«*То все ошибки, все накладки*
И заблуждения веков»

УДК 519.211; ББК 22.171

Теория вероятностей: «*само совершенство*» *или его видимость*?

Часть I: критика исходных понятий теории событий; создание новой исходной системы.

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

18 ноября 2018 г.

Название статьи *нетрадиционно и несколько вызывающе*, но *именно оно* отражает ее *первую цель*, – *критический анализ понятий* теории, которые устоялись, используются три столетия, повторяются в многочисленной литературе и *воспринимаются как нечто неизменно данное.* Т.е. «посеять» сомнения там, где никаких сомнений не возникает. По крайней мере, в многочисленных работах о сомнениях ничего не говорится.

***Главная цель работы* – показать, *какая есть и какой должна быть теория вероятностей случайных* явлений, которые называют *массовыми*[1].**

Проведенные исследования показали: *для построения математической теории, достаточно классической формулы вычисления вероятностей событий и 2-х аксиом* – 1) *равновероятности возможных исходов испытания* (стр.29); 2) *существования математической вероятности элементарного события* (стр.53).

Не покидает надежда, что найдутся Читатели, которые прочтут статью хотя бы просто из любознательности. А самым ценным будет Ваше мнение, критические замечания и обсуждение результатов работы.

Содержание.

[1]Т.е. теорию, направленную на изучение случайных событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз при неизменных условиях проведения опыта. обладают статистической устойчивостью и в отношении которых имеет смысл не только утверждение об их случайности, но и возможна объективная оценка доли случаев их появления. Подробнее об этом можно почитать в [1,16]

Приложения

<u>Примечания</u>. **<u>1.</u> Ссылки на работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. Если работ несколько, они разделяются знаком «;» и пробелом. При ссылках внутри работы указывается положение, на которое дается ссылка и № страницы. на которой оно находится. <u>2.</u> Понятия, используемые в настоящее время, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита. Уточненные предположения – римскими цифрами. Уточненные и вновь введенные определения понятий – арабскими цифрами, выводы – номерами W.1, W.2, ... <u>3.</u> Некоторые вопросы вынесены в приложения, чтобы не усложнять анализ понятий существующей теории и «не затуманивать» понимание изменений (уточнения или замены) основных понятий. Но по сути – это в основном разделы теории вероятностей, которые иногда более сложны для понимания и требуют усложненного изложения.**

<u>4.</u> Первоначально включенное в работу приложение VI «О статистиках Максвелла, Бозе и Ферми», «приобрело самостоятельность» и будет дано отдельно. Оно интересно в первую очередь физикам, но будет полезно и математикам, занимающихся применением теории вероятностей в других областях знаний.

Предисловие

Нетрадиционно, ибо содержание *критики теории* вероятностей: – это философские споры о *роли случайности и причинности* в природе, следовательно, и *обоснования теории* вероятностей. В общем-то, полезно, иногда бывает интересно, но оставим это философам.

Мы в большей степени придерживаемся мысли, выраженной В. Феллером[2] [6,19]: «Философское рассмотрение оснований теории вероятностей должно быть отделено от математической теории вероятностей и математической статистики в такой же мере, как рассмотрение наших интуитивных представлений о пространстве отделяется теперь от геометрии».

Вклад в разработку понятий, внесла плеяда выдающихся ученых XVI – начала XVIII веков[3].

Вызывают искреннее восхищение и удивление их *размышления, догадки* (оставшиеся, к сожалению, в основном «за кадром») и те *открытия*, которые привели к системе понятий, правил обращения с событиями и их вероятностями. Созданная ими *исходная* система позволила и позволяет *правильно* решать задачи *теории* событий. Однако всегда следует *принимать во внимание* то, что теория создавалась на «пустом месте». Они – *первопроходцы*, которым *всегда намного сложнее*, чем их последователям. Не менее важно *само время*, в которое *происходило ее создание*, но об этом по мере изложения.

Для справки, приведем *трактовки* (**интерпретации**) вероятности, которые затрагиваются (**в той или иной степени**) при последующем анализе.

С начала XVIII века применялись три трактовки вероятности: *классическая, статистическая* (Я. Бернулли) и *геометрическая* (Т. Симпсон). 1-я и 3-я *не предполагают* обращения к *эмпирическому* исследованию (поэтому их нередко называют априорными), а 2-ю часто называют *эмпирической* вероятностью.

В XX веке появились: *Аксиоматическая* трактовка (А.Н. Колмогоров), в которой вероятность понимается как *исходное* понятие, не получившее *определения* и поставленное в *условие системы аксиом. Диспозиционная* трактовка (К. Поппер), в которой вероятность рассматривается как *зависимость* относительной *частоты* от *данной конкретной опытной* ситуации.

Мы придерживаемся понимания вероятности, которое прекрасно сформулировано В. Феллером [6,20]: **«Успех современной математической теории вероятностей, приобретен следующей ценой: теория ограничивается лишь одной стороной**

---

[2] Автор, к своему огорчению, смог ознакомиться с этой работой после издания работы [9]. Великолепный учебник, написанный нестандартно, в отличие от многочисленных работ по теории вероятностей. Если кто не читал, то советуем посмотреть – там много интересного. Именно благодаря ее влиянию появилось приложение VI

[3] Подробно об этом можно почитать в работе [1,386-412] и др. работах по истории теории вероятностей, например [2-5]

«случайности». Интуитивное понятие вероятности связано с индуктивными умозаключениями и суждениями ... Суждения такого рода интересны философам и логикам и являются также законным объектом математической теории. Следует подчеркнуть, однако, что мы будем иметь дело не с модальностями индуктивных умозаключений, а с тем, что может быть названо физической или *статистической вероятностью.* Грубо говоря, мы можем охарактеризовать это понятие, сказав, что наши вероятности относятся не к мнениям, а к возможным исходам *мыслимого эксперимента*».

Математическая модель «имеет дело» с абстрактными *математическими* объектами [7]. Названия объектов и *основные отношения*, которым они подчиняются, даются в *исходной* системе *математической* модели. В теории вероятностей она приводится в *теории* событий.

Отметим, во-первых, что *исходная* система понятий теории *не зависит* от приведенных *интерпретаций* вероятности. Во-вторых, *основные* идеи *аксиоматического* подхода, которые, по мнению автора, важны для построения теории

1. *Связи* теории и практики [8,12-14], исходя из «*основных* свойств вероятности, подмеченных на примерах *классического* и *статистического* определений» [1,49]. 2. Образования *сложных* событий на основе *элементарных* [8,10].

Замечательные идеи. Однако в работах подчеркивается значение *аксиоматизации*, применения *теорий меры и множеств*, а *о важности* этих *идей* практически ничего. Например:

«Статистический или эмпирический подход к вероятности был развит главным образом Фишером и Мизесом. Понятие пространства элементарных событий идет от Мизеса. Это понятие сделало возможным построение строгой математической теории на основе теории меры. Такой подход развивался постепенно в течение 20-х годов под влиянием многих авторов. Аксиоматический подход на современном уровне был разработан А.Н. Колмогоровым» [6,22].

Однако 2-я идея *высказана*, но *не реализована*, т.е. *осталась только идеей* (**что будет показано при анализе**), а это *не позволило* довести до *логического завершения* и 1-ю (**приложение II, стр.45**).

Критика сама по себе – *пустозвонство*, в чем автор твердо убежден. Поэтому понятия, которые не *совсем точно* соответствуют *экспериментам, исправляются* и *дополняются*, а вместо тех, которые не следуют из *экспериментов*, вводятся *новые.* Результат – *новая исходная* система понятий, *не противоречащая экспериментам*, и *качественное* уточнение *теории* событий. Именно это *уточнение* определило *плавный* и *строгий математический* переход [9,34-48] от событий к случайным величинам[4]. На его основе создана *новая теория* случайных величин. Многие ее *по-*

---

[4]**Он, вроде бы, реализован в аксиоматическом подходе, но чисто формально: по существу определение просто подводится под исторически сложившееся понимание**

ложения (**начиная с *определения случайной* величины**) [9,49-120] «*вступают в противоречие*» с соответствующими *положениями* теории, существующей в настоящее время.

Т.е. последствия проведенных изменений очень сильно повлияли на *теорию* случайных величин. Именно это требует ясного понимания *почему*, *что* и *как изменено*, и серьезного обсуждения того, к чему приводят эти изменения. Эта статья – попытка просто и понятно рассказать об этом. Насколько она удалась и удалась ли вообще, судить Вам.

При изложении исследований, мы рассчитывали не только на профессионалов[5], занимающихся теорией, но и на Читателей, просто хорошо знающих и применяющих ее в других областях знаний, не особо задумываясь о ее строгости[6], и, конечно же, тех, кто только начал изучать ее азы[7]. Поэтому анализ дается преднамеренно подробно (**скорее всего, где-то «страдает излишеством, а где-то подробностей не хватает**) и Читателю надо набраться много терпения, чтобы дочитать сие сочинение до конца.

[5]**Впрочем, им часто бывает намного сложнее: над ними довлеют стереотипы, существующие 3-и столетия, и укоренившиеся в мышлении за время работы**

[6]**Автор же «вообще без раздумий» применял формулы теории надежности. До тех пор, пока не получил, в соответствии с теорией, абсурдные результаты (например, отрицательные вероятности). Вообще-то, «подвело любопытство»: а что будет, если .... И привычка «докопаться до истины для устранения» сомнений. В литературе по теории надежности объяснения не нашлось. Поиски в теории случайных величин тоже не «привели к успеху». Наоборот, вместо «истины и устранения сомнений» появилось понимание того, что три положения теории случайных величин не соответствуют теории событий: и «потянулось» ..., вплоть до исходных понятий теории событий**

[7]**Вообще-то, оно больше рассчитано на тех, кого заинтересует теория вероятностей. Будущее ее развитие за ними**

Введение

Если определена *исходная* система *математической* модели, остальное изложение должно строиться *исключительно* на этой системе. Это в полной мере относится к теории вероятностей [8,9]. Две цитаты:

«Назрела необходимость разработать аксиоматику и для теории вероятностей, поскольку *старое, полу интуитивное* и *неформальное* обоснование Бернулли и Лапласа *давно устарело. Строгое аксиоматическое обоснование* разработано в 1929 году» [5].

«До недавнего времени теории вероятностей представляла собой *не сложившуюся математическую* науку, в которой *основные понятия* были *недостаточно четко* определены. Эта нечеткость приводила нередко к парадоксальным выводам (вспомним парадоксы Бертрана[8]) ... Аксиоматическое построение основ теории вероятности отправляется от основных свойств вероятности, подмеченных на примерах классического и статистического определений. *Аксиоматическое* определение вероятности включает в себя и *классическое* и *статистическое* определения. На этой базе удалось построить *логически совершенное* здание современной теории вероятностей» [1,49].

Красиво сказано, сильные утверждения – попробуй возразить. Тем более что подобного рода высказывания можно найти во многих современных работах по теории вероятностей. Итак, «*само совершенство*»: – *критика просто неуместна.*

Однако осмелимся задать нескромный и каверзный вопрос: *всегда ли в теории вероятностей «должно следовать» и «следует» совпадают*? У математиков, особенно тех, кто профессионально занимается теорией вероятностей (**не всех, но их будет немало**), вопрос вызовет возмущение, ибо теория – «само совершенство» и уже *сама постановка* вопроса – «крамола». Тем не менее, наш ответ – <u>*отрицательный*</u>. Учитывая название и цель статьи, – это, безусловно, полная «ересь». *А если еще учесть, что автор механик, а не математик*[9]?

Возмущение автору понятно. Успешное и *правильное* решение большого числа задач *теории* событий[10] на основе разработанной *исходной* системы понятий и определило, по-видимому, ее «неприкосновенность».

«История показывает, что первоначально теория вероятностей развивалась для описания очень ограниченного круга опытов, связанных с азартными играми, и основные усилия были направлены на вычисление определенных вероятностей. ... При этом

---

[8] Связанные с неоднозначностью решения задач на геометрическую вероятность, но, в принципе, они определяются разными постановками [1,41-43]. Определение геометрической вероятности дается в виде: «наудачу бросается точка в область G . . . вероятность попадания брошенной наудачу точки «в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой области (длине, площади и т.п.)». 2-я часть является предположением, которым постулируется равномерное распределение вероятностей

[9] «Корпоративный дух», не в лучшем понимании, к сожалению, «имеет место быть» и в научных кругах

[10] К сожалению, есть неточные решения (приложения III, стр.55 и VI, замечание 1.3, стр.2)

следует иметь в виду, что вовсе не отыскание этих численных значений вероятностей является целью общей теории. Объектом последней является раскрытие общих законов и зависимостей, а также построение абстрактных моделей, которые могут в удовлетворительной степени описывать физические явления» [6,19-20].

Развитие теории случайных величин определило переход к открытию более общих статистических закономерностей. Но как раз в этой теории больше всего причин, которые приводят к *отрицательному* ответу. Сейчас обратим внимание на одну: «*мирное сосуществование*» 2-х *разных теорий* – событий и случайных величин. «*Мирное сосуществование*», ибо *строгой математической* связи *теории* случайных величин с *теорией* событий в настоящее время не существует: то, что *недопустимо* во второй – применение операций с *действительными* числами к случайным событиям, – *закономерно* в первой.

***Замечание* 2. Возможно некоторые из Читателей, профессионально занимающиеся теорией (исходя из определения случайной величины) сразу скажут: причин для отрицательного ответа нет. Не следует спешить: они есть. Убедиться в этом можно в конце статьи (приложение V, стр.65) и ответить на заданные вопросы. Можно посмотреть работу [9]. Но лучше «проработать» эту статью: в ней подробно (их почти нет в [9]: «съела борьба» с числом страниц) показаны противоречия между *исходными математическими* понятиями и *экспериментами* и введены *новые*, *устраняющие* противоречия. По крайней мере, это облегчит поиск ответов хотя бы на некоторые вопросы.**

Как следствие, *теория* случайных величин *не согласуется* с *теорией* событий[11], а это приводит к тому, что многие ее *положения* попросту неверны.

Не затрагивая существующую *исходную* систему, можно исправить только *некоторые неверные* положения теории случайных величин. Но даже дать вразумительное объяснение *этих исправлений* на ее основе не получается: при этом возникают некоторые вопросы, на которые нет ответа. Создать же *единую неформальную*[12]*математическую теорию* событий и случайных величин опираясь на существующую *исходную* систему – дело безнадежное.

«Насколько удачно проведена схематизация явлений, насколько удачно выбран математический аппарат для его изучения, мы можем судить по согласию теории с опытом, с практикой. Развитие естествознания, в частности физики, показывает, что аппарат теории вероятностей оказался весьма хорошо приспособленным к изучению много-

---

[11] **Некоторые примеры этого несоответствия даны в работе [9] и в приложении V (стр.65). В статье, посвященной случайным величинам, будет показано, что операции с ними не совсем соответствуют и операциям с действительными функциями**

[12] **Т.е. теорию, которая обеспечивала бы плавный и строгий математический переход от событий к случайным величинам**

численных явлений природы» [1,14].

Спорить по поводу 2-ой части цитаты бессмысленно: – она точно отражает существующие реалии. А вот первая часть, которая, «как ни крути», достаточно спорная, ибо об удачном выборе «судить по согласию теории с опытом» всегда сложно, а в теории вероятности – особенно. Но, в принципе, она отражает цель сего повествования, только уж в очень общих чертах. Сформулируем ее в другом более конкретном виде:

> **Насколько *правильно математическая* модель описывает явление *реального* мира, зависит от того, насколько *точно исходная* система отражает *основные закономерности*, присущие *данному* явлению.**

Именно с этой точки зрения будем рассматривать *исходную* систему понятий теории вероятностей. А для этого нет необходимости «влезать в дебри философских споров», а вообще говоря, и «в дебри» самой теории.

1. Об идеализации случайного явления

Об этом говорится не часто, но всегда подразумевается, что построение *математической* модели, описывающей *реальное* явление, начинается с его *идеализации* (**схематизация, определение системы основных понятий, введение аксиом, постулатов**[13]). Создание *математической* модели *реального* явления без его *идеализации* невозможно. В теории вероятностей она определяется *предположением*:

А. ***Существуют некоторые комплексы условий, допускающие неограниченное число повторений.***

В работах [1; 6-7; 10-13; 16] (**как и многих других**) оно приводится в разных вариациях.

Например. «Основное *допущение* теории вероятностей (*постулат*[14] textitсуществования *математической* вероятности) состоит в том, что существуют <u>такие</u> <u>*комплексы условий*</u>, которые (*теоретически, по крайней мере*) могут быть реализованы *неограниченное* <u>число</u> <u>раз</u>, при наличии которых в данном опыте наступление факта А имеет определенную *вероятность*» [10,2]. «Прежде чем говорить о вероятностях, мы должны условиться насчет *идеализированной модели* рассматриваемого мыслимого *эксперимента* . . . мы будем анализировать абстрактные модели. ... Мы представляем себе <u>*эксперимент*</u>, <u>*выполняемый*</u> <u>*очень*</u> <u>*много*</u> <u>*раз*</u>» [6,20-21].

Если в первой работе имеется намек (***теоретически, по крайней мере***) на то, что это *предположение идеализирует реальное* случайное явление, то во второй об этом говорится непосредственно и много.

Предположение (А), в общем-то правильное, да, к сожалению, не совсем корректное, иначе трудно пояснить появление примера: «**комплекс условий состоит в том, что бросают два раза одну монету» [8,12]**.

С тем же успехом можно сказать: **комплекс условий состоит в том, что: бросают игральную кость, вынимают наугад карту из колоды, производят выстрел по мишени.** Таких «комплексов» можно привести очень много.

Но вот в чем «закавыка»: – *относятся ли эти примеры к комплексу условий* (**А**)?

---

[13] **«Аксиома (греч. axioma) – положение, принимаемое в качестве исходного, отправного положения данной теории. Обычно выбирается из истинных положений, т.е. ранее проверенных практикой» [18,31]. «Постулат (от лат. postulo – «требую»), – суждение, принимаемое без доказательств в качестве исходного положения к.л. теории» [19,238]. В более поздних работах [20,21,570] нюансов, определяющих отличие понятий нет. Однако это отличие необходимо. Хотя бы для того, чтобы знать, что данная теория основана на положениях, проверенных практикой, а другие – на утверждениях возможных, но с практикой не связанных. Считать, что этих отличий не существует, как и то, что положение, проверенное практикой – «безусловная истина», одинаково вредно для развития науки. Но это почти философия, поэтому - в другой раз**

[14] **По существу, это аксиома, ибо подтверждается практикой (приложение II, стр.55)**

В работах этот *комплекс условий* часто называют *испытанием*, *опытом*, *экспериментом* или *наблюдением*, но смысл от этого не меняется: название зависит только от «пристрастия» автора. Далее в эти термины будет вкладываться отличающийся смысл.

Под *испытанием* будем понимать *идеальную* модель случайного явления. Наряду с ним будут применяться понятия: простого (или просто) *опыта* и *сложного* опыта. Что под ними понимается, будет пояснено в процессе формирования *новой исходной* системы.

Под *экспериментом* – *реальное* проведение случайного явления (или наблюдение за ним) при *данных* условиях.

Проведем анализ того, как *предположение* (А) согласуется с *экспериментами.* А для этого поговорим о *данных* условиях поподробнее. Например, при *экспериментах* с игральной костью предполагается выполнение следующих *условий*:

Пример* 1. Игральная кость – *идеальный куб с равномерной* плотностью и изображением *чисел 1,2,3,4,5,6* очков на его гранях. Подбрасывается на *достаточную высоту* с некоторым вращением. Падает на *жесткую гладкую плоскость.

Подобные условия должны выполняться и при бросании монеты. В *экспериментах* с выниманием наугад одной карты из колоды, кости домино из партии или одного шара из урны они другие.

***Пример* 2. Все карты в колоде, кости домино в партии или шары в урне должны быть одного размера и изготовлены из одного материала (по крайней мере, не отличаться при внимательном осмотре или ощущаться на ощупь), обратные стороны карт или костей домино не должны отличаться. Перед выниманием их следует тщательно перемешать. При вынимании мы не должны видеть: лицевую сторону карт или костей домино; шаров в урне.**

Условия проведения *испытания* на примерах азартных игр рассматриваются целенаправленно (**хотя об их особой конкретности говорить не приходится**).

Во-первых. Они, в первую очередь игра в кости, были *основой* становления теории вероятностей как науки: разрабатывались правила обращения с событиями; придумывались и «шлифовались» понятия и правила, необходимые для правильного вычисления вероятностей событий. Т.е. были *базой* для создания *классической* теории.

Во-вторых. Об условиях проведения *экспериментов*, в той или иной

степени, идет разговор в работах [1; 4; 6; 10-13; 15-16] и многих других. Но когда приводятся эти примеры, то об *условиях* говорится мало и вскользь, а часто не упоминается. В примерах из механики, физики, химии, техники и т.п. они достаточно конкретны и, возможно, поэтому рассматриваются намного чаще и подробнее.

Замечание **3. Например, в работе [12,11-12], по нашему мнению, дано удачное понимание случайного явления: «Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном повторении одного и того же опыта, протекает каждый раз несколько по-иному». Затем проведен анализ некоторых примеров из техники и сделан вывод: «*Основные условия* опыта, определяющих в общих и грубых чертах его протекание, сохраняются неизменными. Второстепенные – меняются от опыта к опыту и вносят различия в их результаты».**

На рассуждениях о том, какими являются условия, обычно все и заканчивается. Но для какого-либо вывода надо бы ответить на простой вопрос: *что будет, если изменить одно или несколько из этих условий*?

Пример* 3. Грани кости неодинаковы или/и смещен центр тяжести, или/и с изображением *одинакового числа* очков на 2-х гранях; или/и бросается низко над плоскостью и вдоль нее так, что плоскость одной из граней параллельна ей; или/и падает на *гладкую плоскость из мягкой глины.

О *влиянии изменении условий* на результат говорил еще Я. Бернулли: «Так было бы, если бы грани были различной формы или кость в одной части изготовлена из более тяжелого материала, чем в другой[15]» [4,41]. Или в современных работах: Теория вероятностей «... ограничивается изучением лишь тех событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз, притом в неизменных условиях» [1,17]. «Как мы неоднократно подчеркивали, вероятность события связана с условиями испытания ...» [11,40]. «Следует заметить также, что различие между “условной” и “безусловной” вероятностями не принципиально: каждая из них, конечно, отвечает определенному комплексу условий [11,43]». Но все сводится к условной вероятности событий: «Говоря об условной вероятности события B, мы лишь добавляем некоторые добавочные условия, связанные с появление события A» [11,44]. Рассуждения, в общем-то, правильные, однако далее зависимость вероятности от изменения условий испытания «теряется»: появляется зависимость событий, связанная с условной вероятностью.

Подобные изменения условий в приведенных примерах Читатель легко «изобретет» сам. Но и на этом примере вполне очевидно, что *изменение условий* приведет к *другим результатам.* Из анализа следуют два важных момента. Во-первых, уточнение *предположения* ‘A’:

Предположение* I. При повторении *испытания основные условия* его проведения *не изменяются.

Для уточнения *предположения* ‘A’ использована фраза, подчеркну-

[15] Этот пример (и подобные ему), встречается в других работах [1,52; 6,39-40; 15,25-26], но только для иллюстрации того, что «... в одном и том же пространстве элементарным событиям вероятности можно приписывать по-разному» [6,40]. Под одинаковыми множествами понимаются множества с одним числом событий

тая в цитате (**замечание 3, стр.11**) потому, что именно в этом виде оно обеспечивает *неизменность* вероятности появления любого события *испытания* при любом числе повторений (**см. также замечания к примеру 3**). В *эксперименте предположение* выполняется только *приближенно*[16].

Теперь можно утверждать: бросание 2-х раз одной монеты (и пример перед вопросом) не имеет *никакого отношения* к *комплексу условий*, о котором говорится в *предположении* I. Эти примеры относятся к *постановке* задачи. Например, определить вероятность: появления 2-х «гербов» при 2-х бросаниях монеты или *суммы* очков 9 при бросании 3-х игральных костей. *Предположение* же I должно выполняться при всех бросаниях монеты или игральной кости: его нарушение может привести к другим (в том числе, непредсказуемым) результатам. Например, 1-й раз монета бросается высоко над плоскостью, а 2-й – низко и вдоль нее так, что плоскость ее диска параллельна этой плоскости.

Во-вторых. *Условия* проведения *испытания* (*эксперимента*) разделяются на две группы: *внутренние – форма* игральной кости*, положение* ее *центра* тяжести*; число* шаров в урне и т.п.; *внешние – состояние поверхности,* на которую падает кость , как она *бросается* и т.п**.**

Конечно же, *изменение основных условий* проведения *испытания* (*эксперимента*) может привести к *изменению* вероятностей его событий, но не обязательно, вероятности его событий могут и *не измениться.* Все *зависит* от того, *как* и *какие условия изменяются.*

Разделение условий проведения *испытания* и *зависимость результата* от их *изменения* хотя и условно, но вполне естественно и давно используются в других областях знаний. Почему теория вероятностей до сих пор является исключением, – это под вопросом.

<u>Замечание 4</u>. **Создание теории вероятностей происходило в то же время, в которое такие науки как механика, физика, некоторые разделы математики только начали свой путь к тому виду, который они приобрели к концу XIX началу XX века. Понятно, что в этих условиях провести аналогию между теорией вероятностей и другими науками было крайне сложно. Однако одна аналогия появилась еще в самом начале XVIII века у Н. Бернулли [1,434]. В своей работе он обратил внимание на “...особое и исключительное совпадение ...” правил определения математического ожидания и центра тяжести системы сосредоточенных масс.**

С нашей точки зрения, можно сказать: Н. Бернулли было подмечено, что *<u>распределение</u>* *<u>вероятностей</u>* и *<u>масс</u>* являются *<u>действительными</u>*

[16]**Самыми близкими к испытанию являются азартные игры: кости, лотерея, карты, домино и т.п. Их изобретатели постарались сделать так, чтобы шансы игроков были бы равными [4,40]. Однако их идеальные модели существуют только в нашем воображении, т.е. мысленно, виртуально, теоретически**

функциями *действительной* переменной. Об этом в следующей статье.

Замечание* 5. Пример аналогии, данный Н. Бернулли, только иногда приводится в работах [11,82; 12,86], но просто как «механическая интерпретация» математического ожидания, используемая для «большей наглядности» его понимания. Т.е. трактуется *только исключительно* как *совпадение*, не более. Иначе весьма сложно пояснить появление, например, *теоремы* о *математическом* ожидании *произведения* случайных величин[17]: таковой – *произведения* центров тяжести – в механике не существует. Часто можно услышать возражение: *теория вероятностей – это не механика.* Конечно же, это так. Но для описания в обоих случаях используются *действительные* функции *действительной* переменной: – *их свойства не зависят* от того, *в какой области знаний они применяются.

По идее хотя бы это могло привести к мысли, что здесь что-то не так. Но не случилось .... По-видимому, на это сильно повлиял стереотип, сложившийся в течение длительного времени. До конца XIX века просто говорилось о некой величине [10,93], принимающей значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$. Название же – «случайная величина» начало применяться вначале XX века, а ее определение «подведено» под это понимание.

***Замечание* 6. Такое понимание, по-видимому, начало слагаться с работ Галилея, Гюйгенса и продолжено Д. Бернулли, первым применившим к вероятностным задачам методы математического анализа. Вычисление математического ожидания, ошибки измерений (развитие теории началось в XVIII веке) и определение геометрической вероятности (сноска 8, стр.5) связаны с действительными числами. Это привело к тому, что *случайная величина* воспринималась как *действительная* функция *действительной* переменной. Существенную роль в таком понимании сыграли: 1. Использование Я. Бернулли [4,47] членов ряда, выражающего степень бинома $(a + b)^n$, для доказательства своей знаменитой теоремы (открытие закона больших чисел). 2. Исследования А. Муавра, открывшего «Метод аппроксимирования суммы членов бинома ...» [4,109] кривой $\exp(-t^2/2)$ для больших значений степени бинома n. 3. Работы П. Лапласа, который широко применил методы математического анализа *действительных* функций *действительных* переменных к случайным величинам, К. Гаусса и А. Лежандра, внесших большой вклад в развитие тории ошибок измерений.**

Это понимание не изменилось и в настоящее время[18]. А если говорить по существу, то понятие *случайной величины* было *отождествлено* с

[17] **Не было бы в существующем виде и теоремы о математическом ожидании суммы величин (приложение V, стр.65)**

[18] **Аксиоматический подход не изменил его: оно просто дается в формализованном виде и ее определение, по сути, «закрепляет» исторически сложившееся понимание**

понятием *функции распределения вероятностей* случайной величины. Но анализ случайных величин не соответствует заявленной цели: об этом – «в другом месте и в другое время».

И еще об одном всем давно и хорошо известном предназначении *математической* модели, о котором приходится говорить вынуждено.

> ***Математическая* модель, описывающая явление, позволяет *предсказать* результат *эксперимента* на *основе* выявленных *закономерностей*, присущих данному явлению.**

Конечно же, именно это подразумевается и делается в теории вероятностей. Казалось бы, очевидно, но этого момента, как бы, не существует, ибо из «очевидности» ничего не следует. Как напоминание об этом предназначении *математических* моделей теории вероятностей, введем *предположение*:

> ***Предположение* II. *Вероятности* событий вычисляются при *условии*, что *испытание* проводится *мысленно* (*виртуально*, но не *реально*) и только *один раз*.**

Это *предположение* отделяет *идеальную* модель от *эксперимента.* Но в теории вероятностей, к сожалению, этого разделения в принципе не существует, – они смешаны «в одну кучу». Анализируя пояснение того или иного положения теории, понять, где говорится об *эксперименте* (***реальном* явлении**), а где – о *математике* (**модели, описывающей явление**), – весьма сложно. Теперь следствие из *предположений*, которого, несмотря на очевидность рассмотренных фактов, как раз и не хватает в теории.

W.1 Если *изменение* условий приводит к *изменению* вероятностей событий – это *другое испытание*, если *испытание* повторяется – это тоже *другое испытание*.

Вроде бы и уточнение (I) предположения (A) незначительно, и введение предположения (II) не имеет большого смысла, ибо хорошо понятно и известно. «Мелочи?». В принципе можно согласиться. Однако если бы следствие учитывалось, то, возможно, теория была бы другой, и не пришлось бы говорить об этих «мелочах», – в общем-то, очевидных фактах.

Акцент на этом поставлен потому, что следствие важно для построения теории. В нем уже «заложена мина» под одно из понятий теории – *независимости* (*зависимости*) событий (***испытаний*, случайных величин**), которое «играет значительную роль в теории вероятностей» [1,56]. Следствие W.1 приводит к *другому пониманию* этого понятия: по существу, оно связывает *зависимость* вероятностей событий *испытания* (**или *эксперимента***) с *условиями* его проведения. Объясним на примерах.

***Примеры 4*. А. Вынутый наугад шар не возвращается в урну: это *изменяет число* шаров, т.е. *внутреннее условие испытания*, и вероятности *всех* событий при 2-м вынимании. Следовательно, *отбор* 2-го шара из урны – это другое *испытание*, вероятности событий которого *зависят* от *возможного* исхода 1-го *испытания*. Но как 1-е, так и 2-е *испытание* проводятся при *неизменных условиях*. В. Вынутый наугад шар возвращается в урну. После тщательного перемешивания, снова вынимается шар. Условия *испытания не изменяются*, но оно *повторяется*, следовательно, это другое *испытание*, вероятности событий которого *не зависят* от *возможного* исхода 1-го *испытания*.**

С. Приведем примеры из механики. Попадание в мишень зависит от стрелка и оружия, из которого он стреляет (*внутренние* условия), дальности до мишени и ее размеров (*внешние* условия). Прочность детали зависит от материала, из которого она изготовлена, и ее формы (*внутренние* условия), вида и направления действующей на деталь нагрузки (*внешние* условия). В обоих примерах изменение условий приведет к изменению вероятностей событий.

О *независимости* и *зависимости* событий (**в том числе, исхода 2-го *испытания* от исхода 1-го *испытания***) говорится в любой работе по теории вероятностей и большей частью – много. Но эти понятия никоим образом не связывались и не связываются с *изменением условий* проведения *испытания*[19]. Однако *именно* их *изменение* определяет эту *зависимость* (**приложение III, стр.55: о *зависимости* случайных величин – в работе [9,90-103]**).

Также легко видеть, что понимание *зависимости* вероятностей событий от *условий проведения испытания*, «перекликается» с *диспозиционной* интерпретацией вероятности. Учитывалось бы следствие в теории, то, возможно, эта *трактовка* не появилась бы.

Т.е., «мелочное» *уточнение* понятий ведет к достаточно серьезным последствиям. Другие *изменения*, к которым оно привело, будут показаны при разработке *новой исходной* системы.

Далее используются *испытания, вероятности* событий которых вычисляются *без проведения экспериментов*, т.е. по *классической* формуле.

[19] **Например, в работах [1,56-74; 6,143-162; 11,44-54; 12,48-61] и др. Для иллюстрации зависимости и независимости событий часто используются примеры 4.А и 4.В**

Понятно, что к ним относятся только *идеальные* модели азартных игр, о чем говорил еще Я. Бернулли: «**... так как только крайне редко это возможно сделать, и почти нигде не удается, кроме игр**» [4,40].

Подчеркивая это, мы тем самым утверждаем, что вся *математическая* теория вероятностей может быть строго построена на *классическом* подходе к вычислению вероятностей. Т.е. применяя **«... старое, полу интуитивное и неформальное обоснование Бернулли ...»**, которое **«давно устарело»**. Придется каяться: не «вся», а почти «вся». Забегая далеко вперед, отметим, что для того чтобы связать теорию с *экспериментами* и «замкнуть» ее потребуется парочка аксиом[20], одна из которых уже предложена в работе [8,11] (**переформулированная аксиома 2**) и приводится в других работах. Поэтому – только «почти».

[20]**Первая введена на стр.29. Более подробный разговор об аксиомах – в приложении II (стр.53)**

2. Последствия существующего понимания события

Понятие события – одно из *основных* в теории вероятностей.

В.] «Под событием понимается *всякий факт*, который в результате опыта может *произойти или не произойти*» [12,23].

Самое раннее понимание случайного события. Когда появилась такая формулировка, мы не знаем. В работе [14,5] она более длинная, а в более ранних работах [10; 13] – отсутствует[21]. Но из работ понятно, что понятие относится к событию вообще. Например, появление: данного числа очков, или четного числа очков, или некоторой *суммы* очков при бросании одной игральной кости; конкретной *суммы* очков при бросании 2-х или 3-х игральных костей: одной карты, или карты данной масти, или карты данного наименования и т.п., – это все события. Т.е. понятие расплывчато, неконкретно.

С. «Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ – множество элементов ω, которые будем называть *элементарными* событиями , а $\boldsymbol{\Theta}$ – множество подмножеств из множества $\boldsymbol{\Omega}$**.** Элементы множества $\boldsymbol{\Theta}$ будем называть случайными событиями (**или просто событиями**), а множество $\boldsymbol{\Omega}$ – пространством *элементарных* событий» [8,10].

Т.е. в аксиоматическом подходе дополнительно к понятию события, вводятся *новые* понятия – *элементарного* события и их множество Ω (пространство *элементарных* событий[22]). По сути, они постулируются (сноска 13, стр.9). Но что это такое? Более тщательный анализ приводит к пониманию, что в аксиоматическом подходе *элементарные* события и их множество Ω, как и вероятность, – *исходные неопределяемые* понятия. Вот и понимай, как хочешь. Практически так и поступают, что следует из комментариев вида: «. . . Ввиду большого разнообразия случайных явлений нельзя дать более конкретное определение множества *элементарных* событий. Для описания каждой реальной задачи множество выбирается наиболее подходящим образом» [15,14]. Вся «конкретность» определения понятий – в этих предложениях. Положительной и весьма полезной в этом определении является *идея*[23] *построения сложных* событий (множества Θ) на *основе множества Ω элементарных* событий. Но неопределенность понятий множества Ω и *элементарного* события приводит и к неопределенности множества[24] Θ.

Элементарные события связывают с *возможными* исходами *испытания*:

D. «*Возможные исключающие* друг друга исходы *эксперимента* называются *элементарными* событиями» [16,777].

Или: «Всякий *неразложимый* исход <u>случайного</u> <u>*эксперимента*</u> называется его *элементарным* событием . . . » [17]. Как-то не совсем понятно, что понимается под «неразложимым» исходом. Словосочетание «случайный *эксперимент*» подчеркнуто потому,

---

[21] **При большом желании определение, в завуалированном виде, можно «найти» в цитате (стр.9) из работы [10]. Как, например, в рассуждениях Галилея об ошибках измерений (опередивших ее развитие) «находят» [5], что "... эти качественные рассуждения стали первым в истории предсказанием нормального распределения ошибок"**

[22] **«Понятие пространства элементарных событий идет от Р. Мизеса (в его работе – это пространство меток)» [6,22-23]. Иногда их называют элементарными исходами [11,23]**

[23] **Она отмечена в начале статьи (стр.3). При ее использовании и учитывая, что возможные исходы, т.е. элементарные события испытания тоже случайны, уместно говорить не о случайном, а о сложном (или просто) событии**

[24] **Множество Θ называется алгеброй, что связано с применением теории множеств. По-другому [1,26; 11,26; 14,12] – поле событий (приложение I, стр.48)**

что звучит оно, мягко говоря, как-то странно. И некоторое обобщение приводимых в работах понятий события: «Событиями называются произвольные подмножества пространства элементарных событий Ω».

Определения вида 'D', казалось бы, как-то конкретизируют понятие. Приведем некоторые рассуждения по этому поводу:

> **«С самого начала мы должны условиться о том, что представляют собой *возможные* исходы такого *эксперимента* (их совокупность будет нашим пространством элементарных событий) и каковы соответствующие им вероятности. Это аналогично обычному образу действий в теоретической механике, когда вводят воображаемую модель, включающую две, три или семнадцать материальных точек, и эти точки лишаются своих индивидуальных свойств» [6,21]. «Если мы хотим говорить об «опытах» и «наблюдениях» в рамках нашей теории, и без каких бы то ни было неясностей, то мы должны, прежде всего, условиться, каковы *элементарные* (неразложимые далее) события, представляющие собой *мыслимые* исходы *опыта* или *наблюдения. Они определяют идеализированный опыт* (заметим, что термин «элементарное (неразложимое) событие» остается столь же неопределенным, что и «точка» или «прямая» в геометрии). По определению *каждый неразложимый исход* (идеализированного) *опыта представляется одним и только одним элементарным событием.* Совокупность всех элементарных событий будем называть пространством элементарных событий, а сами элементарные события – *точками* этого пространства. Все события, связанные с данным (идеализированным) опытом, могут быть описаны как совокупности элементарных событий» [6,26].**

К чему приводит такое понимание понятий события и *элементарного* события, будет показано при последующем изложении. А сейчас приведем определения *математических операций* с событиями[25], позволяющих составлять одни события на основе других событий.

> **E.** *Суммой* (***логической***) событий **A** и **B** называется событие **S**, которое состоит (**далее –** ***предположение***) в появлении «*или события* **A**, *или события* **B**», или *обоих* событий *вместе*, т.е. хотя бы одного из них. **Операция записывается в виде S=A+B**.
>
> **F.** *Произведением*(***логическим***[26]) событий **A** и **B** называется *событие* **C**, которое состоит (**далее –** ***предположение***[27]) в появлении «*и события* **A**, *и события* **B**». Т.е. при *одновременном* появлении обоих событий. **Операция записывается в виде C = A · B или C=AB.**

Мы используем *классические* определения *операций* с событиями. Понятия *объединения* и *пересечения* множеств, применяемые в аксиоматической теории, будут использованы в других целях (замечание к определению 5, стр.29-30; определение 8, стр.39).

Выше понятие *испытание* (***идеальная*** **модель случайного явления**) было отделено от *эксперимента* (***реального*** **проведения случайного явления при** ***данных*** **условиях**). Это позволяет провести анализ того, как *согласуются* определения понятий события 'B' (**стр.17**) и *элементарного* события 'D' (**стр.18**)

---

[25]**По аналогии с теорией множеств в теорию вероятностей введена операция разности событий [8,10]. Она рассмотрена в приложении IV (стр.63), ибо в последующем изложении не используется**

с *экспериментами*[28]. Рассмотрим конкретные примеры.

Будем вынимать наугад один шар из урны с числами шаров:
***Пример 5*. 4 шара: белый, синий, красный, черный.**
Пример 6. 400 шаров: 30 белых, 90 синих, 120 красных, 160 черных.

Исход (*результат*) *эксперимента* с каждой из урн: появление только *одного* шара *данного цвета*. Три важных момента: **1.** Появление *одного* шара *исключает* появление *любого другого* (**совершенно неважно, какого он цвета**) шара в данном *эксперименте*. **2.** В данном *эксперименте* появление *одного* шара из числа всех шаров, находящихся в урне, неизбежно[29]. **3.** По *цвету* шара мы различаем события, т.е. *цвет* шара – это *признак* появления события. Следовательно, в *экспериментах* с каждой из урн будем наблюдать *только* **4** события.

Однако в примере 6 невозможно определить, какой шар из числа $\mathbf{m_j = 30, 90, 120, 160}$ шаров *данного цвета* появился в *эксперименте*. Т.е. событие в нем определяется числом $\mathbf{m_j}$ шаров *данного цвета*, а не *одним* шаром, наблюдаемым в *эксперименте*. Это *качественно* отличает его от примера 5.

п.1. Определение 'В', вроде бы, соответствует *эксперименту*. Но оно относится к событию вообще: *сумма* и *произведение* (**определения 'Е, F', стр.18**) событий – тоже события. Т.е. неконкретно, расплывчато (**замечание к определению 'В', стр.17**).

Во-вторых. В примере 6, для вычисления вероятностей по *классической* формуле, события разделяются на *частные* случаи[30] [10,5] – шары *данного цвета мысленно* нумеруются. Имеем **400** *частных* случаев (**они тоже часто называются событиями, т.е. понятие еще больше «расплывается»**). Вроде бы, теория учитывает его отличие от примера 6.

Но дело в том, что для отличия их в *экспериментах*, шары следует пронумеровать *реально*, а это будет *испытание* другого *вида*. Однако *в принятой теории вероятностей его просто не существует.*

п.2. Так как появление *одного* шара *исключает* появление *любого*

---

[28]**Когда далее говорится об экспериментах, то все они проводятся не реально, а мысленно, ибо результат экспериментов в приводимых примерах очевиден. Но, чтобы убедиться в этом, ничто не мешает провести их реально**

[29]**Такое событие называется достоверным, если событие не может произойти в данном испытании, то оно называется невозможным. Вероятность достоверного события принимается равной 1, а невозможного – 0 [1,25; 11,24; 14,8]**

[30]**Они были придуманы именно для того, чтобы вычислять вероятности событий по классической формуле. Т.е. при классической трактовке вероятности, частные случаи связаны (в основном) с теми событиями, которые возможны в экспериментах**

другого, то из определения ‘D’ (**стр.18**) сразу следует: в примере 5 – **4-е**, а в примере 6 – **400** *элементарных* событий. Но здесь тоже «нестыковки». **п.2.1.** Число *элементарных* событий *зависит* только от *числа шаров в урне*, но *не связано* с *числом* событий *испытания*, появляющихся в *экспериментах*. **п.2.2.** Из *элементарных* событий, в соответствии с определением ‘C’, образуются более *сложные* события. В примере (5) будем иметь множество $\mathbf{\Theta}$, состоящее из $\mathbf{2^4 - 1}$ [1,23; 11,20] *сложных* событий. А вот в примере (6), в соответствии с определением ‘C’ (**стр.17**) из **400** *элементарных* событий определяется множество $\mathbf{\Theta}$**,** которое будет содержать $\mathbf{2^{400} - 1}$ *сложных* событий (**калькулятор показывает, что это больше** $\mathbf{2,58 \cdot 10^{120}}$). *Но так ли это*?

Вопрос интересен, ибо результатом *экспериментов* в примерах являются только **4-е** *исходных* события. Не менее интересен и другой вопрос: *почему при объяснении понятия элементарных событий очень редко приводятся опыты, типа данного в примере 6*? Такой пример был еще у Я. Бернулли (**3000 белых и 2000 черных камешков в урне [4,43]**). Подобные примеры есть в большинстве других работ, но чаще всего не при объяснении понятия, а в других местах – при объяснении других положений теории событий (**например, *условной вероятности* и *зависимости* событий, пример 4 и комментарий к нему, стр.15**).

Приведем вид *испытания*, которое получается постановкой на шарах *дополнительных* номеров. Для сравнения, приведем также другой пример, который дает более общее представление об этом виде *испытания*.

***Пример 7*.**		***Пример 8*.**				
белые	**с №№1÷30;**	**30 белых:**	**— ,**	**11 с №2,**	**19 с №3,**	**— ;**
синие	**с №№1÷90;**	**90 синих:**	**12 с №1,**	**18 с №2,**	**27 с №3,**	**35 с №4;**
красные	**с №№1÷120;**	**120 красных:**	**36 с №1,**	**— ,**	**39 с №3,**	**45 с №4;**
черные	**с №№1÷160.**	**160 черных:**	**— ,**	**46 с №2,**	**53 с №3,**	**61 с №4.**

К этому виду относятся также: вынимание наугад одной карты из колоды или кости домино из партии. При определении ‘B’ события делятся на *частные* случаи. Из примера 7 следует наглядное представление о связи *частных* случаев с событиями *испытания* (сноска 30, стр.19). В примере 8 прочерк означает, что шаров с такими номерами нет. В примере 7 имеем 400 событий, а в примере 8 – только 12 событий.

1. В примерах этого вида в *эксперименте* будет появляться: *один* шар, *одна* карта, *одна* кость домино, т.е. как и примерах 5-6 (стр.19) – *одно* событие. Однако *каждое* событие имеет 2-а *признака*: *цвет* и *номер* шара; *масть* и *наименование* карты; *два числа* очков на кости домино, *разделенные* чертой.

2. Карта тоже делится на частные случаи. Например, появление туза – событие, а масть туза – его *частные* случаи [6,143; 10,5]. Шары в урне, в принципе, допускают деление. Но карта одна и именно она (а не масть или наименование) появляется в *эксперименте*. И как ее делить? *Масть* и *наименование* – это ведь только ее элементы, а карта без них – картонка. Это деление приводит к *потере связи частных* случаев с событиями, появляющимися в *экспериментах*. А вот определить число карт, составленных из двух групп данных элементов – это другая задача (частные случаи здесь не причем). Рассуждения справедливы и для примера с «домино».

3. Для подсчета вероятностей в примере 8, необходимо на шарах *одного* номера *мысленно* поставить (деление на *частные* случаи) еще какой-то *признак*. А чтобы отличать шары с *одним* номером в *экспериментах*, на них *необходимо* поставить этот *признак реально*. Т.е. получим тех же 400 событий, каждое из которых будет иметь *три признака*.

4. Число *элементарных* событий в примерах 6-8 одинаково, ибо не зависит от числа событий.

Пример с картами часто приводится в работах. Так бывает: пример есть, а отличия как бы и нет. *Но вот почему в просмотренных работах не нашлось места для примера с домино*[31]? Тоже вызывает интерес.

п.3. Итак, *что же имеем в результате этого подробного «разбирательства»*? Во-первых, *противоречия* между понятиями и *экспериментами*. Во-вторых, *качественное отличие* между *испытаниями*, данными в примерах 5 и 6, а также между *испытаниями*, данными в примерах 5-6 (**стр.19**) и 7-8 (**стр.20**). Существующая теория его не учитывает.

Картинка сложилась не очень радостная: исключением оказалось только *испытание*, данное в примере 5. Оно подобно лотерее. К этому же виду относятся такие *испытания* как бросание одной игральной кости или монеты. Но эти примеры самые простые[32]. Стоило чуть усложнить, – вместо «монеты» взять «урну с шарами», отличающихся *цветом* и числом шаров *одного цвета* больше единицы (**а пример такого типа был дан еще Я. Бернулли [4,43], стр.20**), как «горохом посыпались неприятности».

Однако продолжим анализ, ибо необходимые понятия и правила теории разрабатывались на более сложных примерах: бросании 2-х или 3-х игральных костей. Но мы снова используем «урны с шарами».

Пример 9*. *Одновременное вынимание наугад по одному шару из 2-х

[31] **Этот пример в наших рассуждениях появился тоже не сразу: попытки объяснить этот вид испытания только на примере с картами продолжались достаточно долго**

[32] **Примеры такого рода часто приводятся в работах (например [1,21; 6,24-32; 11,22-23; 15,14-15]) как иллюстрация понятия элементарных событий**

урн с числами шаров:

1. 400 шаров: 40 белых, 80 синих, 110 красных, 170 черных;

2. 400 шаров: 20 с №1, 60 с №2, 140 с №3, 180 с №4.

Исход *эксперимента* – появление 2-х шаров: *одного данного цвета* и *одного данного номера*. Подчеркнем *важные факты*: **1**. В данном *эксперименте* появление *одного* из шаров, принадлежащих *одной* урне, *не исключает* появление *любого* из шаров, принадлежащих *другой* урне. **2**. В данном *эксперименте* неизбежно появляется *один* шар из 1-й урны, и *один* шар из 2-й урны, т.е. их появление – *достоверное* событие (**сноска 29, стр.19**). **3.** Так как они появляются *одновременно*, то имеем (**определение (F), стр.18**) *произведение*[33] событий. **4.** *Цвет* или *номер* шара – это *признаки* появления события: *одного* шара из 1-й и *одного* – из 2-й урны в данном *эксперименте*. Следовательно, в *экспериментах* будем наблюдать *только* **8** событий. **5.** Они будут появляться в разных *произведениях*, но это никак *не влияет* на их число. Появление одного из возможных *произведений* тоже неизбежно, т.е. это – *достоверное* событие.

Таким образом, этот пример *качественно* отличается как от примеров 5-6 (**стр.19**), так и от примеров 7-8 (**стр.20**). Но это также не учитывается теорией.

п.1. При определении 'B' (**стр.17**), каждое *произведение* считается одним событием[34]: имеем **16** событий. Несмотря на то, что в *экспериментах* появляются два события, что подчеркнуто выше. Но опять же, для вычисления вероятностей по *классической* формуле следует *мысленно* определить **160 000** *частных* случаев.

п.2. При определении 'D' (**стр.18**) они тоже трактуются как *одно элементарное* событие. Имеем **160 000** *элементарных* событий. А из них можно составить «невообразимую уйму» *сложных* событий – $\mathbf{2^{160\,000}-1}$ (**их калькулятор считать «напрямую отказывается категорично», а по частям – больше** $\mathbf{6,29\cdot 10^{48164}}$), которых просто нет, и не может быть в этом *испытании*.

Число *частных* случаев и *элементарных* событий одинаково, но оно не *совпадает* ни с *числом* шаров в каждой из урн, ни с *общим числом*

---

[33]**Их часто называют комбинациями, однако, это понятие комбинаторики [6,47], а не теории вероятностей. Комбинаторика – «инструмент» для вычисления вероятностей событий, но она не имеет отношения к операциям с событиями. Подробнее об этом в приложении VI (замечание 1.3, стр.2)**

[34]**Это понимание, по-видимому, предопределила постановка и решение задачи [1,386], которая послужила началу развития теории: подсчет вероятности того, что при бросании 2-х или 3-х игральных костей появится данная сумма числа очков**

шаров в урнах. Очевидно, что чем *большее число* шаров в урнах, тем *существеннее* это отличие. Но оно совершенно не зависит от числа событий: можно рассматривать 2-а (**и даже одно**), а можно и 2-е сотни.

В *экспериментах* будут появляться только **8** событий, а не **16**, и тем более – не **160 000** *элементарных* событий. Мало того: попытка какой-либо постановкой *дополнительных* знаков на шарах достичь *согласия математических* понятий с *экспериментами* окончится неудачей, – это просто *невозможно.*

Противоречия между *математическими* понятиями и *экспериментами* только увеличились. Картина вырисовалась весьма печальная.

I. Из анализа, данного в примерах 5-9, вроде бы следует, что понятие *элементарного* события *отождествляется* с *частным* случаем. *Но верно ли в этом случае определение* 'D' (**стр.18**)? Ведь в *эксперименте* с *одновременным* выниманием наугад по одному шару из 2-х урн появляются *два возможных* исхода, *не исключающих друг друга.* При анализе примера 9 это подчеркнуто. К ним «примыкают» *испытания* с *одновременным* бросанием двух и более игральных костей или монет.

II. Шары в урне «отделены» друг от друга естественным образом, т.е. каждый из шаров является *возможным* исходом *эксперимента. Но как быть с примером* [6,143; 10,5] *вынимания одной карты из колоды, которая тоже делится на частные случаи*? *Что в этом случае считать элементарным событием*? Вопросы становятся интереснее при рассмотрении примера «с домино».

III. *Частные* случаи – *виртуальны* и связаны с *конкретными* событиями *испытания*, которые появляются в *экспериментах* (**сноска 30, стр. 19**): по числу *частных* случаев, из которых состоит событие, вычисляется его вероятность. *Элементарные* события, в соответствии с определениями 'C' (**стр.17**), 'D' (**стр.18**), существуют сами по себе: они не связаны с какими-либо *конкретными* событиями *испытания*, которые *реально* появляются в *экспериментах.* Используя такое понимание, в примерах 6 или 9 из них можно построить очень много *сложных* событий, которых нет в *испытании* (**например: событие, состоящее из 5-ти белых и 12-ти синих шаров; событие, состоящее из 40-ка черных шаров и 20-ти шаров с №3**). Таких событий можно построить очень много[35]. Но они не появляются в *эксперименте. А вот каким образом посчитать по вероятностям элементарных*

[35] **2-й пункт анализа примеров 5-6, стр.20 и примера 9, стр.22**

событий вероятности конкретных существующих в испытании событий? В общем-то, не только непонятно, но и *невозможно*: необходимы *дополнительные* действия. Например, перейти к *частным* случаям, на которые *мысленно* делятся события в <u>*классической*</u> теории. Именно это и делается в теории, но только об этом почему-то не говорится.

Приведем пример[36] из работы [6]

***<u>Пример</u>* 10. «Урна содержит b черных и r красных шаров. Случайно извлекается шар. Он возвращается обратно, и, кроме того, добавляется c шаров одного с ним цвета и d шаров другого цвета. Производится новое случайное вынимание из урны (теперь содержащей $b+r+c+d$ шаров), и описанная процедура повторяется» [6,137]. С одной стороны: «О каком-либо событии А имеет смысл говорить только тогда, когда для *каждого* исхода опыта известно, произошло или не произошло событие А» [6,31]. Т.е. событие может состоять из любых исходов опыта. И с другой: «Точку пространства *элементарных* событий, соответствующую n извлечениям, можно представить как последовательность n букв $Ч$ и $К$. Событие "первым извлечен черный шар" (т.е. множество всех последовательностей, начинающихся с $Ч$) имеет вероятность $b/(b+r)\ldots$» [6,137]. «Чтобы найти вероятность некоторого события А, мы должны разделить число элементарных событий в А (благоприятные случаи) на общее число элементарных событий (возможные случаи)».**

Проще. Имеется $b+r$ *элементарных* событий, из них: b – обозначены буквой $Ч$, а r – буквой $К$. Каждый раз число *элементарных* событий с буквой $Ч$ увеличивается на c, а с буквой $К$ – на число d. Т.е. *элементарные* события (так же, как и частные случаи) связываются с событиями, появляющимися в *эксперименте*. Только молчаливо»: *почему*?

Но тогда зачем введено понятие элементарного события?

Таким образом, понятие *элементарного* события (**в понимании, данном в определении "D"**) тоже теряет конкретику. Т.е. «расплывается» и с «хорошей скоростью». Рассмотрим подобнее примеры с бросанием монет.

***<u>Пример</u>* 11. При бросании *одной* монеты имеем два события: появление «герба» или «числа». Каждое из них соответствует одному *возможному* исходу *испытания*, т.е. является *элементарным* событием. И бросая монету много раз, мы будем наблюдать «герб» или «число» и ничего другого.**

***<u>Пример</u>* 12. Два события: – 1) «герб-герб», 2) «число-число», 3) «герб-число» или 4) «число-герб» – могут появиться *только* при *одновременном* бросании 2-х разных монет[37]. В соответствии понятием *произведения* событий (определение (F), стр.18), рассматривается *произведения элементарных* событий, которые появляются при бросании одной монеты. Следовательно, появляются *сложные* события, которые в теории полагаются *элементарными* событиями [8,12]. Из анализа примера 9 следует, что в *экспериментах* будут *одновременно* появляться два *возможных не исключающих друг друга* исхода *испытания*.**

---

[36] **В работе [6] он дан для иллюстрации применения понятия условной вероятности (приложение III, стр.55)**

[37] **Об одновременном бросании 2-х одинаковых монет разговор будет на стр.42**

***<u>Пример</u>* 13. Три события: – 1) «герб-герб-герб» или 2) «число-число-число»; 3) «герб-герб-число», 4) «герб-число-герб» или 5) «число-герб-герб»; 6) «герб-число-число», 7) «число-герб-число» или 8) «число-число-герб» – могут появиться только при одновременном бросании 3-х разных монет. В соответствии с работой [8,12] имеем 8 *элементарных* событий, которые определяются *сложными* событиями, образованные *произведениями* 3-х *элементарных* событий, появляющихся при бросании одной монеты. Опять же, из анализа примера 9 следует, что в *экспериментах* будут *одновременно* появляться три *возможных не исключающих друг друга* исхода *испытания*.**

При бросании 2-х раз *одной* монеты, по сути, <u>*предполагается*</u> (**но об этом не говорится**): *при 1-ом и 2-ом бросаниях монеты два события появляются* <u>*вместе*</u> (**в *эксперименте* – <u>*одновременное*</u> бросание разных монет**). Бросание одной монеты два или несколько раз рассмотрено в работах [6,42; 15,14-15]. То, что изложено в примерах 11-13, вроде бы тоже очевидно. *Почему на это не обращается внимание*? Далее. Если *произведения* считаются *элементарными* событиями, то почему бы не продолжить процесс: считать что *сумма* событий тоже *элементарное* событие. Ведь это ничем не ограничено: их "**... множество Ω выбирается наиболее подходящим образом**" [15,14]. Вопрос в том, *как выбрать наиболее подходящее множество*? Об этом «ни гу-гу», – примеры есть, но правил то нет.

***<u>Пример</u>* 14. В примере 12 *произведения* 3) и 4) одинаковы. В примере 13 две группы *произведений* 3)-5) и 6)-8) одинаковы. Возможно, это странно, но в теории их *суммы* считают *элементарными* событиями, но «молча». Разговор об этом будет в теории случайных величин.**

Приведем цитату из предисловия переводчика к работе [6,6].

«Часто начинающие изучать теорию вероятностей запутываются, так как, скажем, слово "событие" на одних и тех страницах учебников используют и в описательном «донаучном» смысле, и в смысле, предписываемом аксиоматической теорией».

Ничего не скажешь, красиво изложено, вот только что-то никак не получается без «донаучного» понимания определить *сложные* события: *именно они и появляются в опыте*. Что ж, понятие *сложного* события в аксиоматической трактове так «распухло», что стало ничуть не лучше «старого, интуитивного» понятия события[38] (**определение 'B', стр.17**). Противоречия при таком понимании *элементарного* события очевидны. Но есть вопросы: *Так чем же отличается «донаучный» смысл собы-*

[38]**При всем уважении к аксиоматической теории она ну никак не может обойтись без «донаучного» понимания события. Пример 10 (стр.24) далеко не единственный - их много**

тия, от (**понимай – «научного»**) *смысла, предписываемого аксиоматической теорией? Что понимается под разложением* [8,15] *множества* $\mathbf{\Omega}$ *элементарных событий* (**и что такое неразложимый исход опыта**)?

Таким образом, такое понимание *элементарного* события не дает никакой возможности построения на его основе, по крайней мере, хотя бы *сложных* событий: не говоря о чем-то более сложном. Отсюда следует очевидный вывод:

W.2 ***Идея, заложенная в определении* 'C' *остается только идеей, – она не осуществлена, а при таком понимании элементарного события в принципе неосуществима.***

Фактически, ни введение понятия (**определение 'C', стр.17**) *элементарного* события, ни его отождествление с *возможными* исходами (**определение 'D', стр.18**) *идеализированного опыта*, не внесли что-либо новое в теорию вероятностей. Скорее оно «запутывает» ее, что еще больше усложняет понимание теории. Уж лучше просто использовать старые понятия: события, *благоприятствующие* ему *исходы* (**которые хоть связаны с событиями, появляющимися в *экспериментах***) и общее число *исходов испытания*. Они появились раньше, чем *частные* случаи.

Совершенно очевидно, что на основе таких «расплывчатых» понятий, которые не соответствуют *экспериментам*, невозможно учесть качественные отличия *испытаний*, отмеченные при анализе.

Таким образом, из сравнительного анализа *математических* понятий события с *экспериментами* следует:

W.3 ***Как определение* 'B' *события, так и определения* 'D' *элементарного события противоречат экспериментам. Они также не учитывают следствие* (вывод W.1, стр.14) *из предположений* (I), (II) *и качественного отличия испытаний.***

Итак, противоречия показаны, – этому «как раз и способствовало отделение» *математической* модели от *реального* явления (*эксперимента*). «Обещание», данное Читателю выполнено. А много их или мало, верны они или нет – пусть каждый Читатель судит сам.

О *строгом неформальном математическом* переходе от событий к случайным величинам[39] говорить просто не приходится. А желание осуществить эту возможность у автора сего трактата было. Оно было непреодолимым. Но больше, вообще говоря, необходимым: задолго до этого (**сноска 10, стр.7**) уже были *исправлены* некоторые *неверные*, по существу, положения *теории* случайных величин. Однако попытки как-то просто и внятно пояснить *эти исправления* на основе существующей *исходной* системы понятий заканчивались неудачей, – каждый раз получалось какое-то «бульканье». Постепенно пришло понимание того, что ее *необходимо изменить*. Это давалось с трудом и заняло достаточно много времени: во многих случаях стереотипы, сложившиеся в мышлении, незаметно «вкрадывались» в рассуждения при проведении исследований, что приводило к множеству ошибок. Преодоление стереотипов было наиболее сложным и существенно «замедляло» работу, в том числе и над монографией. Не исключено, что некоторые «незримо присутствуют» и в данном изложении (**в монографии, как это ни грустно, они «вкрались» в некоторые из пояснений**).

Но это было сделано: желание обращено в реальность и все «легло на свои места». Появилась стройная *теория* событий. На ее *основе* определен *строгий неформальный математический* переход от событий к случайным величинам. Конечный результат – *единая теория* событий и случайных величин, которая *создана на основе классической* теории. Как следствие: *исправление неверных* положений теории случайных величин[40], их *правильное* объяснение и понимание.

Однако анализ положений теории случайных величин не относится к заявленной цели, поэтому об этом – «в другом месте и в другое время».

---

[39]**Если по сути, то (как одномерные, так и многомерные) случайные величины постулируются, во-первых, просто потому, что они существуют на практике. Во-вторых, их можно как-то образовать (правил образования в теории нет) из сложных событий. Многомерные величины также называют системой или функцией случайных величин, или функцией случайных аргументов, но они имеют один и тот же смысл. Более подробный разговор об этом пойдет в следующей статье, в которой будут рассмотрены случайные величины**

[40]**Их оказалось много больше, чем предварительно исправленных, сноска 10, стр.7**

3. *Новая исходная* система *теории* событий[41]

3.1. *Математическая* модель *испытания*, *элементарное* событие

Чтобы устранить серьезные недостатки, которые выявлены при анализе существующих понятий события и *элементарного* события, введем вспомогательные понятия:

1. *Признак* появления события будем называть *меткой*[42].

2. Число m_j (j=1,2,..., n) *возможных неразличимых* исходов (т.е. с одинаковой меткой), будем назвать числом *возможных* исходов события.

3. Число n будем называть числом *возможных* событий, а число $M = \sum_1^n m_j$ – числом *возможных* исходов *испытания*.

Как и в аксиоматической теории[43], мы полагаем возможные исходы неопределяемым математическим понятием, но не отождествляем их с событиями.

Мы использовали понятие *возможных* исходов *испытания*, а заодно учли и «*частные* случаи», введя понятие *возможных* исходов события.

Тоже «мелочь». О последствиях этого «мелочного» изменения можно будет судить в процессе формирования *новой исходной* системы. Но не обо всех, ибо в сем трактате не рассматриваются случайные величины.

Введенные понятия приводят *математические* понятия в соответствие с *экспериментами* (**это легко проверить на примерах 5-10**). Назовем их совокупность *математической* моделью *испытания*. Из *математической* модели и анализа примеров 5-9 сразу же следует:

W.4 ***Возможные исходы испытания исключают друг друга.***

W.5 ***В данном эксперименте появление одного из возможных исходов испытания является достоверным событием.***

Учитывая выводы и равенство вероятности *достоверного* события единице (**сноска 29, стр.19**), введем аксиому:

<u>Аксиома</u> <u>I</u>. Возможные исходы испытания <u>равновероятны</u>. При конечном числе M возможных исходов испытания принимаем: вероятность возможного исхода равна $1/M$.

---

[41]В «телеграфном стиле» они приведены в работе [9,16-22]. Чуть подробнее – в работе [21], однако эта работа носит, в большей степени, «рекламный характер»

[42]Термин «метка» использован Р. Мизесом (сноска 23, стр.17). Пожалуй, это слово является и наиболее подходящим, ибо для того, чтобы отличать грани кубика (т.е. события), на них следует нарисовать разные изображения. Т.е. пометить события

[43]В этой теории возможные исходы отождествляют с элементарными событиями (цитата на стр.18 [6,26])

Геометрически, *возможные исходы опыта* представляются в виде точек k=0,1,...,M <u>равномерно</u> расположенных на отрезке $(0 \leq r \leq 1)$ числовой оси на расстояниях $\Delta r = 1/M$ друг от друга. Аксиома <u>равновероятности</u> необходима для вычисления вероятности элементарного события, определенного ниже. Возможные события <u>равновероятны</u> в частном случае: если $m_j = m =$ const $(m \geq 1)$ для любого j=1,2,..., n.

Аксиома не противоречит принятой математической модели испытания и результатам экспериментов, что следует из анализа примеров 5-14. Она также не противоречит статистической оценке вероятности, а в приложении II (стр.50) показано: она справедлива и для бесконечного числа возможных исходов испытания.

Ее нет (тогда даже мысли такой не возникло) в работе [9], что привело к неточностям некоторых формулировок. Понятие «равновозможности» не применяется: возникают достаточно сложные проблемы [1,38,49].

Математическая модель *испытания* позволяет строго определить *элементарное* событие, – *первое основное* понятие теории.

<u>*Определение*</u> **<u>1</u>.** Совокупность *возможных неотличимых* друг от друга исходов *испытания* будем называть *элементарным* событием.

***Элементарное* событие, в отличие от возможных исходов – определяемое понятие. Будем обозначать элементарные события строчными буквами: $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$, где j=1,2,. . . ,n – номер события. По сути, буква с номером в индексе – это просто заменаметки элементарного события. Чтобы не писать «герб», «число очков» и т.п. Даже если на гранях кубика изобразить действительные числа их надо брать в кавычки, ибо это только метки – недействительные величины. А так и запись «смотрится вполне» как математическая, и кавычек не надо. Но забывать, что это всего лишь метка элементарного события все же не стоит – может привести к серьезным ошибкам.**

Определение придало понятию *новый* и *конкретный* смысл и выделяет самые простые события *испытания* – *неделимые* объекты теории вероятностей. Именно *элементарные* события – *основа* построения любых *сложных* событий. Они (**точнее – их возможные исходы**) появляются в *экспериментах* (**в том числе – с непрерывными случайными величинами**).

3.2. *Классы испытаний* – (простой) *опыт* и *сложный* опыт. Виды (простого) *опыта* и их множества *элементарных* событий

Из определения (1) и анализа примеров 2-9, данного выше, следует: результат *эксперимента* с урнами примера 9 (**стр.22**) – появление 2-х *элементарных* событий. Учитывая следствие из уточненного понимания *испытания* и результаты анализа, введем два *новых* понятия.

<u>*Определение*</u> **<u>2</u>.** *Испытание*, в котором появляется *одно элементарное* событие, будем называть простым или просто *опытом*, а *испытание*, в котором появляются *два* и более *элементарных* события – *сложным* опытом.

Учитывая анализ примера 6 (**стр.19**), и следующий из него другой вид *испытания* (**примеры 7-8 и пояснения к ним, стр.20**) введем еще два понятия.

<u>Определение</u> **3.** *Опыт*, в котором *каждое элементарное* событие имеет *одну метку,* будем называть *одномерным опытом.* А *опыт*, в котором *каждое элементарное* событие имеет *две* (**и более**) *метки* – *двумерным* (*многомерным*) *опытом.*

Простой *опыт* разделен на 2-а *вида. Опыт* с одной *меткой элементарных* событий (бросание монеты, игральной кости, вынимание наугад шара из урны (шары разного цвета) и т.п.) представитим в виде *одномерной* таблицы: геометрически – в виде точек расположенных на линии. *Опыт* с *двумя метками элементарных* событий (вынимание наугад карты из колоды, кости домино из партии, шара из урны (шары, отмечены 2-мя числами) и т.п.) – в виде *двумерной* таблицы (не матрицы: они подчиняются другим правилам), не обязательно заполненной (пример 8 и опыт с домино, стр.20-21). Это дает лучшее понимание его свойств. Геометрически – в виде точек расположенных на поверхности. Эти отличия в представлении определили названия *опытов*[44].

Таким образом, **«монета или игральная кость»** отделены от **«карт или домино»**[45]. Опять же, этого нет в теории. А это привело к *виду испытания*, которого в теории не существовало (**стр.18**) и не существует до сих пор. Введем еще одно понятие:

<u>Определение</u> 4. *Совокупность* всех *элементарные* события *опыта* будем называть его множеством *элементарных* событий: $\mathbf{a}_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ – с 1-*ой меткой*, $\mathbf{a}_{j,k}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ $(k = 1, 2, ..., M_j)$ – с 2-мя *метками* и т.д.

Взамен неопределенного множества $\mathbf{\Omega}$, мы вводим *конкретное конечное* множество *элементарных* событий *опыта.*

Из понятий *математической* модели *испытания*, *элементарного* события и *опыта* следует:

W.6 ***Появление элементарного события с данной меткой исключает появление любого другого элементарного события опыта.***

W.7 ***Появление одного элементарного события из множества элементарных событий опыта является достоверным событием.***

---

[44] Для большей наглядности свойства видов испытания, отличие свойств и их представление в виде таблиц даны после формирования новой исходной системы (п.4, стр.44), а геометрические представления – в приложении V (стр.65)

[45] Первое разделение на эти виды определило сравнение «монеты» и «карты». Однако необходимость разделения появилась только после появления примера с «домино». Затем и «моделей с урнами» (типа примеров 7-8, стр.20), когда стало понятно, что они самые универсальные

W.8 ***Равновероятность возможных исходов опыта позволяет вычислить математические вероятности его элементарных событий по классической формуле*** $\mathbf{P}(\mathbf{a}_j) = m_j/M$***,*** $\mathbf{P}(\mathbf{a}_{j,k}) = m_{j,k}/M$ ***и т.д. Т.е. в общем случае элементарные события не равновероятны.***

W.9 ***Вероятность элементарного события является функцией, однозначно отображающей недействительную величину – элементарное событие – на ограниченное множество*** R $(0 < r < 1)$ ***рациональных чисел.***

Замечание 9. Достоверное **и** ***невозможное*** **(его нет в** ***испытании*****) события обозначим заглавными буквами U и V соответственно. Их вероятности** $\mathbf{P}(\mathbf{U}) = 1$**,** $\mathbf{P}(\mathbf{V}) = 0$ **являются следствием определения этих понятий (сноска 28, стр.17) в** ***классическом*** **подходе и определяют границы возможных значений вероятности появления любого события в данном** ***испытании.***

В современных работах их чаще обозначают $\mathbf{\Omega}$ **и** $\emptyset$ **(пустое множество). Однако есть одно «но». Множество** $\mathbf{\Omega}$ **–** ***исходное неопределяемое*** **понятие (замечание к определению 'C', стр.17), вероятности** ***элементарных*** **событий которого, могут быть любыми** $(0 < r < 1)$ ***действительными*** **числами (по сути, они им приписываются [8,11]). Отсюда следует: 3-я аксиома** $\mathbf{P}(\mathbf{\Omega}) = 1$ **(как** ***мера*** **множества** $\mathbf{\Omega}$ ***элементарных*** **событий) определяет равенство** $\mathbf{P}(\mathbf{\Omega}) = \sum_1^n \mathbf{P}(\omega_\mathbf{k}) = 1$**. Она, если говорить принципиально, является** ***условием нормировки*** **множества** $\mathbf{\Omega}$**. А пустое множество** $\emptyset$ **не имеет отношения к** ***испытанию.***

Т.е. при ***аксиоматическом*** **подходе** ***достоверность*** **события** $\mathbf{\Omega}$ **является** ***следствием нормировки*** **вероятностей** ***элементарных*** **событий. Чтобы не было «путаницы, между причинами и следствиями» (в классическом и аксиоматическом подходах) обозначения** $\mathbf{\Omega}$ **и** $\emptyset$ **не применяются.**

Математическая вероятность *элементарного* события – *второе основное* понятие теории, ибо является *основой* для вычисления вероятностей любых *сложных* событий. Снова используется известное понятие, но оно отнесено к *элементарному* событию, а не к событию вообще.

Примечание. Элементарное **событие, в отличие от элемента множества, имеет** ***две взаимосвязанные*** **характеристики:** ***метку*** **–** ***недействительную*** **величину и** ***вероятность*** **–** ***действительное*** **число. Это отличие необходимо учитывать при построении теории.**

3.3. *Алгебра опытов.* Виды *сложного* опыта

Из вывода W.4 и определения 2 следует: 2-а и более *элементарных* события могут появиться только при проведении *2-х* и *более опытов.*

Исходя из *уточненного* понимания *испытания* и *элементарного* события сделано то, чего нет в теории: 1) **«вынимание одной карты из колоды» отделено от «бросания 2-х разных монет»**; 2) **«бросание одной монеты» отделено от «*одновременного* бросания 2-х разных монет»**.

Второе, по сути, позволило разделить *испытание* на *два класса*, но такое разделение не является полным. Дело в том, что при анализе использовались только те понятия, которые имеются в существующей *исходной* системе. Но понятий простого *опыта* и *сложного* опыта в ней не существовало. А наличие 2-х и более простых *опытов* определяет возможность 2-х вариантов их проведения в *сложном* опыте:

1. *Проводить «наугад» один из опытов.*

Например: Бросать наугад одну монету из 2-х и более монет. Произвести выстрел наугад по одной из 2-х и более мишеней. Наугад проводить один из опытов: бросание монеты или игральной кости, вынимание наугад одного шара из урны или одной карты из колоды, проивести выстрел по мишени и т.п.

2. *Проводить одновременно оба опыта*.

Например: Одновременно бросать 2-е и более монеты. Одновременное попадание в мишень 2-х и более стрелков, сделавших по одному выстрелу. Одновременное бросать монету и игральной кости, и вынимать наугад один шара из урны и одну карту из колоды, и производить выстрел по мишени и т.п.

1-й вариант соответствует *предположению* «***или ..., или ...***», а 2-й – *предположению* «***и ..., и ...***». Каждый из *опытов* имеет свое множество *элементарных* событий. Отсюда следует:

W.10. ***Логические предположения, определяющие алгебру событий, применимы к множествам элементарных событий двух и более* (простых) *опытов. В алгебре опытов, предположение «или ..., или ...» исключает предположение «и ..., и ...».***

То, что *одно предположение исключает другое предположение*, означает только то, что эти *виды сложного* опыта *не могут* быть проведены *одновременно.*

Учитывая анализ, данный выше, и вывод W.10 введем два понятия, разделяющие *сложный* опыт на два *вида*:

<u>*Определение **5***</u>. *Сложный* опыт, в котором *объединяются 2-а* множества *элементарных* событий, будем называть *объединением опытов.* А *сложный* опыт, в котором *совмещаются 2-а* множества *элементарных* событий – *совмещением опытов.*

В отличие от *алгебры* событий, в *алгебре опытов* будем применять термины *объединение* и *совмещение*[46] и обозначать их знаками «$\cup$» и «$\times$», которые используются в теории множеств.

Таким образом, на основе анализа мы логично пришли к необходимости дополнения *алгебры* событий *алгеброй* множеств *элементарных* событий (простых) *опытов. Алгебры опытов* в теории не существовало, а она, в свою очередь, привела к разделению *сложного* опыта на *два вида*, которые имеют совершенно *разные* свойства.

***Пример* 15. Рассмотрим два *одномерных опыта* с множествами *элементарных* событий: $\mathbf{a}_j^1$ $(j = 1, 2, ..., n1)$ и $\mathbf{a}_k^2$ $(k = 1, 2, ..., n2)$. Нижний индекс – номер события в *опыте*, верхний – номер *опыта*. Если говорить по существу – это *метки элементарных* событий, принадлежащих 1-му или 2-му *опыту*[47].**

I. Результат *объединения опытов* – (простой) *опыт*, множество *элементарных* событий которого состоит из множеств *элементарных* событий исходных *опытов* $\{\mathbf{a_1^1}, \mathbf{a_2^1}, ..., \mathbf{a_{n1}^1};\ \mathbf{a_1^2}, \mathbf{a_2^2}, ..., \mathbf{a_{n2}^2}\}$. Будем называть его *объединенным* опытом. В соответствии с определением (5), появление одного *элементарного* события из множеств 1-го или 2-го *опытов неизбежно*. Если в *эксперименте* появилось *элементарное* событие одного из *опытов*, то это *исключает* появление любого другого *элементарного* события в этом *эксперименте*. При *одномерных опытах* их *объединение* представимо в виде *одномерной* таблицы.

II. Результат *совмещения опытов* – *произведение* их множеств *элементарных* событий $\mathbf{A}_{j,k} = \mathbf{a}_j^1 \times \mathbf{a}_k^2 (j = 1, 2, ..., n1)(k = 1, 2, ..., n2)$. Будем называть его *совмещенным* опытом. В соответствии с определением (5), *одновременное* появление 2-х *элементарных* событий из множеств $\mathbf{a}_j^1$ $(j = 1, 2, ..., n1)$ 1-го и $\mathbf{a}_k^2$ $(k = 1, 2, ..., n2)$ 2-го *опытов неизбежно*. Если в *эксперименте* появились *элементарные* события с №j 1-го *опыта* и №k 2-го *опыта*, то это *исключает одновременное* появление *элементарных* событий с любыми другими номерами (в том числе, с №k 1-го и №j $(k \neq j)$ 2-го *опытов* соответственно). *Совмещение* 2-х *одномерных опытов* представимо в виде *двумерной* полностью *заполненной* таблицы (это одно из отличий *совмещения опытов* от *двумерного опыта* (замечание к определению 3, стр.30)).

Мы логично пришли к еще одному понятию: – *объединения опытов*, которого не существовало в теории вероятностей. *Объединять* или *совмещать* можно *опыты*, имеющие как одинаковую, так и разную размер-

[46] Смысл слова «совместный» – происходящий с чем-то. Оно правильно отражает предположение «и . . . , и . . . ». В работе [9,22] дано другое название – *декартово произведение*. После «проработки» работы [6,146-150] и “знакомства” с теорией множеств осталось одно «совмещение»: – во избежание «путаницы». Кратко об этом на стр.36

[47] В принципе, такое обозначение элементарных событий 2-х и более опытов было придумано еще Галилеем [1,391]. Мы просто привел его к удобному математическому виду. Не надо придумывать метки для различия опытов и их элементарных событий: достаточно различия чисел в верхнем индексе

ность (**в том числе, *сложные* опыты, образованные *объединением и совмещением***). Это не имеет принципиального значения – суть остается такой же[48]. Из определений *элементарного* события (1), *сложного* опыта (2), *объединения*, *совмещения опытов* (5) и примера 15 следуют выводы:

W.11 ***Появление в объединенном опыте одного элементарного события из множеств элементарных событий 2-х*** (**и более**) ***опытов, образующих объединенный опыт, неизбежно, т.е. является достоверным событием.***

W.12 ***В объединенном опыте, появление одного элементарного события из множества его элементарных событий исключает появление любого другого элементарного события. Число элементарных событий объединенного опыта равно сумме элементарных событий всех объединяемых опытов.***

W.13 ***В совмещенном опыте, появление одного произведения из множества его произведений, неизбежно, т.е. является достоверным событием. При этом появление одного произведения исключает появление любого другого произведения. Число произведений совмещенного опыта определяется произведением чисел элементарных событий всех совмещаемых опытов.***

Из определений 2 и 5 следует:

1. При *совмещении опытов* одновременность их проведения вовсе не обязательна: можно бросить одну игральную кость, затем 2-ю и т.д. или бросать одну кость несколько раз. Главное то, что рассматривается совокупность событий «***и 1-го, и 2-го и* т.д.**» *опытов.*

2. *Объединение* 2-х *опытов* можно получить другими способами: 1. Смешать шары из 2-х урн в одной из урн. *Результат* случайного отбора *одного шара из этой урны*: появление *одного элементарного* события из множества *элементарных* событий «***или* 1-го, *или* 2-го**» *опытов.* 2. Вынимать наугад один шар *целенаправленно либо из 1-й, либо из 2-й урны*, т.е. *не производя случайный выбор* урны. *Результат* будет таким же, как и в 1-м случае

> <u>*Определение **6***</u>. *Объединение опытов*, полученное проведением «наугад» *одного* из *2-х* и *более опытов,* будем называть 1-м *типом объединения*, а полученное «смешением» (**учитывая оба отмеченных выше способа**) *2-х* и *более* множеств *элементарных* событий – 2-м *типом объединения*[49].

[48]**Кратко об этом – в замечании 15 (стр.46)**

[49]**Различие между типами объединения опытов будет показано при определении вероятностей элементарных событий объединенного опыта (замечание 12, стр.40)**

Т.е. «смешивать» можно не только «шары в урнах». Можно, например, «смешать» *элементарные* события *опыта* с «урной» и *опыта* с «монетой». Но если в 1-м случае *реально* «смешиваются» шары, то во 2-м – «искусственно смешиваются» *возможные* исходы *опытов*.

***Замечание* 10. При 1-м *типе объединения*, «*наугад*» предполагает выполнение условия: *неизвестно*, какой *опыт* из *объединяемых опытов* проводится, а известен только результат *сложного* опыта: появилось *элементарное* событие с конкретным номером $\mathbf{a}_j^k$ $(j = 1, 2, ..., n_k;\ \ k = 1, 2, ..., N)$, где n_k – число *элементарных* событий в *опыте* с номером k, N – число *опытов*.**

Используя *опыт*, который не связан с *объединяемыми опытами*, понятие 1-го *типа объединения опытов* можно расширить.

1. Например, урну, в которой находится шары с номерами j=1,2,. . . ,N (где N – число *опытов*) по числу m_j $(M = \sum_1^N m_j)$ шаров каждого номера. Будем *предполагать*:

a. Номера *объединяемых опытов* совпадают с номерами шаров *опыта* 1.

b. Проводится тот из *объединяемых опытов*, номер которого *совпадает* номером шара, который появляется при каждом *повторении опыта* 1.

***Предположения* a-b определяют проведение «*наугад*» одного из *объединяемых опытоа* в соответствии с вероятностями появления *элементарных* событий *используемого опыта*. Если $m_j = m$, то вероятности проведения всех *опытов* одинаковы.**

Примеры 2-го *типа объединения* «встречаются» в практике.

1. В математической статистике *объединяются* (по сути, мы применяем этот термин в юолее широком смысле) 2-е выборки, полученные в двух сериях *экспериментов* по изучению случайного явления при *данных* (*неизменных*) *условиях*. Имеем 1-й способ образования 2-го *типа объединения*.

2. Сборка узлов из разных деталей при серийном производстве[50] Характеристики детали (масса, размеры и т.п.) являются случайными величинами. От них будут зависеть характеристики узла (масса, центр тяжести, зазоры и т.п.). По сути, из «урн», число которых равно числу разных деталей, отбирается наугад необходимое число деталей для сборки, и «складываются в одну «урну» (с необходимым числом узлов). Т.е. имеем 2-й *тип объединения*.

Дело только в том, что в 1-м примере задача связана с *элементарными* событиями и решена правильно, чего никак нельзя сказать о решении задачи во 2-м примере. Распределение характеристик узла будут зависеть от взаимного расположения деталей в пространстве, способами их соединения и т.п. Эта задача тоже как-то решается, но это решение трудно назвать даже 1-м приближением.

Подробный анализ еще одного примера подробно рассмотрен в приложении VI (**замечание 1.3, стр.2**)

Конечно же, при разработке основ ни *объединение* (**тем более – его типы**), ни *совмещение*, как и вообще – «деление» *испытаний* не появились в теории. *Было ли возможно их появление в то время или позже*? Риторический вопрос, – у истории нет сослагательного наклонения.

---

[50] Автор долго считал, что извлечение наугад одного шара из одной или другой урны и смешивание шаров в одной из урн это одно и то же. Разделение появилось только при подготовке окончательной редакции монографии. Но по «стереотипу, раз берутся наугад», этот пример в монографии отнесен к 1-му типу объединения, что неверно .

Тем не менее, некоторые «намеки»[51] на деление» в работах имеются.

1. Если проанализировать «более тщательно», то можно считать, что 1-й *тип объединения* – это, в определенном смысле, *расширение* формулы *полной* вероятности[52] . По крайней мере, можно показать (исходя из замечания 10, стр.35), что формула полной вероятности легко может быть получена из *объединения опытов*. 2. *Совмещение опытов* в литературе называют то повторением [12,59], то композицией [11,52], то последовательностью *испытаний* [13,34], встречается и *совмещение испытаний* [7], но обычно применяется для «независимых испытаний». Однако о понятии «*независимости*» здесь вообще не упоминалось.

Только в одной из цитируемых работ говорится о *декартовом произведении*: «Прямым произведение двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a,b) из их элементов. Мы будем обозначать его через (A,B)». Другое обозначение $A \times B$. «Термины "прямое произведение" и "декартово произведение" – синонимы» [6,146]. Определение дано в теории множеств. Иллюстрируется примерами вида: 1. Карты в колоде – масть и наименование карты. 2. Нумерация мест в поезде – номер вагона и номер места, театральных билетов – ряд и место и т.п. Из анализа подобных примеров (стр.22-23) следует: они не относятся к произведению событий. К нему относится только пример с трехкратным бросанием монеты [6,147] (стр.25). Поэтому для призведния множеств элементарных событий опытов отсавлено название «совмещение».

Более сложные примеры и некоторые другие моменты, связанные с понятиями пар и прямого (декартового) произведения множеств будут рассмотрены в работе, посвященной случайным величинам.

С «делением *испытаний*» закончено. Уточнение понятия *испытания*, введение понятий *математической* модели и *гипотезы* (**акиомы**) *равновероятности возможных исходов испытания* позволили:

W.14 ***Строго определить понятие элементарного события и вычислять его вероятность по классической формуле.***

W.15 ***Разделить испытания на классы и их виды, т.е. учесть качественное отличие испытаний, следующие из экспериментов.***

Однако формирование *новой исходной* системы не завершено. Для этого необходимо рассмотреть составление *сложных* событий из *элементарных* событий с применением операций *суммы* и *произведения*.

---

[51]Впрочем, если что-то уже известно из исследований, то какие-то намеки на это в предыдущих исследованиях можно найти во многих случаях (сноска 21, стр.17). Но по каким-то причинам на них внимания не обращалось

[52]Эта формула впервые дана П. Лапласом [1, 411]

3.4. *Алгебра* событий и *вероятностные* модели (простого) *опыта*. Уточнение понятия *совместимости* событий

Приведем определения еще 2-х понятий, которые придуманы и введены для *правильного* вычисления вероятностей *сложных* событий:

G. Два события называют *несовместимыми*, если появление *одного* из них *исключает* появление *другого* [11,24]. В противном случае их называют *совместными*.

В работах вместо термина «несовместимый» намного чаще употребляется термин «несовместный». Слово «совместимый» означает входящий во что-то, а слово «совместный» – происходящий с чем-то (сноска 46, стр.32).

Непосредственно из определения *элементарного* события (1), *опыта* (2), множества (4) *элементарных* событий *опыта*, вывода W.6 и определения 'G' *несовместимости*[53] событий следует:

W.16 ***Появление одного элементарного события исключает появление любого другого элементарного события опыта, следовательно, они несовместимы.***

Из вывода W.16 и *суммы* (**определение 'E', стр.18**) событий следует:

W.17 ***Для элементарных событий опыта правило суммы событий – единственное. Сумма всех элементарных событий опыта – достоверное событие.***

Из выводов W.16-W.17 следует, во-первых, *уточнение* определения 'G' понятий *несовместимости* и *совместимости* событий:

<u>*Определение*</u> <u>**7**</u>. Если в события **A** и **B** *опыта* входит хотя бы *одно одинаковое элементарное* событие, то события будем называть *совместимыми*; в противном случае – *несовместимыми*.

Смысл терминов «*совместимый*» и «*несовместимый*» правильно отражает суть этих понятий (замечание к определению 'G'). В отличие от терминов «*совместный*» и «*несовместный*», употребляемых в современных работах: их употребление применительно к *сложным* событиям (*опыта* и *сложного* опыта) мы вообще исключаем.

Во-вторых, *уточнение отношений*[54] между *сложными* событиями *опыта*

1. A $\subset$ B: в событие B входят все *элементарные* события, из которых состоит A.

2. A = B: события A и B состоят из *одинаковых элементарных* событий.

---

[53] **Понятие несовместимости событий и теорема о вероятности их суммы впервые даны Т. Байесом в 1763г. [1,410]. Уточнение только несколько изменяет его смысл**

[54] **Существующая трактовка отношений дана при рассмотрении понятия поля событий (приложение I, стр.48), которое в новой исходной системе не используется**

Операция *суммы* определяет образование *сложных* (**или просто**) событий $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ... из *элементарных* событий *опыта*, а вместе с операцией *произведения* – более сложных «конструкций» из событий $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ...,.

Рассмотрим образование *сложных* событий и вычисление их вероятностей (**вероятностные модели**) на примере *одномерного опыта.*

***<u>Пример 16</u>. Вынимание наугад одного шара из урны с составом шаров*: 80 шаров: 1 с №1, 3 с №2, 6 с №2, 10 с №4, 12 с №у, 14 с №6, 15 с №7, 19 с №8.**

Имеем 1-й *опыт* с множеством $\mathbf{a}_j^1$ ($\mathbf{j{=}1{,}2{,}\ldots{,}8}$) *элементарных* событий. Пусть $\mathbf{A}_1^1 = \{\mathbf{a}_1^1 + \mathbf{a}_2^1 + \mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_4^1\}$ и $\mathbf{A}_2^1 = [\mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_4^1 + \mathbf{a}_5^1 + \mathbf{a}_6^1 + \mathbf{a}_7^1]$ события 1-го *опыта.* Их вероятности, определяются *суммой* вероятностей *элементарных* событий, из которых состоит каждое из событий. События $\mathbf{A}_1^1$ и $\mathbf{A}_2^1$ *совместимы.* Их *произведение* $\mathbf{C} = \mathbf{A}_1^1\mathbf{A}_2^1$ равно *сумме элементарных* событий $[\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4\}$, а вероятность его появления – *сумме* их вероятностей $\mathbf{P(C) = P(a_3) + P(a_4)}$ $\{\mathbf{1}\}$. *Сумма* событий $\mathbf{A}_1^1$ и $\mathbf{A}_2^1$ равна: $\Sigma = \mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^1 = \{\mathbf{a}_1^1 + \mathbf{a}_2^1 + [\mathbf{a}_3^1 + \mathbf{a}_4^1\} + \mathbf{a}_5^1 + \mathbf{a}_6^1 + \mathbf{a}_7^1]$. Но в *сумму* их вероятностей *дважды* входит вероятность их *произведения.* Вычитая ее из *суммы* вероятностей, получим: $\mathbf{P(\Sigma) = P(A_1^1) + P(A_2^1) - P(C)}$ $\{\mathbf{2}\}$. Если события $\mathbf{A}_1^1$ и $\mathbf{A}_2^1$ *несовместимы*, то *произведение* – *невозможное* событие: $\mathbf{C = A_3^1A_4^1 = V}$, $\mathbf{P(V)} = \mathit{0}$ и $\mathbf{P(\Sigma) = P(A_3^1) + P(A_4^1)}$ $\{\mathbf{3}\}$.

Отметим, что такие же рассуждения есть в работе [6,42-43]:

«Рассмотрим теперь два произвольных события $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Чтобы вычислить вероятность $\mathbf{P(A_1 + A_2)}$ того, что имеет место либо событие $\mathbf{A}_1$, либо событие $\mathbf{A}_2$, либо оба эти события вместе, мы должны сложить вероятности всех точек, содержащихся в событии $\mathbf{A}_1$, и всех точек, содержащихся в $\mathbf{A}_2$, считая, однако, каждую точку по одному разу. Мы имеем поэтому $\mathbf{P(A_1 + A_2) \le P(A_1) + P(A_2)}$. Если теперь $\mathbf{C}$ – любая точка, содержащаяся и в $\mathbf{A}_1$, и в $\mathbf{A}_2$, то $\mathbf{P(C)}$ входит два раза в правую и один раз в левую часть неравенства. Поэтому правая часть превосходит левую на $\mathbf{P(A_1A_2)}$, и мы получаем простую, но имеющую полезные следствия теорему $\mathbf{P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)}$».

Только выводов не следует: **далее вероятность $\mathbf{P(A_1 \cdot A_2)} = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$ произведения вычисляется не по формуле $\{1\}$, а через условную вероятность $\mathbf{P(A_2|A_1)}$.** Формулы $\{\mathbf{2}\}$-$\{\mathbf{3}\}$ не отличаются от существующих, но из анализа видно, что смысл теорем о вероятностях *произведения* и *суммы* событий *опыта* отличается от принятого понимания: формулировки следует изменить.

Признак появления события $\mathbf{A}_1^1$ или $\mathbf{A}_2^1$ – появление *метки* одного из *элементарных* событий[55], входящих в событие $\mathbf{A}_1^1$ или $\mathbf{A}_2^1$. А *признак* появления события $\mathbf{C}$ – появление *метки* одного из *элементарных* собы-

[55]**В некоторых работах [6,31; 16,777; 15,18-19] об этом говорится, но опять же – без каких-либо выводов**

тий, которые *одновременно* входят в события $\mathbf{A}_1^1$ и $\mathbf{A}_2^1$. Следовательно:

W.18 ***Сложные*** **события *опыта* являются *виртуальными* (математическими конструкциями), не имеют своей *метки* и *никогда* не появляются в *эксперименте, ни по отдельности, ни вместе.***

Появление *сложных* событий – это только *предположение*, необходимое для определения *математических* операций (**определения (E) и (F), стр.18**) с событиями. Из анализа следует[56]:

W.19 ***Любое сложное событие опыта состоит, в конечном счете, из его элементарных событий. Вероятности сложных событий опыта однозначно определяются вероятностями элементарных событий.***

W.20 ***Вероятности событий опыта не зависят от их совместимости. Совместимость определяет их произведение и одновременное виртуальное появление событий*** **A, B** ***и*** **C=AB.**

W.21 ***Вероятность*** **P(AB)** ***произведения событий*** **A** и **B** ***опыта равна сумме вероятностей элементарных событий, входящих в оба события, и не содержит произведения вероятностей.***

W.22 ***В сумму вероятностей*** **P(A)+P(B)** ***совместимых событий опыта дважды входит вероятность их произведения*** **P(AB)*. При вычислении вероятности их суммы вероятность*** **P(AB)** ***следует вычесть из суммы их вероятностей.***

W.23 ***Для правильного построения вероятностных моделей опыта достаточно понятия совместимости событий. Введение других понятий не требуется.***

---

[56]**Выводы W.18-W.23 сделаны, исходя из анализа одномерных опытов. Отличие двумерного (многомерного) опыта от одномерного опыта связано с тем, что он представим в виде двумерной (многомерной) таблицы. Из этого представления следуют два свойства (будут показаны на стр.44), которые необходимо учитывать при построении его вероятностных моделей. Это отличает его от одномерного опыта. Выводы не зависят от этих свойств**

3.5. *Алгебра* событий и *вероятностные* модели *сложного* опыта. Понятие *пересечения опытов*

Рассмотрим 2-й *опыт* с множеством $\mathbf{a_k^2}$ ($\mathbf{k=1,2,\ldots,8}$) *элементарных* событий.

***Пример 17. Вынимание наугад одного шара из урны с составом шаров*: 120 шаров: 7 с №a, 9 с №b, 12с №c, 14 с №d, 17 с №e, 18 с №f, 20 с №g, 23 с №h.**

Пусть $\mathbf{A}_1^2 = \{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2\}$ и $\mathbf{A}_2^2 = [\mathbf{a}_4^2 + \mathbf{a}_5^2 + \mathbf{a}_6^2 + \mathbf{a}_7^2]$ события 2-го *опыта*.

Для событий $\mathbf{A}_1^1$, $\mathbf{A}_2^1$ 1-го и $\mathbf{A}_1^2$, $\mathbf{A}_2^2$ 2-го *опытов* нельзя написать отношения $\mathbf{A}_1^2 \subset \mathbf{A}_1^1$ и $\mathbf{A}_2^2 \subset \mathbf{A}_2^1$, ибо в них входят *элементарные* события *разных* *опытов*. Очевидно, что отношение *эквивалентности*, понятия *совместимости* событий и *противоположного* события также неприменимы к событиям 2-х *опытов*.

Их можно применять только тогда, когда оба события **A, B, ...** состоят из совокупности *элементарных* событий 2-х (**или более**) *опытов*, т.е. событий *сложного* опыта образованного *объединением* или совмещением этих *опытов*.

Результат *объединения* 2-х *опытов* – *объединенный опыт* (**пример 15, стр.33**), множество *элементарных* событий которого состоит из множеств *элементарных* событий $\mathbf{a}_j^1$ ($\mathbf{j=1,2,\ldots,8}$) 1-го и $\mathbf{a}_k^2$ ($\mathbf{k=1,2,\ldots,8}$) 2-го *опытов*. Число *элементарных* событий *объединенного опыта* равно $n^o = n1 + n2$. Вероятности *элементарных* событий исходных *опытов* в *объединенном опыте* уменьшаются. Действительно.

Замечание 12. При 1-и *типе объединения* вероятности *элементарных* событий исходных *опытов* в *объединенном опыте* уменьшаются пропорционально вероятностям $\mathbf{P}(\mathbf{b_1})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{b_2})$, где $\mathbf{b}_r$ $(r = 1, 2)$ – *элементарные* события *опыта*, вероятности которого определяют проведение «наугад» одного из опытов (замечание 10, стр.35). Если $m_j = m$ (в том числе m=1), то вероятности уменьшаются пропорционально числу *объединяемых опытов*. В любом случае при 1-м *типе объединения* число *возможных* исходов *объединяемых опытов* и числа *возможных* исходов их *элементарных* событий не изменяются.

При 2-м *типе объединения* число *возможных* исходов *объединенного опыта* равно $M^o = M^1 + M^2$ (число шаров в урнах из примеров 16 (стр.38), 14 (стр.40)), а числа *возможных* исходов каждого из *элементарных* событий не изменяются. Их вероятности в *объединенном опыте* $\mathbf{P}(\mathbf{a_i^o}) = m_i^1/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n1)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{a^o_{n1+i}}) = m_i^2/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n2)$. Учитывая, что в исходных *опытах* они равны $\mathbf{P}(\mathbf{a_j^1}) = m_i^1/M^1$ $(j = 1, 2, ..., n1)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{a_k^2}) = m_k^2/M^2$ $(k = 1, 2, ..., n2)$, то можно записать: $\mathbf{P}(\mathbf{a_i^o}) = \mathbf{P}(\mathbf{a_i^1}) \cdot M^1/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n1)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{a^o_{n1+i}}) = \mathbf{P}(\mathbf{a_i^2}) \cdot M^2/M^o$ $(i = 1, 2, ..., n2)$. Т.е. вероятности уменьшаются про-

порционально отношениям M^1/M^o и M^2/M^o. Независимо от формы записи увеличивается число возможных исходов *объединенного* опыта. Это и определяет отличие 2-го *типа объединения* от 1-го. Но числа возможных исходов *элементарных* событий *объединяемых опытов* не изменяются.

Отметим два момента: 1. Если положить $\mathbf{P}(\mathbf{b_1}) = M^1/M^o$ и $\mathbf{P}(\mathbf{b_2}) = M^2/M^o$, то он похож на 1-й *тип объединения.* 2. Если $M^1 = M^2 = M$, тогда $M^o = 2 \cdot M$, то вероятности уменьшаются пропорционально числу *объединяемых опытов*, т.е. также как и при 1-м *типе объединения.* Но забывать, что при 2-м *типе объединения* уменьшение вероятностей связано с *возможными* исходами *опытов* не стоит.

Эти свойства могут быть распространены на *объединение N опытов.* Из вывода W.12 и данного анализа следует:

W.24 ***Элементарные события объединенного опыта несовместимы.***

W.25 ***При объединении опытов, вероятности элементарных событий исходных опытов уменьшаются. Уменьшение вероятностей зависит от типа объединения.***

W.26 ***Вероятности элементарных событий объединенного опыта однозначно определяются вероятностями элементарных событий исходных опытов. Вероятность суммы элементарных событий объединенного опыта равна 1.***

Результат *совмещения* 2-х *опытов* – *совмещенный* опыт (**пример 15, стр.33**), который состоит из множества *сложных* событий – *произведений* $\mathbf{A}_{j,k} = \mathbf{a}^1_j \times \mathbf{a}^2_k$, образованных *произведением* множеств *элементарных* событий 2-х *опытов.* Их вероятности равны $\mathbf{P}(\mathbf{A_{j,k}} = \mathbf{a^1_j} \times \mathbf{a^2_k}) = \mathbf{P}(\mathbf{a^1_j}) \times \mathbf{P}(\mathbf{a^2_k})$ ($\mathbf{j,\ k{=}1,2,\ldots,8}$), что определяется *произведением* множеств *элементарных* событий исходных *опытов.* Это свойство легко распространяется на *совмещение N опытов.* Из анализа, с учетом вывода W.13, следуют выводы:

W.27 ***Сложные события, образованные произведениями элементарных событий, несовместимы* между собой.**

W.28 ***При совмещении опытов, вероятности элементарных событий исходных опытов не изменяются.***

W.29 ***Вероятности произведений элементарных* событий *совмещаемых опытов однозначно определяются произведением их вероятностей* висходных *опытах.* Вероятность *суммы произведений равна* 1.**

Применяя операцию *суммы*, из *элементарных* событий каждого из *опытов* можно образовать *сложные* события $\mathbf{A^1_1}, \mathbf{A^1_2}, \ldots; \mathbf{A^2_1}, \mathbf{A^2_2}, \ldots$ и т.д.

В свою очередь, из событий $\mathbf{A_1^1, A_2^1}, \ldots; \mathbf{A_1^2, A_2^2}, \ldots$ и т.д., применяя операции *суммы* и *произведения* событий, образуются более *сложные* «конструкции». Однако отметим, что при *совмещении опытов*, применяя операции *суммы* и *произведения*, более сложные «конструкции» можно также образовать из *произведений* $\mathbf{A_{j,k}}$ *элементарных* событий *опытов*. Отсюда, с учетом выводов W.25-W.26 и W.28-W.29, следует

W.30 ***События сложного опыта, как и простого опыта, состоят из элементарных событий и образуются с применением операций суммы и произведения событий. Вероятности событий сложного опыта однозначно определяются вероятностями элементарных событий исходных* (простых) *опытов.***

Ообратим внимание на то, что до сих пор мы рассматривали только *опыты*, в которых *метки всех элементарных* событий одного *опыта* отличались от *меток элементарных* событий другого *опыта*. Но их *метки* могут и не отличаться.

Пример* 18*. Имеются две абсолютно одинаковые монеты или игральные кости.

В примерах *метки элементарных* событий обоих *опытов* не отличаются. Учитывая это, введем последнее *новое* понятие, которое необходимо для *правильного* понимания и построения событий *сложного* опыта.

Определение **8**. Если в 2-х *опытах* есть хотя бы по *одному элементарному* событию с *одинаковой меткой*, то *опыты* будем называть *пересекающимися*; в противном случае - *непересекающимися*.

Понятие *пересечения*[57] *опытов* существенно отличается по смыслу от понятия *совместимости сложных* событий. *Пересечение опытов* определяет как *минимум* два *элементарных* события с *одинаковой* меткой, которые относятся к *разным опытам*. А *совместимость* событий A и B означает, что в *оба события* входит хотя бы *одно одинаковое элементарное* событие *одного опыта*.

Опыты, приведенные в примерах 5 и 6, 9, 10, 15, 16 и 17, – *непересекающиеся*, а в примере 18 – *опыты* полностью *пересекаются*: *метки* всех *элементарных* событий обоих *опытов* одинаковы. Но возможно множество промежуточных вариантов, в которых *опыты пересекаются* частично.

[57]**Понимание понятия пересечения опытов имеет определенное отличие от понимания, принятого в теории множеств**

Пример 19*. *Две урны с числами шаров:
80 шаров: 1 с №1, 3 с №2, 6 с №3, 10 с №4, 12 с №5, 14 с №6, 15 с №7, 19 с №8.
120 шаров: 7 с №1, 9 с №2, 12с №3, 14 с №4, 17 с №*e*, 18 с №*f*, 20 с №*g*, 23 с №*h*.

Элементарные события с *одинаковой меткой неразличимы* и в *экспериментах* воспринимаются как исход *одного элементарного* события.

***Замечание 13*. При *пересечении* 2-х *опытов*, образованных их *объединением*, число наблюдаемых в *экспериментах элементарных* событий уменьшается и равно $n1 + n2 - K$, где K – число *элементарных* событий с *одинаковой меткой*. Так *в опытах*, данных в примерах 18, будем наблюдать 6 и 2 *элементарных* события, а не 12 и 4 при *разных метках*: в примере 19 – 12, а не 16 *элементарных* событий.**

Число же наблюдаемых в *экспериментах произведений* при *одновременном* проведении *опытов* изменяется другим образом: оно вычисляется по формуле $n1 \cdot n2 - K \cdot (K-1)/2$. Так в *опытах*, данных в примерах 18, будем наблюдать 21 и 3 разных *произведения*, а не 36 и 4 при *разных метках*: в примере 19 – 58, а не 64 *произведения*.

Влияние *пересечение опытов* на виды *сложных* опытов существенно отличается.

***Замечание 14*. При *пересечении* 2-х *опытов* число *элементарных* событий *объединенного* опыта уменьшается также как и число наблюдаемых в *экспериментах*. Соответственно, вероятности *элементарных* событий с *одинаковой меткой* в *объединенном опыте суммируются*. Это становится очевидным, если в примере 17 смешать шары из 2-х урн в одной урне, но легко показывается и при 1-м *типе объединения*.**

При *пересечении* 2-х *опытов* число *произведений совмещенного* опыта, не изменяются. Это следует из *несовместимости произведений* (вывод W.27, стр.38). Если проводить много *экспериментов* с *одновременным* бросанием 2-х *одинаковых* монет, то получим, что событие «*герб-число*» будет появляться приблизительно в 2 раза чаше, чем событие «*герб-герб*» (или «*число-число*»). Т.е. *пересечение* не влияет на вероятностные модели *совмещенного опыта*.

На этом формирование *новой исходной* системы завершено.

4. Представление *классов* и *видов испытаний* в виде таблиц. Свойства *разновидностей испытаний*

I. *Одномерный опыт* (рис. 1).

Одномерный опыт определяется _элементарными_ событиями с одной _меткой._ Для разнообразия показаны _совместимые_ события A и B _одномерного опыта_.. Ничего нового это представление к пониманию его свойств не добавляет.

II. _Объединение_ 2-х и более _одномерных опытов_ представляется также как и *одномерный опыт* (**рис. 2, _непересекающиеся опыты_ вверху, а _пересекающиеся_ – внизу**).

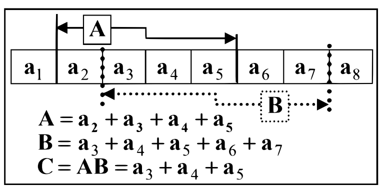

Рис. 1: ***Одномерный опыт***

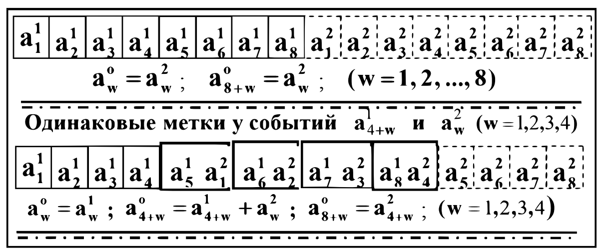

Рис. 2: ***Объединение опытов***

Рассмотрим события $A^1 = a^1_3 + a^1_4 + a^1_5 + a^1_6$ 1-го и $A^2 = a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + a^2_5$ 2-го _опытов._ Если _опыты пересекаются_, то появление одного из _элементарных_ событий a^1_5, a^1_6 или a^2_1, a^2_2 является _признаком одновременного_ появления событий A^1 и A^2, т.е. событие $C = a^1_5 + a^1_6 + a^2_1 + a^2_2$ является их _произведением._ Очевидно, что _произведение_ событий A^1 и A^2 2-х _опытов_ возможно, когда в оба события входит хотя бы одно _элементарное_ событие a^o_w $(w = 5, 6, 7, 8)$ _объединенного опыта,_ которые находятся в области их _пересечения._ Эту область можно назвать _произведением_ 2-х _опытов_ при их _объединении._ Если опыты _не пересекаются_, то _их произведение_ не существует.

III. В отличие от _одномерного опыта_, _двумерный опыт_ представляется в виде *двумерной* таблицы (**рис.3, прямоугольник с утолщенными линиями**).

В общем случае таблица _не заполнена_ (еще примеры 7, 8 и с домино, стр.20-21). При вынимании наугад одной кости домино из партии таблица треугольная. Это не влияет на _алгебру_ событий, но приводит к свойствам, которые следует учитывать при построении _вероятностных_ моделей:
3.1. В _сложных_ событиях A_j $(j = 1, 2, ..., N)$ (или B_k $(k = 1, 2, ..., M)$) нет _одинаковых элементарных_ событий, т.е. они _несовместимы._ Это распространяется и на _суммы_ событий A_j (или B_k). Например: A_2, A_3, A_4 и A_5, A_6 (или B_1, B_2

и B_3, B_4). **3.2.** События A_j и B_k – *совместимы*, ибо в них есть *одно одинаковое элементарное* событие $a_{j,k}$. **3.3.** Из *совместимости* событий A_j и B_k следует $P(A_j \cdot B_k) = P(a_{j,k}) \neq P(A_j) \cdot P(B_k)$, т.е. вероятность *произведения* событий A_j и B_k не равна *произведению* их вероятностей. Соответственно вероятность их *суммы* равна $P(A_j + B_k) = P(A_j) + P(B_k) - P(a_{j,k})$. Это справедливо и для *суммы* событий A_j и B_k, например A_2, A_3, A_4 и B_3, B_4.

IV. *Совмещение* 2-х *одномерных опытов* представляется в виде двумерной таблицы, т.е. так же, как и *двумерный опыт*.

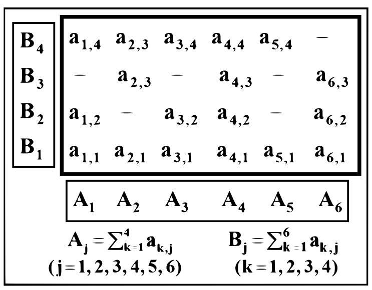

Рис. 3: ***Двумерный опыт***

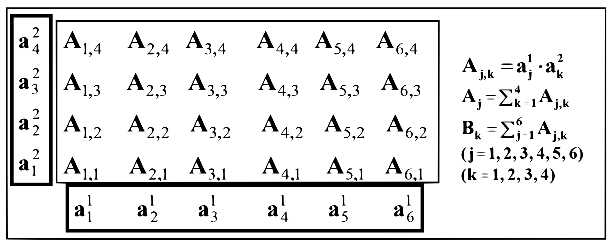

Рис. 4: ***Совмещение опытов***

Если таблица *двумерного опыта* полностью заполнена, то представления становятся похожими. Эта схожесть увеличивается подобием свойств. 4.1. *Сложные* события $A_{j,k}$, образованные *произведением элементарных* событий *опытов* – *несовместимые* события. 4.2. События A_j (или B_k) – *несовместимы*. 4.3. События A_j $(j = 1, 2, ..., n1)$ и B_k $(k = 1, 2, ..., n2)$ – *совместимы* (в оба входит одно и то же *произведение* $A_{j,k}$). Т.е. схожесть свойств определяется тем, что *произведения*, являющиеся *сложными* событиями, обладают свойством *несовместимости*, как и *элементарные* события *двумерного опыта*. Отметим, что свойства 4.2 и 4.3 распространяется также на *суммы* событий A_j или/и B_k.

V. Однако свойства *совмещенного* и *двумерного опытов* значительно отличаются.

5.1. Исходными являются *элементарные* события a_j^1 и a_k^2 2-х *одномерных опытов* (прямоугольники с утолщенными линиями), а *произведения* – *сложные* события, образованные *произведением* множеств *элементарных* событий *опытов*. 5.2. События A_j и B_k равны $A_j = \sum_{k=1}^{4} A_{j,k} = a_j^1 \cdot \sum_{k=1}^{4} a_k^2 = a_j^1$ и $B_k = \sum_{j=1}^{6} A_{j,k} = a_k^2 \cdot \sum_{j=1}^{6} a_j^1 = a_k^2$ соответственно, т.е. *элементарным* событиям соответствующих *опытов*. 5.3. Из *совместимости* событий A_j и B_k, с учетом свойства 5.2, следует $P(A_j \cdot B_k) = P(A_j) \cdot P(B_k) = P(a_j^1) \cdot P(a_k^2) = P(a_j^1 \cdot a_k^2)$, т.е. вероятность *произведения* событий A_j и B_k равна *произведению* их вероятностей. Т.е. *произведению* вероятностей соответствующих *элементарных* событий *опытов*. Соответственно вероятность *суммы* событий A_j и B_k равна $P(A_j + B_k) = P(A_j) + P(B_k) - P(A_j) \cdot P(B_k) = P(a_j^1) + P(a_k^2) - P(a_j^1) \cdot P(a_k^2)$.

Т.е. *сумме* вероятностей соответствующих *элементарных* событий *опытов* за вычетом их *произведения*. 5.4. Свойства 2-3 распространяются на *суммы* событий $\mathbf{A_j}$ и $\mathbf{B_k}$. Например, вероятности *произведения* и *суммы* событий $\mathbf{A = A_2 + A_4}$ и $\mathbf{B = B_1 + B_3}$ равны $\mathbf{P(A \cdot B) = a_2^1 \cdot a_1^2 + a_4^1 a_1^2 + a_2^1 \cdot a_3^2 + a_4^1 \cdot a_3^2 = P(A) \cdot P(B)}$ и $\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B) P(A \cdot B)}$.

Из проведенного анализа следует:

W.31 ***При объединении опытов произведение существует только при пересечении опытов. Произведение* событий 2-х *опытов* возможно при выполнении условия: *события находятся в области пересечении опытов* и *совместимы* (в них входят одинаковые *элементарные* события *объединенного опыта*).**

W.32 ***При совмещении опытов сумма событий существует независимо от пересечения опытов и является следствием совместимости событий* $\mathbf{A_j}$, $\mathbf{B_k}$ (или сумм этих событий) *опытов.***

Замечания к *объединению* и *совмещению многомерных опытов.*

<u>*Замечание* 15</u>. Если в 2-х *многомерных опытах* имеется хотя бы *по одному элементарному* событию, которые имеют *все одинаковые метки*, то они *пересекаются* (определение 8, стр.42). Если *все элементарные* события *отличаются* хотя бы *одной меткой*, то они *не пересекаются*. Отсюда следует: *опыты разной размерности не пересекаются*. Задача усложняется, если требуется определить вероятность появления *элементарных* событий *с отдельными одинаковыми метками*. В этом случае *сложные* события в *объединенном опыте* могут быть *совместимыми* (смотри приложение III, пример 4, стр.61).

Некоторые общие выводы, следующие из проведенных исследований:

W.33 ***Алгебра событий как* (простого) *опыта, так и сложного опыта одинакова, изменяются вероятностные модели.***

W.34 ***Теоремы о вероятности суммы и произведения событий следует формулировать и доказывать отдельно для* (простого) *опыта и для сложного опыта, образованного совмещением опытов.***

W.35 ***Для построения вероятностных моделей событий как* (простого) *опыта, так и сложного опыта достаточно понятие совместимости событий дополнить понятием пересечения опытов. Введение других понятий не требуется.***

5. Краткий итог иссиледований

1. Анализ существующих *исходных понятий теории* событий показал *расплывчивость* понятия события (**иего «частных случаев»**) *классической* теории и *полную неопределенность* понятий *элементарного* и *сложного* событий *аксиоматической* теории. Во-вторых, он выявил *противоречия* между этими понятиями и *экспериментами*: если в *классической* теории есть *некоторая связь* с событиями, появляющимися в *экспериментах*, то в *аксиоматической* теории *она отсутствует* (**приходится «обращаться» к классике**).

2. На основе проведенного анализа разработана *новая исходная* система теории вероятностей, которая полностью согласуется с *экспериментами.* Она включает в себя следующие понятия:

I. ***Базовые*: – *уточненное* понятие *испытания*, *введенное* понятие *математической* модели и понятие *возможных исходов испытания.***

II. ***Основные*: – *уточненное* понятие *элементарного* события, его *математическая* вероятность.**

III. ***Алгебра* событий, дополненнная *алгеброй опытов*, уточненное понятие *совместимости* событий, дополненное понятием *пересечения опытов.***

Новая исходная система обусловила:

> ***Строгое* построение и *расширение математических* моделей, *правильное* понимание и *качественное* уточнение *теории* событий.**

По существу, *новая исходная* система теории событий *основана на клас-сическом определении* вероятности: в приложении II (**истр.50**) показано, что она *распространяется на бесконечное* множество *элементарных* (**ии сложных**) событий.

Можно утверждать, что проведенные исследования (**ив том числе в работе [9]**) возвращают *классическую теорию* вероятностей *на то место*, которое она «*по праву» должна занимать.*

Новая исходная система *теории* событий дает, по нашему мнению, *лучшее понимание* теории вероятностей в целом, однако *анализ решаемых* задач (**иособенно в приложениях теории вероятностей**) *усложняется.*

Приложение I. О понятиях *поля* и *полной группы* событий.

Н. *Полем* называется **[1,27; 11,26; 14,12]** множество $\mathbf{\Theta}$ событий **A, B, C, ...**, *удовлетворяющее условиям*:

1. Для каждых двух событий A и B определено, влечет ли событие A за собой событие B $A \subset B$. Если одновременно выполняются отношения $A \subset B$ и $B \subset A$, то события называют эквивалентными $A = B$. 2. Полю принадлежат достоверное и невозможное события (сноска 29, стр.19). 3. Если A и B принадлежат полю S, то ему принадлежат: сумма A+B и произведение AB событий; события $\overline{A}$ и $\overline{B}$, противоположные событиям A и B, т.е. $\overline{A} + A = U$ и $\overline{B} + B = U$.

Т.е. введено аморфное *математическое* образование, которое не связано ни *испытанием*, ни с *экспериментом*. Подчеркивая это, приведем цитаты и пример из работы [14,11-12].

«Ни в одной задаче нам, конечно, не придется иметь дело со всеми событиями, какие вообще возможны. В каждом отдельном случае мы будем рассматривать то или иное множество событий, рассмотрение которых достаточно для решения данной задачи. При этом в зависимости от условий задачи конкретное событие может фигурировать в одной задаче как достоверное, а в другой – нет».

***Пример* 1. Подсчет суммы очков при бросании 2-х игральных костей: «1) ... в *предположении*, что одна из костей уже брошена и появилось одно очко; 2) ... в *предположении*, что ни одна из костей не брошена. В 1-м случае появление суммы очков 2,3,4,5,6 и 7 будет достоверным событием, во 2-м случае – нет».**

«Однако в каждой задаче нам, во всяком случае, будет необходимо иметь так называемое *поле* событий, т.е. такой запас событий, который обеспечивал бы возможность образования *произведений*, *сумм* и *противоположных* событий для всех имеющихся в этом запасе событий».

Примеры подобного рода рассмотрены в приложении III (**стр.55**). А сейчас только отметим, что смысл этих цитат мало отличаются от смысла цитаты в работе [15] (**замечание к определению 'C', стр.17**), хотя и говорится о разных вещах. Более конкретным является 2-е понятие, которое связано с понятием *достоверного* события:

I. Группа событий **A, B, C, ..., S** называется *полной*, если *одно из них непременно должно* произойти **[1,26; 12,25; 14,11]**.

Особую роль в теории играет *полная* группа событий попарно *несовместимых* и *равновероятных* между собой [1,26; 12,25-26; 14,11-13]. Это связано с тем, что именно такая *полная* группа позволяет вычислять вероятности событий по *классической* формуле (применяя комбинаторные методы). По существу, на этом применение *классической* формулы и заканчивалось.

В аксиоматическом подходе *поле* событий называется *алгеброй* (**множество $\mathbf{\Theta}$, сноска 22, стр.17**), однако понятие *полной группы* событий в нем отсутствует.

По-видимому, это связано с идей построения *сложных* событий (множества Θ) на *основе множества Ω элементарных* событий [1,10]. Однако *элементарное* событие, множества Ω и Θ являются неопределяемыми понятиями (замечание к определению (C), стр.15). Т.е. идея осталась только идеей: она *не осуществлена реально* (выводы W.2 и W.3, стр.23-24).

Из выводов W.19 и W.30 следует: множество *элементарных* событий *опыта* (**определение 4, стр.30**) и является той *полной группой*, которая определяет построение *сложных* события любого *испытания*. Никакого «запаса событий» создавать не требуется, а понятия *поля* и *полной группы* событий – искусственные образования, в которых нет никакой необходимости. Они только «запутывают» понимание теории. Подчеркнем, что мы строим не «некую безликую теорию вероятностей, пригодную на все случаи жизни», а *математическую* теорию *тех случайных явлений*, которые называют *массовыми* (**сноска 1, стр.1**).

Приложение II. Бесконечные множества *элементарных* событий. ***Равномерное*** *непрерывное* распределение

Покажем, что классический подход определяет образование *испытаний* с бесконечным (**счетным или несчетным**) множеством *элементарных* событий. Сначала рассмотрим способ, который непосредственно следует из видов *сложного* опыта.

Рассмотрим N ***одномерных непересекающихся опытов*** **с множествами *элементарных* событий** $\mathbf{a^n_{j,n}}$ **(n=1,2....,N); (j,n=1;2;...;K,n),** $\mathbf{P}(\mathbf{a^n_{j,n}}) = m^n_{j,n}/M,n$ $(M,n = \sum_{j,n=1}^{K,n} m^n_{j,n})$**, т.е. они *не* *равновероятны* (K,n – число *элементарных* событий, а M,n – число *возможных* исходов *опыта* с номером** n**).**

1. *Объединение* *опытов*. Для упрощения положим: $K,n = K$ **(n=1,2,...,N) (т.е. число элементарных событий в опытах одинаково). Применим 1-й *тип объединения опытов* (замечание 10, стр.35). Получим *объединенный опыт* с *элементарными* событиями** $\mathbf{a^o_j}$ $(j = 1,2,...,K \cdot N)$**. Их вероятности равны (замечание 12, стр.40)** $\mathbf{P}(\mathbf{a^o_{v+K\cdot(n-1)}}) = \mathbf{P}(\mathbf{a^n_v})/N$ **(n=1,2,...,N; v=1,2,...,K), а *сумма* вероятностей всех *элементарных* событий равна 1 (вывод W.26, стр.41) при любом конечном значении** N**. При неограниченном увеличении числа** N ***опытов*** **число *элементарных* событий (тем более, возможных исходов) стремится к бесконечности, а их вероятности – к нулю.**

Если опыты полностью пересекаются, а вероятности элементарных событий равны $\mathbf{P}(\mathbf{a^n_j}) = \mathbf{P}(\mathbf{a_j})$ **для любого значения n=1,2,...,N, то получим исходный опыт.**

2. *Совмещение* *опытов*. Для упрощения положим K,n= 2 (n=1,2,...,N). Результат *совмещения* – 2^N ***несовместимых сложных*** **событий вида** $\mathbf{A_{j,1;j,2;...;j,N}} = \mathbf{a^1_{j,1}} \cdot \mathbf{a^2_{j,2}} \cdot ... \cdot \mathbf{a^N_{j,N}}$ **(j,1;j,2;...;j,N=1,2), образованных *произведением* множеств *элементарных* событий *опытов*. Их вероятности равны** $\mathbf{P_{j,1;j,2;...;j,N}}$ ***произведениям*** **вероятностей *соответствующих элементарных* событий, а *сумма* вероятностей всех *произведений* равна 1 (вывод W.29, стр.41) при любом конечном значении** N**. При неограниченном увеличении числа** N ***опытов*** **число *произведений* стремится к бесконечности, а их вероятности – к нулю.**

Вероятность *элементарного* события – это *единственная известная* функция, которая *однозначно* отображает *элементарное* событие (**т.е. *недействительную* величину**) на *ограниченное* множество R $(0 < r < 1)$ *рациональных* чисел (**вывод W.9, стр.31**). Покажем, к чему приводит неограниченное увеличение числа *опытов* (**предельный переход при значении** $N \to \infty$) при *объединении* или *совмещении* N *опытов.*

Разделим отрезок $0 \leq r \leq 1$ **числовой оси точками v = 0,1,2,...,V с координатами** r_v **на части** Δ_j $(j = 1,2,...,V)$**. Положим, что отрезки** Δ_j **равны**

вероятностям $\mathbf{P}(\mathbf{a^o_{w+K\cdot(n-1)}}) = \mathbf{P}(\mathbf{a^n_w})/N$ $(w = 0,1,2,...,N)$ *элементарных* событий $\mathbf{a^o_w}$ $(w = 0,1,2,...,V = K \cdot N)$ *объединенного* или $\mathbf{P_{j1,j2,...,jn}}$ $(V = 2^N)$ *произведений совмещенного опыта* (т.е. расположение точек на оси <u>неравномерно</u>). В обоих случаях $p(r_0) = 0$, $p(r_j) = p_j$ $(j = 1,2,...,V)$, где $r_j = \sum_{w=0}^{j} \Delta_w$, p_j – вероятности элементарных событий или произведений. При увеличении числа опытов, отрезки Δ_j уменьшаются и точки $v = 0,1,2,...,V$ сближаются друг с другом. При неограниченном увеличении числа N *опытов*, отрезки Δ_j стремятся к нулю. Каждая точка $v = 0,1,2,...,V$ с координатой r_v *принадлежит одному элементарному событию*, т.е. они *становятся неотделимыми*. Так как они *несовместимы*, то *каждому из бесконечного* множества *элементарных* событий, *соответствует один исход – одна точка на отрезке* $0 \le r \le 1$. Это и *обеспечивает непрерывность элементарных* событий (произведений) и *их вероятностей*. Имеем на отрезке *бесконечное* (несчетное) множество *элементарных* событий, вероятности которых сходятся к нулю, следовательно, *<u>все</u>* *<u>элементарные</u>* <u>события</u> *<u>равновероятны</u>*.

Образуем *сумму* $\mathbf{P}(0 < r \le r_v) = \sum_{w=0}^{v} \mathbf{p}(r_w)$ (v=0,1,2,...,V). При значении v =V значение *суммы* при любом значении N равно $\mathbf{P}(r \le r_V) = 1$. При значениях v = 0,1,2,...,V значения *суммы* $\mathbf{P}(0 < r \le r_v)$ принадлежат прямой линии $P = r$.

Пусть A точка на отрезке $0 \le r \le 1$, координата r_A которой равна некоторому *действительному* числу. Тогда отрезок $0 \le r \le r_A$ определяет вероятность $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = r_A$ некоторого *сложного* события A. Значение $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ тоже принадлежит прямой $P = r$. При любом значении N, всегда можно определить точки v' и v'', значения координат $r_{v'}$, $r_{v''}$ которых будут ближайшими к точке с координатой r_A и $r_{v'} \le r_A \le r_{v''}$.

При увеличении числа N *опытов*, значения v' и v'' увеличиваются. Координаты $r_{v'}$ и $r_{v''}$, соответствующие этим точкам, сближаются между собой и приближаются к точке с координатой r_A, а вероятности $\mathbf{P}(0 < r \le r_{v'})$ и $\mathbf{P}(0 < r \le r_{v'})$ – к значению $\mathbf{P}(\mathbf{A})$. При неограниченном увеличении числа N *опытов*, число *элементарных* событий (точек v = 0,1,2,...,V) на отрезках $0 \le r \le r_A$ и $r_A \le r \le 1$ стремится к бесконечности. Вероятности $p(r_{v'})$ и $p(r_{v''})$ сходятся к нулю, а координаты $r_{v'}$ и $r_{v''}$ стремятся к точке A. Однако *суммы* вероятностей $\mathbf{P}(r \le r_{v'}) = \sum_{w=0}^{v'} p(r_w)$ и $\mathbf{P}(r \le r_{v''}) = \sum_{w=0}^{v''} p(r_w)$ сближаются между собой и сходятся к конечному пределу: значению $\mathbf{P}(0 \le r < r_A)$, которое тоже принадлежит прямой $P = r$. Таким образом, отрезок $0 \le r \le r_A$ определяет вероятность $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = r_A$ *сложного* события A, состоящего из бесконечного множества *элементарных* событий с *нулевыми* вероятностями. Очевидно, что это справедливо и для любого отрезка $0 < r_a \le r \le r_b < 1$. При делении отрезка $0 \le r \le 1$ на равные части (т.е. равномерно расположенные на отрезке), получим равные вероятности.

Это, конечно же, не доказательство (**в принципе – оно давным-давно выполнено Я. Бернулли**), а только некоторый путь к строгому математическому доказательству. Но этого вполне достаточно для того, чтобы утверждать:

При неограниченном увеличении числа N ***объединяемых или совмещаемых опытов*** **(предельный переход при значении** $N \to \infty$**):**

1. **На отрезке** $0 \leq r \leq 1$ **получаем** ***бесконечное*** **(несчетное) множество** ***элементарных*** **событий (с нулевыми вероятностями). На** ***равных*** **частях отрезка они определяют** ***равные*** **вероятности, т.е.** ***равновероятное непрерывное*** **распределение.**

В теории его называют «равномерным», но далее мы называем равновероятным: более подробное пояснение будет дано при рассмотрении случайных величин (замечание 1.2, данное ниже).

2. ***В общем случае вероятность сложного события*** **А** ***является действительным числом*** $0 < \mathbf{P}(\mathbf{A}) < 1$.

Вроде бы, вывод 1 противоречит реальному положению, однако противоречия нет. *Равновероятное непрерывное* распределение позволяет определить *опыт*: **1) с** ***конечным*** **или** ***бесконечным*** **(счетным) множеством** ***не равновероятных элементарных*** **событий; 2)** ***не равновероятное непрерывное распределение*****, т.е. с** ***бесконечным*** **(несчетным) множеством** ***элементарных*** **событий на отрезке.**

1. Разделив отрезок на М равных частей, получим множество точек j=0.1....,M (аналог равновероятных исходов опыта). На множестве точек j=0,1,...,M можно построить ***опыт*** **с числом** $n < M$ ***элементарных*** **событий с** ***разными*** **вероятностями. 2.1.** ***Не равновероятное непрерывное*** **распределение определяется** ***нелинейным преобразованием равновероятного*****. 2.2. Появляется оно и в результате** ***экспериментов*****. Их аппроксимируют теоретической кривой, которую можно получить на основе п.2.1.**

Замечания. **1. «Стереотип» -** ***рациональные*** **числа** ***разрывные*** **[22,24-25; 23,15-19] – «прочно засел» еще при обучении в «альма-матер». На его основе, «без всяких раздумий» написан п.1 и сделан вывод S7.2 в работе [9,114-116]. Однако. В работе [23] исследуется множество всех** ***рациональных*** **чисел. Мы же исследуем** ***увеличение*** **числа членов** ***таких последовательностей рациональных*** **чисел,** ***сумма*** **которых** ***всегда равна*** **1. Это понимание пришло при написании данной работы.**

2. Второй «стереотип» – ***равномерное*** **распределение вероятностей «закрепился» после прочтения большого числа работ. И, опять же «без раздумий», применялся в работе [9]. Однако. Значение слова «равномерный» [20,638]: одинаковый, постоянный в каком-то отношении, т.е. неоднозначно.** ***Элементарным*** **событиям соответствует** ***одна группа действительных*** **чисел – их вероятновсти. Одинаковые вероятности можно назвать «равномерными», но согласитесь: более точно и понятно (вообще говоря, и правильно) называть их равновероятными. А для случайной величины этого недостаточно: – кроме вероятностей необходимо характеризовать положение** ***элементарных*** **событий в пространстве, т.е. требуются** ***две*** **(и более)** ***групп действительных*** **чисел.** ***Если говорить о равномерности, то к какой какой из групп чисел ее отнести: к вероятностям, к одной или всем координатам*****? Понимание этого отличия пришло только при написании статьи, посвященной случайным величинам, в которой и будет**

дано пояснение, почему принято это название распределениями. Оно же определило и его выделение («до выяснение всех обстоятельств») в тексте чертой. Естественно, что отличие не учтено в [10].

«Въевшиеся стереотипы» привели к к неточности некоторых выводов в разделах 3,6 и 7 работы [9,49,104,115]. И сейчас мы не можем гарантировать, что какой-либо стереотип не «помешал» нашим рассуждениям.

Коротко о результатах *экспериментов.*

Результат любого *эксперимента* – появление исхода *элементарного* события. *Относительная* частота L/N появления *элементарного* события (где L – число исходов в N экспериментах: вероятность любого исхода $1/N$: т.е. они считаются <u>равновероятными</u> (что соответствует аксиоме I, стр.29), но только «по умолчанию») определяется *рациональным* числом и является *характеристикой объективной реальности.* Свойства *математической* вероятности и *относительной* частоты (как рациональных чисел) *тождественны. Вероятности суммы и произведении сложных событий определяются теоремами – аксиом не требуется.* Однако *доказать существование математической вероятности и сходимость относительной частоты к ее значению невозможно.* Можно *опираться* только на *многочисленные эксперименты*, подтверждающие свойство *устойчивости относительных частот при повторении серий с большим числом экспериментов.*

Из проведенного анализа следует: для построения теории вероятностей достаточно ввести еше *одну аксиому – существования математической* вероятности *элементарного* события

***<u>Аксиома</u>* <u>II</u>**. *Каждому элементарному событию* $\mathbf{a_j}$ (k=1,2,...,n) из множества *элементарных* событий (простого) *опыта* ставится в соответствие *рациональное* число $\mathbf{P(a_j)} = p_j$. из ограниченного множества R ($0 \le r \le 1$) *рациональных* чисел. Число p_j называется *вероятностью элементарного* события.

1. Формулировка изменена, ибо основными понятиями теории вероятностей являются элементарное событие и его математическая вероятность. 2. Как исключение, конечно же, можно допустить, что математические вероятности элементарных событий определяются действительными числами: для возможности создания искусственных опытов с конечным или бесконечным (счетным) множеством элементарных событий, вероятности которых будут действительными числами. Но следует всегда помнить, что элементарные события, вероятности которых определяются действительными числами, не имеют никакого отношения к реальности.

Рассмотрим *искусственное* образование *опытов* с бесконечным множеством *элементарных* событий. *Рациональные* числа a_j ($j = 1, 2, ..., N$) будут вероятностями *элементарных* событий некоторого *опыта при выполнении условий*: I. $0 < a_j < 1$. II. При *любом* значении N *сумма всех* чисел *должна равняться единице* $S_N = \sum a_j = 1$ (условие нормировки вероятностей).

***<u>Пример</u>* <u>1</u>. Рассмотрим ряд $a_j = 1/[j(j+1)]$ (j = 1,2,...,N). Первое условие**

выполняется, а второе – нет, ибо *сумма* $S_N = \sum a_j = (N-1)/N < 1$ при любом конечном N. Пусть $a_{N+1} = 1 - S_N = 1/N$, тогда числа a_k ($\mathbf{k = 1,2,...,N+1}$) будут вероятностями $\mathbf{P(a_j)} = 1/[j(j+1)]$ ($\mathbf{j = 1,2,...,N}$), $\mathbf{P(a_{n+1})} = 1/N$ множества *элементарных* событий $\mathbf{a_k}$ ($\mathbf{k = 1,2,...,N+1}$) некоторого *опыта*. Соответственно, числа *возможных* исходов *опыта* и его *элементарных* событий равны: $M = N!$ и $m_j = N!/[j(j+1)]$ ($\mathbf{j = 1,2,...,N}$), $m_{N+1} = N!/(N-1)!$ $\{\mathbf{1}\}$.

<u>*Пример*</u> <u>2</u>. В соответствии с аксиоматическим подходом, вероятностям *элементарных* событий приписываются любые *действительные* числа. Рассмотрим геометрическую прогрессию $a_j = a_1 \cdot q^{j-1}$ ($\mathbf{j = 1,2,...,N}$) при значении $0 < q < 1$, $S_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \neq 1$. Пусть $a_1 = 1$. Умножим числа a_j на значение $1 - q$ и дополним ряд числом $a_{N+1} = 1 - S_N \cdot (1-q) = q^N$. Условия I и II выполняются, тогда числа a_k ($\mathbf{k = 1,2,...,N+1}$) являются вероятностями $\mathbf{P(A_j)} = (1-q) \cdot q^{j-1}$ ($\mathbf{j = 1,2,...,N}$), $\mathbf{P(A_{N+1})} = q^N$ множества *несовместимых сложных* (с учетом вывода 2, стр.52) событий $\mathbf{A_k}$ ($\mathbf{k = 1,2,...,N+1}$) некоторого *опыта*. При значениях $q = 1/w$ (где $\mathbf{w = 1,2,...,W}$ – натуральные числа) числа a_k ($\mathbf{k = 1,2,...,N+1}$) рациональны и определяют множество *элементарных* событий $\mathbf{a_k}$ ($\mathbf{k = 1,2,...,N+1}$) некоторого *опыта* с числами *возможных* исходов *опыта* и его *элементарных* событий: $M = w^N$ и $m_j = (w-1) \cdot w^{N-j}$ ($\mathbf{j = 1,2,...,N}$), $m_{N+1} = 1$ $\{\mathbf{2}\}$.

В примерах увеличение числа N *элементарных* событий на число n *не изменяет* вероятности *элементарных* событий с номерами j=1,2,...,N. Они *дополняются элементарными* событиями с номерами j=N+1,N+2,...,N+n, вероятности которых при увеличении числа $N+n$ также *не изменяются*.

При *неограниченном* увеличении числа N получим *бесконечное* (счетное) множество *элементарных* событий. При этом: 1) $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{P(a_N)} = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{P(a_{N+1})} = 0$; 2) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{P(a_j)} = 1$; 3) по числам *возможных исходов опыта* и *элементарных* событий (формулы {1}, {2}) *для любого конечного* значения $k \leq N+1$ вероятности *элементарных* событий вычисляются по *классической* формуле. Для *сложных* событий $\mathbf{A_k}$ имеем *только предельные* значения: 1) $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{P(A_N)} = 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbf{P(A_{N+1})} = 0$; 2) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{P(A_j)} = 1$.

Этот способ применен для того, чтобы показать:

1. При бесконечном (счетном) множестве *элементарных* событий их вероятности могут вычисляться по классической формуле.

2. В аксиоматическом подходе *действительные* числа в общем случае определяют *сложные* события.

3. Из *аксиомы непрерывности* (как и равносильной *расширенной аксиомы сложения*)[58] не следует *непрерывность* вероятностей.

Условия аксиомы непрерывности не выполняются и при задании вероятностей на отрезке $0 \leq r \leq 1$ действительной числовой оси. Из вывода 1 следует: вероятность в любой точке равна 0, но каждая точка соответствует элементарному событию и именно они появляются в экспериментах, т.е. пустого множества на отрезке не существует.

---

[58]**Обе аксиомы приведены в [1,52-53]**

Приложение III. О понятиях *условной* вероятности, *независимости* и *зависимости* событий.

J. Вероятность события $\mathbf{A_1}$, вычисленная *при* *условии*, что произошло событие $\mathbf{A_2}$ называется *условной* вероятностью события $\mathbf{A_1}$ **[11,46]**.

K. Два события называются *независимыми* (*зависимыми*), если появление *одного* из них *не влияет* (*влияет*) на вероятность появления *другого* **[12,45-46]**.

Замечание. Считается: *условие* $\mathbf{P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)}$ $\{1\}$ является *необходимым* и *достаточным* для *независимости* событий. В *аксиотатической* теории оно записывается в виде: $\mathbf{P(A_1|A_2) = P(A_1)}$ *если* $\mathbf{P(A_2)} \neq 0$ *или* $\mathbf{P(A_2|A_1) = P(A_2)}$ *если* $\mathbf{P(A_1)} \neq 0$ $\{2\}$. *Условия независимости* N событий: $\mathbf{P(A_jA_k) = P(A_j)P(A_k)}$, $\mathbf{P(A_jA_kA_m) = P(A_j)P(A_k)P(A_m)}, \ldots,$ $\mathbf{P(A_1A_2 \ldots A_N) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_N)}$ $\{3\}$.

Понятия *независимости* (*зависимости*) событий и *теорема* умножения вероятностей, впервые даны А. Муавром в 1718г [1,57]. Они были придуманы и введены для того чтобы правильно вычислять вероятности событий. Понятия *условной* вероятности у Муавра нет [1,410]: оно содержится в неявной форме в формулировке теоремы умножения вероятностей.

«Понятие условной вероятности является основным инструментом теории вероятностей, и удручает тот факт, что его крайняя простота отчасти затемняется чрезвычайно сложной терминологией. ... Хотя обозначение $\mathbf{P(A|H)}$ само по себе является практичным, его словесная расшифровка этим свойством не обладает и используется реже. ... Короче говоря, наши формулы и символы недвусмысленны, но словесные выражения часто неформальны и требуют четкого истолкования» [6,132-133].

При этом *условия независимости* сопровождаются комментариями вида: **«В практических вопросах для определения *независимости* данных событий редко обращаются к проверке выполнения равенств $\{1\}$ или $\{2\}$. Обычно для этого пользуются *интуитивными* соображениями, *основанными* на опыте. Так, например, ясно, что выпадение герба на одной монете не изменяет вероятности появления герба на другой монете, если только эти монеты во время бросания не связаны между собой .... Эти события *независимы*» [1,56]. «Вся система $\{3\}$ выглядит как сложное множество условий, однако скоро станет ясно, что ее справедливость обычно очевидна и не нуждается в проверке» [6,147].**

Когда появилось понятия *условной* вероятности, точно сказать мы не можем. Возможно, это связано с аксиоматическим подходом, в котором формулы $\{2\}$ принимаются как ее определение [1,57; 6,133; 8,14]. Возможно оно появилось раньше, но это не имеет какого-либо значения. Важны другие обстоятельства.

Во-первых, в теории понятия *условной* вероятности и *независимости* событий считаются взаимосвязанными, что не соответствует реальности.

Во-вторых, до сих пор понятия *условной* вероятности и *независимости* событий нам не понадобились. Это уже говорит о том, что вряд ли понятие *условной* вероятности – «основной инструмент»: мы можем только сказать, что в определенных случаях его применение полезно.

Наши выводы связаны как раз с тем, что **«словесные выражения ... требуют четкого истолкования»**, а это требует пояснения.

Рассмотрим пример решение задачи, иллюстрирующий понятия *условной* вероятности и *зависимости* событий [12,9]. Примеры такого типа часто используются в теории вероятностей для этой цели.

***Пример 1*. В урне находится m_1 белых и m_2 черных шаров, $m_1+m_2 = M$. Из урны извлекается наугад один шар, который не возвращается в урну (выбор без возвращения). Необходимо определить вероятность появления *белого* шара при $N < m_1$ отборах. Вероятность появления белого шара при 1-м отборе (событие $\mathbf{A_1}$) – $p_1^1 = \mathbf{P}(\mathbf{A_1}) = m_1/M$.**

При 2-м отборе вероятность его появления (событие $\mathbf{A_2}$), *при условии*, что произошло событие $\mathbf{A_1}$, равна: $p_1^2 = \mathbf{P}(\mathbf{A_2}|\mathbf{A_1}) = (m_1 - 1)/(M - 1)$. Вероятность появления белого шара при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$ (событие $\mathbf{A_n}$), *при условии*, что произошло событие $\mathbf{A_1} \cdot \mathbf{A_2} \cdot ... \cdot \mathbf{A_{n-1}}$, равна $p_1^n = \mathbf{P}(\mathbf{A_n})|[\mathbf{A_1} \cdot \mathbf{A_2} \cdot ... \cdot \mathbf{A_{n-1}}] = (m_1 - n)/(M - n)$ $\{\mathbf{1.a}\}$. При $N < m_1$ отборах вероятность появления *белого* шара (событие $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_N$) равна $P(A) = p_1^1 \cdot p_1^2 \cdot ... \cdot p_1^N$ $\{\mathbf{1.b}\}$. Вероятность появления черного шара при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$ (событие $\mathbf{B_n}$) *при условии*, что произошло событие $[\mathbf{B_1} \cdot \mathbf{B_2} \cdot ... \cdot \mathbf{B_{n-1}}]$ $p_2^n = \mathbf{P}(\mathbf{B_n})|[\mathbf{B_1} \cdot \mathbf{B_2} \cdot ... \cdot \mathbf{B_{n-1}}] = (m_2 - n)/(M - n)$ $\{\mathbf{2.a}\}$. Вероятность появления *черного* шара (событие $\mathbf{B} = \mathbf{B_1} \cdot \mathbf{B_2} \cdot ... \cdot \mathbf{B_N}$) при $N < m_2$ отборах равна $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = p_2^1 \cdot p_2^2 \cdot ... \cdot p_2^N$ $\{\mathbf{2.b}\}$.

Из *условий* $\{\mathbf{3}\}$ следует: события $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_N}$ (**или** $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, ..., \mathbf{B_N}$) *зависимы. При условии* означает, что оно должно быть выполнено, т.е. событие $\mathbf{A_1}$ (**или** $\mathbf{B_1}$) – должно быть *достоверным.* Однако при отборе наугад одного шара из урны может появиться как белый, так и черный шар, т.е. условие не выполняется. Чтобы выполнить условие необходимо теоретически (**т.е. мысленно, виртуально**) вычислить вероятность появления белого (**черного**) шара до отбора. Затем, заглянув в урну, найти белый (**черный**) шар и извлечь его. Далее операции повторяются. Отсюда следует:

Достоверность появления белого* (черного) *шара* (событий $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \dots \mathbf{A_k}$ или $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, ..., \mathbf{B_N}$) *при каждом извлечении, может быть обеспечена только проведением реальной операции – целенаправленным извлечением белого шара из урны.

Очень не естественный способ обеспечения *достоверности* события. В теории об этом не говорится, а в практике он не применяется (**для**

«предсказания» появления события применяется результат теоретического решения, но он неточен).

Это связано с тем, что при отборе наугад одного шара из урны, появление белого шара является только *предположением*[59]. Следовательно, необходимо учитывать, что при *каждом* вынимании *возможно* появление и *черного* шара.

Дело как раз в том, что при решении задач происходит «путаница» между выражениями «*при условии*» и «*в предположении*». Это приводит к неправильному пониманию и применению *условной* вероятности событий, усложнению решения и (**в определенных случаях**) к неточному решению задач. Покажем это на более сложном примере.

***<u>Пример</u>* 2. Пусть в урне находятся одинаковые непрозрачные сферы с номерами** $j = 1, 2, ..., K$ **по числу** m_j^0 **сфер каждого номера,** $M^0 = \sum_{j=1}^{K} m_j^0$ **(индекс 0 означает, что отбора не было). Номера находятся *внутри сферы*. Т.е. имеем исходный (простой) *опыт* с множеством *элементарных* событий** $\mathbf{a_j^0}$**,** $\mathbf{P}(\mathbf{a_j^0}) = m_j^0/M^0$**, *признак* появления *которых* скрыт. Полагаем (как и в примере 1): 1)** $m_j^0 > N$ $(j = 1, 2, ..., K)$**; 2) после отбора наугад одной сферы из урны она не возвращается.**

При случайном отборе одной сферы из урны появление *элементарного события* с конкретным номером $j = k1$ (**он скрыт**) *не достоверно.*

В этом случае справедливо только *предположение*:

I. *В результате вынимания с номером* $n = 1, 2, ..., N$ ***может появиться только одна* сфера с номером: «*или 1, или 2, . . . , или K*». Т.е. возможно появление только одного *из множества элементарных* событий *опыта*: «*или*** $\mathbf{a_1^n}$**, *или*** $\mathbf{a_2^n}$**,. . . , *или*** $\mathbf{a_K^n}$**».**

Однако, для последующего сравнения, сначала используем выполнение *условия достоверности* с *целенаправленным* отбором.

<u>Решение 1</u>. **Осуществить это можно тогда, когда в урне находятся не сферы, а шары с номерами на поверхности. После вычисления вероятности появления шара с номером** $j = k1$ $(k1 = 1, 2, ..., K)$**, будем целенаправленно отбирать его из урны. Отбор шара из урны изменяет *внутреннее условие* проведения *опыта,* которое привело к изменению вероятностей. Следовательно (вывод W.1, стр.14), имеем *другой опыт* с тем же числом *элементарных* событий, но с другими вероятностями их появления. При числе** $n = 1, 2, ..., N$ **отборов имеем (с учетом исходного *опыта*)**

[59] **Предположение, в отличие от условия, определяет только возможность чего-либо, а, следовательно, необходимо рассматривать и другие возможности. Формулировка «в предположении, что произошло событие B» встречается в работах (пример 1 в приложении I, формулировка теоремы умножения вероятностей в редакции Т. Байеса [1,411])**

$n+1$ *опытов* (*виртуальных* урн) с вероятностями *элементарных* событий $\mathbf{a_j^n}$: $p_{k1}^n = [\mathbf{P}(\mathbf{a_{k1}^0}) - n/M]/(1-n/M)$ $(j = k1)$ и $p_j^n = \mathbf{P}(\mathbf{a_j^0})/(1-n/M)$ $(j \neq k1)$ $\{\mathbf{3.a}\}$. Вероятность одновременного появления события $\mathbf{a_{k1}^0}$ в $N+1$ *опытах* определяется *совмещением опытов* (определение 5, стр.30) и равна $\mathbf{P}(\mathbf{a_{k1}^N}) = p_{k1}^0 \cdot p_{k1}^1 \cdot ... \cdot p_{k1}^N$ $(k1 = 1, 2, ..., K)$ $\{\mathbf{3.b}\}$.

Пусть число *возможных* исходов *элементарного* события $\mathbf{a_1^0}$ намного больше суммы *возможных* исходов всех других *элементарных* событий. Например, при значениях $m_1^0 = \mathit{9990}$, $M^0 = \mathit{10000}$ и $K = 11$. В этом случае мы будем практически уверены, что при не очень больших значениях N будут появляться возможные исходы только события $\mathbf{a_1^0}$. Однако это не гарантирует, что при N отборах не появится какое-либо другое *элементарное* событие. Учитывая, что при оборах вероятность события a_1^0 уменьшается, а других *элементарных* событий – увеличивается. Такая «неприятность», несмотря на «практическую уверенность», время от времени в практике случается. Например, при контроле качества изделий. Формулы $\{3.b\}$ не предусматривают того, что это может случиться.

При решении мы даже не упоминали о понятиях *условной* вероятности и *независимости* событий. Использован вывод W.1 (**стр.14**) и понятие *совмещения опытов*. Теперь рассмотрим естественный способ обеспечения выполнения *условия*, при котором *элементарное* событие неизбежно происходит.

<u>*Решение 2*</u>. ***После каждого отбора будем вскрывать сферу*[60] (т.е. определять ее номер). Это обеспечивает *достоверность элементарного* события $\mathbf{a_{kn}^n}$ с номером $j = kn(kn = 1, 2, ..., K)$ при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$. Этот случай отличается от решения 1 тем, что при каждом отборе может появиться *элементарное* событие $\mathbf{a_j^0}$ с любым номером $j = 1, 2, ..., K$. Пусть при отборе с номером $n = 1, 2, ..., N$ появилась сфера с номером $j = kn$ $(kn = 1, 2, ..., K)$, т.е. *элементарное* событие $\mathbf{a_{kn}^{n-1}}$. Получим *опыт* (*виртуальную урну*) с номером $n = 1, 2, ..., N$. Вероятностями *элементарных* событий *опыта*: $\mathbf{P}(\mathbf{a_{kn}^n}) = [\mathbf{P}(\mathbf{a_{kn}^{n-1}}) - 1/M^{n-1}]/(1 - 1/M^{n-1})$ $(j = k1)$, $\mathbf{P}(\mathbf{a_j^n}) = \mathbf{P}(\mathbf{a_j^{n-1}})/(1-1/M^{n-1})$ $(j \neq k1)$ $\{\mathbf{4.a}\}$. Верхний индекс $n-1$ в формулах означает, что значения получены при предыдущем отборе.**

Таким образом, в результате N отборов имеем $N+1$ *опытов* (*виртуальных урн*) с вероятностями *элементарных* событий, определяемых формулами $\{\mathbf{4.a}\}$. Нам необходимо определить вероятность $\mathbf{P}(\mathbf{A_N})$ события $\mathbf{A_N} = \Pi_0^N \mathbf{a_{kn}^n}$ при *совмещении* $N+1$ *опытов*. Очевидно, что при отборах могут появляться *элементарные* события с одинаковыми номерами, а некоторые могут вообще не появиться. Учитывая это, положим, что *элементарное* событие $\mathbf{a_{kn}^0}$ $(kn = 1, 2, ..., K)$ появилось в N отборах n_{kn} раз $\sum_{v=1}^N n_v = N$. Тогда вероятность $\mathbf{P}(\mathbf{A_N})$ имеет вид $\mathbf{P}(\mathbf{A_N}) = \Pi_{n=0}^N]\mathbf{P}(\mathbf{a_{kn}^0}) - n_{kn}/M^0]/(1-n/M^0)$ $\{\mathbf{4.b}\}$.

---

[60]**В примере 1 и решении 1 задачи примера 2 это соответствует невозвращению случайно отобранного шара**

И здесь нам не потребовались понятия условной вероятности и *независимости* событий. Полученное решение учитывает возможность появления «практически невозможных» событий. Теперь построим решение на основе *предположения* **I**. Можно попытаться построить решение, используя понятия *условной* вероятности, но сделать это не просто[61].

Решение 3. **Этот случай отличается от решения 2 тем, что номер отобранной сферы $j = k1$ неизвестен. Следовательно, это может быть *элементарное* событие $\mathbf{a}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{k1}}$ с любым номером $k1 = 1, 2, ..., K$. Учитывая все эти возможности, при 2-м отборе необходимо рассматривать K *виртуальных опытов* (урн) с числом *возможных* исходов каждого из *опытов*, которые определены в решении 1. *Предположение* «*или* $\mathbf{a}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{1}}$, *или* $\mathbf{a}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{2}}$,. . . , *или* $\mathbf{a}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{K}}$» соответствует *объединению опытов* (определение 5, стр.32). Шары из K урн смешиваются в одной, т.е. имеем 2-й тип *объединения* (определение 6, стр.34). Учитывая, что *опыты* полностью *пересекаются* (определение 8, стр.42), получим *виртуальный объединенный опыт* (одну виртуальную урну) с числами возможных исходов $K \cdot M^1$ *опыта* и элементарных событий $K \cdot m^0_j - 1 (j = 1, 2, ..., K)$. Их вероятности равны $\mathbf{P}(\mathbf{a}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{j}} = [\mathbf{P}(\mathbf{a}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{j}}) - 1/(K \cdot M^0)]/(1 - 1/M^0)$ $(j = 1, 2, ..., K)$. Второй отбор выполняется из этой *виртуальной* урны. Опять получим K *виртуальных урн* и снова используем 1-й тип *объединения опытов*. Повторяя эти операции, при отборе с номером $n = 0, 1, 2, ..., N$ получим *объединенный опыт* с *элементарными* событиями $\mathbf{a}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}$: $\mathbf{P}(\mathbf{a}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j}}) = [\mathbf{P}(\mathbf{a}^{\mathbf{0}}_{\mathbf{j}}) - n/(K \cdot M^0)]/(1 - n/M^0)$ $(j = 1, 2, ..., K)$ {5.a}. Появление *элементарного* события с номером $j = kn$ $(kn = 1, 2, ..., K)$ в $n = 0, 1, 2, ..., N$ *опытах* (событие $\mathbf{A}_{\mathbf{N}}$) соответствует *совмещению опытов*. Вероятность его появления в N *опытах* равна: $\mathbf{P}(\mathbf{A}_{\mathbf{N}}) = \Pi^N_{j=0}[\mathbf{P}(\mathbf{a}^{(\mathbf{0})}_{\mathbf{kn}}) - j/(K \cdot M^0)]/(1 - j/M^0)$, $(kn = 1, 2, ..., K)$, $(N = 1, 2, ...)$ {5.b}.**

В этом решении также не было упоминания о понятиях *условной* вероятности и *независимости* событий. В решениях 1-3 изменяется *внутренние условия* проведения *опытов*, однако все *виртуальные опыты* проводятся при *неизменных условиях.* Это привело к существенному упрощению решения задачи: при этом оно определено для всех *элементарных* событий исходного *опыта.*

Обратимся к задаче, данной в работе [6,137] (**пример 10, стр.24**). Приведем комментарии к решению задачи из работы:

«Чтобы *придать* нашему *образному* *описанию* *точный* *математический* *смысл*, заметим, что оно *определяет* *условные* вероятности, из которых могут быть *вычислены* некоторые *основные* вероятности. . . . Точные выражения для вероятностей получить нелегко, за исключением следующего, самого важного и лучше всего изученного частного случая. *Схема Пойа.* Характеризуется значениями *c>0* и *d=0*» (стр.138). Далее, при рассмотрении «независимых» испытаний: «*Выбор без возвращения.* . . . Таким образом, выборка объема r без возвращения превращается в последовательность r экспериментов. Мы припишем равные вероятности всем исходам отдельного эксперимента и

[61] **Можно попробовать сделать это на примере 1**

постулируем независимость r экспериментов. ...Мы видим, что понятие независимых испытаний позволяет изучать выбор как последовательность независимых операций» (стр.150).

Используя вывод W.1, понятия *объединения* и *совмещения опытов* мы получим также (**задача в примере 2**) два решения. И в этом случае нам не потребуется ни понятие *условной* вероятности, ни приписывания **«равных вероятностей всем исходам отдельного эксперимента»**, ни постулирования **«независимости r экспериментов»**. А решение задачи существенно упрощается. Отметим следующее:

1. Решение 3 дает *точное* прогнозируемое значение вероятности появления *элементарного* события при N случайных отборах. Отметим, что оно соответствует последовательному отбору, который применяется при проверке качества изделий в производстве.

2. По решению 2 определяется вероятность появления *элементарного* события по *экспериментальным* результатам N случайных отборов (т.е. после проверки качества изделий).

3. Решение 3 позволяет учитывать появление *в экспериментах* маловероятных событий.

Примеры *зависимости* и *независимости* событий (**простого**) *опыта*, хотя и редко, но тоже иногда «попадаются» в литературе.

***<u>Пример 3</u>*. Однократное бросание игральной кости: a_j ($j=1,2,\dots,6$ – число очков) – *элементарные* события *опыта*. Вариант: a) событие $A_1 = a_1 + a_2$ – выпадение числа очков не больше 2-х; b) событие $A_2 = a_1 + a_2 + a_3$ – выпадение числа очков не больше 3-х. В обоих вариантах событие $B = a_2 + a_4 + a_6$ – выпадение четного числа очков [14].**

Пояснение в [14]. «Вероятности событий:$P(A_1) = 1/3$, $P(A_2) = 1/2$, $P(B) = 1/2$. Условные вероятности – $P(B|A_1) = 1/2$, $P(B|A_2) = 1/3$. В соответствии с *условием* (2): в варианте a) – $P(B) = P(B|A_1)$, события A_1 и B *независимы*; в варианте b) – $P(B) \neq P(B|A2)$, события A_2 и B *зависимы*». Но с другой стороны: в обоих вариантах вероятности п*роизведений* A_1B, A_2B (и A_1A_2) событий выражаются через *условную* вероятность $P(A_1B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1)$, $P(A_2B) = P(A_2) \cdot P(B|A_2)$ (и $P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$). Из условия (1) следует, что события *в обоих вариантах* (а также A_1 и A_2) *зависимы*. Таким образом, получаем противоречие выводам при использовании *условий независимости* событий в вариантах {1} и {2}.

В события $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ и **B** входит одно *одинаковое элементарное* событие a_2, следовательно, они *совместимы* (**определение 7, стр.37**). Противоречие определяется тем, что *условная* вероятность связана с *совместимостью* событий *опыта*, но не имеет отношения к *зависимости* (*независимости*) событий. Появление *элементарного* события a_2 является признаком появление событий $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{B}$ и их *произведений*, но они являются искусственными образованиями и *никогда* не появляются в *эксперименте ни по отдельности, ни вместе.* А понятие *условной* вероятности требует проведения лишних операций, «запутывает» понимание теории и для *опыта* является просто лишним.

Считается, что *независимость* N событий $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_N}$ обеспечивается при выполнении системы условий $\{\mathbf{3}\}$, ибо попарной независимости (**т.е. выполнения условий** $\mathbf{P(A_j A_k) = P(A_j)P(A_k)}$ $(j, k = 1, 2, ..., N)$) недостаточно. Чтобы показать это, даются примеры вида: **3-и грани тетраэдра выкрашены в красный (событие A), зеленый (событие B) и синий (событие C) цвета соответственно, а 4-я – в 3-и этих цвета (событие ABC) [1, 58].** Мы слегка усложним задачу.

***Пример 4*. Одна урна содержит 1 белый шар, 4 черных, 6 красных, 9 синих шаров и 10 шаров с номером 3. Вторая урна содержит: белые шары с номерами 1,3,5,6; черные шары с номерами 1,2, 4-7; синие шары с номерами 1-10. Имеем *одномерный опыт* (5 *элементарных* событий $M^1 = 30$) и *двумерный опыт* (20 *элементарных* событий $M^2 = 20$). Смешаем шары в одной урне и будем вынимать из нее наугад один шар[62]. Требуется определить вероятность появления шара с одним одинаковым признаком злементарного события (т.е. с отдельными одинаковыми метками – определенным цветом или номером).**

По *объединенному опыту* (25 *элементарных* событий, $M^o = 50$), учитывая, что числа *возможных* исходов *элементарных* событий не изменяются (замечание 12, стр.40) легко определяются вероятности искомых и других событий. Например, вероятность появления шара: 1) с *меткой* «черный цвет» (событие A) $\mathbf{P(A)} = (4+6)/50$; 2) с *меткой* «номер 3» (событие B) $\mathbf{P(B)} = (10+2)/50$; 3) или события A, или события B (учитывая, что события совместимы, замечание 15, стр.46) – в оба входит элементарное событие с метками «белый шар с №3») $\mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)} = (1/5 + 6/25 - 1/50) = 21/50$.

Ни понятие *независимости*, ни *условной* вероятности не упоминались при решении задачи. И последний пример: - выборка с возвращением.

Пусть в примере 1 после отбора шар возвращается в урну. *Опыт* повторяется при *неизменных условиях.* Требуется определить вероятность одновременного появления *элементарных* событий $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ при N отборах. Имеем *совмещение* N *опытов* с 2-мя *элементарными* событиями $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{P(a_1)} = m_1/M$ и $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{P(a_2)} = m_2/M$. Вероятность *одновременного* появления *элементарных* событий $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ равна $(m_1^{N-n} + m_2^n)/M_N$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$.

Понятие *независимости* событий здесь также не упоминается, а снова использованы вывод W.1 (**стр.14**) и понятие *совмещения опытов.*

Отметим, что существующее понимание *независимости* (*зависимо-*

[62] **Полагаем, что шары обоих урн не отличаются на ощупь и тщательно перемешаны**

сти) в теории вероятностей приводит не только к противоречивым выводам (**пример 3, стр.60**), при применении *условий* в 2-х вариантах, но и к противоречиям между понятием и *условиями независимости*. Это отчетливо проявляется при применении к случайным величинам [10,96-101].

Иначе обстоит дело с понятием *условной* вероятности. Примеры, когда это понятие является лишним и усложняет решение задачи, можно продолжить. Но не меньше можно привести примеров, когда <u>*условие достоверности*</u> события <u>*безусловно*</u> <u>*выполняется*</u>.

Например. I. 1. Поражение цели возможно только при условии попадания в цель. 2. Разрушение детали возможно при условии, что действующая нагрузка превышает ее прочность. II. Изучение влияния: 1. Вакцинации, условий обитания, труда и т.п. на заболеваемость. 2. Температуры и технологии на прочность материала, вида и направления и действующей нагрузки на прочность детали. 3. Тех или иных факторов (например, расстояние до цели, погодные условия) на точность стрельбы и т.п.

Во всех этих случаях понятие *условной* вероятности очень полезно. Его применение позволяет изучать влияние тех или иных факторов на вероятность (**например, попадание в цель и ее поражение при оценке эффективности применения оружия**) раздельно, что приводит к существенному уменьшению затрат. Но в каждом из них прослеживается четкая связь *условной* вероятности с *условиями* проведения *испытания*.

Таким образом, проведенный анализ показал:

W.1 ***В*** **(простом)** ***опыте понятие условной вероятности связано с понятием совместимости сложных событий.*** **Оно** ***является избыточным.***

W.2 ***Понятие независимости и зависимости связаны с условиями*** **(внутренними или внешними)** ***проведения испытания.*** **При** ***неизменности условий испытания*****, вероятности его событий** ***не изменяются.***

W.3 ***Понятие условной вероятности можно и необходимо применять, если реально изменяются условия проведения испытания*** **(например, вводятся некоторые дополнительные условия). Это упрощает решение задач.**

Приложение IV. Об операции *разности* событий. Торемы о *разности* и *делении* вероятностей

Приведем ее формулировку из работы [6,34], которая близка к формулировке в теории множеств [24,9; 25,6]:

«Событие B–A содержит все точки[63] события B, не являющимися точками события A».

Иногда она формулируется для событий. Например: «происходит событие A, но не происходит событие B». Естественный вопрос: *если событие* B *не происходит, то почему оно вообще нас интересует*? Отметим следующее: В любой работе есть *теоремы* о вероятности *произведения* и *суммы* событий, вот только *теорема* о вероятности их *разности* «как-то не повстречалась»й. *Почему*? И второе: ни в одной из просмотренных мы не увидели даже попытки какого-либо анализа, а основной вопрос лежит «в этой плоскости».

Коротко о том, почему определение разности множеств не совсем подходит к событиям. Запишем два положения теории множеств [25,6-7,10].

1. Множество A является подмножеством множества B: – все элементы A являются элементами B. 2. Обозначение $\{a, b, c\}$ значит, что множество содержит элементы a, b, c и не содержит других. Если среди элементов a, b, c есть равные, оно может содержать один или два элемента.

Из них следует: *одинаковые* элементы возможны в 2-х подмножествах *одного* множества или *в разных* множествах. Если исходить из *теории событий*, то получим, что *операция разности применима* только к *совместимым* событиям (**простого**) *опыта.*

Как-то узко и, вообще говоря, непонятно зачем нужна эта орерация. Будем исходить из теорем о вероятностях *суммы* и *произведения*[64] вероятностей.

Если $C = AB$ – *произведение* событий A и B (т.е. события *совместимы*) *опыта* или *объединенного опыта*, а V – событие, содержащее только события A и B, то справедлива теорема $P(A) = P(V) - P(B) + P(AB)$ {1}.

Если $C = A^1A^2$ – *произведение* событий A^1 и A^2 2-х *совмещаемых опытов*, а V – событие, содержащее только события A^1 и A^2, то для них справедливы теоремы: $P(A^1) = P(A^2)/P(V)$ {2}; $P(A^1) = P(V) - P(A^2) + P(A^1A^2)$ {3}.

К вероятностям $P(A)$ и $P(B)$ событий, как действительным числам, можно применять операцию деления $P(A)/P(B)$, но при условии $P(A)/P(B) \leq 1$. В

---

[63] **Напомним: точка в аксиоматической теории соответствует элементарному событию**

[64] **Также как это делается в теории действительных чисел [22,12-16,28-34]. Но опрерации с вероятностями не должны противоречить операциям с событиями**

некоторых случаях это бывает необходимо. Но никоим образом не связывать ее с *условной* вероятностью и *зависимостью* событий (выводы W.1-W.3, стр.58).

Теоремы {**1**}-{**3**} – это просто более широкое применение тезиса: вычисление вероятностей одних событий по вероятностям других событий. Чего не скажешь о применении операции разности, взятой из теории множеств.

Приложение V. О геометрическом представлении *видов испытаний.*

Геометрическое представление *видов испытания*, по сути, является «прелюдией» перехода от событий к случайным величинам, поэтому оно рассмотрено в конце работы.

В работах по теории вероятностей оно применяется редко. В основном: – диаграммы Эйлера-Венна для иллюстрации алгебры событий и изображения функций распределения. Но часто и этого нет. Какие тому причины – сказать сложно («извечный спор между алгебраистами и геометрами» что ли?).

Геометрическое представление (**в том числе, в виде таблиц**) наглядно и чрезвычайно полезно[65]. Представление *видов испытаний* в виде таблиц уже позволило достаточно просто показать отличие их свойств и *правильно* построить *вероятностные* модели. Особенно важно применение геометрического представления для *правильного* построения *математических* моделей случайных величин. Оно позволяет избежать возможных ошибок при выводе тех положений теории, которые, вообще говоря, связаны с геометрией.

Геометрическое представление *видов испытаний* дано на рис.1-4. Точки на сплошных линиях и штриховых стрелках соответствуют *элементарным* или *сложным* событиям. Точки на линиях можно расставлять на произвольных расстояниях друг от друга.

Одномерный опыт представляется в виде точек, расположенных на прямой, ломанной или кривой линии (**рис.5**). Отметим, что в работах иногда «встречается» его представление только на прямой линии с равномерным расположением точек, но редко.

Результат *объединения* 2-х *опытов* – *одномерный объединенный опыт*. Поэтому представление *объединения* 2-х *опытов* подобно (**рис.6**) представлению *одномерного опыта*.

Геометрические представления (**как и представления в виде таблиц**) *двумерного опыта* (**рис.7**) и *совмещенного опыта* (**рис.8**) подобны.

***Элементарные* события, как исходные, выделены прямоугольником с утолщенными линиями, а *сложные* события – прямоугольником с тонкими**

---

[65]**Мы разделяем точку зрения, высказанную Р. Дедекиндом [23,9]: «При изложении понятия о приближении переменной величины к постоянному пределу . . . я прибегал к геометрической наглядности. . . . Да и теперь я . . . считаю такое привлечение геометрической наглядности . . . чрезвычайно полезным, и даже неизбежным . . . . Но . . . этот способ . . . не может иметь никакого притязания на научность» [23,9]**

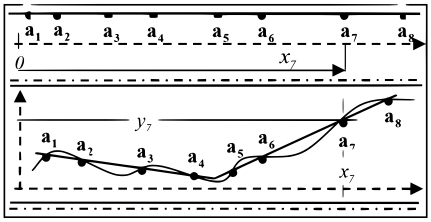

Рис. 5: ***Одномерный опыт***

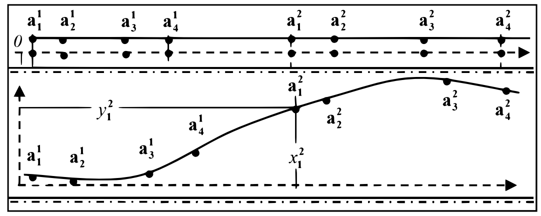

Рис. 6: ***Объединенный опыт***

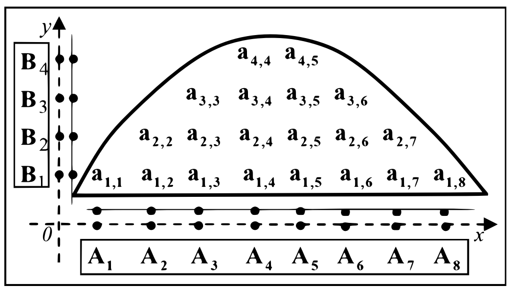

Рис. 7: ***Двумерный опыт***

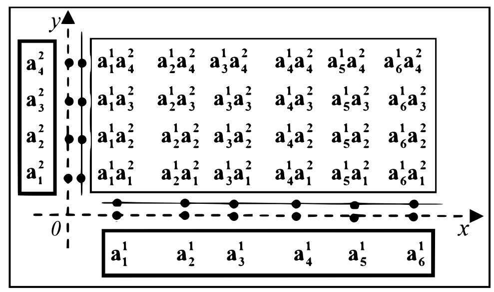

Рис. 8: ***Совмещенный опыт***

линиями. Вместо точек показаны события, которые определяют двухмерность. Точки на отрезках прямых относятся к событиям, показанных слева и снизу от прямоугольников, определяющих двухмерность.

Итак, на отрезке линии поставлены точки, которые соответствуют *элементарным* событиям. Точки, как и события, – *недействительные* величины.

Точки не отличаются друг от друга, т.е. множество имеет только один элемент (п.2 приложения IV, стр.63). Для отличия элементов обозначим точки последовательностью чисел $j = 1, 2, ..., N$ для *одномерных* или парами чисел (j, k) $(j = 1, 2, ..., N;\ k = 1, 2, ...M)$ для двумерных *испытаний.* В теории множеств *действительные* числа – это элементы множества, такие же, как точки или события (например, изображения «еж», «ель», «3», «кол», «меч» и «дом» на гранях кубика). Так как точки соответствуют *элементарным* событиям, то можно записать $j \to \mathbf{a_j}$; $(j, k) \to \mathbf{a_{j,k}}$, $(j, k) \to \mathbf{A_{j,k}}$ или наоборот $\mathbf{a_j} \to j$; $\mathbf{a_{j,k}} \to (j, k)$, $\mathbf{A_{j,k}} \to (j, k)$, что определяет *однозначное соответствие*[66] между точками и событиями. *Взаимная однозначность* требует, чтобы *каждому элементу первого* множества соответствовал *ровно один элемент второго* и наоборот.

Введем систему *действительных числовых* координат (**штриховые стрелки на рис.1-4**). Точки на координатах соответствуют точкам на линиях. Теперь точку можно характеризовать не каким-то безличным элементом из

[66] **Такая запись принята в теории множеств**

теории множеств, а *действительными числами* – значениями координат. Они характеризуют положение точки в пространстве и позволяют отличать одну точку от другой. Очень полезно: мы имеем гораздо больше информации о точке. Но сама точка как была, так и осталась *неопределяемым объектом* геометрии.

Вопрос 1: Можно ли записать равенства ***1,7=«еж»****,* x_7 *=****«кол»*** *или* $(x_7, y_2) = \mathbf{a_{7,2}}$?

Обратимся к некоторым пояснениям понятия случайной величины.

1. «*Функция, определенная на пространстве элементарных событий, называется случайной величиной*» [6,226]. 2. «Случайная величина X есть функция, определенная на данном пространстве элементарных событий, т.е. X задает правило, по которому каждому элементарному событию соответствует некоторое действительное число. Распределение вероятностей случайной величины есть функция, определенная в (1.1)» [6, 231]. 3. Функции (1.1) вводится раньше: «Пусть X – случайная величина, а $x_1, x_2, ...$ **– ее значения; в дальнейшем** x_j**, как правило, будут целыми числами. Совокупность всех элементарных событий, на которых X принимает фиксированное значение** x_j**, образует событие** $\mathbf{X} = x_j$**; его вероятность обозначается** $\mathbf{P}(\mathbf{X} = x_j)$**. Функция** $\mathbf{P}(\mathbf{X} = x_j) = f(x_j)$ $(j = 1, 2, ...)$ **(1.1) называется распределением (вероятностей) случайной величины X» [6,227].**

Из этих пояснений появляются другие вопросы.

Вопрос 2: Определяют ли записи $j \to \mathbf{a_j}$, $(j,k) \to \mathbf{a_{j,k}}$ *или* $(j,k) \to \mathbf{A_{j,k}}$ *какие-либо функции*?

Вопрос 3: Какое используется правило (**цитата 2**), *чтобы элементарному событию – недействительной величине – присвоить значение действительного числа*?

Вопрос 4: Что означает равенство $X = x_j$*: элементарные или сложные события* (**цитаты 2-3**)?

Вопрос 5: Какой вероятности соответствует запись $\mathbf{P}(\mathbf{X} = x_j)$?

Вопрос 6: Как правильно записать функцию $\mathbf{P}(\mathbf{X} = x_j) = f(x_j)$?

При нашем определении *элементарного* события (**стр.29**), его вероятность равна $p_j = \mathbf{P}(\mathbf{a_j}) = m_j/M$ (**вывод W.8, стр.31**). При расположении точек, соответствующим *элементарным* событиям на прямой линии (**рис.1 сверху**), математическое ожидание равно $M(\mathbf{X}) = \sum_j^N p_j \cdot x_j$, где x_j – координата точки. Его также называют: **«средним значением [1,158-160; 14,87; 15,105], характеристикой положения или центром группирования» [11,79-82; 12,85-86].**

Вопрос 7: *Какое из названий наиболее полно отражает формулу для его вычисления?*

Вопрос 8: *Как вычислить математическое ожидание при представлении испытаний на рис.5* (внизу) *и на рис.6-8*?

«Для подсказки, а не забавы ради» – маленький опус.

Положим, что в точках с координатами x_j, y_k $(j = 1, 2, ..., M;\ k = 1, 2, ..., N)$ расположены (сосредоточенные) массы $m_{j,k}$. Масса системы $M = \sum_1^M \sum_1^N m_{j,k}$ {1}, а приведенная к осям x и y – $m_j^x = \sum_{k=1}^N m_{j,k}$,$m_k^y = \sum_{j=1}^M m_{j,k}$. Координаты центров тяжести систем масс на осях x и y равны $x_c = \sum_{j=1}^M m_j^x \cdot x_j\,/\,M$, $y_c = \sum_{k=1}^N m_k^y \cdot y_k\,/\,M$ {2}. Умножим сумму {1} на сумму координат $x_j + y_k$, получим $\sum_1^M \sum_1^N m_{j,k} \cdot (x_j + y_k) = \sum_1^M \sum_1^N m_{j,k} \cdot x_j + \sum_1^M \sum_1^N m_{j,k} \cdot y_k = \sum_{j=1}^M m_j^z \cdot x_j + \sum_{k=1}^N m_k^y \cdot y_k$ {3}. Разделим {3} на массу M и, учитывая {2}, получим $\sum_{j=1}^M m_j^z \cdot x_j\,/\,M + \sum_{k=1}^N m_k^y \cdot y_k\,/\,M = x_c + y_c$ {4}.

Таким образом, «доказана теорема»: координата центра тяжести 2-х систем масс равна сумме координат центров тяжести этих систем. Можно распространить на любое число систем.

Отметим, что именно запись в виде **{3}** normalsizeв сочетании с формулами **{ 2}** normalsizeиспользуется для «доказательства теоремы о сумме математических ожиданий» (**т.е. «равенства» {4}**) в теории вероятностей. Подобным же образом «доказывается теорема о произведении математических ожиданий», так называемых «независимых» случайных величин.

«Замечательнкя теорема»: не надо думать ни о чем – «сложил и есть результат». *Что скажут на это механики*? Даже догадки как-то строить не хочется. А вот профессионалы по вероятности глубокомысленно произнесут: *вероятность – это не механика*! Мысль в целом правильная, но не в данном случае: разберемся почему.

Мы уже отмечали, что распределения *масс* и *вероятностей* описываются *действительными* функциями *действительных* переменных (**замечания 4 стр.12 и 5, стр.13**), а *их свойства не зависят* от того, в какой области знаний они применяются. Подробно об этом – в другой работе, а сейчас кратко с другой позиции.

Схема Ферми-Декарта превращает точки на плоскости в пары чисел. Кривые – в совокупность таких пар, объединенных уравнениями. *Удобно*? Очень: свойства кривых можно исследовать, используя решения этих уравнений. Это область аналитической геометрии.

Однако это вовсе не означает, что кривые (**поверхности, геометрические фигуры**) ***на плоскости*** (**или в пространстве**) ***стали одномерными: какими они были, такими и остались.***

Определив значения x_c и y_c, надо бы остановиться: мы уже определи координаты центра тяжести системы материальных точек на плоскости, неважно как они расположены: на кривой, или разбросаны по ограниченной части плоскости. Если же мы говорим о системах, то следует учитывать: массы каждой системы, сумму масс всех систем и их взаимное расположение. Механики не забывали и не забывают, что тело имеет пространственные характеристики, а запись в виде *тройных* (*двойных*, когда тело можно считать плоским и т.п.) *сумм или произведений никак на это не влияет*: поэтому «абсурдных теорем» в механике нет.

Напомним, что вероятность *элементарного* события – это отношение $p_j = m_j \,/\, M$ или $p_{j,k} = m_{j,k} \,/\, M$, где m_j (или $m_{j,k}$) и M – возможные исходы *элементарных* событий и *опыта* соответственно (вывод W.8, стр.28). *Чем не «массы» в нашем маленьком опусе*? И учитывать вероятности надо точно также как и массы.

Все это будет подробно рассмотрено в работе, посвященной случайным величинам, а сейчас отметим только то, что *произведения* математических ожиданий, как и *центров* тяжести не существует. О математических ожиданиях и других *числовых* характеристиках распределений можно почитать в работе [9, 64-81]. Она опубликована в интернете (**издательство «Восток – Запад», Вена, Австрия**) на сайтах **books.google.ca** и **play.google.com**. Там Читатель найдет много «неожиданностей», связанных с теорией случайных величин, существующей в настоящее время.

Список литературы

1. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с

2. Л.Е Майстров. Теория вероятностей. Исторический очерк. – ?.: Наука, 1967. – 321с

3. О.Б. Шейнин. Теория вероятностей до П. Л. Чебышёва // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. – № 23. – с. 284-306

4. Я. Бернулли. О законе больших чисел. – ?.: Наука, 1986. – 176с

5. Википедия: История теории вероятностей.

6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с

7. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с

8. А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. – Изд.2-е – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 120с

9. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. East-West Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с

10. С.Н. Берштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.–Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с

11. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Изд. 3-е - М. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. -– 511с

12. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей.- Изд. 7-е – М. Издательский центр «Академия», 2003. -– 576с

13. А.А. Марков. Исчисление вероятностей. -– Изд.4-е -– М.–Л.: -– Госиздат, -– 1924. -– 589с

14. В.И. Гливенко. Курс теории вероятностей. – М.–Л. Государственное объединенное научно-техническое издательство, 1939г. – 220с

15. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с

16. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. Наука, 1980г. – 976с

17. В.В. Ласуков. Случайная математика: учебное пособие. – Томск. Изд-во Томского политехнического университета 2011. – 143с

18. Энциклопедический словарь. Гл. ред. Б.А. Введенский, – Т.1. – М. Советская энциклопедия, 1963. – 656с

19. Энциклопедический словарь. Гл. ред. Б.А. Введенский, - Т.2. – М. Советская энциклопедия, 1964. – 736с

20. С. Н. Ожегов, Н.Ю. Шведова. Толковый словарь русского языка. – Изд.4-е, доп. – М. «Азбуковник», 1997. – 944с

21. I.I. Bondarchuk. Theories of probabilities: contradiction between concepts end experiments, consistent initial system creating. European Journal of Technical and Natural Sciences № 6 2017: p. 23-30

22. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – Изд. 6-е, стереотипное. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966г. – 607с

23. Р. Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. – Изд. 4-е. – Одесса: Mathesis, 1923. – 44с

24. С.А. Ануфриенко. Введение в теорию множеств и в комбинаторику, Учебное пособие. – Екатеринбург. УрГУ, 1998. – 62с

25. Н.К. Верещагин, А. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. – 4-е изд., доп. –М.: МЦНМО, 2012. – 112с