **этих событий. 2. Ни в одной из просмотренных мы не увидели даже попытки какого-либо анализа. А основной вопрос лежит «в этой плоскости».**

Коротко о том, почему определение разности множеств не совсем подходит к событиям. Запишем два положения теории множеств [26,6-7,10].

[62] **Напомним, что точка в аксиоматической теории соответствует элементарному событию**

1. Множество A является подмножеством множества B, если все элементы A являются элементами B. 2. Обозначение $\{a, b, c\}$ значит, что множество содержит элементы a, b, c и не содержит других. Если среди элементов a, b, c есть равные, оно может содержать один или два элемента.

Из них следует: одинаковые элементы возможны в 2-х подмножествах одного множества или в разных множествах. Т.е. операция разности применима только к *совместимым* событиям (**простого**) *опыта* или *объединенного опыта.*

Как-то уж очень узко и вообще говоря, непонятно зачем нужна эта орерация. Введем теоремы, исходя из теорем о *сумме* и *произведении*[63] вероятностей.

1. Если $C = AB$ – *произведение совместимых* событий A и B *опыта* или *объединенного опыта*, а V – событие, содержащее только события A и B, то для них справедлива теорема $P(A) = P(V) - P(B) + P(AB)$ $\{1\}$. 2. Если $C = A^1A^2$ – *произведение* событий A^1 и A^2 2-х *совмещаемых опытов*, а V – событие, содержащее только события A^1 и A^2, то для них справедливы теоремы: $P(A^1) = P(A^2)/P(V)$ $\{2\}$ и $P(A^1) = P(V) - P(A^2) + P(A^1A^2)$ $\{3\}$.

Теоремы $\{1\}$-$\{3\}$, – это более широкое применение тезиса: вычисление вероятностей одних событий по вероятностям других событий. Чего никак нельзя сказать о применении операции разности, взятой из теории множеств.

Приложение V.

В конце XVIII века возникла дискуссия [1,405], начатая Даламбером.

Мотивируя тем, что при бросании 2-х монет возможны лишь три события: "*герб-герб*"; "*герб-число*"; "*число-число*", он определил вероятность их появления равной *1/3* . Другая мотивация: события "*герб-число*" реализуется 2-мя способами: на 1-й монете "*герб*", а на 2-й – "*число*"; на 1-й – "*число*", а на 2-й – "*герб*". В этом случае вероятность появления события "*герб-число*" равна *1/2*.

Чем закончилась дискуссия, история «умалчивает», но этот и подобные ему примеры встречаются в современных работах. Судя по ним, дискуссия не закончена. Пример с бросанием 2-х монет встречается в современных работах, иногда, мягко говоря, с весьма странными пояснениями. Например:

[63] **Т.е. также как это делается в теории действительных чисел [22,12-16,28-34]**

Бросаются «...две *физически различные* монеты ...Модель I казалась бы более естественной, если бы можно было себе представить монеты *физически неразличимыми.* Опыт показывает, что в действительности монеты *ведут* себя как *различимые.* Однако, этот достаточно *очевидный факт* для монет, оказывается неверным для некоторых типов частиц. Бозе и Эйнштейн доказали, что некоторые типы частиц ведут себя как *неразличимые.* Рассмотренный пример показывает, что нельзя слишком полагаться на интуицию: подходящей моделью может оказаться совершенно неожиданная» [15, 25-26]. **«Модель I» – это мотивация Даламбера.**

Сложно понять, что понимается под *физической различимостью* монет при *одновременном* бросании. Если бросаются 2-е новеньких монеты одного достоинства, то *можно ли отличить их после падения*?

В *экспериментах* мы будем наблюдать только 3 комбинации, отмеченные Даламбером (**замечание 12, стр.38**). Т.е. «*очевидный факт* для монет» совсем не очевиден, и уж никак не следует из *экспериментов*.

Конечно же, используя высокоточные инструменты, можно найти много малых отличий одной монеты от другой. Запомнив какие-то из них, после каждого падения повторять измерения, чтобы определить, что на какой монете выпало. *Но есть ли в этом какой-либо смысл*? В общем-то, бессмысленно. 1. Эту мысль замечательно выразил В. Феллер; «*Различимы ли шары на самом деле, для нашей теории несущественно.* Если это даже и так, мы можем условиться считать их *неразличимыми.* Тузы в бридже или люди в лифте, конечно, различимы, и, тем не менее, часто предпочтительнее считать их неразличимыми» [6,29]. 2. Неразличимость «поведения» 2-х или более частиц вовсе не означает, что это одна частица.

Внимание же к этой дискуссии мы привлекли, в первую очередь, в связи с «совершенно неожиданной» моделью. Автор связывает ее с решением задачи вероятностная постановка которой дана в работе [1,].

***Пример* 1. «Имеются n частиц, каждая из которых может находиться с одной и той же вероятностью $1/N$ в одной из $N(N > n)$ ячеек. Найти вероятность того, что: I. *В определенных* n *ячейках окажется по одной частице.* II. *В каких-то* n *ячейках окажется по одной частице.* Эта задача играет важную роль в современной статистической физике, и в *зависимости* от того, как *образуется* *полная* *группа* *равновероятных* событий, приходят к той или иной математической статистике: Больцмана, Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака соответственно».**

Созданная Бозе модель по отношению к модели Максвелла была, конечно же, неожиданной, но с точки зрения физики. *Однако является ли она неожиданной с точки зрения математики*? Чтобы ответить на вопрос, рассмотрим примеры, данные в работе [6].

«*Пример* а. Размещение 3-х шаров по 3-м ящикам[64]. Табл.1[65] содержит все возможные исходы «опыта», состоящего в размещении 3-х шаров по 3-м ящикам. Каждое из этих размещений представляет неразложимый исход эксперимента, т.е. элементарное событие (стр.26). . . . *Пример* b. Случай *неразличимых* шаров. Вернемся к примеру а) и предположим теперь, что все 3-и шара одинаковы. Это означает, что мы больше не делаем различия между такими размещениями, как 4,5,6 и т.п. В этом случае табл.1 сводится к табл.2 . . . » (стр.29).

Во-первых, постановка задачи в ней отличается от ее постановки в примере 1, к чему мы вернемся позже. Во-вторых, в работе [6] эти примеры рассматривается подробно и приводится много раз, в том числе и при пояснении решения задачи, данной в работе [1]. В-третьих. *Цель* последующего изложения гораздо шире, чем ответ на поставленный вопрос. Она заключается в том, чтобы показать важность анализа: 1. Задачи с позиции той математической (**в данном случае - вероятностной**) модели, которую мы собрались применять для ее решения. 2. Влияния физической модели на математическую модель.

Начало развития комбинаторики непосредственно связано с развитием теории вероятностей [1,386-400], но это не значит, что она связана с событиями и операциями с ними. Комбинаторика – «инструмент» для вычисления их вероятностей. Чтобы использовать его, сначала необходимо определить события, вероятности которых определяются. Напомним определения видов комбинаций.

1. Перестановка $P_n = n!$ – последовательность n *разных* предметов *с учетом порядка* [16,199]. 2. Размещения $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m-1)$ – любая группа m *разных* элементов составленная из n *разных* элементов *с учетом порядка* в группе [16,202]. 3. Сочетания $C_n^m = A_n^m \,/\, P_m$ – любая группа из m *разных* элементов составленная из n *разных* элементов *без учета порядка* в группе [16,203].

Рассмотрим отдельно комбинации, связанные с шарами и комбинации, связанные с урнами, ибо они, вообще говоря, не связаны друг с другом.

I.a. *Неразличимые шары*. В соответствии с определением, комбинации составляются только для *разных* предметов. Именно поэтому мы привели

---

[64] **Далее вместо слова "ящик» будем употреблять слово «урна»**

[65] **Мы использовали представление в виде таблицы, примененной в работе [1,36]. Оно удобнее и нагляднее чем таблица в работе [6,27]. Кроме того, оно несколько упрощает составление комбинаций**

определения видов комбинаций и выделяли в них слово «разные». Для *неразличимых* шаров <u>*комбинаций*</u> <u>*не*</u> <u>*существует*</u>: из них можно составить только M групп по числу $m = 1, 2, ..., M$ шаров в каждой группе.

I.b. <u>*Различимые шары*</u> (например, все с <u>*разными*</u> номерами). Число групп, состоящих из $m = 1, 2, ..., M$ шаров, не изменяется и равно M. Однако шары <u>*разные*</u>. Для каждой группы с числом шаров $m = 1, 2, ..., M$ можно составить *комбинации* с *разными* номерами, учитывая, что порядок в группе нас не интересует. Т.е. число комбинаций в группе с числом шаров $m = 1, 2, ..., M$ определяется числом *сочетаний* $C_M^M, C_M^{M-1}, ..., C_M^m, ..., C_M^1, C_M^0$, ($C_M^0 = 1$). Их обычно называют биноминальными коэффициентами.

С точки зрения математики мы, конечно же, должны бы говорить о *возможных комбинациях*, но этого не делаем. Просто потому, чтобы не было «путаницы» между комбинациями и *возможными* исходами *опыта* (**или *элементарных* событий, определение 1, стр.27**). *Исходные* системы понятий и *математические* модели теории вероятностей и комбинаторики разные. Комбинации не случайны.

Число N урн не связано с числом шаров M. Оно может равняться значениям $n = 1, 2, ..., N$. Урны, сами по себе, не отличаются друг от друга: они *различимы* только тогда, когда в них *помещаются* шары. *Различимость* урн определяется *числами* $m = 1, 2, ..., M$ шаров в группе и *различимостью* шаров.

II.a. <u>*Неразличимые шары*</u>. *Различимость* урн определяется только числами шаров. Это отличие определяет применение комбинаторики. Пусть b, m группа с числом $m = 1, 2, ..., M$ шаров. Из групп b, m можно составить самые разные комбинации. Однако *допустимы* только такие *комбинации*, для которых *сумма* шаров в группах b, m равна M. При размещении *допустимых* комбинаций групп b, m по N урнам, их можно дополнять только соответствующим числом групп $b, 0$ (пустыми урнами). При данном числе шаров M, число размещений *допустимых комбинаций* групп b, m ($m = 0, 1, 2, ..., M$) по урнам определяется числом N урн. При значении $N = 1$ имеем размещение одной *допустимой комбинации* b, M. Если значение $N = 2$, то имеем размещения *комбинации*: 1) b, M;$b, 0$; 2) $b, M - k$;b, k ($k = 1, 2, ..., M - 1$). Увеличение числа урн на число n приводит к дополнению комбинаций (1) и (2): 1. Каждой комбинации таким же числом групп $b, 0$. 2. *Допустимыми комбинациями* с другими группами b, m. Например: $N = 3$. 1) $b, M - 2$;$b, 1$;$b, 1$; 2) $b, M - 3$;$b, 2$;$b, 1$; 3) $b, M - 4$;$b, 3$;$b, 1$; 4) $b, M - 4$;$b, 2$;$b, 2$ и т.д. (табл.3)[66]. $N = 4$. 1) $b, M - 2$;$b, 1$;$b, 1$;$b, 0$; 2) $b, M - 3$;$b, 1$;$b, 1$;$b, 1$; 3) $b, M - 4$;$b, 2$;$b, 1$;$b, 1$ и т.д. Такой процесс увеличения *допустимых комбина-*

[66] В табл.2-4: 1) даны числа шаров в урнах, ибо в этом заключено отличие урн; 2) размещения по урнам, полученные для соответствующей комбинации групп шаров отделены ячейкой с 3-мя «звездочками»

ций **будет продолжаться вплоть до значения** $N = M$ **(табл.2** $M = 3$**, табл.4** $M = 4$**). При значениях** $N > M$ ***комбинации*, полученные при значении** $N = M$**, будут дополняться только группами** $b, 0$**. Т.е. число *размещений* групп по урнам будет увеличиваться только за счет дополнения *допустимых комбинаций* пустыми урнами.**

Таким образом, в урнах есть *комбинации* с *разными* (урны *различимы*) и *одинаковыми* (урны, в том числе пустые, *неразличимы*) группами шаров. Наличие в комбинации *одинаковых* (*неразличимых* урн) групп шаров приводит к уменьшению числа размещений для данной комбинации. Для *неразличимых* шаров, общее число *размещений* со всеми *комбинациями* групп b, m **(в том числе с группами** $b, 0$**) шаров по урнам равно** C^{M}_{N+M-1}**.**

II.b. *<u>Различимые шары</u>*. *Различимость* урн по числам шаров в группе, дополняется *различимостью* шаров: в каждой группе с числом шаров $m = 1, 2, ..., M$ **появляется** C^{m}_{M} ***сочетаний* с *разными* (*различимыми*) шарами. Следовательно, *размещения* по урнам с *допустимыми комбинациями* групп** b, m **шаров необходимо составить для каждого *сочетания*** C^{m}_{M}**. Для сравнения с табл.2, в табл.1 *размещения* для *каждого сочетания*** C^{m}_{M} $(M = 3,\ \ N = 3)$ **отделены ячейками с тире. Для *различимых* шаров, общее число *размещений* со всеми *комбинациями* групп** b, m **(в том числе с группами** $b, 0$**, т.е. пустыми урнами) шаров по урнам равно** N^{M}**.**

На основе подробного анализа показано, в чем заключаются отличия размещений *неразличимых* и *различимых* шаров по урнами их последствия: два *естественных размещения* по урнам. Однако, ни номеров урн, ни номеров *размещений комбинаций* групп шаров по урнам в таблицах не приводили. Сделано это намеренно: число размещений не зависит от них, но в работах имеется и другое мнение, например:

«В приведенном выше примере мы рассматривали *неразличимые* шары, но в табл.2 еще *различаются* 1-й, 2-й и 3-й ящики, и их порядок существен. Мы можем пойти еще дальше и считать, что даже ящики *неразличимы* (например, ящики можно выбирать наудачу независимо от их содержимого). Если и шары, и ящики неразличимы, то возможны только три размещения, а именно: {*|—|—}, {**-|-*-|—} и {-*-|-*-|-*-}» [6,30].**

Учитывая это, объясним подробнее, почему *неразличимость* урн не приводят к изменению числа *размещений*.

Комбинации можно осуществить реально, хотя это может быть очень «накладно». Положим шары *неразличимыми* и ограничимся случаем $(M = N = 3)$**. Для составления *реальных размещений* потребуется 30 шаров и 30 урн[67]. Разделим урны на 10 групп (обозначены римскими цифрами в табл.5)**

---

[67] **В общем случае –** $N \cdot C^{M}_{N+M-1}$ **неразличимых или** $N \cdot N^{M}$ **различимых шаров и такие же числа неразличимых урн**

по 3 урны в каждой. Расставим шары по группам урн в соответствии с порядком в табл.2. Т.е., ячейки в таблицах – это *виртуальные* (*мысленные*) урны, *мысленно* (*виртуально*) объединенные в группы по числу N урн в каждой. Номера урн в таблицах ставят перед 1-м столбцом таблицы. Номеру соответствуют все ячейки (т.е. все *виртуальные* урны) данной строки таблицы. В табл.5 буквами «А, В и С» обозначены номера реальных урн в каждой из групп. Перестановка урны с номером А, В или С означает, что перемещаются все урны с этим номером во всех 10 группах. Число групп урн не изменяется, а просто изменяется порядок *размещения* групп шаров для данной комбинации. Перестановка групп урн с номерами I-X приведет к большему «перемешиванию» групп, чем в 1-м случае, но ни число групп, ни число размещений не изменится. Реально размещения шаров по урнам подчиняются только 2-м правилам: 1) в одной из N урн может находиться либо 0, либо 1, ..., либо M шаров; 2) сумма шаров в N урнах равна M. Для 2-х урн можно сказать безлично: в одной урне, в другой урне, но попробуйте сделать это для N урн. Поэтому мы «проговариваем» номера *мысленно*, что просто упрощает выполнение правил, не более.

Приведем еще два примера из работы [6], в которой дается **«ряд схем, внешне различных, но по существу эквивалентных схеме размещения r шаров по n ящикам, в том смысле, что соответствующие исходы отличаются лишь словесным описанием» [6,27]**.

***Пример* 2. «Игра в кости. *Возможному* исходу *эксперимента*, состоящему в бросании M[68] игральных костей, соответствует распределение M шаров по $N = 6$ ящикам. Если *бросают монеты*, то имеют дело с $N = 2$». *Пример* 3. «При стрельбе по N мишеням пули соответствуют шарам, а мишени – ящикам. [6,28].**

Пока ограничимся разговором об игре в кости.

А.1. При одновременном бросании 2-х игральных костей образуются 36 естественных комбинаций[69], которые приведены в табл.6. Они обозначены числами очков, отделенными запятой. А.2. Используем понятие пар в комбинаторике: «Из m элементов $a_1, ..., a_m$ и n элементов $b_1, ..., b_n$ можно образовать $m \cdot n$ пар (a_j, b_k), содержащих по одному элементу из каждой группы» [6,46]. Числа очков $j = 1, 2, ..., 6$ на одной и $k = 1, 2, ..., 6$ на другой кости – это элементы, из которых образуются пары j, k данные в табл.6. Не учитывая порядок чисел очков (т.е. элементов) в паре, получим 21 сочетание. Но число пар j, k при этом не изменяется: элементы – числа очков не зависят от *различимости* или *неразличимости* костей.

В. Можно исходить из «образа шаров и урн», тогда: 1. Таблицу 6 следует дополнить сверху и слева ячейками с номерами урн, а во всех ячейках

[68] Далее при цитировании работ будут использоваться принятые нами обозначения
[69] Напомним, что комбинации, данные в табл.6, образуются декартовым произведением элементарных событий

написать "ab" (или "aa" при *неразличимых* костях – «шарах»). Но и в этом случае сочетание букв"ab" (или "aa") в соответствующей ячейке будет означать, что при одновременном бросании 2-х костей могут появиться пары j, k с числами очков $j, k = 1, 2, ..., 6$ на гранях. 2. Можно также составить таблицу, подобную табл.1, в которой тоже будет 36 размещений. При *неразличимых* костях («шарах») получим только 21 размещение (табл.7), ибо сочетаний для одинаковых «шаров» (*костей*) не существует. Именно в этом случае число комбинаций соответствует утверждению: «Существует C^5_{r+5} *различимых* исходов бросания *неразличимых* игральных костей» [6,59]. В наших обозначениях $C^{N-1}_{N+M-1}(N = 6,\ M = r)$.

Использование понятия пар позволило: **1.** Определить связь событий (**п.А.1**) в теории вероятностей с парами и, по сути, подтвердить результаты (**п.А.2**), которые получены нами ранее для событий *совмещенного опыта* (**вывод W.13, стр.32 и замечания 13-14, стр.41**). **2.** Дать правильную интерпретацию (**п.В.1**) размещения комбинаций групп в табл.6, следующие из «образа шаров и урн».

Конечно же, это хорошо, что, исходя из комбинаторики, «неожиданно получена некоторая поддержка» развитой нами теории событий. Но «загвоздка» в одном моменте: *имеет ли какое-либо отношение представление комбинаций в виде табл. 6 к решаемой задаче*?

Очевидно, что между событиями и *размещениями,* приведенными в табл.1-5,7 необходимо провеститакую же «параллель» как между табл.6 и парами в комбинаторике. Однако *какие операции с событиями необходимо применить, чтобы получить эти размещения и как их интерпретировать*?

Ответы на вопросы «скрыты» в теории вероятностей, однако при решении задачи анализ с позиции теории событий до сих пор не проводился. Всем *размещениям допустимых комбинаций* (**в аксиоматической теории – это *элементарные* события**[70]) групп шаров просто *приписываются* *равные* вероятности, например [6]:

«В примере а) представляется *естественным предположение* о том, что все элементарные события равновероятны, т.е. что каждое из них имеет вероятность 1/27. Мы можем, отправляясь от этого определения, изучать его следствия» (стр.39).

Более подробное пояснение дается на стр.50: «До сих пор мы не говорили о вероятностях, связанных с выборками. Обычно мы будем *приписывать* всем им *равные* вероятности, и говорить о случайной выборке. ... Исполь-

[70] **К чему приводит определение элементарных событий в аксиоматической теории, разговор был достаточно долгим (стр.14-25)**

зование термина случайный выбор предполагает равновероятность всех исходов[71]. Подобным образом, когда мы говорим о случайной выборке объема r, прилагательное «случайная» означает, что все возможные выборки имеют одну и ту же вероятность, а именно N^{-M} при выборе с возвращением и $1 / A_N^M$ при выборе без возвращения[72].

Выше (**п.II.а**) показано, что для *неразличимых* шаров определяется **другое *естественное размещение* шаров по урнам**, поэтому в примере b) ***предположение*, что каждое из «элементарных событий» имеет вероятность 1/10, является таким же *естественным*.**

На основе размещения комбинаций *различимых* шаров определяется статистика Максвелла-Больцмана, а *неразличимых* – Бозе-Эйнштейна. Нет никакой «неожиданной модели» и никакой физики[73], только математика (**п.I.1**): *для неразличимых объектов комбинаций не существует.*

Ответ на вопрос, данный вначале, получен. «Попутно» получено некоторое подтверждение правильности разработанной *новой* исходной системы и следующей из нее теории событий, и дано пояснение определенных положений комбинаторики. Но появились другие вопросы. Продолжим разговор с краткого изложения отличия в постановках задачи.

В отличие от работы [6], в работе [1] полагается, что шар (частица) может находиться в одной из урн (ячеек) $N(N > M)$ с вероятностью $1 / N$. Однако зачем оно введено – непонятно. Дело в том, что *предположение* есть, а использования его при решении нет (по крайней мере, об этом ничего не говорится). Задача решается точно также как и в работе [6]. Но применяется классическая теория, поэтому об элементарных событиях не упоминается, а все *размещения комбинаций* просто *считаются* равновероятными.

Приписывать размещениям равные вероятности (**как и считать их равновероятными**), конечно можно, однако выясним, что реально означают эти вероятности.

В табл.5 были представлены *реальные размещения* 30 шаров в 30 урнах (10 групп по 3 урны в каждой). Группы урн *неразличимы* также как и урны. 1. При выборе наугад одной группы получим, что вероятность появления каждой из групп равна 1/10. Так как урны в группе тоже неразличимы, то при выборе наугад одной из 3-х урн, вероятность того, что в урне окажутся шары, равна 1/3, 2/3 и 1 в 1-й, 2-й и 3-й группах. Соответственно, вероятности того, что мы выберем урну с 3-мя шарами, или с 2-мя и 1-м шаром,

---

[71] О выборе наугад сказано в замечании 10 (стр.33)

[72] Выборка без возвращения обсуждалась нами в приложении III (стр.50)

[73] Физика – в различимости или неразличимости частиц, а это определяется их свойствами и взаимодействием между ними

или по одному шару в группе равны 3/30, 12/30 и 3/30. Вероятность случайного отбора пустой урны – 12/30. Отсюда следует: 1. Равновероятны группы размещений, в которых содержится: 3 шара, либо 2 шара в одной и 1 в другой, либо по 1-му шару в каждой из 3-х урн. Отсюда следует: 1. Вероятность $1\,/\,C^M_{N+M-1}$ (или N^{-M}при различимых шарах) относится к выбору наугад одного из C^M_{N+M-1} (или N^M) размещений (*виртуальных* групп урн). 2. Вероятность $1/N$ к выбору наугад одной из N урн в отобранной группе. Это косвенно следует также из решения задачи определения вероятности того, что ровно n урн останутся пустыми [6,120]: вероятность появления пустой урны полагается равной 1/N. 4. Запись размещения комбинаций групп шаров по урнам в виде $|3|\ \ |\ \ |$, $|2|1|\ \ |$ и $|1|1|1|$ можно применять для определения вероятности появления шаров в этих комбинациях.

Этот простой анализ показывает:

— **Ни вероятность $1/C^M_{N+M-1}$ (или $1/N^M$), ни вероятность $1/N$ не имеют отношения к вероятностям размещения групп шаров по урнам.**

— ***Размещения* с *разными* комбинациями групп шаров (в общем случае) не *равновероятны.***

При анализе мы связали вероятности с двумя событиями: **1) «появление *одной виртуальной* группы» из числа C^M_{N+M-1} (или N^M) групп *виртуальных* урн; 2) «появление шаров» в *одной виртуальной* группе урн**. Нас же, в первую очередь, интересует именно появления шаров в урнах, а не пустые урны. Дополнительно проведем анализ примеров 2 и 3, в которых вероятности связаны с *элементарными* событиями (**здесь они соответствуют и нашему определению 1 (стр.27)**) – **«появления одного *виртуального* шара в одной из *виртуальных* урн»**. Пример 2 приводится практически во всех учебниках, а пример 3 – реже.

При бросании игральной кости, вероятность появления грани с данным числом очков $j = 1, 2, ..., 6$ (*элементарного* события a_j) равна 1/6. Пары $j, kj, k = 1, 2, ..., 6$ в комбинаторике соответствуют *произведениям элементарных* событий $A_{j,k} = a_j \cdot b_k$ при *совмещении* 2-х *опытов* в теории вероятностей (выводы W.28-W.29, стр.29). Вероятность появления одного *произведения* равна $P(A_{j,k}) = (1\,/\,6)^2$, т.е. *равновероятность* размещения пар (табл.6) следует из *равновероятности* появления граней. Никакого *предположения* вводить не требуется. Напомним, что в общем случае *элементарные* события *опыта* не *равновероятны*, следовательно, при *совмещении опытов* их *произведения* тоже не будут *равновероятными.*

При стрельбе, мишень можно представить как 2 урны: одна соответствует попаданию (событие a_1 и $P(a_1) = p_1$), а другая - промаху (событие a_2 и $P(a_2) = q_1 = 1 - p_1$) при выстреле (пуле).

А1. Если при 2-м выстреле «шар» (пуля) другой[74]**, то имеем события:** b_1, $P(b_1) = p_2$,b_2,$P(b_2) = q_2$. **В этом случае имеем 4-е размещения.**

А2. Если при 1-м и 2-м выстрелах «шары» одинаковые, то получим 3-и размещения.

Из решения, приводимого в учебниках, следует: В1. Вероятность того, что оба «шара» окажутся в одной урне: $p_1 \cdot p_2$ **или** $q_1 \cdot q_2$ **в случае (А1);** p_1^2 **или** q_1^2 **в случае (А2). В2. Вероятность того, что 1-й «шар» будет в одной урне, а 2-й – в другой урне (или наоборот):** p_1 **и** q_2 **(или** p_2 **и** q_1**) в случае (А1);** p_1 **и** q_1 **в случае (А2).**

Решение, которого нет в учебниках: С1. Вероятность того, что или 1-й или 2-й «шар» окажется в одной урне: $(p_1 + p_2)/2$ **или** $(q_1 + q_2)/2$ **в случае (А1);** p_1 **или** q_1 **в случае (А2). С2. Вероятность того, что 1-й «шар» будет в одной урне, а 2-й – в другой урне (или наоборот) как в 1-м решении равны:** p_1 **и** q_2 **(или** p_2 **и** q_1**) в 1-м случае;** p_1 **и** q_1 **во 2-м случае.**

Таким образом, разные вероятности имеют не только *размещения* с разными *комбинациями* групп $b, m(m = 0, 1, 2, ..., M)$ **шаров, но и разные вероятности появление как одного шара, так и данной группы шаров в урне. Можно представить мишень с числом** N **урн (одна – для «промахов»), можно взять** M **разных или одинаковых «пуль» и т.п. Вывод от этого не изменится. Очевидно, что он справедлив при представлении бросания 2-х *одинаковых* игральных костей в виде табл.7.**

Отметим, что 1-е решение в задаче «о стрельбе» следует из *совмещения опытов*, а 2-е – из *объединения опытов*[75]. Дополнительный анализ приводит нас к более общим выводам:

W.1. Ни вероятность $1/C_{N+M-1}^M$ **(или** $1/N^M$**), ни вероятность** $1/N$ **не имеют отношения не только к вероятностям размещения групп шаров по урнам, но и к вероятностям нахождения 1-го, или 2-х, . . . , или** M **шаров в одной урне.**

W.2. В общем случае не *равновероятны* не только *размещения* с *разными* комбинациями групп шаров, но и группы шаров в данной комбинации.

W.3. По существу решается задача о вероятности появления размещений, определяемых данной комбинацией групп шаров, при выборе наугад одного из всех *возможных* размещений (*виртуальных* урн) для данных чисел M **шаров и** N **урн.**

---

[74] Под «разными пулями» понимается изменение условий стрельбы при каждом выстреле, которые приводят к изменению вероятности попадания в мишень (разные стрелки, оружие, мишени, дальность до мишени и т.п.). «Одинаковые пули» – все выстрелы производятся при неизменных условиях (один стрелок, одно оружие, одна мишень и т.д.)

[75] Напомним, что существующая теория определяет *совмещение опытов* как последовательность «независимых испытаний», понятия *объединения опытов* в теории просто не существует

Таким образом, результаты анализа противоречат «декларируемой» равновероятности *размещений* при решении задачи. Разрешить противоречия, исходя из теории событий, применяемой в настоящее время, не представляется возможным. На ее основе можно только утверждать, что размещения шаров по урнам будут *равновероятными только в одном частном случае* при выполнении следующих *предположений*:

1. Все M шаров *неразличимы*. 2. В одной урне может находиться либо один, либо ни одного шара. 3. Очевидно, что в этом случае о вероятностях размещений можно говорить только при условии $N > M$ 4. Каждый шар может находиться в одной из N урн с одной и той же вероятностью $1 / N$.

Эти *предположения* составляю основу статистики Ферми-Дирака. Физики, конечно же, с этим выводом не согласятся. Мы тоже, но не потому, что в физике применяется другие статистики. Причины чисто математические. Начнем с «размещения шаров по урнам»:

III.1. Размещения *допустимых* комбинаций групп шаров по урнам можно составить для любых значений чисел $M \geq 2$ шаров и $N \geq 2$ урн. III.2. Шары могут состоять из числа $k = 1, 2, ..., K$ *различимых* групп: в каждой группе шары *неразличимы* между собой. При значениях $K = M$ или $K = 1$ получим крайние варианты: все шары *различимы* или *неразличимы*. III.3. Можно полагать, что в одной урне может находиться число $1 \leq m_p \leq M$ шаров. Значения $m_p = M$ и $m_p = 1$ определяют крайние варианты. III.4. С одной стороны число m_p шаров в урне зависит от их размера: если в одну кубическую урну с размером ребра a помещается один шар диаметра $d = a$, то при диаметре $d \leq a / 2$ – не менее 16-и шаров. С другой стороны, размеры урны зависят от размеров шаров.

Условия (III) определяют *число* комбинаций *групп* шаров, которые *допустимы* для данного числа урн и *число возможных размещений*[76] групп шаров по урнам для каждой *допустимой* комбинации. Теперь о событиях и их вероятностях. Из анализа, данного выше, следует:

IV.1. *Элементным* событием является: появление *одного* из M шаров в *одной* из N урн[77]. IV.2. Вероятности *элементарных* событий могут быть, разными как для *неразличимых*, так и для *различимых* шаров. IV.3. Так как размещаются все шары, то: появление любого из M шаров в любой из N урн есть *достоверное* событие; если шары разделены на число

[76] **При анализе принятых значений вероятностей при имеющемся решении задачи и примеров 1 и 2 мы связали их с вероятностями событий. Поэтому здесь и далее будем говорить о возможных размещениях. Но будем говорить группы шаров и допустимые комбинации групп для того, чтобы подчеркивать, что комбинаторика не связана с теорией вероятностей**

[77] **Каждому элементарному событию соответствует один возможный исход**

$k = 1, 2, ..., K$ **групп, то появление любого из шаров, входящих в группу с номером** $k = 1, 2, ..., K$**, в любой из** N **урн тоже достоверное событие. IV.4. Из** M **шаров составляются группы** b, m **по числу** $m = 0, 1, 2, ..., M$ **шаров в группе. Значение** $b, 0$ **соответствует пустой урне, вероятность появления которой в *возможной* комбинации равна** $1 / N$**. Значения** $b, 1$ **соответствуют *элементарным* событиям, вероятности которых определяются вероятностями появления одного шара в одной из урн. При значениях** $2 \leq m \leq M$ **группы** b, m **являются *сложными* событиями. Т.е. вероятность их появления следует вычислять исходя из вероятностей *элементарных* событий. IV.5. Вычисление вероятностей *сложных* событий можно производить по варианту B1 или C1, которые применены при анализе стрельбы по мишени в 1-ом и 2-ом решениях соответственно.**

Из групп $b, m (m = 0, 1, 2, ..., M)$ составляются комбинации, которые *допустимы* для *данного числа* N урн. Для каждой *допустимой* комбинации составляются *возможные размещения* групп по урнам. Условия (IV) определяют значения вероятностей *допустимых* комбинаций и вероятность всех *возможных* размещений для каждой *допустимой* комбинации.

На этом анализ *математической* задачи можно считать завершенным. С чисто *формальной математической* позиции – *вероятностной* постановки задачи – условия (III) и (IV) можно применять в разных комбинациях и получить много вариантов решения задачи о «размещении шаров по урнам». Теория вероятностей это не запрещает.

Применяя комбинаторику, с учетом условий (III), можно построить размещения шаров по урнам (**для крайних вариантов условий (III.2-3) они давно построены**). Мы обратили внимание только на моменты, которых нет в работах.

Новая исходная система теории вероятностей и следующая из нее *теория событий*, о чем шел разговор в основной части работы, позволяют получить решение при любом из условий (IV). Вряд ли это можно сделать на базе существующей системы. Даже пояснить, как получены существующие решения рассматриваемой задачи весьма сложно.

Но исходя только из одной *математической* модели и «не обращая внимания» на некоторые ее связи с другими (**математическими, физическими и др.**) моделями, часто можно доказать положения, которых просто *не существует ни в математике, ни в физике*[78]. Поэтому рассмотрим, как соотносится математика (**«то бишь» – условия (III) и (IV)**) и физика. Будем говорить о газах, которые вокруг нас: в воздухе, в при-

[78] **Пример подобного рода дан в приложении VI (стр.76)**

родном газе и т.п. В определенной области давлений и температур к ним применима модель, созданная Д. Максвеллом на основе *классической* механики.

V. В некотором замкнутом объеме D находится постоянное число M атомов (или/и молекул) одного или разных газов, не вступающих в химические реакции. Рассматривается равновесное состояние. Частицы полагаются «шариками», взаимодействие между которыми и границами объема является упругим (т.е. без потери энергии). Эта модель применяется при выводе уравнения состояния идеального газа.

В работах, в том числе по статистической механике, часто утверждается, что размерами шаров[79] и их взаимодействием друг с другом пренебрегают.

VI. Это касается только размеров шаров, но никак не взаимодействия между ними. Реальное взаимодействие заменяется моделью взаимодействия, следующей из классической механики: соударение пар упругих шаров [24,387]. Модель характеризуется тем, что время соударения ограниченно и, как следствие, расстояние s_V, на котором происходит взаимодействие. Если расстояние s между шарами становится больше него $s > s_V$, то далее шары будут в «свободном полете» - сила упругости не действует – до столкновения со следующим шаром. В равновесном состоянии «свободный полет» шара характеризуется «средним расстоянием» s_C между шарами, которое называется средней длинной свободного пробега. Соотношение между расстояниями s_C и s_V определяет то, насколько точно эта модель взаимодействия отражает реальное взаимодействие между частицами и ее применимость. Считается, что модель применима при расстояниях s_C между частицами много больше размера частиц (более точно: s_C должно значительно превышать s_V). В этом случае можно пренебречь расстоянием s_V при расчетах, но это не означает, что взаимодействия нет.Если расстояния s_C и s_V сравнимы (например, газ при высоком давлении и/или температуре), то модель потребуется изменить: – учитывать реальное взаимодействие частиц (конечно же, если оно известно).

Построение модели Максвелл начинает с *предположений* [24,405]:

1. Все направления движения в газе *равновероятны*.

2. Ни одно значение скорости не является *привилегированным* или запрещенным[80].

3. Каждый газ, предоставленный самому себе, приходит, в конце концов, в *стационарное состояние*, в котором устанавливается *определенное*

---

[79]Учитывая рассматриваемую модель, далее мы будем больше говорить о «шарах», чем о частицах

[80] Полагается, что ее значения v изменяются на интервале $0 \leq v < \infty$. Но значение v ограничено также сверху некоторым максимальным значением $v_{\max}$, т.е. $0 \leq v \leq v_{\max}$

распределение скоростей **между молекулами, постоянное во времени.**

Рассмотрим третье, которое предполагает установление *динамического равновесия* M шаров в объеме D при данной температуре.

VII. Хаотичность движения и столкновения шаров определяет: 1. *Одновременность движение всех* шаров в объеме. 2. *Различие скоростей* шаров *в данный момент времени*, как *во всем* объеме D, так и в *любой его конечной части*. 3. С*лучайное «блуждание»* («дрейф») *каждого* шара по объему D. Именно «дрейф» определяет нахождение *любого* из шаров в *любой части* объема *независимо* от того, *различимы* они или *нет*. Порядок «посещения» частей объема шаром не менее хаотичен, чем движение шаров. 4. Средняя скорость «дрейфа» шаров по объему D существенно меньше средней скорости шаров в объеме (она, по крайней мере, меньше скорости диффузии).

Из анализа, с учетом *динамического равновесия* шаров в объеме, следует:

W.4. Каждый шар, в момент времени t, имеет одно значение скорости v_j^t, из множества скоростей на интервале $0 < v_j^t < v_{\max}$ (сноска 79, стр.72).

W.5. В любой момент времени t, шары распределяются практически равномерно по объему D.

Далее Максвелл ставит задачу [24,405]: **1) «определить *среднее число* частиц, *скорости* которых лежат *между данными пределами*, после большого числа столкновений между большим числом одинаковых[81] частиц».**

VIII. Из постановки задачи следует: нас интересует событие, заключающееся в том, что в данный момент времени t в некоторой (абсолютно неважно какой) части объема $d_N = D/N$ $(N > 1)$ появится шар с конкретным значением скорости v_j^t, $0 < v_1^t < v_2^t < \dots < v_M^t < v_{\max}$. Если по сути, то виртуальные «урны» – это пределы[82], в которых «лежит скорость частицы» в данный момент времени. Мы не знаем, в какой части d_N объема и какой шар примет значение скорости v_j^t, поэтому не связываем шар с какими-либо координатами. При числе $N > M$ имеем $N-M$ пустых урн. «*Виртуальные* урны» $d_n (n = 1, 2, \dots, N)$ полагаются одинаковыми.

Большое число шаров в объеме и установившееся во времени *распределении скоростей* между ними, позволяет ввести *предположение*: В одной из N урн (т.е. в одном из интервалов $v_{\max}/M$, сноска 82) может находиться ни одного шара; либо 1 шар, либо 2 шара, ..., либо M «шаров» со скоростью v_j^t $(j = 1, 2, \dots, M)$.

[81]Мы не знаем, когда и почему сложилось мнение, что статистика Максвелла-Больцмана основана на *различимости* частиц. Из данного перевода следует: Максвелл считал, что *различимы скорости* частиц, но сами частицы *неразличимы*,

[82]Можно разбить отрезок $0 \le v \le v_{\max}$ на M равных частей и считать, что скорость v_j^t принадлежит одному из интервалов $v_{\max}/M$

Этот анализ позволяет привести физическую задачу, поставленную Максвеллом, к вероятностной задаче теории событий[83]:

W.6. *Элементарным* событием является появление в одной из N урн шара с конкретным значением скорости $v_j^t (j = 1, 2, ..., M)$,

W.7. Будем *полагать*, что в одной из N урн может находиться: *ни одного* шара; *либо один* шар, *либо два* шара, . . . , *либо* M «шаров» *со скоростью* $v_j^t (j = 1, 2, ..., M)$.

W.8. В данном *испытании*, *элементарные* события происходят (выводы 2, 3) *одновременно.* Следовательно, два и более шара в одной из N урн также появляются *одновременно.*

W.9. Для вычисления вероятностей *сложных* событий следует применять вариант (B1, п.II.5, стр.52).

Из анализа поставленной Максвеллом задачи следует: **1. «Шар» – это скорость частицы в данный момент времени. 2. Скорости частиц в данный момент времени разные.** Т.е. «шары» – *элементарные* события – *различимы.* Отсюда очевидно: *при размещении допустимых комбинаций групп шаров, следует исходить из различимости шаров* (**п. II.b**).

Математические условия (II.5) определяют два равноправных варианта вычисления сложных событий (появление 2-х и более частиц в одной ячейке), которые дают (независимо от того, различимы или неразличимы частицы) уж очень разные значения вероятностей. *Физика определила только один вариант решения задачи.*

***Одновременное* появление *элементарных* событий испытания соответствует *сложному* опыту, образованному *совмещением опытов* (определение 5, стр.30). В этом случае вероятность *произведения* событий равна *произведению* их вероятностей (вывод W.29, стр.39, вывод W.34, стр.44).**

Когда говорится о *различимых* частицах, то подразумеваются *различимость* их свойств. В рамках рассматриваемой модели газов это, в первую очередь, *различие масс* молекул (**или/и атомов**) *разных* газов.

IX.1. Пусть все шары одной массы $m_j = m_1 (j = 2, 3, ..., M)$ (т.е. один газ – частицы *неразличимы*). Равенство масс шаров определяет равенство средних скоростей шаров и средних скоростей «дрейфа» частиц. Из этого следует: *предположение*, что каждый из M шаров может находиться с одной и той же вероятностью в *одной* из *одинаковых частей объема* D является приемлемым.

[83] **Для перехода к теории случайных величин, необходимо сначала определиться с тем, что же все-таки понимается под случайной величиной**

IX.2. Пусть масса одного из шаров равна $m_2 \neq m_1$. Из отличия массы следует отличие его средней скорости от средних скоростей остальных шаров и соответственно отличие средней скорости его «дрейфа» по объему. Следовательно, вероятность его нахождения в *одной* из *одинаковых частей объема D* будет *отличаться* от остальных шаров. Если *массы всех* шаров *разные*, то *разными* будут и вероятности их нахождения в *одной* из *одинаковых частей объема.*

Исходя из закона сохранения импульса и условий (IV.3) определяется *вероятность* появления одного шара в одной из одинаковых частей объема каждой из *различимых* групп шаров . *Математика допускает разную вероятность, как для различимых, так и для неразличимых шаров*[84]. Из физики следует:

W.10. Для равновесного состояния справедливо *предположение*: при одинаковой массе каждый из M шаров может может находиться в одной из N урн с одной и той же вероятностью $1/N$.

W.11. Отличие *масс* шаров учитывается *различной вероятностью* появления *данной скорости* шаров. Вероятности *элементарных* событий – *скорости* шаров – будут *разными* только для шаров *различной массы.*

Исходя из закона сохранения импульса и условий (II.3) определяется вероятность появления одного шара в одной из *одинаковых частей объема D* для каждой из *различимых* групп шаров.

В физике *предположения* о *различимости* шаров используются (**при любом числе частиц**) в 2-х вариантах: все шары *различимы,* либо *неразличимы.*

Математика этого не запрещает. Но число физических частиц ограниченно, а если говорить о газах в рассматриваемых условиях, то сильно ограниченно. С этой точки зрения правильнее говорить о *различимых* группах частиц (условие (I.2)).

Казалось бы, что второе крайнее *предположение* более естественно. С точки зрения физики с этим можно согласиться: оно удобно при определенных теоретических исследованиях. Вопрос только в том, как это *предположение* осуществить на практике.

Современная технология не позволяет в одном объеме получить чистый газ, например, азот: обязательно будут присутствовать другие частицы, по крайней мере, молекулы других газов. Если в 4-5 тысячах молекул одного газа имеется 1-20 молекул других газов, то они не окажут ощутимое влияние на его физические свойства. Однако нас интересует вероятность

[84] **Применяя 2-й тип объединения опытов (определение 6, стр.34)**

появления определенной *допустимой* комбинации частиц, т.е. математика. Наличие же разных частиц приводит к существенному увеличению числа *возможных размещений* по ячейкам. Число размещений для разных *допустимых* комбинаций групп частиц будет увеличиваться по-разному. А это окажет влияние на вероятность появления каждой *допустимой* комбинаций. Мы опять приходим к тому, что правильнее говорить о *различимых* группах частиц.

Но отличие только масс определяет не все *возможные* размещения шаров по урнам. На это оказывают влияние их размеры.

При конечных размерах шаров: 1. Предположение $m_p{=}M$ (все шары могут находиться в одной ячейке) приводит к ограничению минимальных размеров урны. 2. Предположение $m_p{=}1$ может быть принято только для «шаров» одного или близких размеров. 3. Разные размеры частиц (например, молекул водорода H_2 и бутана C_4H_{10}) приводит к необходимости учета условия (III.4). Применение промежуточных вариантов $1 \le m_p \le M$ условий (III.3) при разных размерах «шаров» приведет к значительному усложнению построения *допустимых* комбинаций групп.

Необходимость *учета размеров* «шаров» определяется физикой, а не математикой: **при *рассматриваемой постановке* задачи *размеры* шаров *не имеют значения* – они *не влияют на скорость*.**

Итак, на основе анализа показано, что физическая суть задачи вносит существенные корректировки в решение вероятностной задачи, *Основная цель*, о которой говорилось вначале, выполнена. На этом можно было бы завершить анализ, но вот «незадача»: получено, фактически, единственное решение задачи. Дело в том, что мы рассмотрели задачу только в постановке Максвелла, но она не единственная.

Не затрагивая модель Максвелла (**п. V**), можно поставить другую задачу: **2) определить *среднее число* частиц, *находящихся в некоторой* (*абсолютно неважно какой*) *части* $d_N{=}D/N$ объема D.**

Основное отличие *этой постановки* задачи заключается в том, что ***элементарным* событием является появление *одного* из M шаров в *одной* из N частей $d_N{=}D/N$ объема D.**

Другое понимание *элементарного* события приводит к значительному изменению решения вероятностной задачи. Именно при этой постановке задачи влияние *различимости* или *неразличимости* шаров скажется в полной мере на их размещение по урнам.

На основе разработанной новой исходной системы можно не только получить решения для 2-х постановок задачи, но также объяснить, как они получаются и что означают полученные решения. Разговор о решении этой задачи и анализе некоторых результатов пойдет в другой работе. Отметим только то, что решения будут существенно отличаться, а из анализа решений следуют неожиданные выводы.

Приложение VI. Геометрические представления *классов* (и их *видов*) *испытания.*

Геометрическое представление *видов испытания*, по сути, является «прелюдией» перехода от событий к случайным величинам, поэтому оно рассмотрено в конце работы.

В работах по теории вероятностей оно применяется редко. В основном: – диаграммы Эйлера-Венна для иллюстрации алгебры событий и изображения функций распределения. Но часто и этого нет. Какие тому причины – сказать сложно.

Геометрическое представление (**в том числе, в виде таблиц**) наглядно и чрезвычайно полезно. Представление *видов испытаний* в виде таблиц позволило легко показать отличие их свойств и *правильно* построить *вероятностные* модели. Особенно важно применение геометрического представления для *правильного* построения *математических* моделей случайных величин. Оно позволяет избежать возможных ошибок при выводе тех положений теории, которые, вообще говоря, связаны с геометрией.

Геометрическое представление *видов испытаний* дано на рис.1-4. Точки на сплошных линиях и штриховых стрелках соответствуют *элементарным* или *сложным* событиям. Точки на линиях можно расставлять на произвольных расстояниях друг от друга.

Одномерный опыт представляется в виде точек, расположенных на прямой, ломанной или кривой линии (**рис.1**). Отметим, что в работах иногда «встречается» его представление только на прямой линии с равномерным расположением точек, но крайне редко.

Результат *объединения* 2-х *опытов* – *одномерный объединенный опыт.* Поэтому представление *объединения* 2-х *опытов* подобно (**рис.2**) представлению *одномерного опыта.* Геометрические представления (**как и представления в виде таблиц**) *двумерного опыта* (**рис.3**) и *совмещенного опыта* (**рис.4**) подобны.

***Элементарные* события, как исходные, выделены прямоугольником с утолщенными линиями, а *сложные* события – прямоугольником с тонкими**

линиями. Вместо точек показаны события, которые определяют двухмерность. Точки на отрезках прямых относятся к событиям, показанных слева и снизу от прямоугольников, определяющих двухмерность.

Итак, на отрезке линии поставлены точки, которые соответствуют *элементарным* событиям. Точки, как и события, – *недействительные* величины.

В теории множеств: точки не отличаются друг от друга, т.е. множество имеет только один элемент (п.2 приложения IV, стр.58), поэтому обозначим точки последовательностью чисел «j»($j = 1, 2, ..., N$) для *одномерных* или парами чисел «j, k»($j = 1, 2, ..., N$; $k = 1, 2, ...M$) для двумерных *испытаний*. В теории множеств числа – это элементы множества, такие же, как точки или события, поэтому они в кавычках. Так как точки соответствуют *элементарным* событиям, то можно записать $"j" = a_j$; $"j, k" = a_{j,k}$ или $"j, k" = A_{j,k}$. Эти равенства определяют однозначную связь между точками и событиями. Взаимная однозначность требует, чтобы каждому элементу первого множества соответствовал ровно один элемент второго и наоборот.

Введем систему *действительных числовых* координат (**штриховые стрелки на рис.1-4**). Точки на координатах соответствуют точкам на линиях. Теперь точку можно характеризовать не каким-то безличным элементом из теории множеств, а действительными числами – значениями координат. Они характеризуют положение точки в пространстве и позволяют отличать одну точку от другой. Очень полезно: мы имеем гораздо больше информации о точке. Но сама точка как была, так и осталась *неопределяемым объектом* геометрии.

<u>Вопрос 1</u>: *Можно ли записать равенства $x_7 = a_7$ или $\{x_7, y_7\} = a_7$?*

Обратимся к некоторым пояснениям понятия случайной величины.

1. «*Функция, определенная на пространстве элементарных событий, называется случайной величиной*» [6,226]. 2. «Случайная величина X есть функция, определенная на данном пространстве элементарных событий, т.е. X задает правило, по которому каждому элементарному событию соответствует некоторое действительное число. Распределение вероятностей случайной величины есть функция, определенная в (1.1)» [6, 231]. 3. Функции (1.1) вводится раньше: «Пусть X – случайная величина, а $x_1, x_2, ...$ – ее значения; в дальнейшем x_j, как правило, будут целыми числами. Совокупность всех элементарных событий, на которых X принимает фиксированное значение x_j, образует событие $X = x_j$; его вероятность обозначается $P(X = x_j)$. Функция $P(X = x_j) = f(x_j)(j = 1, 2, ...)$ (1.1) называется распределением (вероятностей) случайной величины X» [6,227].

Из этих пояснений появляются другие вопросы.

<u>Вопрос 2</u>:*Определяют ли равенства* $"j - a_j, "j,k - a_{j,k}$ *или* $"j,k\ = A_{j,k}$ какие-либо функции?

<u>Вопрос 3</u>: *Какое используется правило* (**цитата 2**), *чтобы элементарному событию – недействительной величине – присвоить значение действительного числа*?

<u>Вопрос 4</u>: *Что означает равенство* $X = x_j$*: элементарные или сложные события* (**цитат 2-3**)?

<u>Вопрос 5</u>: *Какой вероятности соответствует запись* $P(X = x_j)$*: появлению элементарного события или числа*?

<u>Вопрос 6</u>:*Как правильно записать функцию* $P(X = x_j) = f(x_j)$?

При нашем определении *элементарного* события (**стр.16**), его вероятность равна $p_j = P(a_j) = m_j \,/\, M$ (**вывод W.8, стр.21**). При расположении точек, соответствующим *элементарным* событиям на прямой линии (**рис.1 сверху**), математическое ожидание равно $m = \sum_j^N p_j\ \cdot\ x_j$, где x_j – координата точки. Его также называют: **«средним значением [1,158-160; 14,87; 15,105], характеристикой положения или центром группирования [11,79-82; 12,85-86]»**.

<u>Вопрос 7</u>: *Какое из названий наиболее полно отражает формулу для его вычисления*?

<u>Вопрос8</u>: *Как вычислить математическое ожидание при представлении испытаний на рис.1* (внизу) *и на рис.2-4*?

«Для подсказки, а не забавы ради» – маленький опус.

Положим, что в точках с координатами x_j, y_k $(j = 1, 2, ..., M;\ k = 1, 2, ..., N)$ **расположены (сосредоточенные) массы** $m_{j,k}$**. Масса системы** $M = \sum_1^M \sum_1^N m_{j,k}$ $\{1\}$**, а приведенная к осям** x **и** y – $m_j^x = \sum_{k=1}^N m_{j,k}$,$m_k^y = \sum_{j=1}^M m_{j,k}$**. Координаты центров тяжести систем масс на осях** x **и** y **равны** $x_c = \sum_{j=1}^M m_j^x\ \cdot\ x_j \,/\, M$, $y_c = \sum_{k=1}^N m_k^y \cdot y_k \,/\, M$ $\{2\}$**. Умножим сумму** $\{1\}$ **на сумму координат** $x_j + y_k$**, получим** $\sum_1^M \sum_1^N m_{j,k} \cdot (x_j + y_k) = \sum_1^M \sum_1^N m_{j,k} \cdot x_j + \sum_1^M \sum_1^N m_{j,k} \cdot y_k = \sum_{j=1}^M m_j^z \cdot x_j + \sum_{k=1}^N m_k^y\ \cdot\ y_k \{3\}$**. Разделим** $\{3\}$ **на массу** M **и, учитывая** $\{2\}$**, получим** $\sum_{j=1}^M m_j^z\ \cdot\ x_j \,/\, M + \sum_{k=1}^N m_k^y\ \cdot\ y_k \,/\, M = x_c + y_c$ $\{4\}$**.**

Таким образом, «доказана теорема»: координата центра тяжести 2-х систем масс равна сумме координат центров тяжести этих систем. Можно распространить на любое число систем.

Отметим, что именно запись в виде $\{3\}$ в сочетании с формулами $\{2\}$ используется для «доказательства теоремы о сумме математических ожиданий» (т.е. «равенства» {4}) в теории вероятностей. Подобным же образом «доказывается теорема о произведении математических ожиданий», так называемых «независимых» случайных величин.

«Доказана замечательная теорема»: не надо думать ни о чем – «сложил и есть результат». Только механики назовут автора либо жуликом, либо глупцом, а вот профессионалы по вероятности глубокомысленно скажут: *вероятность – это не механика*! Однако правы все же механики: разберемся почему.

Схема Ферми-Декарта превращает точки на плоскости в пары чисел. Кривые – в совокупность таких пар, объединенных уравнениями. *Удобно*? Очень: свойства кривых можно исследовать, используя решения этих уравнений. Это область аналитической геометрии.

Однако это вовсе не означает, что кривые* (поверхности, геометрические фигуры) *на плоскости* (или в пространстве) *стали одномерными: какими они были, такими и остались.

Определив значения x_c и y_c, надо остановиться: мы уже определи координаты центра тяжести системы материальных точек на плоскости, неважно как они расположены: на кривой, или разбросаны по ограниченной части плоскости.

Если же мы говорим о системах, то следует учитывать: массы каждой системы, сумму масс всех систем и их взаимное расположение. Механики не забывали и не забывают, что тело имеет пространственные характеристики, а запись в виде тройных (двойных, когда тело можно считать плоским и т.п.) сумм никак на это не влияет: поэтому «абсурдных теорем» в механике нет/

Напомним, что вероятность *элементарного* события – это отношение $p_j = m_j \,/\, M$ или $p_{j,k} = m_{j,k} \,/\, M$, где m_j (или $m_{j,k}$) и M – возможные исходы *элементарных* событий и *опыта* соответственно (вывод W.8, стр.21). *Чем не «массы»*? И учитывать их надо точно также как массы.

Мы отметим только то, что *произведения* математических ожиданий, как и *центров* тяжести не существует. О математических ожиданиях и других *числовых* характеристиках распределений можно почитать в работе [9, 64-81]. Она опубликована в интернете (**издательство «Восток – Запад», Вена, Австрия**) на сайтах **books.google.ca** и **play.google.com**. Там Читатель найдет много «неожиданностей», связанных с теорией случайных величин, существующей в настоящее время.

Список литературы

1. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с

2. Л.Е Майстров. Теория вероятностей. Исторический очерк. – ?.: Наука, 1967. – 321с

3. О.Б. Шейнин. Теория вероятностей до П. Л. Чебышёва // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. – № 23. – с. 284-306

4. Я. Бернулли. О законе больших чисел. – ?.: Наука, 1986. – 176с

5. Википедия: История теории вероятностей.

6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с 7. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с

8. А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. – Изд.2-е – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 120с

9. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. East-West Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с

10. С.Н. Берштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.–Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с

11. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Изд. 3-е - М. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. -– 511с

12. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей.- Изд. 7-е – М. Издательский центр «Академия», 2003. -– 576с

13. А.А. Марков. Исчисление вероятностей. -– Изд.4-е -– М.–Л.: -– Госиздат, -– 1924. -– 589с

14. В.И. Гливенко. Курс теории вероятностей. – М.–Л. Государственное объединенное научно-техническое издательство, 1939г. – 220с

15. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с

16. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. Наука, 1980г. – 976с

17. В.В. Ласуков. Случайная математика: учебное пособие. – Томск. Изд-во Томского политехнического университета 2011. – 143с

18. Энциклопедический словарь. Гл. ред. Б.А. Введенский, – Т.1. – М. Советская энциклопедия, 1963. – 656с

19. Энциклопедический словарь. Гл. ред. Б.А. Введенский, - Т.2. – М. Советская энциклопедия, 1964. – 736с

20. С. Н. Ожегов, Н.Ю. Шведова. Толковый словарь русского языка. – Изд.4-е, доп. – М. «Азбуковник», 1997. – 944с

21. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей: о противоречии понятий экспериментам, создание непротиворечивой исходной системы.

22. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 – Изд. 7-е, стереотипное. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 800с

23. Р. Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. – Изд. 4-е. – Одесса: Mathesis, 1923. – 44с

24. М. А. Елъяшевич, Т. С. Протъко. Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов. – Успехи физических наук. т.135, вып.3. – 1981. стр.381-423

25. С.А. Ануфриенко. Введение в теорию множеств и в комбинаторику, Учебное пособие. – Екатеринбург. УрГУ, 1998. – 62с

26. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. – 4-е изд., доп. –М.: МЦНМО, 2012. – 112с