«*То все ошибки, все накладки*
И заблуждения веков»
Автор неизвестен.

УДК 519.211; ББК 22.171

Теория вероятностей 2: *идеал* или *иллюзия*?
ч.II. *О распределениях скоростей* (энергий) Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Диррака

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

7 февраля 2019 г.

На проведение исследований, посвященных анализу физической задачи – модели идеального газа, находящегося в равновесном состоянии, автора вдохновила замечательная работа В. Феллера "Введение в теорию вероятностей и ее приложения", которая была прочтена с большим опозданием. Упоминания о статистической физике есть и в других работах по теории вероятностей, но они «тусклы и невнятны», поэтому эта тема осталась «вне зоны внимания».

На основе метода ячеек Больцмана проведен анализ: 1. Задачи «о размещении шаров по урнам» с *позиции математических моделей*, применяемых для ее решения. 2. Влияние физической модели и постановки задачи на вероятностные модели и взаимосвязь моделей.

Анализ влияния физической модели задачи на вероятностную модель привел к некоторым неожидаемым результатам. Во-первых, он показал, что физическая модель, созданная Максвеллом, обуславливает 2-е разные постановки вероятностной задачи: 1) определение среднего числа частиц, скорости которых лежат между данными пределами; 2) определение среднего числа частиц, находящихся в некоторой части объема, занимаемого газом. Во-вторых, анализ выявил противоречия между некоторыми «декларируемыми» утверждениями статистической физики и результатами, полученными на основе метода ячеек с применением моделей существующей теории вероятностей.

Данная статья посвящена применению новой исходной системы теории событий, созданной в [5,9], к анализу конкретной физической задачи: **модели идеального газа, находящегося в равновесном состоянии**[1]**, которая впервые детально разработана Дж.К. Максвеллом.**

Выводы, последовавшие из *анализа* задачи с *позиции математических моделей*, *применяемых* для ее решения, были *неожидаемы*. Это определило необходимость проведения анализа *влияния физической модели и постановки* задачи на вероятностные модели. В результате исследования (первоначально они предполагались как приложеение к работе [5]) «приобрели самостоятельность».

Содержание

[1]**Подробнее об этом – на стр.14-16**

Примечания **1.** Ссылки на работы даются в виде [«№» в списке, № стр.]. Если работ несколько, то они разделяются знаком «;». При ссылках внутри работы указывается положение, на которое дается ссылка, и № страницы на которой оно находится. **2.** Выводы, следующие из анализа, обозначаются номерами W.1, W.2, ... Чтобы обратить внимание Читателя на некоторые важные моменты, следующие из анализа, они выделены как положения и обозначены номерами {A.1}, {A.2}, ... **3.** Понятия, используемые в принятой теории вероятностей, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита с арабскими цифрами. Уточненные предположениия – римскими цифрами, а уточненные и вновь введенные определения понятий – словом «определение» с арабскими цифрами. **4.** При анализе применяется в основном существующая теория событий: применение новой исходной системы дается только по мере необходимости.

Предисловие

Основные законы распределения статистической (классической) физики выведены, исходя из связи скоростей (импульсов, энергий) частиц с координатами.

При выводе распределения Максвелла связь используется непосредственно [3,52: 4,311], а распределения Гиббса – в «завуалированной форме»: в виде фазового пространства [3,102]. Естественно, что при решении вероятностной задачи физиками применялось то, что «предлагала» (да и до сих пор «предлагает») принятая теория вероятностей. С другой стороны, Больцман [3,209] разработал метод ячеек, который тоже широко применяется в статистической физике.

Метод ячеек Больцмана оказался очень подходящим для анализа задачи с позиции теории событий (без обращения к теории случайных величин): при анализе в основном применяется существующая теория.

{A.0} Результаты анализа с позиции применяемых математических моделей, были неожидаемыми и привели автора в замешательство: поэтому было решено провести анализ физической модели задачи и взаимосвязи математических и физической моделей. Анализ (он оказался трудным) привел к тому, что приложение (предполагалось эту часть выпустить как приложение к [5]) «приобрело самостоятельность».

Выводы, следующие из анализа, *существенно влияют на некоторые положения* статистической физики, а это требует, *ясного понимания что, почему и как изменено*, и серьезного обсуждения того, к чему приводят эти изменения. А правильны или нет наши рассуждения – судить Читателю. Анализ дается подробно вынужденно: связано это именно с тем, что существующие понятия сложились давно[2] и *воспринимаются как нечто неизменно данное*. Это обязывает проводить тща-

[2] Даже аксиоматической теории уже почти сто лет

тельный *анализ* того, что *означает каждое из понятий* существующей (**как классической, так и аксиоматической**) теории. Для подтверждения нашего понимания того, что означает рассматриваемое положение, приводятся многочисленные цитаты из работ, а также даются простые примеры, которые выпукло показывают *несоответствие между данным* понятием *математической теории и экспериментами.*

Введение

В конце XVIII века возникла дискуссия [2,405], начатая Даламбером.

Мотивируя тем, что при бросании 2-х монет возможны лишь три события: «*герб-герб*»; «*герб-число*»; «*число-число*», он определил вероятность их появления равной $1/3$. **Другая мотивация: события «*герб-число*» реализуется 2-мя способами: на 1-й монете «*герб*», а на 2-й – «*число*»; на 1-й – «*число*», а на 2-й – «*герб*». В этом случае вероятность появления события «*герб-число*» равна** $1/2$.

Чем закончилась дискуссия, история «умалчивает», но этот и подобные ему примеры встречаются в современных работах иногда, мягко говоря, со странными пояснениями. Например [6,25-26]:

Бросаются «...две *физически различные* монеты ... Модель I казалась бы более естественной, если бы можно было себе представить монеты *физически неразличимыми.* Опыт показывает, что в действительности монеты *ведут* себя как *различимые.* Однако, этот достаточно *очевидный факт* для монет, оказывается неверным для некоторых типов частиц. Бозе и Эйнштейн доказали, что некоторые типы частиц ведут себя как *неразличимые.* Рассмотренный пример показывает, что нельзя слишком полагаться на интуицию: подходящей моделью может оказаться совершенно неожиданная». Модель I – мотивация Даламбера.

Сложно понять, что понимается под *физической различимостью* монет при *одновременном* бросании. *Если бросаются 2-е одинаковых монеты, то можно ли отличить их после падения*?

Применяя высокоточные инструменты, можно, *но в этом нет какого-либо смысла.* Это прекрасно выражено В. Феллером [1,29]: «*Различимы ли шары на самом деле, для нашей теории несущественно.* Если это даже и так, мы можем условиться считать их *неразличимыми*». Что же касается монет, то: 1. Бросая одну монету много раз, мы будем наблюдать *или* «герб», *или* «число» и *ничего другого*. 2. *Комбинации* появляются только при *одновременном* бросании монет. При *одинаковых* монетах, мы будем наблюдать в *экспериментах* 3 комбинации, но появление в *эксперименте* на одной монете «герба», а на другой – «числа», *исключает одновременное* появление «числа» на 1-ой и «герба» на 2-ой монете (как и любой другой комбинации, вывод W.27 [5,40]), следовательно, комбинация «герб-число» будет появляться приблизительно в 2-а раза чаще 2-х других. Т.е. *независимо* от того, *разные* или *одинаковые* монеты, всегда будет 4-е комбинации.

Таким образом, «*очевидный факт* для монет» не очень очевиден. Но внимание к дискуссии привлечено в связи с упоминанием о «совершенно неожиданной модели», о чем подробнее говорится в комментариях, данным в работе [1] к задачам:

«***Пример*** а). **Размещение 3-х шаров по 3-м ящикам**[3]. **Табл.1 содержит все возможные исходы "опыта", состоящего в размещении 3-х шаров по 3-м ящикам**[4]. **Каждое из этих размещений представляет неразложимый исход эксперимента, т.е. элементарное событие» [1,26].** «***Пример*** в). **Случай *неразличимых* шаров. Вернемся к примеру а) и предположим теперь, что все 3-и шара одинаковы. ... В этом случае табл.1 сводится к табл.2 (стр.6), которая определяет новое пространство элементарных событий» [1,29].**

Комментарии. **1. «В примере а) представляется естественным предположение о том, что все элементарные события равновероятны, т.е. что каждое из них имеет вероятность 1/27. Мы можем, отправляясь от этого определения, изучать его следствия»[1,27]. 2. «Соответствующее "естественное" распределение вероятностей представлялось совершенно очевидным каждому и принималось физиками без колебаний. Однако оказалось, что физические частицы не обладают "здравым смыслом", и "естественное" распределение Больцмана пришлось, в одних случаях, заменить распределением Бозе-Эйнштейна, а в других – распределением Ферми-Дирака. Не существовало никаких интуитивных доводов, почему фотоны ведут себя иначе, чем протоны и почему частицы обоих типов не подчиняются "априорным" законам» [1,22].**

3. «Обратимся теперь к примеру в), связанному с размещением 3-х неразличимых шаров по 3-м ящикам. Можно рассуждать так: невозможность различать шары не отражается на сущности физического эксперимента, и остается по-прежнему 27 исходов, хотя только 10 из них оказываются различимыми. Эти рассуждения показывают, что 10 точкам табл.2 надлежит приписать следующие вероятности: 1/27, 1/27, 1/27, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 1/9, 2/9. Следует отметить, что по отношению к большей части приложений, перечисленных в примере 2,в), такое рассуждение звучит убедительно, и это оправдывает указанный способ задания вероятностей, соответствующих точкам табл.2. Исторически это. рассуждение долгое время принималось, как безусловно верное и в статистической механике служило основанием статистики Максвелла-Больцмана для размещения частиц по ячейкам. Тем большее было удивление, когда Бозе и Эйнштейн показали, что определенные типы частиц подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна .... В рассматриваемом случае модель Бозе-Эйнштейна сопоставляет каждому из 10 элементарных событий вероятность 1/10. Этот пример показывает, что *в одном и том же пространстве элементарным событиям вероятности можно приписывать по-разному.* Он поясняет трудное для понимания взаимное действие друг на друга теории и практики и учит нас, в частности, не надеяться особенно на априорные аргументы и быть готовыми принять новые и непредвиденные схемы» [1,39-40].

Последнее предложение в цитате полностью созвучно с нашим пониманием соотношения теории и практики: в основной части работы [5,4-40] мы только тем и занимались, что приводили *систему исходных понятий теории событий в согласие с экспериментами.* «Двигаясь в том же направлении», зададим себе вопрос:

Является ли модель, созданная Бозе, неожиданной, по крайней мере, с точки зрения математики?

Для ответа проведем анализ задачи с *позиции математических моделей*, применяемых для ее решения. Во-вторых, оценим влияние *физической модели и постановки* задачи на *математические модели.*

---

[3] **Далее вместо слова «ящик» будем употреблять слово «урна»**

[4] **Таблицы даны на стр.6. Мы использовали представление таблиц в виде, данном в работе [2,36]. Оно удобнее и нагляднее чем таблица в работе [1,27]**

«— Но ведь в природе так не бывает!
— Природа тут не причем.
Мое уравнение. Что хочу, то и пишу!»
Диалог (Физики шутят)

1. Размещение шаров по урнам и комбинаторика

Начнем с расстановки шаров по урнам, которая проводится в соответствии с 3-мя видами комбинаций [7,199-203]:

Q.1. Перестановка $P_n = n!$ – последовательность n *разных* предметов *с учетом порядка*. Q.2. Размещения $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m-1)$ – любая группа m *разных* элементов составленная из n *разных* элементов *с учетом порядка* в группе. Q.3. Сочетания $C_n^m = A_n^m / P_m$ – любая группа из m *разных* элементов составленная из n *разных* элементов *без учета порядка* в группе.

Рассмотрим отдельно комбинации, связанные с шарами и с урнами.

п.I.1. *Неразличимые шары*. В соответствии с определением, комбинации составляются только для *разных* предметов. Именно поэтому мы выделили в определениях видов комбинаций слово «разные».

> **{A.1} Для *неразличимых* шаров *комбинаций не существует*: из них можно *составить только* N *групп* b, n *по числу* $n = 1, 2, ..., N$ шаров *в группе*.**

п.I.2. *Различимые шары* (например, с *разными* номерами). Число групп b, n не изменяется. Однако шары *разные*. Это позволяет:

> **{A.2} Для *каждой группы* b, n можно *составить комбинации с разными* шарами, учитывая, что *порядок в группе* нас не интересует. Т.е. число *комбинаций в одной группе* равно *числу сочетаний* $C_N^N, C_N^{N-1}, ..., C_N^n, ..., C_N^1, C_N^0$, $(C_N^0 = 1)$ (биноминальные коэффициенты).**

Число $z = 1, 2, ..., Z$ урн не связано с числом шаров N. Урны, сами по себе и не отличаются друг от друга[5]: они *различимы* только тогда, когда в них *помещаются* шары. *Различимость* урн определяется *числами* $n = 1, 2, ..., N$ шаров в группе b, n и *различимостью* шаров.

п.II.1. *Неразличимые шары*. *Различимость* урн определяется только числами шаров в группе. Из групп b, n можно составить самые разные комбинации. Но, во-первых, *в одной урне* может находиться *только одна*

---

[5] По крайней мере, в задаче, которую мы собрались исследовать. В каких-то задачах может быть номера и потребуются, но мы реальных примеров не нашли: может плохо искали

группа b,n **шаров. Во-вторых, *допустимы только те комбинации*, в которых *сумма* шаров в *группах* b,n равна N. При размещении *допустимых комбинаций* групп[6] b,n по Z урнам, их можно дополнять только соответствующим числом групп $b,0$ (пустыми урнами). При значении $Z=1$ имеем размещение одной *допустимой комбинации* b,N. Если значение $Z=2$, то имеем размещения *комбинации*: $b,N-k$; или b,k (k=0, 1, 2, ..., N) (1).**
Увеличение числа урн на число z приводит к дополнению комбинаций (1).
1. Каждой комбинации таким же числом z пустых урн $b,0$. 2. *Допустимыми комбинациями* с другими группами b,n. Например: $Z=3$. 1) $b,N-2$; $b,1$; $b,1$. 2) $b,N-3$; $b,2$; $b,1$. 3) $b,N-4$; $b,3$; $b,1$. 4) $b,N-4$; $b,2$; $b,2$ и т.д. (табл.3, $N=4$)[7]. $Z=4$. 1) $b,N-3$; $b,1$; $b,1$; $b,1$. 2) $b,N-4$; $b,2$; $b,1$; $b,1$ и т.д.

Таблица. 1

abc			*	ab	ab		c	c		-	ac	ac		b	b		-	bc	bc		a	a		*	a	-	a	-	b	-	b	-	c	-	c
	abc		*	c		ab	ab		c	-	b		ac	ac		b	-	a		bc	bc		a	*	b	-	c	-	a	-	c	-	a	-	b
		abc	*		c	c		ab	ab	-		b	b		ac	ac	-		a	a		bc	bc	*	c	-	b	-	c	-	a	-	b	-	a

Таблица. 2

3			*	2	2		1	1		*	1
	3		*	1		2	2		1	*	1
		3	*		1	1		2	2	*	1

Таблица. 3

4			*	3	3		1	1	1	*	2	2		*	2	1	1
	4		*	1		3	3		1	*	2		2	*	1	2	1
		4	*		1	1		3	3	*		2	2	*	1	1	2

Таблица. 4

4				*	3	3	3				1	1	1				*	2	2	2				*	2	2	2		1	1	1		1	1	1		*	1
	4			*	1			3	3		3			1	1		*	2			2	2		*	1	1		2	2	2		1	1	1		1	*	1
		4		*		1		1		3		3		3		1	*		2		2		2	*	1		1	1	1		2	2	2		1	1	*	1
			4	*			1		1	1			3		3	3	*					2	2	*		1	1	1		1	1	1		2	2	2	*	1

Этот процесс увеличения *допустимых комбинаций* продолжается до значения $Z=N$ (табл.2 $N=3$, табл.4 $N=4$). В этом случае *впервые* появляется *размещение с допустимой комбинацией, состоящей только из групп* $b,1$ (т.е. в каждой из Z урн находится по одному шару).

При значениях $Z>N$ *комбинации*, полученные при значении $Z=N$, будут дополняться только группами $b,0$. Общее число *размещений неразличимых* шаров [1,59] – $\mathbf{C^{N}_{N+Z-1}}$ (2).

п.II.2. *Различимые шары. Различимость* урн по числам шаров в группе, дополняется *различимостью* шаров. *Различимыми* становятся *группы с одинаковым* числом b,n шаров, так как в них находятся *разные* шары. Их число определяется (п.I.2, стр.5) сочетаниями $\mathbf{C^{n}_{N}}$. Т.е. для каждого *сочетания* $\mathbf{C^{n}_{N}}$ необходимо составить *размещения* по урнам с *допустимыми комбинациями* групп b,n шаров. В табл.1 *размещения* для *каждого сочетания* $\mathbf{C^{n}_{N}}$ (N=3, Z=3) отделены ячейками с тире. Общее число *размещений различимых* шаров [1,47] – $Z^{\mathbf{N}}$ (1).

Номера урн и размещений *допустимых комбинаций* групп шаров по урнам не приведены в таблицах преднамеренно: *число размещений не зависит от них.* Но в работах дается другая трактовка, например:

«В приведенном выше примере мы рассматривали *неразличимые* шары, но в табл.2 еще *различаются* 1-й, 2-й и 3-й ящики, и их порядок существен. Мы можем пойти еще дальше и считать, что даже ящики *неразличимы* (например, ящики можно выбирать наудачу независимо от их содержимого). Если и шары, и ящики неразличимы, то возможны только три размещения, а именно: {*|—|—}, {**-|-*-|—} и {-*-|-*-|-*-}» [1,30].**

[6] **Группы b,n называют числами заполнения: мы это название применять не будем**

[7] **В табл.2-4: 1) даны числа шаров в урнах, ибо в этом заключено отличие урн; 2) размещения по урнам, полученные для соответствующей комбинации групп шаров отделены ячейкой с 3-мя «звездочками»**

Покажем, что *неразличимость* урн не измененяет числа *размещений.*

Таблица 5

I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		IX		X	
3	A		A		A	2	A	2	A		A	1	A	1	A		A	1	A
	B	3	B		B	1	B		B	2	B	2	B		B	1	B	1	B
	C		C	3	C		C	1	C	1	C		C	2	C	2	C	1	C

***<u>Пример</u>* <u>1.</u> п.1.** **Размещение шаров можно осуществить реально, хотя это может быть «накладно». Положим шары *неразличимыми* и ограничимся случаем** (N=Z=3). **Нам потребуется 30 шаров и 30 урн. Разделим урны на 10 групп (римские цифры наверху табл.5 – номера столбцов) по 3 урны в каждой. Расставим шары по группам урн в соответствии с табл.2. Т.е. ячейки в табл.1-4 – это *виртуальные* урны, *мысленно* объединенные в группы по числу N урн в каждой. Номера урн в табл.1-4 ставят перед 1-м столбцом. Номеру соответствуют все ячейки (*виртуальные* урны) данной строки. В табл.5 буквами «A, B и C» обозначены номера реальных урн в каждой из групп. Перестановка урны с номером A, (B или C) означает, что перемещаются все урны с этим номером во всех группах. Число групп урн не изменяется, а просто изменяется порядок *размещения* групп шаров для данной *допустимой комбинации.* Перестановка групп урн с номерами I-X приведет к «перемешиванию» размещений *допустимых комбинаций* групп, но ни число групп, ни общее число размещений не изменится. А вот подсчеты сильно усложнятся.**

п.2. Если при размещении шаров, учитывать номера урн, то, например, для группы с номером I вместо одного размещения получим шесть размещений 3-х шеров по 3-м урнам {A|*|;B|—|;C|—|} {B|—|;A|***|;C|—|} {B|—|;C|—|;A|***|} {A|***|;C|—|;B|—|} {C|—|;A|***|;B|—|} {C|—|;B|—|;A|***|}. Общее число размещений – 60 вместо 10. Отметим, что, по крайней мере, для рассматриваемой в статье задачи нет никакой необходимости нумеровать урны. Мы не можем сказать, что утверждение справедливо для всех других задач подобного типа.**

Если использовать *различимые* шары, то потребуется 81 урна и 81 шар. В *действительности* мы имеем 3-и шара, которые надо *разместить* по 3-м урнам. Таблицы (**как и реальные урны в примере**) необходимы *для наглядного представления о возможных* размещениях шаров.

Реально размещение шаров по урнам подчиняются 2-м правилам:

W.1. ***В одной из*** Z **урн может находиться «*<u>или</u> 0, <u>или</u> 1, <u>или</u> 2, . . . , <u>или</u>* N шаров».**

W.2. ***Сумма*** **шаров *в группе из*** Z **урн (в одном из размещений) *равна*** N**.**

Номера урн мы пишем только для того, чтобы *упростить выполнение* правил и *подсчет числа* размешений для данной *допустимой комбинации групп* шаров, но ничего более. Из анализа следует:

W.3. Комбинаторика определяет два *естественных* размещения: для *различимых* и *неразличимых* шаров. Следовательно, в примере в) *предположение*, что *каждое из «элементарных* событий» *имеет* вероятность 1/10 *<u>такое</u> <u>же</u> <u>естественное</u>*, как вероятность 1/27 в примере а).

Из анализа задачи с позиций комбинаторики следует:

{A.3} ***Никакой*** **«неожиданной»** ***модели не существует – есть неточности в построении вероятностной*** **модели.**

1.1. Комбинаторика и случайные события

До сих пор мы избегали разговоров о *возможных* комбинациях намеренно, чтобы не возникала «путаница» между комбинациями и *возможными исходами опыта* (**или элементарными событиями в нашем понимании, определение 1 [5,29]**). Хотя развитие комбинаторики непосредственно связано с теорией вероятностей [1,386-400], но это не означает, что она связана с событиями и операциями с ними. *Исходные системы понятий и математические модели теории* вероятностей и *комбинаторики разные.* Комбинаторика – «инструмент» *для вычисления вероятностей* событий: чтобы применить его *надо сначала определить события, вероятности которых необходимо вычислить.*

Рассмотрим примеры, которые изначально связаны с событиями.

***Пример* 2. «Игра в кости. *Возможному* исходу *эксперимента*, состоящему в бросании N игральных костей[8], соответствует распределение N шаров по $Z = 6$ ящикам. Если *бросают монеты*, то имеют дело с $Z = 2$» [1,27]. *Пример* 3. «При стрельбе по Z мишеням пули соответствуют шарам, а мишени – ящикам» [1,28].**

Пока ограничимся разговором об игре в кости.

Таблица 6

1,1	**1,2**	**1,3**	**1,4**	***1,5***	**1,6**
2,1	**2,2**	**2,3**	**2,4**	***2,5***	**2,6**
3,1	**3,2**	**3,3**	**3,4**	***3,5***	**3,6**
4,1	**4,2**	**4,3**	**4,4**	***4,5***	**4,6**
5,1	**5,2**	**5,3**	**5,4**	***5,5***	**5,6**
6,1	**6,2**	**6,3**	**6,4**	***6,5***	**6,6**

Таблица 7

2						*	1	1	1	1	1										
	2					*	1					1	1	1	1						
		2				*		1				1				1	1	1	1		
			2			*			1				1			1			1	1	
				2		*				1				1			1		1		1
					2	*					1				1			1		1	1

<u>А.</u> <u>1.</u> При *одновременном* бросании 2-х игральных костей образуются 36 *естественных комбинаций*, данных в табл.6 (числа очков, отделенные запятой). *Ее структура значительно отличается от* структур табл. 1-5 (стр.6). По сути, комбинации – это *произведение* множеств *элементарных* событий 2-х *опытов* [5,22-23].

<u>2.</u> Используем понятие *пар* в комбинаторике: «Из m элементов $a_1, ..., a_m$ и n элементов $b_1, ..., b_n$ можно образовать $m \cdot n$ пар[9] (a_j, b_k), содержащих по одному *элементу* из каждой группы» [1,46]. *Числа очков* j=1,2,...,6 *на одной* и k=1,2,...,6 *на другой* кости – это *элементы*, из которых образуется 36 *пар* (j, k). *Без учета порядка чисел очков* в *паре*, получим 21 сочетание, но число пар (j, k) не изменится: *элементы пар – числа очков* "j" и "k" *не зависят от различимости или неразличимости* костей. Таким образом:

---

[8]**Здесь и далее при цитировании работ используются обозначения принятые нами**

[9] **Если *типов элементов больше 2-х*, то *группы*, содержащие *по одному элементу каждого типа* называют *комбинациями* [1,47]. В теории вероятностей они, как и пары соответствуют *произведению* событий**

{A.4} Понятие *пары* и понятие *сочетания*, не учитывающего *порядок элементов в группе* (определение Q.3, стр.5), *совершенно разные*: «подменять» *одно другим не следует.*

<u>В.</u> Можно исходить из «образа шаров и урн», тогда: <u>1.</u> Табл. 6 следует дополнить (например, сверху и слева) ячейками с номерами урн, а во всех ячейках написать ″ab″ (или ″aa″ при *неразличимых* костях – «шарах»). Но и в этом случае сочетание букв ″ab″ (или ″aa″) в соответствующей ячейке будет означать, что при *одновременном* бросании 2-х костей могут появиться пары j, k с числами очков j,k=1,2,...,6 на гранях. <u>2.</u> Можно также составить таблицу, подобную табл.1, исходя из *размещения допустимых комбинаций* из 2-х «шаров» («элементов» ″a″ и ″b″ – испытаний) по 6-ти «урнам» (числа очков): 1) на *обеих* костях появляются *одинаковые числа* очков – пары (j,j) на диагонали в табл.6 – оба «элемента» a и b в одной из 6-ти «урн»; 2) на костях появляются число очков («урна») "j" в одном испытании и («урна») "k" – в другом (k≠j), т.е. 30 пар (j,k) вне диагонали – «элементы» a и b в разных «урнах». При различимых костях («шарах») в таблице будет (как и в табл.6) 36 размещений, а при неразличимых костях – 21 размещение (табл.7): в этом случае «размещения число очков "j" в одном испытании и "k" – в другом» не отличаются от «размещения число очков "k" в 1-м испытании и "j" – во 2-ом»: «элементы» a и b не отличаются, т.е. b = a. Именно в этом случае справедливо утверждение: »Существует C^{N}_{N+5} *различимых* исходов бросания *неразличимых* игральных костей» [1,59].

На основе анализа:

1. Определена связь *произведения* множеств *элементарных* событий (п.А.1) с *парами* (или комбинациями, сноска 9, стр.8) и подтвержден результат (п.А.2) для событий *совмещенного опыта* [5,32,43]. 2. Дана правильная интерпретация (п.В.2 и табл.7, стр.8) размещения комбинаций групп, следующая из «образа шаров и урн». 3. Показано, что структура табл.6, определяемая *произведениями* (*парами*) *элементарных* событий, существенно отличается от структуры табл.1-4,7, образованных размещением шаров по урнам.

2. Размещение шаров по урнам и теория событий

«Загвоздка» только в 2-х моментах: **1.** *Имеет ли какое-либо отношение представление пар* (произведений) *в виде табл.* 6 *к решаемой задаче*? **2.** *Как осуществить «переход» от структур таблиц вида* 6 *к структурам таблиц вида* 1-4,7, *да и возможен ли он в принципе*?

Очевидно, что между событиями и *размещениями*, приведенными в табл.1-4,7 (**а именно они интересую нас**) следует провести такую же «параллель» как между *произведением* множеств *элементарных* событий 2-х (**и более**) *опытов* (**табл.6, стр.8**) и *парами* в комбинаторике. Однако *как по-*

лучить эти размещения на основе теории событий? Ответы «скрыты» в теории вероятностей, но *анализа* задачи *ни с позиции теории* событий (**вообще говоря – и с позиции комбинаторики**), *ни с позиции теории* случайных величин в работах нет[10].

В *классической* теории [2,35], вводится *предположение*: **шар может находиться в одной из Z урн с вероятностью $1/Z$**. Но оно не используется.

***Замечание 2*. Размещения просто *считаются равновероятными*, но как они образуются на основе *предположения* – ни слова. Пояснений к равновероятности размещений много, но они либо сводятся к данному в работе [4,326], либо не совсем понятны.**

В аксиоматической теории *всем размещениям допустимых комбинаций* групп шаров просто *приписываются* *равные* вероятности[11] (**комментарий 1, стр.4: более подробно в работе [1,50]**). Приписывать размещениям равные вероятности, конечно можно, однако: *чему они соответствуют в реальных задачах теории событий*?

***Пример 4.* В табл.5 (стр.7) представлены *реальные размещения* 30 шаров в 30 урнах (10 групп урн по 3 урны в каждой). 1. При выборе наугад одной группы урн, вероятность появления каждой из групп урн равна 1/10. 2. При выборе наугад одной из 3-х урн в I-III, или в IV-IX, или X группах, вероятности того, что в урне окажутся шары, соответственно равны 1/3, 2/3 и 1.**

Таким образом: A. При выборе наугад одной из 30 урн вероятности того, что в урне окажутся шары, для отмеченных групп урн равны 3/30, 12/30 и 3/30. Вероятность отбора пустой урны – 12/30. B. Группы урн I-III, или IV-IX, или X определяют число размещений каждой из допустимых комбинаций групп шаров по 3-м урнам (п.II.1, стр.5). Вероятности появления допустимых комбинаций групп шаров равны 3/10, 6/10 и 1/10 соответственно.

Этот простой анализ показывает:

1. *Равновероятны группы* размещений, в которых содержится: *либо* 3 шара *в одной из* урн, *либо* 2 шара *в одной* и 1 *в другой*, *либо по одному* шару *в каждой* из 3-х урн.

2. Вероятность $1/\mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{N+Z-1}}$ (для *различимых* шаров Z^{-N}) относится *к выбору наугад одного* из $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{N+Z-1}}$ (или $Z^{\mathbf{N}}$) размещений (*виртуальных* групп урн), а вероятность $1/\mathbf{Z}$ – *к выбору наугад одной* из Z урн *в отобранной группе*.

3. Запись в виде $|\,3\,|-|-|$, $|\,2\,|\,1\,|-|$ и $|\,1\,|\,1\,|\,1\,|$ *применима* для вычисления вероятности появления шаров в *равновероятных группах* размещений.

При анализе мы связали *реальное* размещение шаров по урнам с про-

---

[10]**Впрочем, исходя только из существующего варианта теории вероятностей, без ее изменения, данного в основной части работы [5], мы тоже вряд ли смогли бы это сделать**

[11]**Очень удобно: приписали, а почему – пояснять не надо: догадывайтесь сами**

стой задачей теории событий. Теперь рассмотрим примеры 1 и 2, в которых события – **«появление одного шара в одной из урн»** – изначально связаны с вероятностями. Пример с бросанием игральных костей приводится практически во всех учебниках.

При бросании игральной кости, вероятность появления грани с данным числом очков j=1,2,...,6 (*элементарного* события a_j) равна 1/6. Пары (j,k) (j,k=1,2,...,6) в комбинаторике (п.А.1 в примере 2, стр.8) соответствуют *произведениям элементарных* событий $A_{j,k} = a_j \cdot b_k$ при *совмещении* 2-х *опытов* в теории вероятностей (определение 5 [5,32]). Вероятность появления одного *произведения* равна $P(A_{j,k}) = (1/6)^2$, т.е. *равновероятность* размещения пар (табл.6, стр.8) следует из *равновероятности* появления граней. Никакого *предположения* вводить не требуется.

Пример со стрельбой дается намного реже, но он гораздо интереснее.

Пример 5. **Мишень можно представить как 2 урны: одна соответствует «попаданию» (событие a_1), а другая - «промаху» (событие a_2) при выстреле («пуле»). Пусть по мишени производится три выстрела («пули»), т.е. имеем 6 событий: a_1^w и a_2^w (w=1,2,3). Рассмотрим два варианта:**

С1. «Пули» *разные*[12]: $P(a_1^w) = p_w$ и $P(a_2^w) = q_w$ $(p_w + q_w = 1)$.

С2. «Пули» *одинаковые*: $P(a_1^w) = p$ и $P(a_2^w) = q$ $(p + q = 1)$.

п.III.1. Начнем с задачи, которая, по сути, решена (1713) еще Я. Бернулли: *определить вероятность того, что при 3-х выстрелах будет ровно n=0,1,2,3* попаданий. Далее рассматривается вариант (С2). Нас интересует попадание *<u>и</u> <u>при</u> 1-м, <u>и</u> <u>при</u> 2-м, <u>и</u> <u>при</u> 3-м* выстреле[13]. Т.е. имеем *произведение* множеств *элементарных* событий 3-х опытов [5,32]. Его результат – 8 *произведений* $a_j^1 a_k^2 a_m^3$ (j,k,m=1,2) (при N выстрелах число произведений 2^N). Заменим *элементарные* события их вероятностями и сложим *произведения* в которых вероятность p имеет одинаковую степень $0, 1, 2, 3$. Получим: q^3, $3pq^2$, $3p^2q$ и p^3. Эти значения и определяют искомые вероятности. При числе выстрелов $N > 2$ они вычисляются по формуле Бернулли $P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}$ {*} (их совокупность при значениях n=0,1,...,N в существующей теории называют биномиальным распределением[14]).

Именно это решение, *в предположении* $p = q = 1/2$ (т.е. для *<u>неразличимых</u>* «шаров» (С2.)) *применено при пояснении* (оно подробно рассмотрено в п.XII, стр.21) *равновероятности* размещений в [4,326]. Однако:

Б1. При N выстрелах *число произведений* 2^N *соответствует числу* размещений

---

[12] Под «разными пулями» понимается изменение условий стрельбы при каждом выстреле, которые приводят к изменению вероятности попадания в мишень (разные стрелки, оружие, мишени, дальность до мишени и т.п.). «Одинаковые пули» – все выстрелы производятся при неизменных условиях (один стрелок, одно оружие, одна мишень и т.д.)

[13] Это предположение существенно отличается от предположения размещения шаров по урнам (вывод W.1, стр.7). По сути, в новой исходной системе теории событий оно определяет совмещение опытов [5,32]

[14] А. Муавр искусственными преобразованиями [9,82-86] свел его к нормальному распределению

(п.II.2, стр.6) N *__различимых__* шаров по 2-м урнам.

{А.5} ***А шары то – неразличимы!*** **Т.е. это никак «не вяжется» с числом $N+1$ и вероятностью $1/(N+1)$ размещений** ***неразличимых*** **шаров по 2-м урнам.**

Может быть, «необъяснимость этого парадокса» с точки зрения существующей вероятностей – одна из причин, определившая «неожиданность» модели Бозе-Эйнштейна.

п.III.2. В более общем виде: «мишень» разделяется на Z «урн» (одна из урн соответствует промаху); «пуля» попадает в урну с номером z=1,2,...,Z с вероятностью p_z. Определить вероятность того, что при $N \geq Z$ выстрелах в урне 1 будет ровно $m,1$, в урне 2 – $m,2$, ..., в урне $Z - m,Z$ «пуль» (где m,z=0,1,...,N (z=1,2,...,Z) – целые числа, такие что $m,1+m,2+...+m,Z=N$). Т.е. *повторяется* N раз *опыт* с *элементарными* событиями $\mathrm{a}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{w}}$ (j=1,2,...,Z). Произведение можно записать в виде $(\mathrm{a_1}+\mathrm{a_2}+...+\mathrm{a_Z})^{\mathrm{N}}$. Решение этой задачи (суммируются произведения, в которых вероятности p_z имеют одинаковую степень $mz=0,1,\ldots,N$ $(m,1+m,2+...+m,Z=N)$) определяется формулой $\mathbf{P_N}(m,1;m,2;\ldots;m,Z)=N!/(m,1!m,2!\ldots m,Z!)p_1^{m,1}p_2^{m,2}\ldots p_Z^{m,Z}$ [2,74] {**}, которую в существующей теории называют полиномиальным[15] распределением. Число Z^{N} произведений, как выше, соответствует числу размещений (п. II.2., стр.6) N различимых шаров по Z урнам. Если $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1^{\mathrm{w}})=\mathrm{P}(\mathrm{a}_2^{\mathrm{w}})=\ldots=\mathrm{P}(\mathrm{a}_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{w}})=1/Z$, то вероятность любого произведения равна $1/Z^{\mathrm{N}}$. Подожение {А.5} верно и в общем случае.

Б2. При числе $Z=2$, $Z=3$ «урн» и 3-х «пулях» *декартово произведение элементарных* событий представляются в виде *кубической* таблицы $(\mathbf{2\cdot2\cdot2})$ и $(\mathbf{3\cdot3\cdot3})$ ячеек, *в каждой из ячеек* которой может находиться *по одному произведению* $\mathrm{a}_{\mathrm{j}}^1\mathrm{a}_{\mathrm{k}}^2\mathrm{a}_{\mathrm{m}}^3$ (j,k,m=1,2) и (j,k,m=1,2,3). Говоря «языком шаров и урн»: – *в каждой* урне *находится по 3-а* шара. При тех же числах «урн», но 4-х «пулях» *произведения элементарных* событий представляются в виде *четырехмерной* таблицы $((\mathbf{2\cdot2\cdot2\cdot2})$ или $(\mathbf{3\cdot3\cdot3\cdot3})$ ячеек. *В каждой из ячеек* таблицы может находиться по *одному произведению* $\mathrm{a}_{\mathrm{j}}^1\mathrm{a}_{\mathrm{k}}^2\mathrm{a}_{\mathrm{m}}^3\mathrm{a}_{\mathrm{n}}^4$ (j,k,m,nт=1,2) или (j,k,m,n=1,2,3).

{А.6} ***Увеличение*** **числа Z урн приводит к** ***изменению вида*** **распределения. Странно это, конечно же:** ***какое из полиномиальных $Z \geq 2$ распределений считать правильным?***

Имеем ***явные противоречия*****, как между решениями, так и между размещениями** ***допустимых комбинаций*** **групп шаров по 2-м и 3-м урнам.**

О других аспектах, связанных с пояснением, речь пойдет после анализа влияния физической постановки задачи на решение вероятностной задачи.

п.III.3. Из решений, приводимых в учебниках можно получить: Вероятности того, что 3 «пули» окажутся окажутся *__или__* в 1-й, *__или__* во 2-й урне: $p_1p_2p_3$ *__или__* $q_1q_2q_3$ (вариант C1); p^3 *__или__* q^3 (вариант C2). Вероятности того, что 2 «пули» окажутся *__или__* в 1-й, *__или__* во 2-й урне: p_1p_2 *__или__* q_1q_2, p_1p_3 *__или__* q_1q_3, p_2p_3 *__или__* q_2q_3 (вариант C1); p^2 *__или__* q^2 (вариант C2). Вероятности того, что одна «пуля» будет *__или__* в 1-й, *__или__* во 2-й урне: p_1 *__или__* q_1, p_2 *__или__* q_2, p_3 *__или__* q_3 (вариант C1); p *__или__* q (вариант C2).

п.III.4. Решение, которого нет в работах[16]: Вероятности того, что

---

[15] Название было принято потому, что вероятности представлялись коэффициентами при степенях $x_1^{m,1}x_2^{m,2}...,x_Z^{m,Z}$ в разложении полинома $(p_1x_1+p_2x_2+...+p_zx_Z)^N$ при степенях $x_1,x_2,...,x_Z$. Значение $Z=2$ определяет *биномиальное* распределение

[16] В новой исходной системе оно определяется 2-м типом объединения опытов [5,33]

или **1-я,** ***или*** **2-я,** ***или*** **3-я «пуля» окажутся** ***или*** **в 1-й,** ***или*** **во 2-й урне:** $(p_1 + p_2 + p_3)/3$ ***или*** $(q_1 + q_2 + q_3)/3$ **(вариант C1);** p ***или*** q **(вариант C2). Вероятности того, что** ***или*** **1-я,** ***или*** **2-я (*или* 1-я, *или* 3-я; *или* 2-я, *или* 3-я) «пуля» окажутся** ***или*** **в 1-й,** ***или*** **во 2-й урне:** $(p_1 + p_2)/2$ ***или*** $(q_1 + q_2)/2$ **(**$(p_1 + p_3)/2$ ***или*** $(q_1 + q_3)/2$, $(p_2 + p_3)/2$ ***или*** $(q_2 + q_3)/2$**) (вариант C1);** p ***или*** q **(вариант C2). Вероятности того, что одна «пуля» будет** ***или*** **в 1-й,** ***или*** **во 2-й урне такие же, как и в п. III.3. При значениях** $p = q = 1/2$ **получим** ***равные вероятности*** **появления шаров в урнах.**

На основе анализа можно сделать следующие выводы:

W.4. В общем случае не ***равновероятны*** **не только** ***размещения*** **с** ***разными допустимыми*** **комбинациями групп шаров, но и группы шаров в данной комбинации. Т.е. противоречия серьезнее, чем отмеченные впримере 4 (стр.10)**

W.5. ***Варианты решений*** **III.3 и III.4** ***соответствуют правилам комбинаторики*** **(выводы W.1-2, стр.7),** ***по которым проводится расстановка*** **шаров по урнам.**

W.6. ***Отличие вариантов*** **III.3 и III.4 –** ***в вычислении вероятностей сложных*** **событий.**

Результаты анализа противоречат постулируемой (**в статистической физике**) *равновероятности* размещений. Разрешить возникшие *противоречия на основе* существующей теории событий *не представляется* возможным.

Замечание **3. Из нее следует: размещения шаров по урнам** ***равновероятны*** **при** ***предположениях*****: 1. Шары** ***неразличимы.*** **2. В одной урне может находиться** ***или один, или ни одного*** **шара. 3. Каждый шар может находиться** ***в одной из*** Z **урн с** ***одной и той же*** **вероятностью** $1/Z$. **4. О вероятностях размещений можно говорить при условии** $Z > N$**.При числе урн** $Z = N$ **вероятность равна 1.**

Эти *предположения*– основа статистики Ферми-Дирака. Физики, конечно же, с этим выводом не согласятся. Мы тоже, но совсем не потому, что в физике применяются и другие статистики. Причины чисто математические. Начнем с «размещения шаров по урнам»:

п.IV. 1. Размещения ***допустимых*** **комбинаций групп шаров по урнам можно составлять для значений чисел** $N, Z \geq 2$ **шаров и урн. 2. Шары могут состоять из числа (k=1,2,...,K)** ***различимых*** **групп: в каждой группе шары** ***неразличимы*** **между собой. При значениях** $K = N$ **или** $K = 1$ **получим: все шары** ***различимы*** **или** ***неразличимы.*** **3. Можно полагать, что в одной урне может находиться число** $1 \leq n_p \leq N$ **шаров. Значения** $n_p = N$ **и** $n_p = 1$ **определяют крайние варианты. 4. В общем случае шары имеют конечные размеры. Это может приводить к ограничениям: 1.** ***Размеры*** **урн не могут быть** ***меньше размера наибольшего*** **из шаров. 2.** ***Число*** n_p **шаров в урне** ***зависит от их размера.*** **Например: если в одну кубическую урну с размером ребра** a **помещается один шар диаметра** $d = a$**, то при диаметре** $d \leq a/2$ **– не менее 16-и шаров.**

Теперь о событиях и их вероятностях.

п.V. 1. *Элементарное* событие – появление *одного* из N шаров в *одной* из Z урн[17]. 2. Вероятности *элементарных* событий могут быть *разными* для *различимых* и *неразличимых* шаров. 3. Так как в группе, состоящей из Z урн, размещаются все шары, то: появление любого из N шаров в любой из Z урн есть *достоверное* событие; если шары разделены на число (k=1,2,...,K) групп, то появление любого из шаров, входящих в группу с номером (k=1,2,...,K), в любой из Z урн тоже *достоверное* событие. 4. Из N шаров составляются группы b, n по числу (n=1,2,...,N) шаров. Значение $b, 0$ соответствует пустой урне, вероятность появления которой в любой комбинации равна $1/Z$. Значения $b, 1$ соответствуют *элементарным* событиям, вероятности которых определяются вероятностями появления одного шара в одной из урн. 5. При значениях $2 \leq n \leq N$ группы b, n являются *сложными* событиями, вероятности которых вычисляются с применением вариантов п.III.3 или п.III.4 по вероятностям *элементарных* событий.

Условия (**п.IV**) определяют *число допустимых комбинаций групп* b, n шаров, для данного числа Z урн и *число возможных размещений*[18] групп шаров по урнам для каждой *допустимой комбинации.*

Условия (**п.V**) определяют значения вероятностей *возможных* размещений для каждой *допустимой комбинации.*

С чисто *формальной математической* позиции условия (**п.IV**) и (**п.V**) можно применять в разных комбинациях и получить очень много вариантов[19] решения задачи о «размещении шаров по урнам».

> **{A.7} Комбинации условий (IV) и (V) *определяются постановкой* задачи.**

Множество возможных решений задачи «размещения шаров по урнам» мы не ждали: было бы отчего растеряться, есди бы не *теория событий*, определяемая *новой исходной* системой [5], которая позволяет получить эти решения. Вряд ли это возможно на базе принятой системы. Даже пояснить, как получены существующие проблематично.

---

[17] **Каждому элементарному событию соответствует один возможный исход**

[18] **При анализе примеров 1 и 2 мы связали размещения с событиями и их вероятностями. Поэтому здесь и далее будем говорить о *возможных* размещениях. Но будем говорить *группы* шаров и *допустимые комбинации* групп для того, чтобы подчеркивать, что *комбинаторика и теория событий* – это *разные математические* модели**

[19] **По сути, при анализе существующих понятий теории событий мы, в основном, применяли «язык шаров и урн». Это, в принципе, и привело к *разработке новой исходной* системы [5,5-33] теории событий**

3. Математика и физика

Исходя только из одной *математической* модели и не учитывая ее связь с другими (**математическими, физическими и т.п.**) моделями, иногда можно доказать положения, которых просто *не существует ни в математике, ни в физике*[20]. Отметим, что попытка ответить на вопрос в положении A.6 (**стр.12**) на основе только математики «увенчалась неудачей». По крайней мере, ни существующая, ни новая теория событий «не дали такой возможности».

3.1. Модель Максвелла и 2-я постановка задачи: распределение частиц по объему

Не будем «зацикливаться» на этом вопросе: это не мешает проведению последующего анализа построения моделей на основе метода ячеек Больцмана. Поэтому рассмотрим соотношение математики (**«то бишь» – условий в п.IV и п.V, стр.13-14**) и физики. Будем говорить о газах, которые вокруг нас (**в воздухе, в природном газе и т.п.**). В некоторой области температур и давлений к ним применима модель, впервые детально разработанная Д.Максвеллом.

п.VI. В изолированном объеме D находится постоянное число N атомов (молекул) одного или разных газов (не вступающих в химические реакции).

Полагается, что их размеры много меньше среднего расстояния между ними. *Реальное взаимодействие* между частицами заменяется *моделью классической* механики: *<u>соударение</u> <u>пар</u> <u>абсолютно</u> <u>упругих</u> шаров* [8,387]. Характеризуется тем, что *время соударения ограниченно* и, как следствие, *расстояние* s_V, на котором оно происходит. Если расстояние s между шарами становится больше него $s > s_V$, то далее шары будут в «свободном полете» до столкновения со следующим шаром. Среднее расстояние s_C «свободного полета» шаров называется *средней длинной свободного пробега* частицы. Полагая, что s_C значительно больше s_V значением s_V при расчетах пренебрегают. Это не означает, что взаимодействия нет.

На этом *идеализация физической* модели[21] завершена. Построение *вероятностной* модели Максвелл начинает с *предположений* [8,405]:

I. Все направления движения в газе *равновероятны*.

II. Ни одно значение скорости не является *привилегированным* или запрещенным.

III. Каждый газ, предоставленный самому себе, приходит, в конце концов, в *стационарное состояние*, в котором устанавливается *определенное распределение скоростей* между молекулами, постоянное во времени.

---

[20] **Пример подобного рода дан в приложении V [5,61]**

[21] **Ее называют *идеальным* газом**

Рассмотрим третье.

п.VII. **Хаотичность движения и столкновения частиц определяет: 1. *Одновременность движение* частиц в объеме. 2. *Различие скоростей* частиц *в данный момент времени*, как *во всем* объеме , так и в *любой его конечной части.* 3. Случайное *«блуждание»* («дрейф») *каждой* частицы по объему. Именно «дрейф» определяет нахождение *любой* из частиц в *любой части* объема. Порядок «посещения» частей объема не менее хаотичен, чем движение частиц. 4. Средняя скорость «дрейфа» частиц по объему существенно меньше средней скорости частиц (она, по крайней мере, не больше скорости диффузии).**

Отсюда следует:

W.7. Каждая частица, в момент времени t, имеет одно значение скорости v_j^t, из множества скоростей[22] на интервале $0 < v_j^t < v_{\max}$.

W.8. В любой момент времени t, частицы распределяются практически равномерно по объему D.

Мы говорим практически, ибо теоретически это не совсем так. Выделив малую часть объема, в которой находится очень малое число частиц, и разделив ее на ячейки, можно показать, что в этой части объема равномерного распределения не будет.

Далее Максвелл ставит задачу [8,405]: **1) «Определить *среднее число* частиц, *скорости* которых лежат *между данными пределами*, после большого числа столкновений между большим числом одинаковых[23] частиц»**.

п.VIII.1. Из постановки задачи следует: нас интересует событие, заключающееся в том, что в некоторой части[24] объема (абсолютно неважно какой), в данный момент времени t, появится частица с конкретным значением скорости v_j^t, $(0 < v_1^t < v_2^t < ... < v_N^t < v_{\max})$.

Мы не знаем, в какой части d_z объема, какая частица, и в какой конкретно момент времени примет данное значение скорости v_j^t, поэтому не связываем (это в приципе неосуществимо) ее ни с координатами, ни с какойлибо частью объема, ни с конкретным временем. Если по сути, то *виртуальные* «урны» – это не части d_z объема, а пределы, в которых «лежит скорость частицы» в данный момент времени. Разделим отрезок $0 \le v \le v_{\max}$ на Z равных частей $\Delta v_z = v_{\max}/Z$ и будем считать, что скорость v_j^t (j=1,2,...,N) может принадлежать одному из интервалов Δv_z (z=1,2,...,Z).

Из анализа задачи Максвелла следует:

[22] **Полагается, что абсолютное значения v изменяются на интервале $0 \le v < \infty$. Но значение v ограничено также сверху некоторым максимальным значением $v_{\max}$**

[23] **Мы не знаем, когда и почему сложилось мнение, что статистика Максвелла основана на *различимости* частиц. По крайней мере, из данного перевода следует: Максвелл полагал *различимыми скорости* частиц, которые *неразличимы* (одинаковы)**

[24] **Полагаем части объема одинаковыми $d_z = D/Z$ $(Z > N)$ (z=1,2,...,Z)**

W.9. **«Шар» – это *скорость* v_j^t (j=1,2,...,N) частицы в *данный момент времени.* «Урна» – это *интервал* $\Delta v_z = v_{\max}/Z$ (z=1,2,...,Z), в котором может находиться скорость частицы.**

W.10. ***Элементарным* событием является появление, в данный момент времени t_j, «шара» с *данным* значением скорости v_j^t (j=1,2,...,N), т.е. *в одной из Z виртуальных* «урн».**

W.11. **При *размещении допустимых* комбинаций групп шаров, следует исходить из *различимости* (различимость скоростей) шаров (п. II.2, стр.6).**

W.12. **Для определения вероятности появления значения v_j^t скорости «шара» можно ввести *предположение*[25]: в одной из Z «урн» может находиться: *<u>или</u> ни одного* «шара»; *<u>или</u>* 1 «шар», *<u>или</u>* 2 «шара», ..., *<u>или</u>* N «шаров» *со скоростью* v_j^t (j=1,2,...,N). При попадании в данный интервал двух и более «шаров» их скорости полагаем одинаковыми.**

W.13. **Появление двух и более *элементарных* событий в одной из Z *виртуальных* урн происходят *одновременно*, следовательно, при *вычислении* вероятностей *сложных* событий *следует использовать вариант, приведенный в пунктах* III.1-III.2.**

Таким образом, *физическая* задача, поставленная Максвеллом, приведена к *вероятностной* задаче *теории* событий[26].

п.VIII.2. В рамках модели Максвелла рассмотрим другую задачу:

2) определить *среднее число* частиц, *находящихся* в некоторой (неважно какой) *части* d_z объема D.

Основное отличие *этой постановки* в том, что: **«шар» - это *частица* (а не *ее скорость*); «урна» – *часть* d_z объема D.** Отсюда следует:

W.14. ***Элементарное* событие – появление *одного из* N шаров *в одной из Z частей* $d_z = D/Z$ (z= 1,2,...,Z) объема D.**

Другое понимание элементарного события приврдит к существенному *изменению решения вероятностной* задачи.

п.IX. Появление частицы в какой-то части объема связано с ее «дрейфом» по объему (п.VII.3, стр.16). В конкретной части d_z объема, куда попадает частица, уже могут находиться другие частицы, которые «прибыли» туда раньше, какие-то из частиц могут «покинуть» его и т.д. Т.е. *одновременность движения* частиц вовсе не означает, что *они одновременно* попадают *в одну* часть объема. Мы не знаем, в какой части d_z объема, и в какой конктретно момет времени будет *данная* частица, поэтому не связы-

[25] **Его не отличить от предположения о размещении шаров по урнам (вывод W.1, стр.7)**

[26] **Для перехода к теории случайных величин, необходимо сначала определиться с тем, что же все-таки понимается под случайной величиной**

ваем (это в принципе невозможно) **ее ни с координатами** (т.е. конкретной частью объема), **ни с конкретным значением времени.**

Из анализа следует:

W.15. Для определения вероятности появления шара в одной из ***частей*** d_z **(z= 1,2,...,Z) объема можно ввести** ***предположение*****: в одной из** Z **урн может находиться:** ***<u>или</u> ни одного*** **шара;** ***<u>или</u>*** **1 шар,** ***<u>или</u>*** **2 шара, . . . ,** ***<u>или</u>*** N **«шаров».**

W.16. Частицы в ***части*** d_z **появляются** ***не одновременно*****, что** ***определяет*** **применение** ***варианта*** **III.4 вычисления вероятностей** ***сложных*** **событий.**

Различие в построении решений при *1-й* и *2-й постановке* задачи определяется *отличием вычисления вероятностей сложных* событий, образованных группой b, n шаров при значениях $n > 1$ (**п.V.5, стр.14**). Именно при *этой постановке число* размещений по урнам зависит от *различимости* или *неразличимости* шаров.

Выводы **W.13, W.16** (**стр.17-18**), дают нам, по крайней мере, некоторую уверенность в том, что вероятностные модели решения физической задачи могут быть построены на основе метода ячеек. Однако на этом пути есть «подводные камни»: чтобы «не напороться на них», рассмотрим подробнее физическую модель и трактовку применения метода ячеек в существующей теории вероятностей.

3.2. Свойства частиц и вероятностные модели

Различимость шаров в физике – это *различимость свойств* частиц. В модели[27] Максвелла – это *отличие масс* молекул (**или/и атомов**).

п.X. 1. ***Равенство масс*** **шаров** $m_j = m_1$ **(j = 2,3,...,N) (т.е. один газ – частицы** ***неразличимы*****) определяет** ***равенство средних скоростей*** **и** ***средних скоростей*** **«дрейфа» шаров. Из этого следует:** ***предположение*****, что каждый из** N **шаров может находиться с одной и той же вероятностью** $1/Z$ **в** ***одной из*** Z ***урн*** **приемлемо.**

2. Отличие массы $m_2 \neq m_1$ **хотя бы одного шара, с учетом равенства кинетических энергий, следует отличие его средней скорости и скорости «дрейфа» от средних скоростей остальных шаров. Следовательно,** ***вероятность*** **появления** ***этого*** **шара в** ***одной из*** Z **урн будет** ***отличаться*** **от**

[27] **При построении теории Максвелл рассматривал также парные столкновения шаров, имеющих различные массы и радиусы, что соответствовало наличию в газе молекул различного рода [8,388]**

остальных **шаров. Можно, например, положить:** ***вероятности*** p_1 **и** p_2 **появления шаров** ***разной массы в одной из*** Z ***урн*** **отвечают отношению** $p_1/p_2 = \bar{V}_1/\bar{V}_2 = \sqrt{m_2/m_1}$, **где** $\bar{V}_1$ **и** $\bar{V}_2$ – ***средние скорости*** **частиц.**

При вычислении вероятностей следует применять 2-й ***тип объединения опытов*** **[5,33] и** ***учитывать условия*** **в п.V.3 (стр.14).**

Из данного анализа (**с учетом отличий в постановках физической задачи и применения разных вариантов вычисления сложных событий**) следует:

W.17. При ***1-й постановке*** **размещение** ***допустимых комбинаций*** **групп по урнам всегда проводится** ***по схеме*** **размещения** ***различимых*** **«шаров» (вывод вывод W.11, стр.17). Поэтому** ***отличие масс*** **приводит** ***только к отличию вероятностей элементарных*** **событий.**

W.18. При ***2-й постановке*** **размещение** ***допустимых комбинаций*** **групп по урнам проводится: для шаров** ***одинаковой массы по схеме*** **размещения** ***неразличимых*** **шаров (п. п.II.1, стр.5).** ***Отличие масс*** **шаров приводит** ***не только к отличию вероятностей элементарных*** **событий, но и** ***к привлечения схемы*** **размещения** ***различимых*** **шаров (п.II.2, стр.6).**

В физике *предположения* о *различимости* шаров применяется (**при любом числе частиц**) только в 2-х вариантах: шары *либо различимы*, *либо неразличимы.*

п.XI.1. Математика этого не запрещает. Но число физических частиц ограниченно, а если говорить о газах в рассматриваемых условиях, то сильно ограниченно. С этой точки зрения правильнее говорить о ***различимых*** **группах частиц (условие (IV.2), стр.13).**

Казалось бы, что второе крайнее *предположение* более естественно. С точки зрения физики с этим можно согласиться: оно удобно при определенных теоретических исследованиях. Вопрос только в том, как это *предположение* осуществить на практике.

п.XI.2. В любом газе имеется определенная доля примесей (по крайней мере, других газов). Их наличие приводит к существенному увеличению числа возможных размещений по ячейкам. Число размещений для разных ***допустимых комбинаций*** **групп частиц будет увеличиваться по-разному. А это окажет влияние на вероятность появления каждой** ***допустимой комбинации.*** **Мы опять приходим к тому, что правильнее говорить о различимых группах частиц.**

4. О некоторых понятиях статистической физики

На основе теории событий, определяемой *новой* исходной системой, можно объяснить подходы к решению для обеих постановок задачи и провести анализ решений. Сейчас о некоторых понятиях, применяемых в статистической физике.

Замечание **4.** **Для справки: сосуд с заключенными в нем частицами иногда называют *статистической системой.* Применяются также (*особенно современных в работах*): *статистический, микроканонический, канонический* и некоторые другие *ансамбли,* которые мы упоминаем только здесь. По нашему мнению, они скорее «запутывают» понимание вопроса, а не «проясняют» его.**

О.4. ***Состояние* газа, *характеризуемое объемом, давлением* и *температурой* называется *макроскопическим.***

О.5. ***Состояние* газа*, характеризуемое состояниями всех его молекул,* называется *микросостоянием.***

Замечание **5.** **Часто дается определение: *состояние* газа, заданное *координатами* и *скоростями* всех молекул называется *микроскопическим.* О невозможности такого описания состояния можно почитать в работе [3,97]. Тем не менее, оно используется в виде так называемого *фазового пространства* [3,102-108]. Мы же считаем, что это принципиально невозможно: для этого необходимо знать, в каком состоянии газ оказался в сосуде, как было получено состояние до помещения его в сосуд и т.д. Т.е. всю «историю» движения, вплоть до сотворения вселенной или «большого взрыва» (был ли он на самом деле?). По сути одно и то же, но это уже философия. Мы же исследуем некоторый «конечный результат»: например, сосуд наполнили газом, поместили в термостат и «подождали», пока в нем установилось равновесное состояние.**

О.6. **Всякое *макросостояние* может быть осуществлено *разными* способами, каждому из которых соответствует некоторое *микросостояние.***

О.7. ***Число различных микросостояний,* которыми может быть *реализовано данное макросостояние* называется *статистическим весом* или *термодинамической* вероятностью. Оно – одно из основных в статистической физике.**

Т.е. вводится некоторое *новое понимание* вероятности, но не ясно одно: *как трактовать статистический вес исходя из 2-х первых понятий, и по отношению к чему он определяется*? Приведем некоторые пояснения из работы [3,100-101]:

«Любому равновесному *макроскопическому* состоянию газа при постоянной температуре и давлении соответствует множество различных положений и скоростей молекул. . . . Таким образом, одному состоянию с *макроскопической* точки зрения, соответствует огромное число ее состояний с *микроскопической* (молекулярной) точки зрения. Причем эти состояния системы меняются непрерывно, а *макроскопическое* состояние остается практически неизменным. Значит, любые *макроскопические* параметры являются функциями *микроскопических* параметров. Совокупность различных микросо-

стояний, соответствующих одному макросостоянию называется статистическим ансамблем».

«Статистическим ансамбль представляет как бы набор различных реальных систем, находящихся в разных микросостояниях, соответствующих одному макросостоянию. Однако, *различные макросостояния* могут быть реализованы через *разное число микросостояний.* При этом отдельные макросостояния будут тем устойчивее, чем большим числом микросостояний они могут быть реализованы. На основании этих представлений вводится понятие *термодинамической вероятности*», которая «выражается числом, всегда большим единицы». *Объясняется тем*, что «в задачах статистической физики общее *число возможных микросостояний* определить трудно *из-за их огромного* числа».

1-й абзац вроде бы понятен, даже «статистический ансамбль». Однако 2-й абзац «все запутывает» и вызывает не один вопрос, ибо в нем нет однозначности. Ясности это не добавляет, но допускает разные трактовки понятий. Вернемся к уже упоминавшемуся пояснению (**п.III.1.Б1, стр.11**).

п.XII. Сосуд делится на две половины. Состояние газа характеризуется числами шаров, находящихся в левой n и правой (урны 1 и 2) $N-n$ половинах [4,326]. Для примера дается таблица размещений по 2 урнам $N=4$ *различимых* шаров [4,327].

1,2,3,4; 0||| 1,2,3;4||1,2,4;3||1,3,4;2||2,3,4;1||| 1,2;3,4||1,3;2,4||1,4;2,3||2,3;1,4||2,4;1,3||3,4;1,2|||
4;1,2,3||3;1,2,4||2;1,3,4||1;2,3,4||| 0; 1,2,3,4 |||||||| 4;0||| 3;1||| 2;2||| 1;3||| 0;4

Она изображена строкой. *Номера* шаров *в одной урне* отделены запятой. Шары, находящиеся в 1-й и 2-й урнах отделены двоеточием. *Микросостояния* разделены 2-мя, а *макросостояния* – 3-мя линиями. Справа от 8 линий мы дали размещение *неразличимых* шаров. В обоих случаях имеем 5 *возможных макросостояний*, но при *различимых* шарах имеем 16, а при *неразличимых* – 5 *микросостояний.*

***Замечание* 6. Понятие *микросостояния* связывают с понятием фазового пространства [3,102-107] в механике. Так как в любом микросостоянии размещаются все частицы, то, по-видимому, подразумевается связь их координат и скоростей (импульсов, энергий), и их принадлежность ячейке, в которой находятся частицы. А макросостояния, по-видимому, и есть «...как бы набор различных реальных систем», реализуемых «через *разное число микросостояний*». Но все это – «только наши домыслы».**

Объяснение дает однозначное понимание понятий. Но первое, что возникает из *этих определений*, так это вопросы: *Какое отношение имеют микросостояния к координатам и скоростям* (***импульсам, энергиям***) *частиц? Как соотнести макросостояния с равновесным состоянием?* **Например, макросостояния $b, N-k; b, k$ при значениях $k << N$ (или близких к числу** N). На 1-й вопрос ответ дан выше (**замечание 5, стр.20**) – *микросостояния не связаны ни с координатами, ни с их зависимостью* от времени. От ответа на 2-й вопрос тоже зависит правильность решения задачи.

Выше, на основе метода ячеек Больцмана, *физическая* задача приведена к 2-м *разным вероятностным* задачам *теории событий.* Их связь определяется только физической моделью и методом построения решения вероятностных задач. Любое из *микросостояний* или *макросостоя-*

ний является *только возможными* (**вероятными, но не реальными**), ибо для построения вероятностной модели необходимо рассмотреть все *возможные случаи* (**исходы**), которые могут быть реализованы в *данном испытании.* Таким образом:

W.19. *Равновесное состояние* системы определяет *совокупность статистических весов всех возможных макросостояний.*

На основе свойств размещения N шаров по Z урнам уточним понятия.

***<u>Определение</u>* <u>1</u>.** *Возможное микросостояние* – *<u>одно</u>* из всех *<u>возможных размещений</u>* N частиц по Z ячейкам (**п.II, стр.5-6**).

Напомним: 1) в *любом из возможных микросостояний сумма* *целых* ***чисел*** $n, z = b, n \geq 0$ ***равна числу* частиц** $n,1 + n,2 + \ldots + n,Z = N$**; 2) Общее *число возможных микросостояний* равно (стр.6)** $W = Z^{\mathbf{N}}$ **(1) для *различимых* и** $W = \mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{N+Z-1}}$ **(2) для *неразличимых* частиц.**

***<u>Определение</u>* <u>2</u>.** *Возможное макросостояние* – *возможные микросостояния одной допустимой комбинации* (**п. II.1, стр.5**) *групп* b, n частиц по Z ячейкам для *данного набора* чисел $n, z = b, n \geq 0$ частиц и *конкретного порядка* размещения *групп* b, n по ячейкам.

При *неразличимых* частицах отличие макросостояний определяется только порядком размещения *групп* b, n **по** Z **урнам. Следовательно, *конкретный порядок* размещения *групп*** b, n **определяет *одно макросостояние*, которое состоит из *одного микросостояния.* При *различимых* шарах учитывается *отличие* шаров в *группах*** b, n**, *без учета порядка в данной группе* с числом шаров** $n \geq 2$**.**

***<u>Определение</u>* <u>3</u>.** *Статистический вес* – *число возможных микросостояний*, из которых состоит *возможное макросостояние.*

Например: в урне с номером 1 находится $n,1$**, в урне с номером 2** – $n,2$**, ..., в урне с номером** Z – n,Z **шаров. В общем случае** $Z \geq 2$**, *статистический вес любого возможного макросостояния для различимых* шаров определяется полиноминальными** $\mathbf{N!/(n,1!n,2!...n,Z!)}$ **(3) (п.III.2, стр.12), а частном случае** $Z = 2$ – ***биноминальными*** $\mathbf{C^{n,1}_N} = \mathbf{N!}\big/\mathbf{(n,1!n,2!)}$ $(n2 = N - n,1)$ **(4) коэффициентами (п.III.1, стр.11). *Любое изменение порядка* размещения *групп*** b, n **с разными числами шаров** n, z**, например, в 1-й урне находится** $n, 2$**, а во 2-й –** $n, 1$ **шаров *изменяет возможное макросостояние* (п.II.1, стр.5). Из формул (3,4) легко видно, что при этом *статистический вес не изменяется.* Отсюда следует:**

W.20. Все *возможные макросостояния*, образованные размещением *данной допустимой комбинации групп* $b, n = n, z$ $(n,1 + n,2 + \ldots + n,Z = N)$ **частиц, имеют *одинаковый статистический вес.***

<u>Замечание</u>* <u>7</u>. Далее будем использовать уточненные определения. Если использовать понятие *равновесного состояния* газа, характеризуемого *объемом*, *давлением* и *температурой*, то слово «возможный» можно опустить, а вместо *равновесного состояния* можно говорить *состояние.* Тогда не будет «путаницы», связанной с понятием *макросостояния.

С учетом замечания, далее будем говорить макросостояние, микросостояние и *равновесное состояние*.

Это не просто «дань» механике, в которой они появились впервые. Их применение позволяет существенно упростить вывод некоторых выражений, относящихся к размещению «шаров по урнам» и проводить их анализ. И, конечно же, согласитесь, гораздо проще, корче и нагляднее употреблять эти понятия, чем каждый раз произносить фразы, их определяющие.

Анализ, данный в п.III.2 (**стр.12**), показал противоречия, следующие из пояснения равновероятности размещений (*микросостояний*). Дополним его.

п.XIII. Утверждается: при большом числе (например $N = 10^{20}$) молекул вероятность *макросостояний* b, N;$b, 0$ и $b, 0$;b, N «настолько мала, что практически ее можно считать равной нулю» [4,329]. Примеры.

<u>*Различимые*</u> <u>шары</u>. <u>A.</u> Размещение 4-х шаров по 2-м урнам (п. XII, стр.21) – 5 *макросостояний*: в 2 по 1; в 2 по 4; в одном 6 *микросостояний*. <u>B.</u> Размещение 3-х шаров по 3-м урнам (табл.1, 2, стр.6) – 10 *макросостояний*: в 3 по одному; в 6 по 3; в одном 6 *микросостояний*. <u>C.</u> Размещение 4-х *различимых* шаров по 3-м урнам (табл.3. стр.6) – 15 *макросостояний*: в 3 по одному; в 6 по 4; в 3 по 6; в 3 по 12 *микросостояний*. <u>D.</u> Размещение 4-х *различимых* шаров по 4-м урнам (табл.4. стр.5) – 35 *макросостояний*: в 4 по одному; в 12 по 4; в 6 по 6; в 12 по 12; в одном 24 *микросостояния*. <u>E.</u> Размещение 4-х *различимых* шаров по 5-м урнам – 70 *макросостояний*: в 5 по одному; в 20 по 4; в 10 по 6; в 30 по 12; в 5 по 24 *микросостояния*. <u>*Неразличимые*</u> <u>шары</u>. Каждое *макросостояние* состоит только из *одного микросостояния*. Общее число *микросостояний* в этих примерах равно: 16, 27, 81, 256, 625 при *различимых* и 5, 10, 15, 35, 70 *неразличимых* шарах соответственно.

W.21. Из гипотезы *равновероятности микросостояний* следует: при *неразличимых* шарах *все макросостояния равновероятны*. Это *противоречит утверждению, основанному на различимых* частицах, но согласуется с выводами в пунктах III.3-4(стр.12-13).

Более важны другие выводы, следующие из примеров:

W.22. При *неразличимых* частицах *число макросостояний* равно *общему числу микросостояний*.

W.23. *Общее число возможных макросостояний не зависит от различимости или неразличимости частиц* и равно *общему числу возможных микросостояний* при *неразличимых* частицах (вычисляется по формуле {2}).

W.24. При *постоянном числе* N *различимых* частиц *увеличение числа* Z ячеек $Z' = Z + 1$ приводит[28]: 1. К *неравномерному увеличению чисел макросостояний с одинаковым статистическим весом, которые были возможны при числе* Z. 2. К появлению (при значениях $Z \leq N$) *макросостояний, статистические веса которых больше статистических весов, возможных при числе* Z.

W.25. *Статистические веса*, как и *математические* вероятности, *суммируются*: их *сумма* равна *общему числу микросостояний, а сумма ве-*

[28] **Эти выводы следуют из примеров A, C, D и E**

роятностей – единице.

Проведем небольшой анализ того, как применяются понятия.

«Рассмотрим систему N частиц в объеме V с полной энергией U. Разделим фазовое пространство, соответствующее этой системе, на конечное число Z ячеек ($Z \ll N$) с различной энергией $\varepsilon, 1; \varepsilon, 2; ...; \varepsilon, Z$. Пусть частицы произвольно распределены по этим ячейкам с числами заполнения $n, 1; n, 2; ...; n, Z$, где n, z – число частиц в ячейке с энергией ε, z. Любые отличные распределения N частиц по Z ячейкам соответствуют разным микросостояниям, при этом каждое микросостояние может быть получено разными способами. Полное число микросостояний, т.е. способов размещения N частиц по Z ячейкам, определяется выражением $\mathbf{N!/(n,1!n,2!...n,Z!)}$» [3, 209].

«... Продолжая этот процесс, придем к выражению $\mathbf{N!/(n,1!n,2!...n,Z!)}$ .... Это число представляет собой "пространственную"[29] часть статистического веса» [4,335].

Налицо две трактовки полиноминальных коэффициентов.

п.XIV. 1. В 1-й работе коэффициенты, вычисляемые по формуле {3}, трактуются как полное число *микросостояний*.

Полное *число микросостояний* (замечание к определению 1, стр.22) при любых значениях $Z \geq 2$ и $N \geq 2$ для *различимых* и *неразличимых* частиц определяется формулами $Z^{\mathbf{N}}$ (1) и $\mathbf{C^N_{N+Z-1}}$ (2) соответственно (стр.6). Т.е. общее число микросостояний в принципе определимо. Отсюда следует:

W.26. *Объяснение введения* понятия *термодинамической вероятности*, данное в работе [3] (цитата на стр.21), *несостоятельно.*

При большом числе N шаров намного сложнее определить (п.II.1, стр.5): 1) *число допустимых комбинаций групп* $b, n = n, z$ шаров; 2) *число макросостояний*, соответствующих размещению *данной допустимой комбинации групп* b, n шаров по Z урнам (вывод W.24, стр.23). Но обе задачи решаемые[30].

По-видимому, речь все же идет о *статистических весах макросостояний*, ибо далее применяются условия *максимума* значения коэффициента в зависимости от значений чисел $n, z = b, n \geq 0$ (z= 1,2,...,Z). Отметим два момента. Во-первых, связь максимума с условием $Z \ll N$.

Положим $Z = N$. Из формулы $\mathbf{N!/(n,1!n,2!...n,Z!)}$ видно: *макросостояние с максимальным статистическим весом* будет при *значениях чисел* $n,1 = n,2 = ... = n,N = 1$. Т.е. в каждой ячейке находится по одной частице. Положим $Z = N - 1$. *Макросостояние с максимальным статистическим весом* будет в случае, если в одной из ячеек находится 2 частицы, а в остальных – по одной частице. Можно показать: при числе ячеек $Z = Z_1 << N$ *максимальный статистический* вес будет у *макросостояния с числом* частиц $n_0 = N / Z_1$ в $Z_1 - 1$ ячейках и *в одной* – $n_1 = N - n_0 \cdot Z_1$, т.е. остаток от деления. Это легко проверить при числе $Z_1 = 2$. При *уменьшении числа* ячеек в m ($Z_1 = Z / m$) раз *общее число микросостояний* уменьшается (по сравнению к числу при значении $Z = N$) в $m^{\mathbf{N}}$ раз. При этом существенно сокращается и число макросостояний, а также неравномерно уменьшаются (вывод W.24.1, стр.23) числа *макросостояний с одинаковым статистическим весом.*

---

[29] «Скоростную» часть определяет распределение Максвелла [4,335]

[30] В статистической физике они не ставились. Таблицы дают наглядное представление о размещениях. Но для решения задач необходим подход, позволяющий провести подробный анализ размещений для произвольного сочетания чисел шаров и урн. Он будет дан в другой работе, но, возможно, решение существует в других областях знаний

При числе $Z > N$ неравномерно увеличиваются только *числа макросостояний с одинаковыми статистическими весами*, в том числе с *максимальным статистическим весом* (примеры D и E, п. XIII, стр.23). Таким образом:

Условие $Z \ll N$ не только неопределенное. Оно и некорректно: без всякого обоснования из рассмотрения исключаются все *макросостояния*, имеющие *больший статистический вес*.

В том числе, большое число *макросостояний с малыми числами* частиц в ячейках. Соотношение числа частиц и ячеек требует обоснования и уточнения.

Во-вторых. В п. XIII (выводы W.23-24, стр.23) показано, что данный *статистический вес* имеют все *макросостояния*, образованные *возможными* размещениями *одной допустимой комбинацией групп* шаров. Числа *макросостояний* с разными *статистическими весами* существенно отличаются.

***Число макросостояний с одинаковым статистическим весом* определяется *числом* размещений *данной допустимой комбинации групп* $b, n = n, z$ (z= 1,2,...,Z) шаров по Z урнам. С точки зрения теории вероятностей абсолютно неважно, в какой из урн находиться конкретная группа b, n в данном *возможном* размещении: все *макросостояния с одинаковым статистическим весом равноправны*. Так как числа *макросостояний* с разными *статистическими весами* отличаются, то *вероятность данного макросостояния* будет определяться *вероятностью возможных* размещений *допустимой комбинации*, которая *определяет это макросостояние*.**

Число макросостояний с одинаковым статистическим весом не учитывается, что приводит к не совсем правильным результатам.

п.XIV.2. 2-я трактовка появилась, возможно (утверждать это мы не можем) потому, что биноминальное распределение «уже занято распределением скоростей».

Это, по крайней мере, попытка отделить распределение частиц по объему от распределения скоростей. По этому поводу отметим следующее. Любое размещение N шаров по Z урнам содержит в себе размещение N шаров по $Z-1$ урнам, которое дополняется пустыми урнами, а при значении $Z \leq N$ – *допустимыми комбинациями групп* b, n, *которые не могут быть образованы* при их размещении по $Z-1$ урнам. Например (п.II.1, стр.5): при размещении по 3-м урнам имеем размещение *допустимых комбинаций* $b, N-k$; b, k (k=0,1,...,N), соответствующих размещению шаров по 2-м урнам: каждая дополняется пустой урной $b, 0$. Также появляются *допустимые комбинации*, *невозможные* при 2-х урнах: 1) $b, N-2$; $b, 1$; $b, 1$. 2) $b, N-3$; $b, 2$; $b, 1$. 3) $b, N-4$; $b, 3$; $b, 1$. 4) $b, N-4$; $b, 2$; $b, 2$ и т.д. Т.е. размещение N шаров по $Z > 2$ урнам содержит в себе их размещение по 2-м урнам, которое дополняется числом $Z-2$ пустых урн. Отсюда, с учетом трактовки, следует:

«Пространственная» часть *статистического веса* содержит в себе «скоростную часть *статистического веса*». Это, конечно же, невозможно, ибо они, как показано ранее, не связаны между собой[31].

Кратко о положении, определяющего понятие *статистического веса*,

[31]Существующая теория вероятностей трактует их как «независимые» [4,335], но можно показать, что это не совсем так

как одного из основных. Сначала классика.

«... вероятность макросостояния (в дальнейшем ... просто – состояние) пропорциональна его статистическому весу Ω .... Поэтому в качестве характеристики вероятности состояния можно было бы взять само это число, т.е. Ω. Однако такая характеристика не обладала бы свойством аддитивности. Чтобы убедиться в этом, разобьем систему на две практически не взаимодействующие подсистемы. Пусть эти подсистемы находятся в *макросостояниях* со *статистическими весами* Ω_1 и Ω_2. Число способов, которыми может осуществиться соответствующее *макросостояние* системы, равно произведению чисел способов, которыми могут быть осуществлены *макросостояния* каждой из подсистем в отдельности $\Omega = \Omega_1\,\Omega_2$» [4,332].

п.XV.1. Вероятности *макросостояний пропорциональны статистическим весам* Ω_k потому, что их *математические* вероятности *пропорциональны* $\Omega_k / Z^{\mathbf{N}}$ одному числу – *общему числу микросостояний.*

При пояснении «равновероятности» микросостояний в работе [4,227] эти вероятности только приводятся, но в некоторых из работ отмечается, что «статистический вес оказывается пропорциональным вероятности (обычной!) реализации данного макросостояния». Отсюда следует вывод W.25 (стр.23), и это очевидно. Но он почему-то не делается: может быть потому, что он противоречит последующему утверждению.

Далее без каких-либо объяснений утверждается: *статистические веса перемножаются.* Рассмотрим примеры, данные в п. XIII (стр.23).

Исходя из утверждения, получим: *Различимые* шары. Из *произведения статистических весов* следует, что системы в примерах A, B, C, D и E характеризуются (в скобках – реальное число): 96 (16), 324 (27), 51104 (81), 23887872 (256) и 1036800000 (625) *возможными микросостояниями* соответственно. *Неразличимые* шары. Каждое *возможное макросостояние* состоит только из одного *возможного микросостояния.* Из их произведения следует: все эти системы характеризуются только одним *возможным микросостоянием.* Этот результат справедлив для любых значений $Z \geq 2$ и $N \geq 2$. Однако в рассмотренных примерах имеем 5, 10, 15, 35 и 70 *возможных микросостояний* соответственно. Т.е. «декларируемое» утверждение приводит к совершенно неверной оценке общего числа возможных микросостояний. Из анализа следует:

W.27. Утверждение о *произведении статистических весов принципиально неверно.*

Связано это с тем, что *статистические веса суммируются* (**вывод W.25, стр.23**). В квантовой механике еще «интереснее», чем в классике.

1. Основа вывода распределения Бозе-Эйнштейна: «... Число способов, какими n_j неразличимых объектов можно разместить по нумерованным ячейкам. определяется формулой $W_j = (n_j + z_j - 1)!/[n_j!(z_j - 1)!]$. Оно и характеризует число возможных состояний для заданных n_j и z_j. Для других значений n_k и z_k число возможных состояний будет другим. Всего же возможных состояний будет $W = \prod_j W_j = \prod_j (n_j + z_j - 1)!/[n_j!(z_j - 1)!]$» [3,214].

2. Основа вывода распределения Ферми-Дирака: «... В этом случае в одном квантовом состоянии не может быть больше одной частицы, следовательно, $z_j > n_j$. Тогда число всевозможных размещений n_j систем по z_j ячейкам будет равно $W_j = z_j!/[n_j!(z_j - n_i)!]$. А полное число всевозможных состояний при любом числе систем и любом числе ячеек будет определяться выражением вида $W = \prod_j W_j = z_j!/[n_j!(z_j - n_i)!]$» [3,215].

п.XV.2. В цитируемой работе об этом не говорится, но в других работах числа W_j называют *статистическими весами.* Т.е. утверждается то же, что и в классической теории, но опять без обоснования, как само собой разумеющееся.

«По формуле $W = \mathbf{Z}!/[\mathbf{N}!(\mathbf{Z}-\mathbf{N})!]$ {5}, как и формуле $W = \mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{N}+\mathbf{Z}-\mathbf{1}}$ (2) (стр.6), вычисляется *общее число возможных микросостояний неразличимых* частиц. В отличие от формулы (2) это *число ограничено условием*: в одной ячейке может находиться либо ни одной, либо одна частица. Отметим, что при *различимых* частицах получим число макросостояний $W = \mathbf{Z}!/[\mathbf{N}!(\mathbf{Z}-\mathbf{N})!]$ с *одинаковым статистическим весом* $\mathbf{N}!$, а общее число микросостояний равно $W = \mathbf{Z}!/(\mathbf{Z}-\mathbf{N})!$

Таким образом, в обоих случаях по числам n_j и z_j определяется *полное число микросостояний* (вывод W.23, стр.23), соответствующих *одному равновесному состоянию.* А это вызывает только вопросы. *Какое отношение имеет это число к статистическому весу? По отношению к чему он определяется? Или это другое понимание статистического веса?*

Результат такого *произведения* зависит от соотношения чисел n_j и z_j каждого из состояний. При большом числе и разнообразии значений n_j и z_j он непредсказуем. Выше было показано, что при любых числах $Z \geq 2$ ячеек и $N \geq 2$ *неразличимых* шаров каждое *макросостояние* состоит только из одного *микросостояния*, следовательно, результат *произведения* всегда равен 1. Поэтому на поставленные вопросы нет ответов.

Пояснение можно найти в рассуждениях, приведенных в работе, которые предваряют вывод рассматриваемых распределений: . «...мы рассмотрим большое число равноценных систем со спектром собственных значений энергии $\varepsilon, 1; \varepsilon, 2; ...; \varepsilon, j, ...$, находящихся в состоянии теплового равновесия. Тогда число систем, которые будут иметь энергию ε, j, и определит термодинамическую вероятность состояния системы с энергией ε, j» [3,213].

По-видимому (утверждать этого мы не можем), под «равноценными системами» понимаются системы, находящиеся в равновесных состояниях при одинаковых температурах, давлениях, концентрациях частиц. Они отличаются только объемом V (т.е. числом частиц N) и соответственно полной энергией E. Рассмотрим простой пример.

Сосуд с объемом V наполнен газом с числом частиц N находится в термостате. Пусть в том же термостате находится сосуд, (с таким же объемом и числом частиц), который разделен очень тонкой непроницаемой упругой перегородкой на 2 части. Положим, что число частиц в частях сосуда пропорционально их объемам $N_1 = V_1 / V$ и $N_2 = V_2 / V$. Очевидно, что в них будет равновесное состоянии с одинаковыми параметрами: Только полная энергия E во 2-м сосуде будет определяться суммой $E_1 + E_2 = E$. *Что будет, если убрать в нем перегородку?* Почти ничего: газ будет в *равновесном состоянии с теми же параметрами. Единственное, что все-таки произойдет* (если бы только это мы могли это увидеть): через какое-то время *частицы, находившиеся в разных частях, перемешаются и распределятся равномерно по всему* объему. Думаю, физики с этим согласятся.

Можно попробовать дать ответы на два вопроса и пояснить их.

1. *Если распределение скоростей в 1-м сосуде описывается функцией* $f(v)$, то *будут ли функции* $f_1(v)$ *и* $f_2(v)$ *в 2-х частях 2-го сосуда отличаться от функции* $f(v)$? **2.** *Если во 2-м сосуде убрать перегородку,* *то будет ли функция $f'(v)$ отличаться от функции $f(v)$?*

В соответствии с существующей теорией функция $f'(v)$ равна произведению функций $f'(v) = f_1(v) \cdot f_2(v)$, т.е. существенно отличается[32] от функции $f(v)$. Скажем так: физиками *применялось* (**и до сих пор применяется**) то, что *«предлагала и предлагает» существующая теория случайных величин.* В другой работе будет дан небольшой анализ исходных положений, которые используются при выводе распределений Гиббса, Максвелла, Бозе, Ферми и, в частности, показано, с чем связано утверждение о *произведении статистических весов.* А сейчас рассмотрим задачу, рассмотренную в работе [2, 33].

«Пример 6. Имеются N частиц, каждая из которых может находиться с одной и той же вероятностью $1/Z$ в одной из $Z(Z > N)$ ячеек. Найти вероятность того, что: I. В определенных N ячейках окажется по одной частице. II. В каких-то N ячейках окажется по одной частице» [2,35].

п.XVI. Вторая искомая вероятность определяет *математическую вероятность возможных* размещений *допустимой комбинации* из N *групп* $b,1$ *и* $Z-N$ *групп* $b,0$ (пустых урн). Т.е. каждый из шаров занимает одну урну. Эти вероятности равны $p_2 = Z!\big/[(Z-N)!Z^{\mathbf{N}}]$ для *различимых* [2,35] и $p_2 = Z!(Z-1)!/[(Z+N-1)!(Z-N)!]$ для *неразличимых* частиц [2,36].

Постановка и решение задачи подтверждает вывод W.25 (стр.23), но из этого решения следует интересное продолжение. Представим вероятности в другом виде. Общее число *возможных* размещений равно: $Z^{\mathbf{N}}$ (1) и $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{N+Z-1}}$ (2) (стр.6). Число *возможных* размещений N шаров по Z урнам для этой *допустимой комбинации* равно $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{Z}} = Z(Z-1)...(Z-N+1)$ {5} для *различимых* и *неразличимых* $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{Z}}\big/\mathbf{N}!$ {6} шаров – в другом виде: $A^N_Z = \mathbf{Z^N(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]}$ {7}, $C^N_Z = \mathbf{Z^N[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]/N!}$ {8}.

Отношение *чисел* $\mathbf{A}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{Z}}$ *и* $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{Z}}$ к общим числам размещений определяет *математические* вероятности: $p_2 = (1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]$ {7} для *различимых* частиц и $p'_2 = \{(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]\}/\{[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]\}$ {8} для *неразличимых* частиц. Для сравнения приведем вероятность появления *допустимой комбинации* из одной группы $b,2$, $N-2$ *групп* $b,1$ и $Z-N+1$ *групп* $b,0$ *различимых* $p_3 = \{N(N-1)(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-2)/Z]\}/(2Z)$ {9} и *неразличимых* частиц $p'_3 = \{N(N-1)(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-2)/Z]\}/\{Z[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]\}$ {10}.

Минимальную вероятность имеют *возможные* размещения *допустимой комбинации* из одной группы b,N и $Z-1$ *групп* $b,0$. Она равна $p_{\min} = 1\big/Z^{N-1}$ {11} для *различимых* и $p'_{\min} = 1\big/\{Z^{N-1}[1+(N-1)/Z][1+(N-2)/Z]...(1+1/Z)]\}$ {12} для *неразличимых* частиц.

A. Из формул {7} и {8} очевидно: при *конечном числе* N частиц и *увеличении числа* Z ячеек вероятности p_2 увеличиваются, а при *неограниченном увеличении* – приближаются к 1. Это означает, что вероятности всех остальных *статистических весов* приближаются к нулю. Это хорошо видно на примере формул {9}-{12}.

---

[32] **Это легко проверить, перемножив 2-е одинаковые дискретные функции**

<u>Замечание 8.</u> **Решение при *2-й постановке* задачи находится с применением только *2-го типа объединения опытов*[33] (определение 6 [5,33]). При *неразличимых* частицах (выводы W.16 и W.18, стр.18, 19) все размещения *равновероятны*, что *соответствует принятой гипотезе* в статистической физике. Если положить, что все шары *различимы*, но появляются *в любой из частей* d_z (z= 1,2,...,Z) с одинаковой вероятностью $1\,/\,Z$ (физика «протестует», но теория вероятностей «против ничего не имеет»), то все размещения будут также *равновероятны*.**

B. **Учитывая замечание, последующий анализ будем *относить ко 2-й постановке* задачи, ибо *1-я постановка имеет некоторые особенности*, связанные с определением вероятностей *сложных* событий (вывод W.13, стр.17).**

Из анализа следует:

W.28. Если *число* Z ячеек *много больше числа* $Z \gg N$ частиц, то *каждая частица* будет *находиться в одной ячейке с вероятностью близкой к единице.*

Т.е. вероятность размещения этой допустимой комбинации имеет максимальное значение. Продолжим об этом разговор при рассмонении построения случайных процессов, часть VII исследований: там это будет уместнее.

Вывод основан на *предположении* $Z \gg N$, но оно тоже не обосновано. Снова возник вопрос о *соотношении чисел* частиц и ячеек. Он связан с размерами частиц.

***<u>Замечание</u>* <u>9</u>.** **При столкновении молекулы газа сближаются до некоторого наименьшего расстояния, которое условно считается суммой радиусов взаимодействующих молекул. Столкновение между одинаковыми молекулами может произойти только в том случае, если их центры сблизятся на расстояние, меньшее или равное эффективному (газокинетическому) диаметру молекулы. Отметим, что они, вообще говоря, зависят от температуры.**

В теории о размерах молекул «вспоминают» при вычислении *длины свободного пробега, числа столкновений, коэффициента диффузии* и т.п.

Однако при выводе распределений Гиббса, Максвелла и других распределений размеров вовсе «не существует»: используется понятие фазового пространства, в котором *микросостояние* изображается: в *классической* теории *одной точкой*; в *квантовой* – *минимальным фазовым объемом* [3,103]. Но нас интересуют «*реальные размеры*»[34] частиц, а не *некоторые математические* образы, не существующие в *реальности*.

При рассмотрении *математической* (**вероятностной**) модели задачи показано, что *взаимосвязь* размеров шаров и урн приводит к двум *ограничениям* (**условия IV.4, стр.13**). Рассмотрим их подробнее с «привлечением» физики. Далее полагаем, что *температура газа постоянна.*

---

[33] **Напомним, существующая теория вероятностей этого понятия «не знает»**

[34] **В кавычках, ибо для описания размеров атома (молекулы) используются с десяток различного рода понятий условных атомных (молекулярных) размеров. Их связавают с взаимодействием частиц**

п.XVII.1. Размер урны не может быть *меньше* размера шара.

С точки зрения физики это ограничение определяет *максимальное* число $Z_{\max}$ ячеек, на которое разделяется данный объем V.

Увеличение числа ячеек больше числа $Z > Z_{\max}$ означает, что мы увеличиваем объем V, занимаемый газом. При неограниченном увеличении числа Z неограниченно увеличивается объем V, а вероятность нахождения каждой частицы в своей ячейке приближается к единице. Это полностью согласуется с физикой (термодинамикой). В принципе, этот результат согласуется с с решением, подученным в работе [2, 33] (пример 6).

W.29. *Ограничение $Z \ll N$ исключает возможные* размещения *этой допустимой группы, т.е. оно противоречит* физике. Очевидно, что *число ячеек должно отвечать*, по крайней мере, *отношению* $N \leq Z < Z_{\max}$.

Ранее говорилось о том, что *число возможных* размещений «шаров по урнам» определяет, с *математической* позиции, все *возможные* случаи (**исходы**), которые могут быть в *данном испытании*. Это одно из *необходимых условий правильного* построения *вероятностной* модели. Рассмотрим, что определяют размещение «шаров по урнам» в физическом понимании. Для этого обратимся к *основам физической* модели.

п.XVII.2. Модель идеального газа, основана на модели классической механики: соударение пар абсолютно упругих шаров (п. VI, стр.15).

Пусть в ячейку помещается *ровно* 2 частицы («плотная упаковка»). С точки зрения физики это значит, что если в ячейке находится 2 частицы, то *между ними происходит соударение*. Аналогично, если в ячейку помещается 3 частицы, то при нахождении в этой ячейке 3 частиц происходит *соударение между 3-мя* частицами. И т.д. вплоть до числа частиц N, помещаемых в одну ячейку.

С другой стороны, при числе ячеек Z *близком к максимально возможному числу* $Z \cong Z_{\max}$ *размер ячейки минимальный*, следовательно, *каждая частица будет находиться в своей* ячейке. В этом случае, если 2-е частицы находятся *в 2-х соседних ячейках*, то *между ними происходит соударение*. Аналогично, если 3 частицы находятся *в 3-х соседних ячейках*, то *соударение между 3-мя* частицами. И т.д. вплоть до числа N частиц, находящихся в N *соседних ячейках*. Из анализа физической модели задачи следует:

А. Нахождение $n, z = 2, 3..., N$ (z=1,2,...,Z) частиц в одной ячейке означает, что происходит соударение между n, z частицами. При *минимальном размере* ячеек (т.е. $Z \cong Z_{\max}$) *соударение происходит между* частицами, *находящимися в соседних ячейках*.

Находятся ли частицы в одной ячейке, или в разных ячейках, имеющих минимальный размер, абсолютно неважно: соударения между частицами происходит в обоих случаях. Но если в 1-м случае требуется увеличение размера ячейки, то во 2-м в этом нет необходимости. Следовательно, всегда можно положть $Z \cong Z_{\max}$. Теория вероятностей оперирует с событиями, которые не являются действительными величинами. Геометрически их можно представить в виде точек [5,62]. Соударения частиц, как и их скорости (импульсы, энергии) также не имеют геометрических размеров, поэтому вполне естественно полагать их, как и события точками. Следовательно:

W.30. *Зависимость размера* ячейки *от числа* частиц *не связана с ре-*

шением вероятностной **задачи, определяемой постановкой физической задачи.**

Ограничение $N \leq Z < Z_{\max}$ **на число «урн» остается в силе (вывод W.29, стр.30), ибо рассматривается изолированный конечный объем** V **газа.**

В п.XVII.1 рассмотрено поведение вероятностей ***при неограниченном увеличении числа*** **ячеек.** ***При ограниченном числе*** **ячеек поведение вероятностей существенно отличается.**

Сравним вероятности: $p_3 = \{N(N-1)(1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-2)/Z]\}/\,(2Z)$**{9} и** $p_2 = (1-1/Z)(1-2/Z)...[1-(N-1)/Z]$**{7}. При числе ячеек** $Z \leq Z_0 = (N-1)(N+2)/2$ **вероятность** $p_3 \geq p_2$**. Наличие** ***минимального*** **значения вероятности** $p_{\min} = 1\big/Z^{N-1}$**{11} позволяет утверждать:**

W.31. При числе ячеек $Z \leq Z_0$**, вероятности возможных размещений допустимых комбинации групп имеют максимум.**

Чем меньше отношение Z/Z_0**, тем больше смещение максимума к значению вероятности** $p_{\min}$ **. При числе** $Z = N$ **смещение максимально.**

п.XVII.3. Будем ***изменять число*** **частиц при** ***постоянном числе*** **ячеек.** ***Уменьшение числа*** N **частиц (вплоть до значения** $N \geq 2$**) в объеме означает** ***уменьшение объема*** V_N**, занимаемого частицами.**

Можно возразить: при малом числе частиц состояние газа не будет равновесным. Конечно же, некоторые положения, следующие из кинетической теории, в этом случае «не работают», например, давление в объеме не будет равномерным. Однако и такая система, «предоставленная самой себе, придет, в конце концов, в стационарное состояние, в котором установится определенное распределение скоростей между частицами, постоянное во времени» (предположение 3, стр.15).

Если при малом числе частиц положить число ячеек $Z = N$**, то получим неверное представление о вероятностях** ***возможных*** **размещений** ***допустимых комбинаций групп*** b, n **(n=0,1,...,N) частиц в объеме** V**.** ***Правильные значения вероятностей*** **будут при** ***числе*** **ячеек, которое приблизительно** ***равно*** $Z \cong Z_{\max}$ **(вывод W.28, стр.29).**

Например, при 3-х ***различимых*** **частицах и** Z **ячейках имеем** ***возможные*** **размещения 3-х** ***допустимых комбинаций*****: 1.** $b, 3$ **и** $Z-1$ ***групп*** $b, 0$**. 2.** $b, 2$**;** $b, 1$ **и** $Z-2$ ***групп*** $b, 0$**. 3.** $b, 1$**;** $b, 1$**;** $b, 1$ **и** $Z-3$ ***групп*** $b, 0$**. Их вероятности равны** $1/Z^2$**,** $[3(1-1/Z)]/Z$ **и** $(1-1/Z)(1-2/Z)$ **соответственно. При нормальных условиях в** $4cm^3$ **воздуха находится** $\sim 10^{20}$ **молекул. Объем** V_N**, занимаемый молекулами, в** $10^4 \div 10^5$ **раз меньше. Сравните вероятности при числах** $Z = 3$ **и** $Z \cong 10^{24} \div 10^{25}$**. Чтобы при малом числе частиц вероятности размещения всех допустимых комбинаций были значимыми, необходимо в очень много раз уменьшить объем, в котором находятся частицы. Число ячеек будет малым, а между частицами будут происходить столкновения.**

Из проведенного анализа можно сделать вывод:

W.32. ***Независимо от числа*** **частиц в объеме** V**,** ***число*** **ячеек равно** $Z \cong Z_{\max}$ ***максимально возможному числу*** **ячеек («плотная упаковка»).**

Учитывая вывод, будем увеличивать число частиц в объеме V **от значения** $N \geq 2$ **при постоянном числе ячеек** $Z \cong Z_{\max}$**.**

При ***малых*** **значениях** N ***соударения*** **между частицами** ***практически отсутству-***

_ют_ (вывод W.28, стр.29): они свободно «гуляют» от стенки к стенке сосуда. При числе $N > N_0 \cong \sqrt{2Z_{\max}}$ (следует из условия $Z < Z_0 = Z_{\max}$, вывод W.31) могут появляться _парные соударения_, а при некотором значении $N = N_1$ их появление становится _преобладающим_ и _появляются соударения между 3-мя_ (и более) частицами. При некотором значении $N = N_2$ _преобладающим_ становится появление _соударений между 3-мя_ частицами, и _появляются соударения между 4-мя_ (и более) частицами. И т.д. При приближении числа частиц к значению $Z_{\max}$, _смещение максимума_ вероятности _возможных_ размещений _допустимых комбинаций_ приближается _к наибольшему_ значению (замечание к выводу W.31, стр.31).

п.XVIII. _Увеличение числа_ частиц в объеме V означает _увеличение объема_ V_N, занимаемого частицами (конечно же, и _давления_) и _уменьшению длины свободного пробега_ частицы.

При _числе_ частиц $N < N_0$ _длина свободного пробега_ частицы больше размера сосуда, а _объем_ V_N, занимаемый частицами, мал по отношению к объему V сосуда. В этом случае некоторые явления (прежде всего – явления переноса) протекают иначе, чем при большом числе частиц. Определенные положения, следующие из кинетической теории, оказываются неверными. Они становятся применимыми при числе частиц $N = N_1$, когда _преобладающим_ становится появление _парных соударений_ (именно для этого случая Максвеллом полученно распределение скоростей) и значительно увеличивается _объем_ V_N, занимаемычастицами.

При значении $N = N_2$ _преобладающим_ становится появление _соударений между 3-мя_ частицами. Законы, которым подчиняется _идеальный_ газ, начинают _нарушаются_: «играют роль» реальные взаимодействия частиц. Необходим переход к модели, учитывающей поведение реального газа. Модель идеального газа и уравнение Клапейрона—Менделеева $pV_m = RT$ (для моля газа), достаточно хорошо описывает газ при высоких температурах и низких давлениях, когда он находится в условиях достаточно далёких от условий конденсации. Однако для реального газа это не всегда выполняется и тогда приходится учитывать потенциальную энергию взаимодействия молекул газа между собой. Простейшим уравнением состояния, описывающим неидеальный газ, является уравнение, предложенное в 1873г. Ван-дер-Ваальсом. Его можно записать в виде $\left(P + av^2/V^2\right)\cdot\left(V - bv\right) = vRT$, где: P, V и T - давление, объём и температура газа, v - количество молей газа.

Поскольку уравнение Ван-дер-Ваальса является, по сути своей, эмпирическим, коэффициент b, так же как и коэффициент a, должны определяться в первую очередь экспериментально.

При некоторых _числах_ частиц $N = N_3$ (или $N = N_4$), _достаточно близких к значению_ $Z_{\max}$ _объем_ V_N, занимаемый частицами, близок к максимальному: происходит переход к _жидкому_ (или _твердому_) состоянию газа.

Объем V_N, занимаемый частицами, определяется размерами частиц, а _отношение_ числа N частиц к _объему_ V, в котором они находятся, определяет _концентрацию_ $n = N/V$ частиц _в единице_ объема. _Концентрации_ $n_j = N_j/V$ (j = 0,1,...,4) частиц в единице объема определяют _применимость той или иной модели состояния_ газа.

Из анализа, приведенного в пунктах **XVI-XVIII** очевидно, что _концентрация_ частиц в объеме _никоим образом_ не связана _с искусственным делением_ объема на ячейки, _необходимым для решения вероятностной_ задачи.

Таким образом, анализ _математических ограничений с позиций физической_ модели показал, что _математические_ условия определяют _од-_

но естественное ограничение (**п.XVI.1, стр.29**): – *максимального числа* ячеек $Z_{\max}$, *на которое можно разделить объем*, в котором находится газ. При *любом числе* частиц N, *число* ячеек $Z \cong Z_{\max}$ *всегда* определяется *только размерами сосуда и частицы* и не зависит от агрегатного состояния газа.

{A.8} Определение максимального числа $Z_{\max}$ ячеек, на которое можно разделить объем V, занимаемый газом, как и значений $n_j = N_j/V$ (j = 0,1,...,4), конечно же, за физиками.

Для более подробного анализа необходимо, во-первых, показать подход к решению обоих вероятностных задач, следующих из 2-х постановок физической задачи (**стр.15-18**).

Во-вторых, решить задачи (**или, по крайней мере, найти подход к решению**), поставленные в замечании к выводу **W.26** (**стр.24**):

1. Определить *число допустимых комбинаций групп* $b, n = n, z$ шаров. 2. Определить *число макросостояний*, соответствующих размещению *каждой допустимой комбинации групп* b, n шаров по Z урнам.

Эти исследования почти завершены и идет подготовка работы, в которой будут использованы результаты данного анализа. Но в значительно сокращенном виде, так как мы попытаемся опубликовать ее в официальном научном издании. Однако, исходя из выводов, следующих из анализа, надежды на ее опубликование слишком мало.

Список литературы

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с

2. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с

3. В.Ф. Ноздрев, А.А. Сенкевич. Курс статистической физики. Учебное пособие. М.: «Высшая школа». 1966. - 288 с.

4. И. В. Савельев. Курс общей физики, т. 1. Механика. Молекулярная физика: Учебное пособие.— изд. 2-е. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.— 432 с.

5. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 1: «*совершенство*» *или видимость*? ч.I. Теории событий: критика сцществующих понятий и создание новой исходной системы понятий. – https://iibondarchuk.github.io/. 2018/ – 66с

6. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с

7. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. Наука, 1980г. – 976с

8. М. А. Елъяшевич, Т. С. Протъко. Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов. – Успехи физических наук. т.135, вып.3. – 1981. стр.381-423

9. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. East-West Association for Advanced Studies and Education,

2017. – 166c