«*То все ошибки, все накладки*
И заблуждения веков»
Автор неизвестен.

УДК 519.211; ББК 22.171

Теория вероятостей 3: *видимость совершенства*!
ч.III. Теория случайных величин: анализ исходных понятий; создание новой исходной системы

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

3 августа 2019 г.

Без анализа *исходных* понятий *теории случайных* величин[1] исследования, изложенные в работе[2] [19] далеки от завершения. Принцип анализа *чисто математический*: если определена *исходная система* (т.е. даны названия объектов и определены основные отношения, которым они подчиняются), остальное изложение *должно* строиться *исключительно на этой* системе [8; 9], или по-другому: *построение математических* моделей *теории* случайных величин *должно основываться исключительно на математических* моделях *теории* событий. В отличие от анализа понятий теории событий: *основной* лейтмотив [19,9] которого – *сравнение существующих понятий с результатами экспериментов*.

{A.1} *Главная цель исследований* остается прежней [19,1] – показать, *какая есть и какой должна быть теория* вероятностей случайных явлений, которые называют *массовыми*[3].

Анализ *исходных* понятий существующей *теории* случайных величин показал: *она не связана с теорией* событий, а ее *обоснование* построено на 4-х утверждениях (дополнительно к аксиомам, введенным в теории событий) – по сути, «негласных аксиомах» (постулатах). *Новая исходная система теории* случайных величин разработана *на основе новой исходной системе теории* событий[4]: никаких *дополнительных аксиом* (сноска 3) не потребовалось.

Содержание.

[1] В существующей теории это: определения случайных одномерных и многомерных величин, их функций распределения и действий со случайными величинами

[2] Полная версия – в [10], но в ней почти нет подробностей, поэтому ссылки будут в первую очередь на работу [19]. К нашему огорчению, при рассмотрении случайных величин в [10] допущены некоторые ошибки: об этом по мере изложения исследований

[3] Теории, занимающейся изучением только тех случайных событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз при неизменных условиях проведения опыта, обладают статистической устойчивостью и в отношении которых имеет смысл не только утверждение об их случайности, но и возможна объективная оценка доли случаев их появления. Подробнее об этом можно почитать в [1,16]

[4] В отличие от аксиоматической теории, новая исходная система теории событий включает в себя две аксиомы: I) *равновероятности возможных* исходов *опыта* [19,28]; II) *существования математической* вероятности *элементарного* события [19,51]

Примечания **1. Ссылки на работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. Если работ несколько, то они разделяются знаком «;». При ссылках внутри работы указывается положение, на которое дается ссылка, и № страницы на которой оно находится. 2. Выводы, следующие из анализа, обозначаются номерами W.1, W.2, ... Чтобы обратить внимание Читателя на некоторые важные моменты, следующие из анализа, они выделены как положения и обозначены номерами {A.1}, {A.2}, ... 3. Понятия, используемые в принятой теории вероятностей, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита. Уточненные предположениия – римскими цифрами, а уточненные и вновь введенные определения понятий – словом «определение» с арабскими цифрами. 4. Нумерация формул: в круглых скобках – сквозная (в приделах раздела); в фигурных скобках – в пределах рассматриваемого примера.**

Предисловие

Создание *новой исходной* системы [19,28-47] *обусловило* существенное *качественное уточнение теории* событий (**и уточнение решения некоторых задач**). Естественно, что *новые исходные* понятия *теории случайных* величин вводятся на ее *основе*. Это привело к существенному изменению *исходных* понятий *теории случайных* величин. По существу, создана *новая исходная* система, которая значительно повлияла на другие положения теории. Это определяет необходимость ясного понимания *почему*, *что* и *как изменено*, а также *серьезного обсуждения* этих *изменений и к чему они приводят*. Поэтому изложение исследований преднамеренно подробно, чтобы изменения и их последствия были понятны не только профессионалам, занимающихся теорией, но и Читателям, хорошо знающим и применяющим ее в других областях знаний и, конечно же, тем, кто только изучает ее азы.

Как и в [19,3], мы будем следовать пониманию вероятности, которое прекрасно сформулировано В. Феллером:

> **«Успех современной математической теории вероятностей, приобретен следующей ценой: теория ограничивается лишь одной стороной «случайности». Интуитивное понятие вероятности связано с индуктивными умозаключениями и суждениями . . . . Суждения такого рода интересны философам и логикам и являются также законным объектом математической теории. Следует подчеркнуть, однако, что мы будем иметь дело не с модальностями индуктивных умозаключений, а с тем, что может быть названо физической или статистической вероятностью. Грубо говоря, мы можем охарактеризовать это понятие, сказав, что наши вероятности относятся не к мнениям, а к возможным исходам мыслимого эксперимента» [6,20].**

Позиция, принятая для анализа понятий теории случайных величин, позволяет нам, как и прежде [19,9], не «влезать в дебри философских споров». Тема более сложная и без некоторого усложнения изложения не обойтись. Тем не менее, для достижения основной цели исследований будем «влезать в дебри» теории в минимально необходимом объеме.

Введение

Развитие понятия случайной величины продолжалось длительное время[5]: его использовали более 2-х столетий, не придавая ему определенного смысла. Путеводной нитью в теоретических и прикладных работах были некоторые интуитивные представления.

«Как правило, необходимое понятие еще не введено в научный обиход, а фактически им уже пользуются как при решении практических задач, так и при выводе общетеоретических закономерностей. Этот путь характерен и для случайной величины - основного понятия теории вероятностей и современного естествознания. Введение этого понятия связано с именами многих ученых, которые хотя и не использовали этого термина, но фактически исследовали отдельные его свойства» [1,420]. Можно считать, что начало развитию понятия случайной величины положено знаменитым естествоиспытателем Г. Галилеем. В начале XVII века он «заложил основы теории ошибок измерений и ввел в рассмотрение ряд важных понятий, которые сохранили значение и в наши дни» [1,418]. А «строго формализованное определение» случайной величины дано только «в конце двадцатых годов (XX в.) А.Н. Колмогоровым» [1,423].

Важное замечание: *с самого начала развития теории* случайных величин «*значения*» *случайной* величины (**в отличие от событий – «шансов», «случаев»**) *отождествлялись с действительными* числами, т.е. *с физическими измерениями исследуемого случайного* явления. Именно они, а *не теория событий, были положены в основу определения случайной* величины.

***<u>Замечание</u>*. Чуть-чуть об истории. Такое понимание, по-видимому, начало слагаться с работ Гюйгенса и Галилея. Вычисление математического ожидания, как и ошибки измерений (развитие теории началось только в XVIII веке), связаны с *действительными* числами. Это привело к тому, что *случайная величина* воспринималась как *действительная* функция *действительной* переменной. Существенную роль в таком понимании сыграли: Применение Я. Бернулли членов ряда, выражающего степень бинома $(a+b)^n$, для доказательства своей знаменитой теоремы (открытие закона больших чисел). Исследования А. Муавра, открывшего «Метод аппроксимирования суммы членов бинома ...» кривой[6] $\exp(t^2 / 2)$ для больших значений степени бинома n. Первое применение методов математического анализа к вероятностным задачам, выполненное Д. Бернулли. Работы П. Лапласа, который широко применил методы математического анализа *действительных* функций *действительных* переменных к случайным величинам, К. Гаусса и А. Лежандра, внесших большой вклад в развитие теории ошибок измерений.**

Создание теории вероятностей происходило в то же время, в которое такие науки как механика, физика, многие разделы математики только начали свой путь к тому виду, который они приобрели к концу XIX началу XX века. В этих условиях провести аналогию между теорией вероятностей и другими науками было крайне сложно. Тем не менее, она появилась еще в самом начале XVIII века у Н. Бернулли [1,434]. В своей работе он привел пример Я. Бернулли: «Если 3 кружки пива ценой 13 смешиваются с 2 кружками ценой по 8, то после перемножения 3 на 13 и 2 на 8 получится общая цена

---

[5] **История развития теории вероятностей, в том числе формирования понятия случайной величины, замечательно изложена в очерке Гнеденко [1,386-412]. Можно почитать и др. работы, посвященные истории теории вероятностей. например [2-5]**

[6] **Позже (возможно «с легкой руки» С. Пуассона) функцию распределения, определяемую этой кривой, начали называть нормальным распределением**

всех кружек – 55, что дает путем деления на число всех кружек, т.е. 5, среднюю цену одной кружки смеси, равную 11. Такова же должна быть, согласно правилу, оценка величины ожидания чего-либо, что будет иметь 3 случая по 13 и 2 случая по 8». Затем обратил внимание на "... особое и исключительное совпадение ..." *правил* определения *математического* ожидания и *центра тяжести* системы сосредоточенных масс.

К сожалению, пример аналогии, данный Н. Бернулли, только иногда приводится в работах [6,243; 12,82; 13,86], но просто как «механическая интерпретация» математического ожидания, используемая для «большей наглядности» его понимания. Об аналогии между понятиями дисперсии и осевым моментом инерции масс [6,243; 12,88; 13,96] говорится еще реже. Упоминание же примера Я. Бернулли в работе [1], наверное, исключение. Т.е. трактуется *исключительно* как *совпадение*, не более. Иначе весьма сложно пояснить появление, например, *теоремы* о *математическом* ожидании *произведения* случайных величин[7]: таковой – *произведения* центров тяжести – в механике не существует. Можно услышать «глубокомысленное» возражение: *теория вероятностей – это не механика*[8]. Конечно же, это так. Но для описания в обоих случаях используются *действительные* функции *действительной* переменной: – их *свойства никак не зависят* от того, *в какой области знаний они применяются.*

«Приверженцам» такого «весомого аргумента»: ***цена кружек*** (цена – аргумент фукции, а их число – ее значение) **с пивом *не имеет отношения ни* к механике, *ни* к вероятности!**

Можно привести примеры из многих других областей знаний, но мы думаем, что примера Я. Бернулли достаточно: он весьма показателен и хорошо запоминается.

[7]Не было бы в существующем виде [1; 6; 8; 9; 11-18] и теоремы о математическом ожидании суммы случайных величин (части IV-V работы)

[8]«Очень весомый аргумент», но имеет ли он отношение к науке? Вообще-то, небольшое отличие с любимой нами механикой все же есть, но оно проявляется при задании распределения вероятностей на кривых линиях (поверхностях)

«— Но ведь в природе так не бывает!
— Природа тут не причем.
Мое уравнение. Что хочу, то и пишу!»
Диалог (Физики шутят):

1. Анализ существующего понимания случайной величины

Сначала цитата, которая, по сути, завершает обоснование необходимости аксиоматизации теории вероятностей, данное в работе [1,49]:

«Развитие естествознания в начале текущего столетия предъявило к теории вероятностей повышенные требования. Возникла необходимость в систематическом изучении основных понятий теории вероятностей и выяснении тех условий, при которых возможно применение ее результатов. Вот почему особенно важное значение приобрело формально-логическое обоснование теории вероятностей, ее аксиоматическое построение. При этом в основу теории вероятностей как математической науки должны быть положены некоторые предпосылки, являющиеся обобщением многовекового человеческого опыта. Дальнейшее же ее развитие должно строиться посредством дедукции из этих основных положений без обращения к наглядным представлениям, к выводам "согласно здравому смыслу"».

В целом наше понимание такое же, но обратим внимание на два момента.

1. Без наглядных представлений обойтись можно, но мы считаем, что они очень необходимы. Например, приводить конкретные и наглядные примеры с подобным анализом, поясняя те или иные понятия и положения теории. Они иногда приводятся, но далеко не всегда и (**чаще всего**) не дают полного понимания какого-либо из понятий или положений теории.

Это видно из утверждений типа: «Заметим, что, несмотря на часто встречающееся в математике термина «пространство», в нашем случае $\boldsymbol{\Omega}$ – это всего лишь абстрактное множество (не обязательно числовой природы), на нем не вводятся операции сложения, умножения, нет там и отношения порядка» [20,5]. Мы нашли их в некоторых работах опубликованных в интернете: в других цитируемых работах их нет. Странное утверждение. Поясним это. Конечно же, $\boldsymbol{\Omega}$ – абстрактное (как и все объекты математики) множество не связанное с пространством (но обязательно – «не числовой природы»!) и *отношения* порядка к *элементарным* событиям *неприменимы.* Об этом разговор будет далее. Однако. В работе [9,11] дан пример построения полей вероятностей для конечного множества $\Omega\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_N}\}$. Каждому *элементарному* событию a_j соответствует вероятность $\mathbf{P}(\mathbf{a_j}) = p_j$, при этом $\mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \sum_{j=1}^{N} p_j = 1$ (аксиома нормировки). *Сумма* вероятностей соответствует *сумме несовместимых* событий, коими и являются *элементарные* события: т.е. для них определены *понятие несовместимости* и *операция их суммы.* Именно это позволяет определять все сложные события (все подмножества $\boldsymbol{\Theta}$ из $\boldsymbol{\Omega}$) и их вероятности. Поэтому «Совокупность объектов ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Theta}$,P), удовлетворяющих аксиомам I-IV . . . » [9,11] рассматривается *только совместно*: – они *основа аксиоматической* теории вероятностей. Каждое по отдельности – это просто некоторое множество, состоящее из каких-то элементов, не имеющих отношения к теории вероятностей.

Следующие примеры без пояснений.

№1. «Монета бросается 3 раза» [6,31] (в [9,12; 16,15] – другие вариации). Сколько раз не бросай монету, увидишь только «герб» или «решку» и ничего другого (легко

проверить). Однако. Их обозначают буквами «Г» и «Р», а затем записывается последовательность ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР (при $n = 2$ – ГГ, ГР, РГ, РР). Члены последовательностей называют элементарными событиями. *Но что означают эти последовательности?* Объяснение, конечно же, требуется и достаточно подробное: 1) так как рассматривается теория вероятностей, то какие операции с событиями приводят к ним: 2) так как применяется теория множеств, то как их можно получить на ее основе; 3) связь между этими математическими моделями.

№2. «Стрельба по плоской мишени. Введем в плоскости мишени прямоугольную систему координат и каждому исходу опыта, попадание в определенную точку плоскости, поставим координаты этой точки. Тогда множеством Ω является вся плоскость или множество всех упорядоченных пар действительных чисел» [16,16]. Если Вы стреляли из «воздушки» в тире, расположенном в парке, на пляже, а то и на городской улице, то знаете, какие там мишени. *Видели ли Вы там координаты? А что является результатом выстрела?* Уж никак не точка: например, если мишень «бумажка на деревяшке» – увидим «дырку» при попадании. Пояснения[9] крайне необходимы – от результата выстрела и вплоть до появления действительных чисел.

Пояснения к примерам **№1-2**, будут даны при подведении итогов исследований (**стр.82**). А сейчас напомним о необходимости *геометрического* представления[10] при построении теории и пояснении ее положений, особенно при рассмотрении случайных величин. Мы разделяем точку зрения, высказанную Р. Дедекиндом:

«При изложении понятия о приближении переменной величины к постоянному пределу ... я прибегал к геометрической наглядности. ... Да и теперь я ... считаю такое привлечение геометрической наглядности ... чрезвычайно полезным, и даже неизбежным .... Но ... этот способ ... не может иметь никакого притязания на научность» [22,9]. Его точку зрения подтверждает другой математик – Г.М. Фихтенгольц: «Хотя в математическом анализе функции графически не задают, но к графической иллюстрации функции прибегают всегда. Легкая обозримость и наглядность графика делают его незаменимым вспомогательным средством исследования свойств функции» [21,100].

Но с одним существенным дополнением:

{A.1.1} *Преобразование* координат, векторов, геометрических фигур, функций и т.п. *на плоскости* или *в пространстве* относится *к геометрии.* В этих случаях она (или совместно с *аналитической геометрией*) *определяет и доказательство* рассматриваемых положений.

Автор, как механик, естественно *опирается на наглядный геометрический* метод, широко применяющийся при изложении *основ* механики.

Например, на его основе легко и просто находятся все основные свойства рассматриваемых механических движений. Особенно важно применение *геометрического* представления при *преобразовании законов* распределения случайных величин, определении *числовых* характеристик *двумерных* (***n*-мерных**) распределений и при построении *случайных про-*

---

[9]Это не всегда просто: 1) всего предусмотреть невозможно; 2) то, что автору кажется очевидным, для читателей может оказаться непонятным. Но пытаться надо обязательно

[10]Существует и другая точка зрения, например: «Для того чтобы, исходя из этой аналогии, обосновать теорию вероятностей, следовало еще освободить теорию меры и теорию интегрирования от геометрических элементов, которые еще имелись у Лебега» [9,3]. Мы не привели ту часть, в которой поясняется о какой аналогии идет речь

цессов: поговорим об этом подробнее в соответствующих частях работы.

Поэтому мы используем его при *анализе существующей* системы понятий теории случайных величин, построении новой *новой исходной*, пояснении других разделов теории, рассмотренных в последующих статьях.

2. Об *основных* понятиях (**событиях и их вероятностях**) говорят в любой работе, но *анализируются не столько сами понятия* (**они – «вне критики»**), сколько *трактовки* вероятности.

***Замечания* 1. 1. *Классическому* подходу «достается» за применение понятия «равновозможности»[11] событий, основанного на симметрии, для вычисления вероятностей. Например, считается, что совершенно не ясно, как определять вероятность для бесконечного (счетного, тем более несчетного) числа исходов. Поэтому считается, что он имеет ограниченную область применения[12]. 2. *Геометрической* вероятности «попадает» за слишком «вольное» определение вероятности событий и, конечно же, за «равновозможность», составляющую ее основу. 3. *Статистическому* подходу – за «попытку», предпринятую Р. Мизесом, определить вероятность как предел при неограниченном увеличении числа экспериментов. 4. *Аксиоматический* подход тоже иногда «критикуют». Например: вероятность – понятие реального мира, поэтому ее невозможно аксиоматизировать, можно только построить математическую модель. В кавычках, ибо странно это и, по-видимому, идет от философов[13]: идеализация явления и принятие аксиом – это основа построения математической модели любого явления, в том числе и случайного. Только об идеализации и аксиомах во многих дисциплинах, связанных с математикой, чаше всего даже не упоминается: «встречается этот грех» и в самой математике. Наше мнение: говорить об этом следует обязательно, однако гораздо лучше – дать пояснение, какие доводы послужили основой для принятия той или иной конкретной аксиомы[14] (или постулата), т.е. связь с практикой.**

1.1. Одномерная случайная величина

В работе [19,7-24] показано, что не все так гладко, как утверждается,

---

[11] Его считают тождественным понятию «равновероятности» (это не так), которое применяется в нашей работ, но относится к возможным исходам (а не к событиям [19,27-28]). Понятия «равновероятности» и «равномерности», как и в [19,48], выделяются в тексте подчеркиванием: «до выяснения всех обстоятельств» в части IV исследований

[12] В большинстве работ рассматривается только эта трактовка, при этом часто ограничиваются этим замечанием

[13] Да и вообще: критика теории вероятностей – это в основном философия, а не математика (по крайней мере – ее гораздо больше)

[14] Аксиома (греч. axioma) – положение, принимаемое в качестве исходного, отправного положения данной теории. Обычно выбирается из истинных положений, т.е. ранее проверенных практикой" [27,31]. "Постулат (от лат. postulo – «требую»), – суждение, принимаемое без доказательств в качестве исходного положения к.л. теории" [28,238]. В более поздних работах [29, 21,570] нюансов, определяющих отличие понятий нет. Наше мнение его надо бы сохранить. Хотя бы для того, чтобы знать, что данная теория основана на положениях, проверенных практикой, а другие – на утверждениях возможных, но с практикой не связанных. Считать, что этих отличий не существует, как и то, что положение, проверенное практикой – «безусловная истина», одинаково вредно для развития науки. Но это уже философия, поэтому – «в другом месте и в другое время»

и в аксиоматической теории, по крайней мере, в *теории* событий. Но не лучше обстоят (**в общем – гораздо хуже[15]!**) дела и в *теории случайных* величин. Чтобы не быть голословным, обратимся к их определениям.

> **А.** «*Случайной величиной* называется величина, *значения* которой *зависят* от случая, и для которой *определена функция распределения* вероятностей» [1,117].

***Замечание* 2.** **В конце XIX начале XX века (например [11,93]) говорилось просто о величине X, «... принимающей значения x_j (j=1,2,...,n) в соответствии с вероятностями p_j. Оно вполне созвучно с определением Пуассона, который писал (1832г.) о «некоторой вещи» [1,422]. Только «вещь» заменена «случайной величиной».**

Определения вида **'А'** называют техническим, интуитивным (**иногда – «донаучным», но почему?**). Чаще оно применяется в работах, относящихся к применению вероятностных методов в естествознании, технике и т.п.

> **«Определение случайной величины, данное Пуассоном, теперь уже не может считаться математическим. Это скорее описание реального объекта изучения, обращение к интуиции, полученной в результате житейского и научного опыта. Это описание широко используется и в наши дни на начальных ступенях педагогического процесса, связанного с изложением основ теории вероятностей. Даже несложный логический анализ этого определения показывает, что из него не следуют правила действий над случайными величинами – сложения, вычитания, умножения и пр.» [1,414].**

Воспринимая «случай» как событие, определение **'А'** можно считать попыткой связать понятие случайной величины с событиями. Попытка не очень удачная: отмечена только *возможность связи*. А *сама связь* определяется *отождествлением* случайной величины *с координатами*, которым *присваиваются вероятности*.

Приведем примеры определения[16] случайной величины, которые даются в *аксиоматической* теории, развитой А.Н. Колмогоровым.

> **Предварительное предположение [9,36]: на множестве[17] Ω элементарных событий ω определена однозначная функция $\xi = \xi(\omega)$, а ее значения принадлежат множеству X действительных чисел.**

---

[15] **В [10] не проводился анализ многих положений существующей теории, который дан в разделе 5 (стр.82): он наглядно показывает справедливость утверждения**

[16] **Определения случайной величин на основе понятий теории меры (например [1; 16; 18]) не приводятся, ибо это не влияет на дальнейший анализ**

[17] **По-другому – пространство. «Понятие пространства элементарных событий идет от Р. Мизеса (в его работе – это пространство меток)» [6,22-23]. В *новой исходой системе* «пространство меток» – это множество *возможных исходов опыта* [19,27]**

’B’. «*Однозначную действительную* функцию $\xi = \xi(\omega)$, *определенную* на *основном* множестве $\mathbf{\Omega}$, называют *случайной величиной*, если при каждом выборе *действительного* числа x множество $\{\xi < x\}$ всех тех ω, для которых справедливо *неравенство* $\xi(\omega) < x$ принадлежит к *системе множеств* $\mathbf{\Theta}$» **[9,38]**.

Напомним: множество Θ – множество подмножеств из множества Ω [9,10]. Т.е. множество *сложных* событий[18], образованных из *элементарных* событий (раздел 3.3 [19,35]). По-другому *поле* событий [1,26; 11,26; 14,12] (или *алгебра* [9,10]), ибо содержит в себе множество Ω, операции с событиями, достоверное и невозможное события.

’B1’. «*Случайная* величина $\mathbf{X}$ есть *функция, определенная на данном пространстве элементарных* событий, т.е. $\mathbf{X}$ задает *правило*, по которому *каждому элементарному* событию *соответствует некоторое действительное* число» **[6,231]**.

***Элементарные* события трактуются как «*неразложимые исходы* (идеализированного) *опыта*» и представляются *точками пространства элементарных* событий [6,26]. Определения вида ‘B.1’ обычно используются для *случайных дискретных* величин.**

Определение *распределения* вероятностей *случайной* величины[19].

’C’. «Пусть $\mathbf{X}$ – случайная величина, а $x_1, x_2, ...$ – ее значения; **в дальнейшем x_j, как правило, будут целыми числами.** Совокупность всех элементарных событий, на которых $\mathbf{X}$ принимает фиксированное значение x_j, образует событие $\mathbf{X}{=}x_j$; его вероятность обозначается $\mathbf{P}(\mathbf{X}{=}x_j)$. Функция $\mathbf{P}(\mathbf{X}{=}\ x_j) = f(x_j)$ (j=1,2,...) (1.1) называется распределением (вероятностей) случайной величины $\mathbf{X}$».

«Термин “распределение вероятностей” нужно отличать от термина “функция распределения”, который применяется к неубывающим функциям, стремящимся к 0 при $x \to -\infty$ и к 1 при $x \to \infty$. Функция распределения дискретной случайной величины X определяется формулой $F(x) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \le x) = \sum_{x_j \le x} f(x_j)$, в которой сумма берется по всем значениям x_j, не превосходящим x» [6,227].

Небольшие комментарии к определениям **’B, B.1, C’**:

***<u>Комментарии</u>* <u>I</u>. 1. Пусть $\mathbf{a_v}$ (v=1,2,...,V) являются *элементарными* событиями множества $\mathbf{\Omega}$. В соответствии с аксиоматическим подходом, его вероятности $\mathbf{P}(\mathbf{a_v}) = p_v$ можно приписать любое действительное число[20] из множества $0 < p_v < 1$ при выполнении условия (аксиомы) нормировки $\sum_{v=1}^{V} \mathbf{P}(\mathbf{a_v}) = 1$. <u>2.</u> Чтобы распределение вероятностей (1.1) было более понятно, его лучше записать в виде $\mathbf{P}(\mathbf{X}{=}x_j) = \mathbf{P}(\mathbf{a_j})$. Согласно определению «Вероятность P(A) любого события A есть сумма вероятностей элементарных событий, из которых оно состоит» [6,41]. Функция распределения будет иметь вид $\mathbf{P}(\mathbf{X} \le x) = \sum_{j=1}^{v} P(x_j) = \sum_{j=1}^{v} \mathbf{P}(\mathbf{a_j})$,**

---

[18] **В аксиоматической теории их называют случайными событиями. Учитывая, что элементарные события тоже случайны, мы считаем более уместным называть их сложными или просто событиями (сноска 29 [19,17])**

[19] **Определение вероятностной функции на основе теории множеств [9,36] не приводится, ибо в нем легко «заблудиться»: проверено на собственном опыте**

[20] **Числа p_v и являются значениями функции $f(x_v) = p_v$ в определении ’B.1’**

т.е. это понятие тоже «проясняется». Если *элементарные* события – «*неразложимые исходы* идеального *опыта*» [6,20-21], то P(a_m) = $1/M$, где m=1,2,...,M; M – число возможных исходов опыта. **<u>3.</u> Хотя в определении 'B.1' и говорится о некоем «правиле», однако *никакого правила* нет (в определении 'C' значения x_j просто считаются целыми числами). Ничто нам не запрещает взять произвольную однозначную функцию $v(x)$ и положить: значения $v(x_j)$ функции в точках x_j определяют значения случайной величины X. Например[21] $\exp(ax_j)$, тогда формула (1.1) примет вид P{X=$\exp(ax_j)$}=P(a_j). Тем не менее, определение 'C' как-то поясняет, что понимается под функцией ξ=$\xi(\omega)$ в определении 'B' (она тоже «задает правило», но «в завуалированной форме», полагая числа произвольными).**

<u>4.</u> Соответствие $x_j \rightarrow$ a_j вовсе не означает «равенство x_j = a_j». Например, бросание кубика с изображениями: *ель, еж, 5, кол, α, дом* на гранях. Можно написать «еж→ 2;», но равенство «еж=2» (как и 5=0) бессмысленно: оно может быть только между *одинаковыми элементами* (например, 2=2; «еж»=«еж») множеств (или подмножеств одного множества[22]). В этом случае множества (или подмножества) называются *пересекающимися*. **<u>5.</u> Если задана *действительная дискретная* функция $f(x_m)$ (m=1,2,...M) *действительного* аргумента x, то *сумма* $F(x_n) = \sum_{m=1}^{n} f(x_m)$ $(1 \leq n \leq M)$ определяется *суммой значений* $f(x_m)$ *функции, а не аргументов* x_m. Случайная величина, по определениям 'B, B.1' – *действительная* функция, следовательно, должны *суммироваться* ее значения. *И где же имеются суммы*? В определении 'C' – но только *сумма значений* $P(x_v)$ *распределения* вероятностей, определяющая "функцию распределения", *а не значения случайной* величины. В определении 'B' есть тоже – но только *сумма* (неявная – «... множество всех тех ω ...») *недействительных* аргументов – *элементарных* событий, *но не значений случайной* величины $\xi(\omega)$.**

Пока без дополнительных пояснений и каких-либо выводов: они будут «появляться» по мере изложения проведенных исследований.

Что же изменилось? В определениях '**B, B.1**' (**в отличие от определения 'A'**) *случайная* величина определяется как *действительная* функция, но *недействительного аргумента – элементарного* события. Казалось бы, все «прекрасно»: определенна *связь случайной* величины с событиями, но только уж очень формально (**фактически – это только видимость связи, что и будет показано ниже**). Если говорить принципиально, то связь, как и в определении **'A'**, определяется отождествлением случайной величины со значениями координат, которым приписываются вероятности. Это легко видно из определений **'B.1, C'**. Если же разобраться с определением вероятностной функции данной в работе [9], то будет видно, что это же следует и из определения **'B'**. Как говорится «это только цветочки ...».

***<u>Замечания</u>* <u>3.</u> <u>1.</u> Определение 'B' (или 'B.1'), в принципе, формальным математическим языком «узаконило» исторически сложившееся понима-**

[21] **Если по правде, то ничего подобного в литературе «не встречалось»: только числа и в основном целые, а почему – «история не разъясняет»: по-видимому, – возникают некоторые «непреодолимые сложности», связанные с отсутствием «правил»**

[22] **В теории множеств отличие между алгеброй двух множеств и алгеброй двух подмножеств одного множества не определено. Для теории вероятностей это отличие имеет существенное значение [19,27,29,34,37-40]**

ние случайной величины и операции с величинами. <u>2.</u> *Неопределенность элементарного* события ω и их множества Ω [6,22-23; 19,23-25] приводит к *неопределенности* множества Θ: *сложные* события не связаны с *реальными* событиями, появляющимися в *экспериментах* [19,17-25]. <u>3.</u> Функция $\xi(\omega)$ *не определена* и *неизвестны правила*, по каким она определяется.

Неопределенность понятий *элементарного* и *сложного* событий *аксиоматической* теории, как и понятия события *классической* теории, показана при их анализе [19,17-27]. Тем не менее, рассмотрим один весьма показательный пример: **пояснения, *связанные с выводом биномиального распределения***. Он не только *интересен*, но и весьма *поучителен*. Но начнем с другого момента.

***<u>Пример</u>* <u>1.</u> В урне находится m_1 белых (событие A), и m_2 черных (событие B) шаров (m_1 и m_2 – числа несовместимых <u>равновероятных</u> исходов [11,9], благоприятствующих событиям A и B). Вероятности событий A и B согласно *классической* теории: $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = m_1/M = p$, $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = m_2/M = 1 - p = q$, где $M = m_1 + m_2$ – общее число возможных исходов опыта. Согласно *аксиоматической* теории имеем M «*элементарных*»[23] событий. *Сложные* события A и B не связаны с конкретными«*элементарными*» событиями. Для отличия «*элементарных*» событий, *принадлежащих* событиям A и B, их обозначают другими *разными знаками*, например, буквами «Б» и «Ч» или цифрами «0» и «1». Из букв составляют разные последовательности [6,31,43], например: «БЧ», «БЧБ», «ЧЧБЧБ» и т.п., т.е. образуется «уйма» ($2^M - 1$) [19,22] событий. Однако только последовательности, состоящие из m_1 букв «Б» и m_2 букв «Ч» будут определять события A и B: *именно эти события* (т.е. <u>*или*</u> белый, <u>*или*</u> черный шар) и появляются *реально в экспериментах* – других событий *просто не существует. Хорошо, что их 2, но что делать при нескольких сотнях*? Объяснил бы кто-нибудь, да только *аксиоматическая* теория это «обходит как-то сторонкой» (в классической теории эта проблема хотя бы хотя бы несколько поменьше). Отметим: если $m_j = m = \mathrm{const}$ ($m > 1$) для $j = 1, 2$, то события имеют вероятности, *равные* вероятностям *опыта* с бросанием с бросанием *одной* монеты, а при значении $m = 1$ наш пример *равносилен* ему.**

По существу: подсчитывается *число случаев*, *благоприятствующих* появлению события **A** или **B** в *классической* теории[24]. Отметим, что именно вероятности p и q использовались в формуле[25], впервые полученной выдающимся швейцарским ученым Я. Бернулли, т.е. пример 1 связывает

---

[23] **В кавычках, ибо это только возможные исходы опыта [19,27-28]**

[24] **Что не говори, а приходится ставить «метки» неопределенным элементарным событиям, чтобы внести хотя бы какую-то определенность. В классической теории их называют «частными случаями» событий A и B: – «как ни крути», никак не обойтись без «донаучного» понимания события (цитата в работе [19,25] из предисловия переводчика в работе [6,6]). И даже если приписать вероятностям элементарных событий действительные числа (комментарии I, стр.10), чтобы связать с ними события A и B их придется считать «частными случаями»: в классической теории «частные случаи» хотя бы этого «не предполагают»**

[25] **Во времена Я. Бернулли, вероятность события определялась рациональным числом: вероятности, определяемые действительными числами, появились позже, а «приписывать» их элементарным событиям («то бишь» – возможным исходам опыта) – только в 20-м веке (с появлением аксиоматической теории)**

их с *конкретным испытанием.*

«Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли[26], состоит в вычислении вероятности того, что в N независимых испытаниях событие А произойдет m раз ($0 \le m \le n$). ... Рассмотрим ..., что следует понимать в схеме Бернулли под элементарным событием? Очевидно, что это последовательность наступлений и не наступлений ... события А в последовательных испытаниях. Отнесем наступление события А единицу, а не наступлению – ноль. Тогда элементарным событием для N испытаний будет последовательность из N нулей и единиц. Например, если $N = 3$, то все возможные элементарные события записываются тройками ... символов: (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1). ...

Теперь мы должны ввести вероятностную меру на множестве элементарных событий. Это делается однозначно. Действительно, вероятность наступления события А в испытании с номером k равна p, а его не наступления $q = 1 - p$. Наступление или не наступление события А в испытаниях с разными номерами для схемы Бернулли независимы. Значит, в силу теоремы умножения вероятностей, вероятность того, что события А наступит в m определенных испытаниях ..., а при остальных $N - m$ не наступит, равна $p^m \cdot q^{N-m}$. ... По теореме сложения искомая вероятность равна *сумме* ... вероятностей всех различных способов размещения m появлений события А и $N - m$ не появлений среди N испытаний. Число таких способов известно из теории сочетаний, оно равно $\mathbf{C_N^m} = N!/[m!(N-m)!]$, следовательно $\mathbf{P_N}(m) = \mathbf{C_N^m} \cdot p^m \cdot q^{N-m}$» [1,73].

Из просмотренных работ, только в [13,60] говорится о произведениях АВ (да и о сумме произведений тоже) событий А и В. В ней (пожалуй, еще в [12,68]) дан наиболее понятный вывод формулы. В работе [6,163] рассматривается опыт с 2-мя возможными исходами, обозначенных буквами «У – успех» и «Н – неуспех» (вместо «0» и «1», пример 1, стр.7), которым приписываются разные вероятности. О произведениях исходов не упоминается, но «поскольку испытания независимы, вероятности перемножаются».

Теперь переход к биномиальному распределению: **«Обозначим через μ *число появлений* события А в последовательности независимых испытаний, в каждом из которых вероятность его появления постоянна и равна $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = p$. ... Согласно результатам главы 2 $\mathbf{P_N}(m) = \mathbf{P_N}(\mu = m) = \mathbf{C_N^m} \cdot p^m \cdot q^{N-m}$» [1,117].**

По сути, никакого перехода нет: просто число m появлений события **А** обозначается другой буквой μ, а вероятности $\mathbf{P_N}(m)$ изображаются точками с координатами $\mu = x_m$=0,1,...,N. *Что же следует из примера?*

Комментарии* II. 1. Используя понимание *элементарного* события как «неразложимого исхода опыта» [6,26] и *классическую* формулу, вычислены вероятности *сложных* событий А и В. 2. Далее *комбинации* символов (тройки в цитатах), считаются *элементарными* событиями. Только о том, что они являются *сложными* событиями, определяемые *произведениями* опять же *сложных* событий А и В, почему-то «ни слова»: – а именно по их вероятностям (замените «1» буквой «А», а «0» буквой «В») вычисляются вероятности *произведений*. *Произведения* «объявили» *элементарными* событиями и для них «введена вероятностная мера», следовательно, в соответствии с определениями 'В, В.1' (стр.9-10), на них и следует определить случайную величину. 3. Однако это как раз не делается: определяются более *сложные* события, образованные *суммами* *произведений* (биномиальные коэффициеты C_N^m), имеющие одинаковые вероятости. При переходе к распределению вероятностей их относят к *точкам* числовой оси с координатами $\mu = x_m = 0, 1, \ldots, N$, которые, вообще говоря, определяют *пространство

[26]Ее также называют последовательностью (или повторением) независимых испытаний. Некоторые аспекты последовательных (а заодно – и параллельных, если их так можно назвать) испытаний обсудим при рассмотрении случайных процессов (часть VII работы)

элементарных **событий (замечание к определению 'В.1'). Т.е. эти *суммы*, по существу, считаются *элементарными* событиями: – только почему-то «по умолчанию». Об этом и говорилось в примере 14 [19,25].**

Комментарии к выводу *биномиального* распределения – *прекрасное подтверждение* того, что *аксиоматическое* понятие *элементарного* события «расплылось дальше некуда» (**что было показано в [19,17-27]**): до полного непонимания, что же это такое. *Забавно, не так ли*? Скажем, «посмеяться можно бы, да как-то невесело: поводов для веселья не видать», ибо **совершенно непонятно (по крайней мере, автору сего труда), что же считать *элементарным***[27], а что *сложным* событием, и по какому *правилу* и каким *элементарным* событиям ставить в соответствие *действительные* числа. Поэтому поводу еще один «веселенький вывод» к схеме Бернулли:

«Ясно, что элементарные исходы будут равновероятны только при $p = q = 1/2$. В этом случае каждый элементарный исход будет иметь вероятность $1/2^n$, и только в этом случае мы вправе использовать классическое определение вероятности» [20,20].

Он сделан на основе «переименований событий», отмеченных в комментариях II.1-2 и прекрасно иллюстрирует «путаницу между понятиями элементарного и сложного событий», характерной для аксиоматической теории. Есть нечто подобное и в некоторых других работах. Хорошо, что во времена Бернулли этой теории не существовало.

Этот пример показывает не только *неопределенность* понятий *элементарного* и *сложного* события (**соответственно, их множеств $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Theta}$**), но и *отсутствие* в теории *правила*, по которому *каждому элементарному* событию *соответствует некоторое действительное* число.

По идее, мы должны бы, в соответствии с определениями **'В, В.1'**, задать случайную величину на множестве $\mathbf{\Omega}$ *элементарных* событий. В *аксиоматической* теории это *возможно 2-мя равносильными* способами:

1) считать, что множество состоит из 2-х *элементарных* событий ω_1, ω_2 и *приписать* им вероятности $\mathbf{P}(\omega_1) = p = p_1$, $\mathbf{P}(\omega_2) = q = 1 - p = p_2$; 2) считать события A и B, определенные в примере 1, *элементарными* и *приписать* им вероятности p и q (эти значения и «присваиваются» им в работе, «введением вероятностной меры»).

Далее, используя ее как основу, по каким-то определенным правилам перейти к биномиальному распределению.

{А.2} Однако *существующая теория случайных* величин, как и *теория* событий, не дает *никаких правил* для таких построений.

---

[27] **Ибо "... Ввиду большого разнообразия случайных явлений нельзя дать более конкретное определение множества элементарных событий. Для описания каждой реальной задачи множество выбирается наиболее подходящим образом" [16,14]. Вот только какое из множеств, отмеченных в комментариях II – «наиболее подходящее»?**

Замечания **4.** **1.** **Координаты x_m точек, соответствующих вероятностям могут быть *произвольными действительными* числами. Когда и кем было принято считать их целочисленными $x_m = 0, 1, \ldots, N$, сказать сложно, но их можно изображать точками, расположенными произвольно на оси X, в том числе на ограниченном интервале. Например: границы *доверительного интервала искомой* вероятности $0 < p < 1$, вычисленной по N *экспериментам*, определяются по кривым $y(p)$ (или значениям в таблицах), основой построения кривых $y(p)$ является *зависимость биноминального* распределения *на интервале* $0 < y(p_{dan}) < 1$ от значения вероятности $0 < p < 1$.** **2. Только в [6,227] и [12,74,158] распределение вероятностей *дискретных* величин записывают в виде $p(x_j)$ для *одной* и $p(x_j, y_k)$ для *двух* величин. Такая запись, вообще говоря, соответствует определению 'B.1, C' и 'D.1' случайной величины, однако в других цитируемых работах она присутствует только в неявном виде, а в некоторых сразу записывается в виде p_j или $p_{j,k}$. При таком сокращении записи связь вероятности с координатами теряется. Но биномиальное (часть IV исследований) распределение во всех работах записывается одинаково $P_N(x = m) = C_N^m \cdot p^m \cdot q^{N-m}$, хотя запись, учитывающая предыдущее предложение, должна бы иметь вид $P(x_j : N, m) = C_N^m \cdot p\{x_j\}^m \cdot q\{x_j\}^{N-m}$. Более громоздко, но правильно.**

Если же говорить по существу вопроса, то практически ничего не изменилось[28]: определение **'B'** (**или 'B.1'**) *просто подводится* под *исторически сложившееся понимание*[29]: – *случайная* величина есть *действительная функция*. Из анализа определений следует:

> **W.1. Случайная величина считается *действительной* функцией *действительного* аргумента (хотя в аксиоматической теории первоначально и говорится об *элементарных* событиях), поэтому *операции* со случайными величинами определяются *известными операциями* с *действительными* функциями.**

Вывод просто подчеркивает положение существующей теории, что связано с двумя причинами: **1. В работах оно понимается как «само собой разумеющееся», а если где-то и упоминается, то только «вскользь». Например, в работе [6,233] «... случайные величины являются обычными функциями, и в этом понятии нет ничего специфического ...»; нечто подобное есть в работе[1,120,414]. 2. Для событий эти операции *невозможны*.**

Замечание **5. Несмотря на внешнее сходство, операции *суммы* и *произведения* событий (формальная запись[30] C=A+B или D=AB) очень *отлича-***

---

[28] **Впрочем, мы не правы, – изменения есть и существенные. В результате применения теорий множеств и меры, теория вероятностей стала абстрактной и малопонятной (и, кажется, не только тем, кто занимается приложениями). По абстрактным книгам (например [9; 14; 18; 20]) очень сложно понять, как ее идеи связать с практикой**

[29] **Оно (определение 'B') формально «приобрело» только некую математическую форму, которая «дает право» обращаться со случайными величинами как с действительными функциями**

[30] **Для операций с событиями мы используем только классические термины и обозначения. Некоторые термины и обозначения теории множеств используются для операций с множествами элементарных событий [19, 28] 2-х и более простых опытов [19, 30]**

ются от действий с действительными **числами. Например, для *любого* события *справедливы равенства* A+A=A и AA=A, которые абсолютно не пригодны для *произвольного действительного* числа. Операции «деления событий» не существует: – есть деление вероятностей (в классической теории следует из теоремы о произведении вероятностей, а в аксиоматической – постулируется), т.е. *действительных* чисел.**

Что же мы имеем: *связь случайной величины с событиями или ее видимость*? По сути, утверждение в выводе **W.1** – «*первая негласная аксиома*» теории случайных величин, ибо «подтверждено физическими измерениями». В кавычках, ибо *утверждение противоречит экспериментам*[31]. Из вывода **W.1** и замечания 5 следует другой вывод:

> **W.2. *Теория* случайных величин *и теория* событий *не связаны между собой*: – это *две разные теории.***

Замечание. **Наш вывод не совсем точен. Аксиомы существования, нормировки математической вероятности и суммы вероятностей событий – основа всей аксиоматической теории[32]. Но прежде, чем говорить о вероятностях событий, определяются операции с событиями. Они не зависят от того, следуем мы классической, статистической или аксиоматической теории. С учетом этого, следовало бы определить сначала и операции для случайных величин, но они просто постулируются. Это и будет показано далее.**

Вывод определяет *основное противоречие* существующей теории вероятностей: *несоответствие операций* со случайными величинами *операциям* с событиями: об этом говорилось в 1-й части работы [19,7], а теперь показано, что *утверждение справедливо.* Следствие: многие *положения теории* случайных величин оказываются *неверными.*

1.2. Многомерная случайная величина. Операции произведения и суммы случайных величин

Можно начать спор, но спешить не стоит: очень преждевременно, ибо анализ только начат. Для полноты картины приведем определения случайной n-мерной величины.

---

[31] **Здесь, как и «обещано» в самом начале статьи, мы рассматриваем только математическую сторону вопроса. Об экспериментах поговорим при подведении итогов исследований (стр.80)**

[32] **В некоторых работах, например [8], есть еще аксиома произведения вероятностей**

D. **«Рассмотрим вероятностное пространство {Ω, Θ,P}, на котором определены** n **случайных величин** $\xi_1 = f_1(\omega)$, $\xi_2 = f_2(\omega)$,...,$\xi_n = f_n(\omega)$ **(функции** $f_j(\omega)$ **измеримы). Вектор** $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ **называется случайным вектором или** n**-мерной случайной величиной. Обозначим через** $\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}$ **множество всех тех *элементарных* событий** ω**, для которых одновременно выполняются неравенства** $f_1(\omega) < x_1$, $f_2(\omega) < x_2$,...,$f_n(\omega) < x_n$**. Поскольку это событие является *произведением* событий** $\{f_k(\omega) < x_k\}$ $(1 \leq k \leq n)$**, оно принадлежит множеству Θ, т.е.** $\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\} \in \Theta$**. Таким образом, при любом наборе чисел** $x_1, x_2, ..., x_n$ **определена вероятность** $F(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}$**. Эта функция аргументов называется** n**-мерной функцией распределения случайного вектора** $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$**. . . . В дальнейшем мы прибегнем к геометрической иллюстрации и станем рассматривать величины** $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$**, как координаты точек** n**-*мерного* евклидова пространства» [1,127].**

D.1. **«Рассмотрим теперь две случайные величины X и Y, определенные на одном пространстве элементарных событий, и обозначим их значения соответственно** $x_1, x_2, ...$ **и** $y_1, y_2, ...$**. Пусть соответствующие распределения вероятностей будут** $\{f(x_j)\}$ **и** $\{g(y_k)\}$**. Совокупность точек, для которых выполнены оба условия X=**x_j **и Y=**y_k**, образуют событие, вероятность которого обозначим через** $P\{X = x_j,\ Y = y_k\}$**. Функция** $P\{X = x_j,\ Y = y_k\} = p(x_j, y_k)$ **(j,k=1,2,. . .) (13) называется *совместным* распределением вероятностей случайных величин X и Y. Это распределение лучше всего представить в виде таблицы с двумя входами» [6,227].**

Замечание к определениям. **1. Кроме упомянутых в определении 'D', применяются также названия: система случайных величин, функция от случайных величин, функция случайных аргументов и др. Их смысл, по сути, одинаков, а название в основном зависит от «пристрастия» автора. 2. Напомним, что смысл слова «совместный» – происходящий с чем-то, правильно отражает логическую связку «и . . . , и . . . », используемую для определения операции произведения событий. 3. Для справки напомним, что запись** $x_1 < x < x_2$ **формальная. На оси** X **она определяет часть оси, ограниченную точками** x_1 **и** x_2**. На плоскости** $X0Y$ **она определяет часть плоскости, ограниченную прямыми** $y = x_1$ **и** $y = x_2$**, а запись** $y_1 < y < y_2$ **– часть плоскости, ограниченную прямыми** $x = y_1$ **и** $x = y_2$**. Соответственно, запись** $(x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2)$ **определяет прямоугольную часть плоскости, которая ограничена отрезками, образованными пересечением отмеченных прямых линий. Эти условия не являются событиями: они только ограничивают область, в которой определяются события и вычисляются их вероятности. Комментарии к напоминанию будут даны по мере необходимости.**

Обратим внимание на два обстоятельства.

I. В определениях **'B, B.1, D, D.1'** используется понятие *пространства элементарных* событий, но ничего не говорится о том, что же оно собой представляет. Понятие *пространства элементарных* событий *неопределяемое*, как и *геометрические* точки*, которые* представляют *элементарные* события этого *пространства* [6,31]: – это «пространство растягивается намного лучше», чем надувной резиновый шарик. Отсюда «вольность» при построении случайных величин. Она становится очевидной при обращении к «правилу»:

«В случае дискретного пространства элементарных событий теоретически можно задать любую случайную величину X, занумеровав в каком-либо порядке все точки пространства и связав с каждой из них соответствующее значение X» [6,226].

Казалось бы, «правило» предопределяет, что *точки* пространства *элементарных* событий *принадлежат координате* X. Однако определения **'D, D.1'** опровергают такое понимание, ибо в них рассматривается то же самое пространство $\mathbf{\Omega}$. Мало того, в определении **'D'** приводятся некоторые функции, которые *считаются координатами только для геометрической* наглядности.

1. *Если не координаты, то что «это такое» и что «оно определяет»*?

Вопрос не риторический, ибо: «Основная случайная величина – это, конечно, координатная величина X сама по себе, а все другие случайные величины являются функциями X. Функция распределения X тождественна функции $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$, посредством которой задаются вероятности. Необходимо сказать, что любая случайная величина Y=g(X) может рассматриваться как координатная величина на новой прямой» [7,16]. О последнем предложении в цитате будет разговор в части IV.

Понятие «вектор» (n**-мерная функция**) уже предполагает, что функции ξ_j $(\mathbf{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n})$ заданы на некоторых линиях x^j, определяющие некоторую систему координат[33]. Именно на линиях x^j можно определить числа x_j^j и ввести ограничения $\xi_j < x_j^j$. По этому поводу скажем так, это не просто «вольность» – это «произвол, который трудно описать». Подтвердим высказывание примерами:

***Пример* 2. Пусть j=1,2,...,M номера точек *пространства* $\mathbf{\Omega}$ *элементарных* событий ω_j *опыта*, данного в примере 1. Точки *пространства* можно связать с разными наборами *произвольных действительных* чисел[34] x_j (j=1,2,...,M), y_k (k=1,2,...,M), z_n (n=1,2,...,M) и т.д. Теория событий не определяет геометрии этого пространства, поэтому, *во-первых*, наборы чисел x_j, y_k, z_n, ... можно полагать координатами точек *произвольно* расположенных в n-*мерном* пространстве. *Во-вторых*, можно положить, что каждый из наборов x_j, y_k, z_n, ... принадлежит одной координатной числовой оси пространства. *В-третьих*, можно положить, что наборы x_j, y_k, z_n, ... принадлежат: 1) часть наборов одной, а часть 2-й числовой оси; 2) часть наборов одной, часть 2-й и часть 3-й оси и т.п., которые произвольно расположены в пространстве. *В-четвертых*, наборы чисел можно полагать координатами кривых линий, поверхностей, пересекающихся линий или поверхностей, расположенных на линиях или поверхностях и т.д. Можно продолжить это перечисление, но это уже не имеет значения.**

Мы ничем не ограничены, ибо нет никаких указаний на то (**разве что обратиться «к здравому смыслу», цитата [1,49] на стр.6**), как расположены точки пространства *элементарных* событий, с какиим *набором* чисел, и с какой *системой координат* их связывать.

Таким образом, *аморфность* понятия *пространства элементарных*

---

[33]**Вообще говоря, об этом говорится в работе [9,41]**

[34]**Это, по сути, и предполагает определение 'B'**

событий, приводит к *неопределенности* понятий случайной *одномерной* и *многомерной* величины. Мало того, исходя из изложенного, утверждение о «какой-то связи случайных величин с *элементарными* событиями» вызывает, мягко говоря, очень большие сомнения.

Следовательно, случайные *одномерные* и многомерные величины «имеют место быть» только потому, что *одномерные, двумерные и трехмерные* распределения вероятностей реально существуют в практике.

Конечно же, мы намеренно утрировали понимание, ибо понятие *пространства* все же подразумевает, что оно может иметь, по крайней мере, *три*, *измерения* (**в математике вводятся n координат: к ним, в общем-то, можно применить название «n-мерное пространство»**[35]). Но *только подразумевает*: существующая теория событий *вовсе не определяет*, какие множества событий относятся *к одному измерению*, какие *к двум, трем и более измерениям.* Хотя в некоторых работах (**например [16,17]**) размерность пространства *элементарных* событий[36] все же вводится, но опять же только потому, что в практике реально существуют *одномерные и многомерные* распределения вероятностей.

В принципе, существование *случайных* величин (***и множеств элементарных* событий**) *разной размерности – «<u>вторая</u> негласная аксиома»* теории случайных величин. Однако есть другой, не менее важный момент, который, вообще говоря, связан с первым.

II. В определениях **'D, D.1'** фактически постулируется: ***многомерная* величина является *произведением одномерных* величин.**

> **{A.3.1} Таким образом, в отличие *от теории событий*, в которой имеется *два правила* их образования – *сумма* и *произведение* событий, в существующей теории случайных величин *остается только одно правило – произведение.***

А где же операции суммы, разности, деления и др., которые упоминаются «вскользь как само собой разумеющееся»? В примере 9 (**стр.32**) и последующих пояснениях (**стр.32-35**) поговорим подробнее о понимании операции суммы (**о возможных арифметических операциях с распределениями случайных величин – в приложении I стр.95**) в принятой теории вероятностей. Мы не знаем, что послужило основой для этого утверждения и когда оно по-

[35] **Имеет ли оно отношение к реальному пространству вопрос скорее философский**

[36] **Учитывая проведенный анализ «пространства», далее мы будем говорить о множестве элементарных событий (исключение – цитаты), несмотря на «великую любовь» математиков к термину «пространство»**

явилось. Можно дать только еще один небольшой «экскурс в историю».

Замечания **6.** **1.** **Зарождение и развитие теории вероятностей связано [1,386] с азартными играми, в первую очередь, с игрой в кости: подсчет *числа всех возможных* случаев и *числа разных* способов (возможных случаев), которыми может быть получена та или иная *сумма чисел* очков при бросании 2-х и более игральных костей. При этом, сочетание чисел очков, выпавших на каждой из костей, называли, по-видимому, *комбинацией* [1,391] и считали одним событием. Значительно позже в теории вероятностей появилось понятие *произведения* 2-х (и более) событий. Однако, число очков, выпавших на каждой из костей, как называли, так и до сих пор называют *комбинацией*, несмотря на то, что при *одновременном бросании* костей они *полностью* соответствуют *определению произведения* событий. Решение этих и некоторых других задач, необходимо привело к развитию *комбинаторики* (первых математических методов решения вероятностных задач), как «инструмента» для *непосредственного* вычисления вероятностей событий. Соответственно в *комбинаторике* появилось правило вычисления *общего числа комбинаций*: «Дано $n,1$ элементов $a_1, a_2, ..., a_{n,1}$, $n,2$ элементов $b_1, b_2, ..., b_{n,2}$, . . . , n,k элементов $x_1, x_2, ..., x_{n,k}$: число возможных комбинаций $(a_{j,1}, b_{j,2}, ..., x_{j,k})$, содержащих по одному элементу каждого типа равно $n,1 \cdot n,2 \cdot ... \cdot n,k$» [6,47]. При числе *типов элементов* k=2,3,... комбинации называют *парами*, *тройками*, *четверками* (применяются и др. названия) и т.д.**

2. **Значительно позже появилась теория множеств и комбинаторику начали называть также *теорией конечных* множеств [23,4]. В теории множеств, вводится понятие: «*декартово* (*прямое*) *произведение* множеств": «Прямым произведение двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a,b) из их элементов. Мы будем обозначать его через (A,B)». Другое обозначение A × B. «Термины “прямое произведение” и “декартово произведение” – синонимы» [6,146]. Отметим, что в теории множеств *общее число элементов* называется *мощностью* множества. Это определение, явно или неявно (например, в определениях ‘D, D.1’), широко используется в существующей теории вероятностей.**

Объектом комбинаторики (**как и теории множеств**[37]) является некоторая совокупность N *разных* предметов (**например – разные книги, буквы алфавита, шары с разными номерами и т.п.**), которые называются *элементами*. В этой «роли» могут быть использованы также N *разных действительных* чисел или *случайных* событий. Но это *вовсе не означает*, что с *такими элементами* можно *проводить операции*, свойственные *действительным* числам или *случайным* событиям. *Элементы* подчиняются *правилам*, принятым *в комбинаторике*: их можно *переставлять* местами (**перестановки**); составлять *группы* с некоторым числом *элементов с учетом* (**размещения**) или *без учета* (**сочетания**) их порядка в *группе*. Если имеются две, три и более совокупности предметов *разного типа*, то их можно *объединять* в одну совокупность (**одно множество**) или составлять множества *пар, троек и т.д.* (**правило вычисления числа комбинаций, т.е. пар, троек и т.д. в замечаниях 6**).

Замечания **7.** **1.** **Для образования *прямого произведения*, множества**

[37]Говоря о множествах, мы исходим из так называемой «наивной» теории множеств, ибо для последующих целей она достаточна

не обязаны быть разными **[23,13]. При их совпадении множество A × A называют *декартовым квадратом* и обозначают $\mathbf{A^2}$, например, произведение 2-х координатных осей** R^2 **– декартова плоскость. <u>2.</u> Комбинаторика – это всего лишь «инструмент» (первый математический аппарат теории вероятностей) для *непосредственного* вычисления вероятностей событий: – она *не определяет ни* событий, *ни операций с* событиями, и прежде, чем *применять* этот «инструмент» *необходимо определить* события, вероятность которых мы хотим вычислить.**

Прямое произведение в теории множеств это: **с одной стороны *весьма широкое обобщение понятия координат* (отсюда становится понятным другое название – *декартово произведение*, данное польским ученым К. Куратовским); с другой – *понятие множества всех отображений из одного множества в другое.***

Например. Пусть множество A состоит из элементов $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$, а множество B – из элементов $\mathbf{b_1, b_2, ..., b_m}$. С одной стороны *прямое произведение* A × B определяет множество $n \cdot m$ ***<u>всех</u> упорядоченных пар* $(\mathbf{a_j, b_k})$. С другой стороны, множество A × B является отображением множества A на множество B (или множества B на множество A). Сопоставление пар $(\mathbf{a_j, b_k})$ с элементом $\mathbf{a_j}$ и $(\mathbf{a_j, b_k})$ с элементом $\mathbf{b_k}$ определяют отображения A × B → A и A × B → B: их называют *проекцией* множества A × B на 1-й и 2-й сомножители соответственно[38].**

В зависимости от контекста, применяется много других называний *отображения*: *функция, преобразование, вектор, матрица, оператор* и т.д. Такое широкое понимание определяет возможность множества различных толкований *прямого произведения* и понятия *упорядоченной пары* (**тройки, четверки и т.д.**), которое является основой конструкции *прямого произведения.*

<u>Замечание</u>* <u>8.</u> Именно поэтому, определяя *новую исходную* систему *теории* событий, мы отказались (сноска 49 [19,32]) от понятия *прямого произведения*, принятого в работе [10], сохранив только одно название: *совмещение опытов.

Проведем на конкретных примерах подробный анализ того, что означают понятия *пар* и *прямого произведения* в теории *действительных* функций *действительных* аргументов и теории вероятностей.

***<u>Пример</u>* <u>3.</u> Пусть множество A содержит 14 элементов. Теория множеств, как и теория вероятностей, не определяет размерности множества, поэтому его элементы можно представить в виде пронумерованных точек расположенных произвольным образом (пример 2, стр.18). Положим, что *они расположены на плоскости* (рис. 1). Введем на плоскости систему *декартовых* координат и определим на них проекции точек (маленькие точки на**

---

[38]**Мы не вдаемся в подробности, чтобы не «заблудиться» в тонкостях теории множеств и, тем самым ввести в заблуждение Читателей**

осях для точки №9).

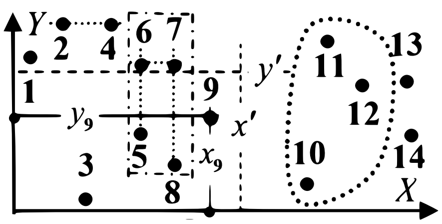

Рис. 1

Схема Ферми-Декарта позволяет геометрические точки, обозначенные номерами 1,2,...,14, характеризовать на плоскости парами (x_j, y_k) (j=1,2,...,14; k=j) *действительных* чисел: координатами проекций точки на числовые оси. Кривые (геометрические фигуры) превращаются в совокупность таких пар, объединенных уравнениями. Это определило возможность изучать свойства кривых (геометрических фигур) на плоскости или в пространстве, используя решения этих уравнений.

Но это вовсе не означает, что кривые или геометрические фигуры перестали быть таковыми: какими они были, такими и остались. *Гениальная идея*! Она, определила появление и развитие аналитической, а в последующем и дифференциальной геометрии.

Если говорить принципиально, то она объединяет геометрию и алгебру (вообще говоря, с дифференциальным и интегральным исчислением также) в единое целое.

Пары (x_j, y_k) являются *недействительными элементами* множества пар и *неотделимы от точки. Координаты* x_j и y_k, образующие *пару* (x_j, y_k), *не суммируются и не умножаются*: они характеризуют только *положение точки на плоскости.*

п.1. Точки плоскости или прямоугольной части плоскости $(x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2)$ (на рис.1 $(0 < x < x', 0 < y < y')$), представленные парами (x, y) декартовых координат, являются, в соответствии с определением, *прямым произведением двух осей* или *интервалов* $x_1 < x < x_2$ и $y_1 < y < y_2$ (на рис.1 $0 < x < x'$ и $0 < y < y'$ соответственно) [6,147; 23,12]: они определяют множество *всех упорядоченных пар* на (или обозначенной части) плоскости. Однако точки части плоскости[39], ограниченные любыми другими геометрическими фигурами (в том числе, прямоугольником, стороны которого не параллельны осям X и Y), а также точки, определяющие кривые на плоскости, вообще говоря, не соответствуют определению понятия *прямого произведения.*

п.2. На рис.1 равны координаты $y_2 = y_4$, $x_5 = x_6$, $y_6 = y_7$ и $x_7 = x_8$ точек 2,4; 5.6; 6,7 и 7,8 (соединены пунктирными линиями) соответственно. Все другие значения координат точек не совпадают. Имеем по 12 проекций точек с координатами $x_1, x_2, ..., x_5, x_7, x_9, x_{10}, ..., x_{14}$ {1} на оси X и $y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, y_8, y_9, ..., y_{14}$ {2} на оси Y. Если исходить из *прямого произведения*, то для системы точек, изображенной на рис.1 мы должны получить 196 пар (x_j, y_k), а реально имеется только 14. Т.е. эта система точек не соответствует *прямому произведению* множеств X и Y.) О существовании разных толкований понятий прямого произведения и упорядоченных пар (троек, четверок и т.д.) в теории множеств на стр.20-21.

п.3. Так как мы задали множество A, то в системе точек, изображенной на рис.1, *первичными элементами* являются *точки на плоскости*, а *пары точек*, отображающие их проекции – *вторичными элементами.*

п.4. *Пары* (x_j, y_k) *координат* характеризуют *положение точек на плос-*

[39] Здесь и далее говорится о декартовой системе координат

кости. Однако нас интересует не только и не столько положение точек, а то, *что определяет совокупность* точек, заданных на плоскости *парами* (x_j, y_k). Это зависит не от теории множеств, а от того, в какой области знаний она применяется и, вообще говоря, от условий решаемой задачи и принятых предположений при ее решении.

п.5.1. В теории *действительных* функций *действительных* аргументов (переменных) на *парах* координат $(x_j,\, y_k)$ задается некоторая функция $w\{(x_j,\, y_k)\}$ двух аргументов. В этом случае можно вычислить *сумму значений* функции в некоторых или всех точках (x_j, y_k). Например, в части области, ограниченной значениями $x < x'$ и $y < y'$ (штриховые линии) или пунктирной кривой (рис.1). п.5.2. На проекциях точек с координатами {1} и {2} по функции $w\{(x_j, y_k)\}$ можно определить функции $f(x_j)$, $\phi(y_k)$ на осях координат X и Y. Они вычисляются по *правилу суммы действительных* функций *действительного* аргумента (правило I в п.1.1 приложения I, стр.95): значения функций *суммируются* только *при равенстве координат*. С учетом равенств координат (п.2), имеем: $f(x_5) = w\{(x_5, y_5)\} + w\{(x_5, y_6)\}$; $f(x_7) = w\{(x_7, y_7)\} + w\{(x_7, y_8)\}$ и $\phi(y_2) = w\{(x_2, y_2)\} + w\{(x_4, y_2)\}$: $\phi(y_6) = w\{(x_6, y_6)\} + w\{(x_7, y_6)\}$, в остальных точках значения $f(x_j)$ (j=1,2,3,4,9,10,. . . 14) и $\phi(y_k)$ (k=1,,3,5,8,9,. . . 14) равны значениям функции $w\{(x_j, y_k)\}$. Как и в п.5.1 можно вычислить *сумму значений* функции $f(x_j)$ (или $\phi(y_k)$) в некоторых или всех точках x_j (или y_k).

> **{A.3.2}** *Сумма всех значений* функции $f(x_j)$ (или $\phi(y_k)$) равна сумме *всех значений* функции $w\{(x_j, y_k)\}$. Из пунктов 5.1 и 5.2 очевидно, что *сумма всех значений* функции $w\{(x_j, y_k)\}$ отличается от *суммы всех значений* функций $f(x_j)$ и $\phi(y_k)$. Тем не менее, во всех случаях *суммируются значения функции*, но никоим образом *не значения координат.*

<u>п.6.</u> Вопрос же, что определяет функция $W\{(x_j, y_k)\}$ на рис.1 – двумерную функцию или некоторую кривую – остается открытым: по расположению точек ответить на него достаточно сложно. Поэтому будем считать ее *двумерной* функцией (можно просто значительно увеличить их число, только изображение существенно «потеряет в наглядности»).

п.7. Пусть точки на рисунке определяют *множество элементарных* событий $\mathrm{a_j}$ (j=1,2,...,14). Пространство точек, характеризуемых *парами чисел*[40] (x_j, y_k) (j,k=1,2,...,14), являются (в соответствии с определениями 'D, D.1', стр.16-17) *случайной двумерной* величиной $\Phi\{(x_j, y_k)\}$, а проекции точек на оси X и Y, характеризуемые координатами x_j и y_k (определения 'B, B.1', стр.9-10), – *случайными одномерными* величинами **X** и **Y**. В части области, ограниченной значениями $x < x'$ и $y < y'$, или пунктирной кривой, или прямоугольником со штрих *пунктирными* линиями (рис.1)), *сложное* событие A определяется *суммой элементарных* событий $\mathrm{A} = \mathrm{a_3} + \mathrm{a_5} + \mathrm{a_8} + \mathrm{a_9}$, а его вероятность – *суммой* их вероятностей. Аналогично определяются события B и C, ограниченные пунктирной кривой и прямоугольником со штрих *пунктирными* линиями (рис.1). Случайные величины **X** и **Y** определены не на пространстве *элементарных* событий, а на проекциях точек, определяемых (с учетом равенства координат в п.2) 12 координатами {1} и {2} на осях X и Y соответственно. Координаты *не суммируются*

---

[40] Вместо пар (x_j, y_k) можно записать $[\xi_1(\omega_j), \xi_2(\omega_j)]$ (j=1,2,. . . ,14), полагая, что каждому элементарному событию соответствует своя пара чисел $\xi_{1,j}$ и $\xi_{2,j}$. Это ничего не изменит

и *не перемножаются*, т.е. *ни о какой сумме или произведении* случайных величин X и Y речи быть не может. Это распределение невозможно (определение 'D.1' стр.17) «представить в виде таблицы с двумя входами»: – по смыслу, это таблица «с двумя выходами». *Вот только куда «ведут эти выходы»?* В никуда!

Важные моменты, следующие из определений '**D, D.1**' и примера.

Замечания **9.** **1.** Полагается, что на одном пространстве *элементарных* событий $\mathbf{a_j}$ (j=1,2,...,N) даны случайные величины X и Y (определение 'D.1'), определяемые значениями $x_j \to \mathbf{a_j}$ и $y_j \to \mathbf{a_j}$: в определении 'D' (стр.16) – значениями $\xi^1_j=\xi^1(\mathbf{a_j})$, $\xi^2_j=\xi^2(\mathbf{a_j})$). **2.** По сути, считается, что они имеют распределения вероятностей $\mathbf{P}\{x_j \to \mathbf{a_j}\}$ и $\mathbf{P}\{y_j \to \mathbf{a_j}\}$, которые называют маргинальными (частными) распределениями [6,228]. **3.** Рассматриваются события $\{\mathbf{X} < x\}$ и $\{\mathbf{Y} < y\}$ (или $\{\xi^1(\mathbf{a_j}) < x\}$, $\{\xi^2(\mathbf{a_j}) < y\}$) и полагается, что они происходят одновременно (определение 'D'). Т.е. событие $\{\mathbf{X} < x, \mathbf{Y} < y\}$ (или $\{\xi^1(\mathbf{a_j}) < x, \xi^2(\mathbf{a_j}) < y\}$) является их *произведением.* Это и является основой, которая позволяет ввести функцию $\mathbf{P}\{X < x, \mathbf{Y} < y\}$ (или $\mathbf{P}\{\xi^1(\mathbf{a_j}) < x, \xi^2(\mathbf{a_j}) < y\}$), называемую *двумерной* функцией распределения случайных величин X и Y.

4. Все было бы хорошо, «кабы не всякие "но"». **4.1.** Первое "но". На рис.1 нет ни одного *элементарного* события, которое бы *принадлежало хотя бы одной* из координатных осей, т.е. задать какие-либо *функции элементарных* событий на осях *невозможно.* Тем не менее, *двумерная* функция существует. **4.2.** Второе "но". *Одновременное* появление (или пересечение) определяется для *сложных* событий A и B [1,23-24] и возможно только в случае [6,33-34], если событиям A и B *одновременно принадлежат какие-то,* (по крайней мере, хотя бы одно) *элементарные* события (точки пространства, замечание к определению 'B.1', стр.10). Хотя величины X и Y определены на одном множестве *элементарных* событий, но им поставлены в соответствие числа $x_j \to \mathbf{a_j}$ и $y_j \to \mathbf{a_j}$, принадлежащие разным осям координат: – у событий $\{\mathbf{X} < x\}$ и $\{\mathbf{Y} < y\}$ нет, и не может быть общих точек, т.е. они не могут *пересекаться. Какой процедуре в существующей теории соответствует такое задание случайных величин X и Y?* Для «подсказки»: вместо одного с таким же успехом можно взять два множества Ω_1 и Ω_2 *элементарных* событий – от этого практически ничего не изменится. **4.3.** Третье "но". Распределения вероятностей величин X и Y можно определить только по *двумерному* распределению, однако «обратного хода нет». Это подтверждается, хотя и нечасто, в работах, например: «...совместное распределение X и Y определяет распределение величин X и Y, но мы не можем найти совместное распределение X и Y по их маргинальным распределениям» [6,231]. Т.е. *двумерное* распределение *можно только задать* (что и делается, пример 4, стр.25). *И какое же отношение имеют величины X и Y к образованию двумерного распределения?*

Из проведенного анализа следует:

W.3. Значения x_j и y_k *координат*, образующих *пару* (x_j, y_k) чисел, *не суммируются и не умножаются*: они определяют *только положение точек* на плоскости.

W.4. *Пары* (x_j, y_k) координат, характеризующие положение *произвольной системы конечного* числа точек на *декартовой плоскости*, в общем случае не являются *прямым произведением* координат. *Прямое произведение* определяется в прямоугольной части $(x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2)$ (или всей) плоскости

W.5. С позиции *действительных* функций *действительных* аргументов, *пары* (x_j, y_k) координат, характеризующие *произвольную*

***систему конечного* числа точек на *декартовой плоскости*, в общем случае образуют *двумерную* функцию, которая не является ни *произведением*, ни *суммой* 2-х функций.**

W.6. Существует, по крайней мере, *один вид* случайных *многомерных* величин, не соответствующий определениям 'D, D.1'.

Сейчас можно сказать: *утверждение о произведении* в определениях **'D, D.1'** – это «*третья негласная аксиома*» теории случайных величин.

В примере 3 реализован 1-й из трех вариантов (**пример 2, стр.18**) представления *пространства элементарных* событий. В теории вероятностей *прямое произведение* вводится как:

Пояснение I. «... математический аналог эмпирических процедур, обычно называемых непрерывным экспериментированием, повторяющимся наблюдением, объединением двух выборок, комбинированием двух экспериментов и рассмотрением их как частей единого целого .... Понятие независимых[41] испытаний соответствует интуитивному понятию "экспериментов, повторяемых в одинаковых условиях". Это понятие является основным для теории вероятностей ...» [6,146].

Очевидно, что представление *пространства элементарных* событий, данное в примере 3, *не может быть математическим аналогом* ни одной из эмпирических процедур, перечисленных в пояснении (I). Примеров типа 3 в теории вероятностей как бы вовсе не существует, ибо в литературе они вообще не рассматриваются:

***Пример* 4. Просто задается *полностью заполненная двумерная* таблица. Например: « ... в клетках с координатами (x_j, y_k) вероятность $p\{(x_j, y_k)\}$ (j=1,2,...,N; k=1,2,...,M) того, что в *результате испытания* (определения 'D, D.1') *случайная* величина X *примет значение* x_j и, *вместе с этим, случайная* величина Y *примет значение* y_k, что $p\{(x_j, y_k)\}$ есть вероятность совпадения событий (X=x_j) и (Y=y_k)». При этом: «...Предполагается, что все комбинации составляют полную группу событий и потому $\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} p\{(x_j, y_k)\} = 1$» [12,158].**

Т.е. опять – та же «речь о *произведении*» (а еще – о комбинациях, но об этом уже было сказано ранее). И ни какого сомнения в том, что оно не является таковым: дело в том, что в общем случае *произведение* может быть получено только *искусственными* приемами (пример 6, стр.29 и более убедительный пример 15, стр.63).

Далее: «Тем самым одномерные законы или таблицы распределений каждой величины X и Y в отдельности полностью определяются, если известна таблица двумерной величины» [12,159]. Это действительно так: если в примере 3 каждой из 14 точек приписать вероятность $p\{(x_j, y_k)\} = p_{j,k}$, то вероятности величин X и Y будут равны $p_{1,1}; p_{2,2}; p_{3,3}; p_{4,2}; p_{5,5} + p_{5,6}; p_{7,7} + p_{7,8}; p_{9,9}; p_{10,10}; ...; p_{14,14}$ {1*} в точках с координатами $x_1, x_2, ..., x_5, x_7, x_9, x_{10}, ..., x_{14}$ или $p_{1,1}; p_{2,2} + p_{4,2}; p_{3,3}; p_{5,5}; p_{6,6} + p_{7,6}; p_{8,8}; p_{9,9}; ...; p_{14,14}$ {2*} в точках с координатами $y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, y_8, y_9, ..., y_{14}$.

---

[41] **Анализ понятий зависимости (независимости) событий и испытаний, данный в работах [19,50; 10,90], убедительно показал, что оно связано именно с условиями проведения опытов, т.е. соответствует «интуитивному пониманию»**

1. *Вот только как быть с «совпадением событий»?* **2.** А *как по «входам» – распределениям вероятностей величин* X *и* Y *– «найти выход», т.е. определить заданное двумерное распределение*[42]?

Если исходить из теории множеств, то в примере 4 *заданы все упорядоченные пары* (x_j, y_k), соответствующие понятию *прямого произведения.*

Однако: **3.** *Является ли оно произведением действительных функций действительных аргументов*? **4.** *Определяется ли оно произведением событий*?

Ответы на вопросы имеют *первостепенное* значение: от них *зависит правильное* построение теории случайных величин. В существующей теории такие вопросы даже не ставятся: просто продолжается та же «славная песнь», что и в теории событий (**приложение III [19,53]**), но только об «условных распределениях» вероятностей, «зависимых» и «независимых» случайных величинах. Об этом разговор в части VI исследований, а сейчас следующий пример.

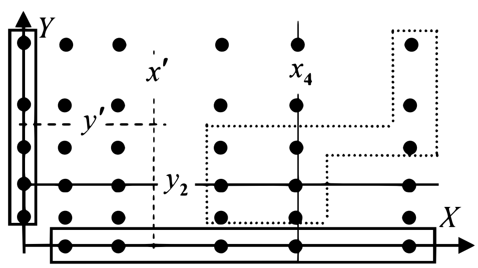

Рис. 2

Пример* 5. Пусть А и В множества, состоящие из *элементов $\mathbf{a_j}$ **(j=1,2,. . . ,5) и** $\mathbf{b_k}$ **(k=1,2,. . . ,5). Представим их в виде 2-х *одномерных* таблиц и изобразим *элементы* множеств А и В в виде точек (рис.2) на декартовых координатах** X **и** Y **соответственно. Пусть их координаты равны числам** x_j **и** y_k**. *Пересечение* линий** $x = y_k$ **и** $y = x_j$ **(для значений** y_2 **и** x_4 **они изображены на рис.2) определяют точки на плоскости, характеризуемых парами координат** (x_j, y_k) **(j,k=1,2,. . . ,5).**

С другой стороны, пары чисел (x_j, y_k) **соответствуют парам *элементов*:** $(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_1}), (\mathbf{a_j}, \mathbf{b_2}), \ldots, (\mathbf{a_j}, \mathbf{b_5})$ **(j=1,2,. . . ,5), представляющих строки двумерной таблицы[43];** $(\mathbf{a_1}, \mathbf{b_k}), (\mathbf{a_2}, \mathbf{b_k}), \ldots, (\mathbf{a_5}, \mathbf{b_k})$ **(k=1,2,. . . ,5), определяющих ее столбцы. Соответственно, пару с конкретными номерами элементов можно определить как ячейку, находящуюся на пересечении столбца и строки с соответствующими номерами, например, пара** $(\mathbf{a_4}, \mathbf{b_2})$ **определяется пересечением столбца** $(\mathbf{a_4}, \mathbf{b_k})$ **и строки** $(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_2})$**. Из рассмотрения этого случая следует:**

п.1. Так как мы задали множества А и В, то в системе точек, изображенной на рис. 2, *первичными элементами* являются *точки на осях координат* (поэтому они выделены прямоугольниками). *Точки* на плоскости, определяемые пересечением координат x_j **и** y_k **отображающие пары** $(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_k})$ **– *вторичные элементы.***

п.2. Множество точек на плоскости соответствует *прямому произведе-*

---

[42]**Можно попробовать сделать это по распределениям {1*}-{2*} или посмотреть примеры 6 (стр.29) и 15 (стр.63)**

[43]**Представление пар в виде двумерной таблицы, а исходных множеств в виде одномерных таблиц часто дается в работах по теории множеств [23,13]**

нию множеств A и B, ибо оно (п.1 примера 3, стр.22) определяет множество *всех упорядоченных пар* $(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_k})$ (j,k=1,2,...,5), составленных из их элементов.

п.3. В теории *действительных* функций *действительных* аргументов, на точках с координатами x_j и y_k можно задать *одномерные* функции $f(x_j)$ и $v(y_k)$. На точках плоскости, характеризуемых парами координат (x_j, y_k) (j,k=1,2,...,5), определяется *двумерная* функция $W(x_j, y_k)$, которая равна *произведению*[44] *одномерных* $W(x_j, y_k) = f(x_j) \cdot v(y_k)$ функций $f(x_j)$ и $v(y_k)$. Т.е. перемножаются значения функций, а не их аргументы. В данном случае (в отличие от примера 3, стр.21) ответ на вопрос, что определяет функция $W\{(x_j, y_k)\}$, *однозначно* определяется *операцией умножения* (об операции сложения разговор будет в примерах 7, 8 (стр.29-31)) *действительных* функций *действительных* аргументов.

__Замечание к п.3.__ Здесь точки x_1, x_2 и y_1, y_2 в неравенствах $x_1 < x < x_2$ и $y_1 < y < y_2$ будут ограничивать части осей X и Y (сравни с замечанием к определениям 'D, D.1', стр.16-17) соответственно. В этом случае неравенства следует записывать раздельно. Запись $(x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2)$ ограничивает на плоскости $X0Y$ точки, соответствующие парам (x_j, y_k), в которых определены произведения, и справедлива именно в этом случае.

п.4. Как и в примере 3, вычисляется *сумма* (положение {A.3.2}, стр.23) некоторых или всех *значений* функции $W(x_j, y_k)$. В отличие от примера 3, *сумма всех значений* функции $W(x_j, y_k)$ будет равна *произведению суммы всех значений* функции $f(x_j)$ и *суммы всех значений* функции $v(y_k)$.

5. Пусть множества A и B являются множествами *элементарных* событий $\mathbf{a_j}$ (j=1,2,...,5) и $\mathbf{b_k}$ (k=1,2,...,5), которые представлены (рис.2) точками на осях X и Y.

Точки с координатами x_j и y_k, которым соответствуют *элементарные* события $\mathbf{a_j}$ и $\mathbf{b_k}$ соответственно, определяют *случайные одномерные* величины **X** и **Y**. Им соответствуют два распределения вероятностей – *действительные дискретные* функции $\mathbf{P}(x_j \to \mathbf{a_j})$ и $\mathbf{P}(y_k \to \mathbf{b_k})$ *действительных* аргументов. Соответственно, они (п.3) и *перемножаются как действительные* функции $P(x_j \to \mathbf{a_j}) \cdot \mathbf{P}(y_k \to \mathbf{b_k})$ (j,k=1,2,...,5).

Точкам плоскости, характеризуемых *парами* (x_j, y_k), соответствуют пары $(x_j, y_k) \to (a_j, b_k)$ *элементарных* событий. Т.е. получаем *двумерное* распределение вероятностей $P\{(x_j, y_k) \to (\mathbf{a_j}, \mathbf{b_k})\} = \mathbf{P}(x_j \to \mathbf{a_j}) \cdot \mathbf{P}(y_k \to \mathbf{b_k})$ {1} некоторой *случайной двумерной* величины $\Phi\{(x_j, y_k) \to (\mathbf{a_j}, \mathbf{b_k})\}$. Равенство {1} можно записать в виде $\mathbf{P}(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_k})\} = \mathbf{P}(\mathbf{a_j}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{b_k})$, откуда можно сделать вывод: пара $(\mathbf{a_j}, \mathbf{b_k})$соответствует *произведению* $\mathbf{a_j} \cdot \mathbf{b_k}$ {2} *элементарных* событий, т.е. они происходят *одновременно*.

В части области, ограниченной значениями $x < x'$ и $y < y'$ (штриховые линии на рис.2), находится 6 *произведений элементарных* событий (замечания к определениям 'D,D1' и к п.3, стр.16-17, 22), которые определяют событие A. Учитывая {2}, *сумма произведений* $\mathbf{A} = \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{b_1} + \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{b_2} + \mathbf{a_1} \cdot \mathbf{b_3} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{b_1} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{b_2} + \mathbf{a_2} \cdot \mathbf{b_3}$ сводится к виду $\mathbf{A} = (\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2}) \cdot (\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}) = \mathbf{A_x} \cdot \mathbf{A_y}$ (где $\mathbf{A_x}$ и $\mathbf{A_y}$ – события, определяемые случайными величинами **X** и **Y**). Вероятность события **A** равна $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{A_x}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A_y})$. Можно ограничить часть области произвольной кривой (ломаная пунктирная линия, рис.2): в этом случае событие будет определяться *суммой* событий $\mathbf{B} = \mathbf{B_x} \cdot \mathbf{B_y}$ (где $\mathbf{B_x} = \mathbf{a_3} + \mathbf{a_4}$, $\mathbf{B_y} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$) и $\mathbf{C} = \mathbf{C_x} \cdot \mathbf{C_y}$ (где $\mathbf{C_x} = \mathbf{a_5}$, $\mathbf{C_y} = \mathbf{b_3} + \mathbf{b_4} + \mathbf{b_5}$).

Именно распределения, полученные таким образом, представляются (определение 'D.1', стр.17) «в виде таблиц с двумя входами».

---

[44]Правило произведения функций, заданных на осях X и Y (правило IV в п.1.2 приложения I, стр.95): все значения одной функции в точках x_j последовательно умножаются на каждое значение другой функции в точке y_k. Результат присваивается точке (x_j, y_k)

В примере 5 реализован 2-й вариант (**пример 2, стр.18**) *представления 2-х пространств элементарных* событий[45], который определил *произведение элементарных* и *сложных* событий, а также их вероятностей. Можно сказать, что в этом случае *случайная двумерная* величина соответствует определениям **'D, D.1'**, но «есть маленькая помеха»: ***случайные* величины X и Y (действительные функции, определения 'B, B.1', стр.9-10) определяются *значениями действительных чисел – координатами* x_j и y_k, но *перемножаются* распределения вероятностей, а не случайные величины.** Отметим, что именно в этом случае представление *пространства элементарных* событий является *математическим* аналогом *эмпирических* процедур, перечисленных в пояснении (I), исключая *объединение* выборок (**об этом в примере 11, стр.36**). Дополним пояснение (I) еще одним:

<u>Пояснение II</u>. «Вообще, когда мы говорим о двух последовательных испытаниях, мы имеем в виду пространство Ω, точки которого представляют пары возможных исходов, и поэтому Ω является прямым произведением двух пространств элементарных событий, соответствующих отдельным испытаниям. Два данных мысленных эксперимента с пространствами элементарных событий Ω_1 и Ω_2 можно рассматривать одновременно или последовательно. Это позволяет рассматривать пары возможных исходов, т.е. ввести прямое произведение (Ω_1,Ω_2) в качестве нового пространства элементарных событий. Возникает вопрос: как должны быть определены вероятности на новом пространстве элементарных событий? Ответ зависит от обстоятельств . . . » [6,147].

Мы не вводили никакого *нового пространства элементарных* событий и никаких вопросов, касающихся определения вероятности их *произведений* при этом не возникло: они *естественным* образом следуют *из произведения действительных* функций *действительных* переменных. Обстоятельства же, от которых зависит ответ на вопрос, заданный в цитате, связывается с понятиями «*зависимых*» и «*независимых*» испытаний:

<u>Пояснение III</u>. «Обратимся теперь к вопросу о задании вероятностей на произведении пространств. Различные урновые модели §2 могут быть описаны при помощи повторных испытаний, и мы видели, что вероятности в различных схемах можно определить посредством условных вероятностей. Могут быть рассмотрены различные виды зависимости между последовательными испытаниями, но наиболее важно понятие независимых испытаний . . . . Для определенности рассмотрим два пространства элементарных событий Ω_1 и Ω_2 с точками $\alpha_1, \alpha_2, ...$ и $\beta_1, \beta_2, ...$, имеющими вероятности $p_1, p_2, ...$ и $q_1, q_2, ...$ соответственно. Мы интерпретируем произведение пространств (Ω_1,Ω_2) как пространство элементарных событий, описывающих последовательность двух экспериментов, соответствующих Ω_1 и Ω_2. Говоря, что эти два эксперимента независимы, мы имеем в виду, что два события "первый исход есть α_j" и "второй исход есть β_k" стохастически независимы. Однако дело обстоит так только в том случае, когда вероятности на пространстве определены по правилу $P(\alpha_j,\beta_k) = p_j \cdot q_k$. Такое задание вероятностей правомерно, потому что в сумме они дают единицу» [6,149].

---

[45] **Мы исходили из 2-х множеств элементарных событий, но можно взять и одно множество, замечание 7 (стр.20)**

В примере 5 *произведение* вероятностей, о котором говорится в цитате, получено *естественным* образом, а о «*независимости*[46]» даже упоминания не было. Из анализа проведенного выше, следует:

> **W.7.** ***Пары*, фигурирующие в *декартовом произведении*, с позиции событий определяют *все возможные произведения* $\mathbf{a_n \cdot b_m}$ $(\mathbf{n = 1, 2, \ldots, N})$ $(\mathbf{m = 1, 2, \ldots, M})$ *элементарных* событий, принадлежащие множествам $\mathbf{\Omega_1}$ и $\mathbf{\Omega_2}$ соответственно.**

> **W.8.** ***Действительные* функции $P(x_n)$ и $P(y_m)$ *действительных* аргументов x_n (n=1,2,...,N) и y_m (m=1,2,...,M) определяют (согласно определению 'C', стр.10) *распределение* вероятностей случайных величин X и Y. *Декартово произведение*, с позиции *действительных* функций, определяет *произведение значений этих функций*, а не *произведение* их *аргументов* x_n и y_m, значения которых, в соответствии с определениями 'B, B.1', и определяют случайные величины X и Y как *действительные* функции.**

Случайную двумерную величину $\mathbf{\Phi}$ в примере 5, можно назвать *прямым произведением случайных одномерных* величин **X** и **Y** (**получаем все возможные упорядоченные пары** (x_j, y_k)), которые называют «*независимыми*». *Аналогом* ее построения является представление множеств $\mathbf{\Omega_1}$ и $\mathbf{\Omega_2}$ (**можно одного множества** $\mathbf{\Omega}$) *элементарных* событий $\mathbf{a_n}$ **(n=1,2,...,N)** и $\mathbf{b_m}$ **(m=1,2,...,M)** в виде двух множеств точек, принадлежащих координатным осям X и Y соответственно. Однако *аналога* для построения «*зависимых*» случайных величин, в *теории* событий *не существует*: при желании его, конечно же, можно построить, *но только искусственно*.

<u>*Пример*</u> <u>6.</u> Точки на плоскости, определяющие *пространство элементарных* событий в примере 3, можно представить в виде *прямого произведения* $(\mathbf{\Omega_1}, \mathbf{\Omega_2})$ пространств $\mathbf{\Omega_1}$ и $\mathbf{\Omega_2}$. Для этого необходимо во всех точках пересечения линий $x = y_m$ (m=1,2,...,12) и $y = x_n$ (n=1,2,...,12) поставить точки, дополняющие систему до прямого произведения. Положить, что им соответствуют *невозможные* события и построить таблицу «*условных*» вероятностей, например $P(\,y_m|\,x_n)$, соответствующих каждой точке (x_n, y_m) (n,m=1,2,...,14) *нового пространства элементарных* событий. Тогда вероятность появления пары (x_n, y_m) равна $P\{(x_n, y_m)\} = P(x_n) \cdot P(\,y_m|\,x_n)$. Т.е. получим то, что называют «зависимыми испытаниями», которым соответствуют «зависимые» случайные величины X и Y. Занятие не имеет особого смысла и, вообще говоря, бесполезное для теории вероятностей: вероятности *любых* событий определяются *непосредственно* по исходному *двумерному распределению* вероятностей.

Хотя *случайные* величины определены как *действительные* функции, в примере 5 мы имеем *произведение распределений* вероятностей *случайных* величин **X** и **Y**, а не *самих случайных* величин: «*значения*» *случайных* величин **X** и **Y** – это *всего лишь значения* аргументов (**они не**

[46] **Противоречия, связанные с понятием независимости событий, показаны в работе [19,53]. О независимости случайных величин поговорим в частях IV-VI исследований**

перемножаются!) функций. Пора обратиться к принятому в существующей теории вероятности пониманию *суммы случайных* величин, но прежде рассмотрим *сумму действительных* функций *действительных* аргументов[47].

Пример **7. На оси X определены функции $f(x_n) = f_n$ $(x_1 < x_2 < ... < x_N)$ и $\phi(x'_m) = \phi_m$ $(x'_1 < x'_2 < ... < x'_M)$. Для определенности положим $N \geq M$. п.1. Если при *любых* значениях n=1,2,...,N и m=1,2,...,M *выполняется неравенство* $x'_m \neq x_n$, то *сумма* функций $g\{(x_n, x'_m)\} = f(x_n) + \phi(x'_m)$ определяется $N+M$ значениями: $g_k = f_k$ в точках $x_1, x_2, ..., x_N$ и $g_{N+k} = \phi_k$ в точках $x'_1, x'_2, ..., x'_M$.**

п.2. Если, например, при значениях $k = 1, 2, ..., K \leq M$ *выполняется равенство* $x'_k = x_{N-k}$ (k=1,2,...,K) {A}, то функция $g = f + \phi$ определяется значениями: $g_k = f_k$ в точках $x_1, x_2, ..., x_{N-K}$; $g_{K+k} = f_{N-K+k} + \phi_k$ в точках $x_{K+1}, x_{K+2}, ..., x_N$ и $g_{K+k} = \phi_k$ в точках $x'_{K+1}, x'_{K+2}, ..., x'_M$. Рассмотренный пример – это только один из множества возможных вариантов.

п.3. Если функция $\phi(y_m) = \phi_m$ $(y_1 < y_2 < ... < y_M)$ определена на координатной оси Y, *то точки*, соответствующие координатам x_n и y_m, *просто не могут совпадать*, следовательно, как и в п.1, значения функции $g = f + \phi$ будут равны значениям f_n и ϕ_m в точках $x_1, x_2, ..., x_N$ и $y_1, y_2, ..., y_M$ соответственно. Учитывая, что функция может быть задана не некоторой кривой, полученную в этом случае функцию суммы можно считать определенной на ломаной линии.

п.4. Можно определить *сумму* (положение {A.3}, стр.22) некоторых или всех *значений* функции $g = f + \phi$. Как и в примере 3, во всех случаях *сумма всех значений* функции g *равна сумме всех значений* исходных функций f и ϕ.

Замечание. **В примере точки x_1, x_2 и x_3, x_4 (или x_1, x_2 и y_1, y_2) в неравенствах $x_1 < x < x_2$ и $x_1 < x < x_2$ (или $x_1 < x < x_2$ и $y_1 < y < y_2$) будут ограничивать две части на оси X (или осей X и Y). В обоих случаях запись $(x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2)$ неверна: неравенства следует записывать раздельно (сравни с замечаниями к определениям 'D, D.1' и п.3, стр.16-17, 26).**

В примере 7 реализован третий (**представление 2-х наборов чисел на одной или двух координатных осях, пример 2, стр.18**) вариант представления *пространства элементарных* событий. Но не для случайных величин, а для *суммы действительных* функций *действительных* аргументов. Функция $g = f + \phi$ представляет собой, *все значения исходных* функций f_n и ϕ_m, которые *суммируются* $f_n + \phi_m$ только *при равенстве значений* $x'_m = x_n$ аргументов (**координат**) для каких-то точек с номерами n и m.

Ни о какой *сумме координат* (**аргументов x_n, x'_m, п.1**) или x_n и y_m (**п.3**) речи быть не может, а *именно координаты* в существующей теории *соответствуют «одномерным или двумерным* величинам». *Суммы действительных* функций *действительных* аргументов в этом примере,

[47] **Правило суммы функций применено в примере 3 (п.5.2, стр.22) и поясняется в примере 7 (стр.29). Подробное изложение – в приложении I, стр.95**

по-видимому, соответствуют понятию *свободного объединения* множеств[48] **A** и **B** (**в зависимости от контекста, применяются другие названия: копроизведение, свободная сумма, несвязная сумма или просто сумма и др.**).

> **{A.4}** ***Правило суммы*: Если A содержит N *элементов*, а B содержит M *элементов*, то множество, образованное *свободным объединением* содержит $N+M$ *элементов*.**

***Замечания* 10. 1. *Элементы* множеств A и B в примере 6 – это *значения координат* $x_1, x_2, ..., x_N$ и $x'_1, x'_2, ..., x'_M$ (или $y_1, y_2, ..., y_M$) точек, т.е. *значения аргументов*. Значения функций $f(x_n)$ и $\phi(x'_m)$ (или $\phi(y_m)$), заданных в этих точках – *вторичные элементы*. *Сумма* множеств и определяет $N+M$ *элементов – значений аргументов* и *соответствующих им значений функций*. Если множества содержат K *одинаковых элементов* (множества *пересекаются*!), т.е. какие-то K значений координат x_n и x'_m равны между собой, то *сумма* множеств содержит $N+M-K$ *элементов – значений аргументов*. При этом в точках, координаты которых одинаковы, *значения* функций *суммируются*, т.е. мы также получаем $N+M-K$ *значений* функции – *вторичных элементов*. 2. Функции $f(x_n)$ и $\phi(x'_m)$, заданные *на одной координатной* оси, можно также *перемножить*, однако их *произведение* существует (как и сумма) только при равенстве координат $x_k = x'_k$ всех или части точек: для них имеем $f(x_k) \cdot \phi(x'_k)$. Т.е. *правила произведения* функций, зависящих *от одного* аргумента, и функций, зависящих *от разных* аргументов (приложение I, стр.95), *существенно отличаются*. *Отличаются и свойства произведений*.**

Мы уже говорили, что теория множеств (**пример 3, стр.21**), не определяет размерности множества, поэтому приведем пример вычисления *суммы двумерных действительных* функций *действительных* аргументов.

***Пример* 8. Даны *двумерные действительные* функции $W\{(x_{n1}, y_{m1})\}$ (n1=1,2,...,N1) (m1=1,2,...,M1) и $V\{(x'_{n2}, y'_{m2})\}$ (n2=1,2,...,N2) (m2=1,2,...,M2). Имеем $N1 \cdot M1$ пар (x_{n1}, y_{m1}), и $N2 \cdot M2$ пар (x'_{n2}, y'_{m2}). *Сумма многомерных действительных* функций определяется по *тому же правилу*: значения функций $W\{(x_{n1}, y_{m1})\}$ и $V\{(x'_{n2}, y'_{m2})\}$ *суммируются* только *при равенстве пар* $(x_{n1}, y_{m1}) = (x'_{n2}, y'_{m2})$, т.е. обоих значений координат $x'_{n2} = x_{n1}$ и $y'_{m2} = y_{m1}$ {A*} (множества пересекаются!).**

п.1. Если *условия* {A*} *не выполняются ни для одной из пар*, то *сумма* функций $G\{(x_n, y_m)\}$ будет содержать $N1 \cdot M1 + N2 \cdot M2$ значений: в $N1 \cdot M1$ точках, определяемых парой (x_{n2}, y_{m2}) ее значения равны $W\{(x_{n1}, y_{m1})\}$, а в $N2 \cdot M2$ точках, определяемых парой (x_{n2}, y_{m2}) – $V\{(x'_{n2}, y'_{m2})\}$.

---

[48] **Вообще говоря, в определении свободного объединения множества A и B полагаются непересекающимися. Однако далее, вроде бы, ни правила теории множеств, ни правила действий с действительными функциями действительных аргументов не нарушаются**

п.2. Для упрощения положим[49] $N1 = N2 = N$ и $M1 = M2 = M$, а условия {A*} выполняются для всех пар координат. Тогда *сумма* функций будет содержать $N \cdot M$ значений, определяемых *суммой* значений функций $W\{(x_n, y_m)\}$ и $V\{(x_n, y_m)\}$ в точках (x_{n1}, y_{m1}): $G\{(x_n, y_m)\} = W\{(x_{n1}, y_{m1})\} + V\{(x_n, y_m)\}$.

п.3. Как и в примере 3 по *действительной* функции $G\{(x_n, y_m)\}$ можно построить *одномерные* функции на осях X и Y: 1) в первом случае $f(x_n) = f_1(x_{n1}) + f_2(x'_{n2})$ (n=1,2,...,N1+N2) и $\phi(y_m) = \phi_1(y_{m1}) + \phi_2(y'_{m2})$ (m=1,2,...,M1+M2) соответственно, где функции в суммах равны $f_1(x_{n1}) = \sum_{m1=1}^{M1} W\{(x_{n1}, y_{m1})\}$, $f_2(x'_{n2}) = \sum_{m2=1}^{M2} V\{(x'_{n2}, y'_{m2})\}$ и $\phi_1(y_{m2}) = \sum_{n1=1}^{N1} W\{(x_{n1}, y_{m1})\}$, $\phi_2(y'_{m2}) = \sum_{n2=1}^{N2} V\{(x'_{n2}, y'_{m2})\}$; 2) во втором случае $f(x_n) = \sum_{m=1}^{M}[W\{(x_n, y_m)\} + V\{(x_n, y_m)\}]$ и $\phi(y_m) = \sum_{n=1}^{N}[W\{(x_n, y_m)\} + V\{(x_n, y_m)\}]$.

п.4. Можно определить *сумму* (положение {A.3.2}, стр.23) некоторых или всех *значений* функции $G\{(x_n, y_m)\}$. В этом примере, как и в примере 3, во всех случаях *сумма всех значений* функции $G\{(x_n, y_m)\}$ равна *сумме всех значений* исходных функций $W\{(x_n, y_m)\}$ и $V\{(x_n, y_m)\}$, а также сумме всех значений одномерной функции $f(x_n)$ (или функции $\phi(y_m)$).

В этом примере имеем *пары* (x_n, y_m) координат и соответствующие им значения *двумерной* функции $G\{(x_n, y_m)\}$, а также *одномерных* (**п.3**) функций $f(x_n)$ и $\phi(y_m)$. Они определяются (**как и в примере 7, стр.29**) всеми *значениями исходных* функций $W\{(x_n, y_m)\}$ **и** $V\{(x_n, y_m)\}$: *при равенстве значений* аргументов – *значения исходных* функций *суммируются*. Но ни в коем случае не *суммируются координаты* – значения аргументов, которые в существующей теории определяются «как *двумерные* или *одномерные* величины». Функция $G\{(x_n, y_m)\}$ не может быть представлена в виде *произведения* 2-х *одномерных* функций, даже тогда, когда *исходные* функции получены *произведением одномерных* функций $W\{(x_{n1}, y_{m1})\} = f_1(x_{n1}) \cdot \phi_1(y_{m1})$ и $V\{(x'_{n2}, y'_{m2})\} = f_2(x'_{n2}) \cdot \phi_2(y'_{m2})$.

***Замечания* 11. *Единственное исключение*: если в п.2 примера 8 функции образованы *произведением одинаковых* функций $f_1(x_n) = f_2(x'_n)$ и $\phi_1(y_m) = \phi_2(y'_m)$ (подробнее – в примере 21, стр.79).**

Так как *случайные* величины – это *действительные* функции, то их *сумма* должна бы определяться как *сумма действительных* функций. Но «не тут-то было»: в существующей теории вероятностей понятие *свободного объединения* множеств не применялось и не применяется до сих пор. Возможно, поэтому *сумма случайных* величин определяется «весьма оригинальным» способом. В литературе она обычно дается сразу для непрерывных (**«зависимых» и «независимых»**) случайных величин, но пояс-

[49]Можно положить $N2 \leq N1$, $M2 \leq M1$ и рассмотреть более общий случай, например, при выполнении условий {*} для всех пар $(x'_{n2}, y'_{m2}) = (x_{n2}, y_{m2})$ (n2=1,2,...,N2) (m2=1,2,...,M2). Это усложняет только запись

нение на примере дискретных величин иногда тоже «встречается»:

«Пусть сначала X и Y – две «независимые» *дискретные случайные* величины данного испытания и Z=X+Y. Возможное значение $z = x + y$ всегда представляет *сумму* двух возможных слагаемых X=x и Y=y. По правилу сложения имеем $\mathbf{P}(\mathbf{Z} = z) = \sum_{x+y=z} \mathbf{P}(\mathbf{X} = x,\, \mathbf{Y} = y)$, где суммирование распространено на те пары возможных значений x и y, которые в сумме дают z. Но в силу независимости X и Y: $\mathbf{P}(\mathbf{X} = x, \mathbf{Y} = y) = \mathbf{P}(\mathbf{X} = x) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{Y} = y)$» [12,188].

Для того чтобы было понятнее <u>о</u> <u>*чем*</u> <u>*не*</u> <u>*говорится*</u> в цитате, мы сначала кратко рассмотрим «*сумму*» непрерывных величин.

***<u>Пример</u>* <u>9.</u>** **п.1. Пусть в прямоугольнике ($0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$) задана плотность распределения $p(x,\, y)$ величины Ф. Определяется действительная функция действительного аргумента $y = -x + z'$, (где z' – некоторое число), которая на плоскости изображается прямой линией. По плотности распределения вычисляется вероятность $P(0 \le x < z',\ 0 \le y < z' - x)$ {1} попадания случайной точки $A(x,\, y)$ в часть области, лежащую ниже прямой $y = -x + z'$. При изменении числа z' изменяется положение функции $y = -x$ относительно начала координат, следовательно, и значение интеграла, т.е. вероятности {1}.**

Пересечение прямой $y = -x + z'$ с осью x (или y) определяет точку z, координата которой на оси x (или y) равна *сумме координат* $y + x = z$ точек, принадлежащих прямой $y = -x + z'$ при любом значении $z' = z$. Это легко следует из геометрии. В существующей теории ее записывают в виде Z=X+Y, а вероятность $P(Z < z)$ называют вероятностью *суммы случайных* величин X и Y. Напомним, что плотности распределения величин X и Y вычисляются по плотности *исходной двумерной* величины.

п.2. Теперь об определении *суммы случайных дискретных* величин. Дано распределение вероятностей $p(x_n,\, y_m)$ (n=1,2,... N; m=1,2,...,M) *дискретной* величины Ф, значения которой определяются парами $(x_n,\, y_m)$: каждой *точке на пересечении* прямых линий $x = y_m$ (m=1,2,... M) и $y = x_n$ (n=1,2,...,N) *соответствует значение* вероятности $p(x_n,\, y_m)$. *Суммы* $\sum_{m=1}^{M} p(x_n,\, y_m) = p(x_n)$, $\sum_{n=1}^{N} p(x_n,\, y_m) = p(y_m)$ {2} определяют распределение вероятностей случайных величин X и Y. Вычислим *сумму* вероятностей пар $(x_n,\, y_m)$, для которых *сумма* индексов n+m=v=const *равна числу* v, которое последовательно принимает значения v=2,3,...,N+M. Имеем: 1) $p(x_1, y_1)$; 2) $p(x_1, y_2) + p(x_2, y_1)$; 3) $p(x_1, y_3) + p(x_2, y_3) + p(x_3, y_1)$; 4) $p(x_1, y_4) + p(x_2, y_3) + p(x_3, y_2) + p(x_4, y_1)$; ... {3}.

Легко видеть: *сумма* $x_n + y_m$ *координат* всех *пар* $(x_n,\, y_m)$, входящие в *одну из* сумм, будет равна *числу* $x_n + y_m = z_{n+m=v}$ только при *условиях*: $x_j = x_{j-1} + \Delta$ (j=1,2,...,N), $y_k = y_{k-1} + \Delta$ (j=1,2,...,M) {4}, где Δ – некоторое *действительное* число.

Это определение *суммы* можно было бы считать «*четвертой негласной аксиомой*» теории случайных величин. *Вот только чем подтверждено это утверждение*? Ответ очень простой – <u>*ничем*</u>. Одно *подтверждение* (**вообще говоря, связанное с экспериментами**) этого ответа будет уже в исследованиях этого раздела. А сейчас продолжим разговор о теории. Из примера 9 следует то, о чем «умалчивает» существующая теория. Условия **{4}** обеспечивают принадлежность точек одной *прямой* $y = -x + z'$. Ее пересечение с осью x (**или** y) определяет точку z, координата которой на оси x (**или** y) равна сумме $z_{n+m=v} = x_n + y_m$ координат.

Подчеркнем: *сумма координат* определяется *именно в точках пересечения прямой* (а не на самой прямой!) линии $y = -x + z'$ *с одной из координатных* осей: *на самой же прямой линии* $y = -x + z'$ определяется только *точка на плоскости, соответствующая паре* (x, y) координат.

Далее полагается (**но только «по умолчанию»**), что *суммы* вероятностей $\sum_{n=1}^{v-1} p(x_n, y_{v-n})$ принадлежат точке $z_{n+m=v} = x_n + y_m$. Только в этом случае вероятности, определяемые *суммами* **{3}**, можно записать в виде $p(z_{n+m=v} = x_n + y_m)$.

Координаты «*суммируются*» и, конечно же, соответствуют «*сумме*» двух случайных величин $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ (**в отличие от примеров 3-8, где эти суммы «не присутствуют»**). Но есть небольшая «нестыковка»: *суммы* вероятностей **{3}** вычисляются *в точках* на *линии* $y = -x + z'$, *определяемых парами* (x_n, y_m), а *не в точках, определяемых суммами* $z_{n+m=v} = x_n + y_m$ координат.

Какая математическая модель[50] *является основой для того, чтобы эти суммы «приписать» именно точке* $z_{n+m=v} = x_n + y_m$?

Итак, имеем *единственный* пример из всех рассмотренных, в котором *случайные* величины *слагаются* (**т.е. суммируются координаты, коими они являются в существующей теории**). Однако, исходя из понимания *суммы* случайных величин, принятого в существующей теории, мы получили «что-то», но это «нечто трудно перевариваемое".

Во-первых, из сравнения *суммы* **{3}** *с суммами*, определенными в примере 7 (**п.1-п.3 стр.29-30**), легко видно, что они *никоим образом не соответствует суммам действительных* функций *действительных* аргументов. Следовательно, они *не будут соответствовать и суммам* «независимых» величин $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, распределение вероятностей которых определяется выражениями **{2}**.

***<u>Замечание</u>* <u>12.</u> Если, например, положить $\Delta^x = 1/N$ и $\Delta^y = 1/M$, то *суммы*, определяемые формулами {4}, будут принадлежать прямой $y = -(\Delta^y/\Delta^x) \cdot x + z'$. *Как их интерпретировать*? Отметим, что в существующей теории ее записывают в виде $\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b$ и называют линейной функцией величины $\mathbf{X}$ [1; 12; 13; 16]. Если же точки на отрезке расположить неравномерно (теория этого не запрещает), то они вообще не будут принадлежать прямой.**

Во-вторых, этот же способ позволяет вычислить «*сумму зависимых*»

[50]**Она подробно рассмотрена в части IV работы**

величин **X** и **Y** в примерах 3, 4 (**стр.21, 25**). Останется *только объяснить*, какое *она имеет отношение к их сумме.* Но с этим (**замечания 9.4 (стр.24) и пример 4 (стр.25)**) «возникнут непреодолимые сложности». Теперь кратко о том, что выполняется реально. В примере 9 вычисляется вероятность, определяемая *суммой значений* $P\{(x,\, y)\}$, принадлежащих прямой $y\,=\,-x\,+\,z'$, по заданному *двумерному* распределению вероятностей. Если случайная величина *непрерывна*, то вычисляется вероятность попадания случайной точки в часть области, лежащую ниже прямой $y\,=\,-x\,+\,z'$. Значение z', по сути, определяет *положение прямой* $y\,=\,-x$ *относительно начала* координат. *Изменяя* значение z, получим *зависимость суммы* вероятностей $P(z)$ от *положения* прямой *относительно начала* координат[51]. Если прямую линию заменить некоторой произвольной однозначной кривой $y\,=\,f(x\,-\,z')$, то получим *зависимость суммы* вероятностей $P(z')$ от *положения* кривой $y\,=\,f(x)$ *относительно начала* координат.

Рассмотрим еще одну операцию[52] с *действительной* функцией *действительного* аргумента, которая имеет непосредственное отношение к выше сказанному:

Пример **10.** **Определим на отрезке** $a\,\le\,x\,\le\,b$ ***однозначную действительную непрерывную*** **функцию** $y\,=\,y(x)$**, которая определяет на плоскости** $X0Y$ **некоторую кривую. Положим для определенности ее** ***монотонно возрастающей*** **(что, вообще говоря, необязательно). Функция** $y\,=\,y(x)$ ***однозначно отображает*** **множество значений** x **на множество значений** y**, т.е.** ***любой*** **точке** $a\,\le\,x_k\,\le\,b$ **на оси** X **соответствует точка на кривой с координатой** $y_k\,=\,y(x_k)$.

Если на отрезке $a\,\le\,x\,\le\,b$ **задана** ***действительная дискретная*** **функция** $V(x_n)\,=\,V_n\;(x_1\,<\,x_2\,<\,...\,<\,x_N)$**, то функция** $y\,=\,y(x)$ ***отображает*** **множество значений** F_n **функции в точках** $x_1, x_2, ..., x_N$ **на множество точек** $y_n\,=\,y(x_n)$**, т.е. на оси** Y **получаем функцию** $W[y_n\,=\,y(x_n)]\,=\,V_n$**, значения которой равны исходной, но изменяются расстояния между ее значениями. Таким образом,** ***действительная*** **функция** $y\,=\,y(x)$ ***преобразует действительную*** **функцию** $V(x_n)$**, заданную на оси** X**,** ***в действительную*** **функцию** $W(y_n)$**, определенную на отрезке** $y(a)\,\le\,y\,\le\,y(b)$ **оси** Y**. В теории** ***действительных*** **функций** ***действительной*** **переменной** ***отображение*** **называется [21,483]** ***точечным преобразованием***, **а функция** $u(x)$ – ***формулой преобразования.*** **Если функция** ***линейна***, **то** ***преобразование*** **тоже называется** ***линейным. Цель преобразования*** **в теории** ***действительных*** **функций: – замена переменной** x **в функции от нее** $y(x)$ **и ряд производных от** y **по** x**, содержащихся в дифференциальных выражениях, - несколько отличается от нашей цели, но это не имеет принципиального значения. Очевидно, что** ***формула преобразования никоим*** **образом** ***не связана и не зависит от*** **функций** $V(x_n)$ **и** $W(y_n)$.

В теории вероятностей *формулу преобразования* $y\,=\,y(x)$, записанную в виде $\mathbf{Y}\,=\,\mathbf{U(X)}$, называют [12,119; 16,98; 18,76] *функцией от слу-*

[51]**В части IV исследований дано более точное понимание того, что представляют и где определяются эти суммы**

[52]**Более подробно – в части IV исследований**

чайной величины **X**. *Когда и почему было дано это название*?

Таким образом, с одной стороны, имеем распределение *двумерной* величины, для которой вычисляется «нечто, называемое суммой» величин. С другой стороны, линейную $y = a \cdot x + b$ функцию (**формулу преобразования пример 10**)), записанную в виде (**замечание 12, стр.34**) $\mathbf{Y} = a \cdot \mathbf{X} + b$, и называют *линейной* функцией от случайной величины **X**. С третьей стороны (**полагая** $a = -1$ **и** $b = z$, **т.е.**$y = -x + z$), ее записывают в виде[53] **Z=X+Y** и называют *функцией суммы* (**пример 9, стр.32**) случайных величин **X** и **Y**.

Подобным образом вводится операция «деления». Уравнение гиперболы $y = \pm b/x$ **(где** $b > 0$ **– действительное число) в одних работах его записывают в виде Y=Z/X и называют (например [1,143]) «функцией частного» величин Z и X, а в других (например [17,798]) – его записывают в виде Z=X·Y и называют «произведением» величин X и Y.**

Интересно, не так ли? Но не «многовато» ли для одной и той же операции? При анализе преобразования случайных величин (**часть IV исследований**) будет показано, что *действительная* функция $y = f(x)$ *действительного* аргумента в рассмотренных случаях является *формулой преобразования*: она существует (**задается**) «сама по себе» и *никоим образом не зависит* ни от *случайных* величин, ни от *распределений* их вероятностей.

На основе анализа, данного в этом разделе, следует общий вывод:

> **Q.I. В существующей теории вероятностей случайная величина трактуется как действительная функция, однако *операции со случайными* величинами *не соответствуют ни операциям с* событиями (вывод W.2, стр.16), *ни операциям с действительными* функциями.**

Надеемся, во-первых, что анализ, проведенный при рассмотрении примеров 3-10, наглядно продемонстрировал Читателю разнообразие понимания понятий *пар* и *прямого произведения* как в теории *действительных* функций *действительных* аргументов (**переменных**). Во-вторых, что Читателю стало понятно, почему мы отказались от применения понятия *прямого произведения* в *теории* событий [19,32]. В-третьих, что мы сумели понятно «донести» до Читателя *несоответствие* операций с событиями, *действительными* функциями *действительных* и случайными величинами. В-четвертых, очень надеемся, что Читатель, «вооружив-

[53] **В общем случае, это запись действительной функции** $u = u(x, y)$ **действительных аргументов в виде U=U(X,Y). Ее называют функцией от случайных величин X и Y [1,135]**

шись» анализом *основных* понятий[54] теории вероятностей, понял какое оно «**... логически совершенное здание современной теории вероятностей**».

Тем не менее, последний пример, который мы просто обязаны привести! Дело в том, что понятие *свободного объединения* множеств не применяется в теории вероятностей (**о чем было сказано ранее**), однако, как это *ни странно звучит*, <u>*оно*</u> <u>*существует*</u>: но только в *математической статистке* – под названием <u>*объединение*</u> <u>*выборок*</u>. Пример, конечно же, «уж очень надуманный» и «невозможно идеальный», но для последующей цели вполне подходящий.

<u>*Пример*</u> <u>11.</u> В двух *сериях экспериментов* (выборках) получены значения случайной величины $(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\mathbf{N})$ **и** $(x'_0 < x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_\mathbf{N})$ **(число N – объем выборки) на *равных* отрезках $x'_\mathbf{N} - x'_0 = x_\mathbf{N} - x_0$. Разделим отрезки $x_\mathbf{N} - x_0$ и $x'_\mathbf{N} - x'_0$ точками $x0_\mathbf{j}$ (j=0,1,. . . ,11) на равные части $x0_\mathbf{m} - x0_{\mathbf{m}-1} = \Delta_\mathbf{m}$ (m=1,2,. . . ,11). Положим, что числа $n^\mathbf{k}_m = 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1$ (k=1,2) {1} определяют число значений, попавших на соответствующую часть $\Delta_\mathbf{m}$ каждого из отрезков. В *объединенной* выборке имеем $N_\mathbf{o} = 2N$ значений.**

п.1. Полагая $x'_0 = x_0$, получим в *объединенной* выборке на частях $\Delta_\mathbf{m}$ *удвоенное* число значений $n^\mathbf{o}_\mathbf{m} = 2n^\mathbf{k}_\mathbf{m}$. *Область*, в которой будут находиться значения, *равна исходной* $x_\mathbf{N} - x_0$.

п.2. Теперь положим, например, $x'_0 = x_0 + 6\Delta_\mathbf{m}$. Тогда получим на частях: с номерами v=1,2,. . . ,6 число значений равно $n^\mathbf{o1}_\mathbf{v} = n^\mathbf{1}_v$; с номерами v=7,8,. . . ,11 – $n^\mathbf{o1}_\mathbf{v} = n^\mathbf{1}_\mathbf{v} + n^\mathbf{2}_{\mathbf{v}-6}$ и с номерами v=11,12,. . . ,17 – $n^\mathbf{o1}_\mathbf{v} = n^\mathbf{2}_{\mathbf{v}-5}$.

Таким образом, в *объединенной* выборке имеем значения чисел: $n^\mathbf{o1}_\mathbf{v} = 1, 10, 45, 120, 210, 252, 211, 130, 90, 130, 211, 252, 210, 120, 45, 10, 1$ (v=1,2,...,17) {2}. *Область*, в которой будут находиться значения, *равна* $x_\mathbf{N} - x_0 + 6\Delta_\mathbf{m}$.

И что же следует из данного примера?

***Относительные* частоты $n^\mathbf{k}_\mathbf{m}/N$ (m=1,2,. . . ,11), определяемые *исходными* выборками, равны значениям *биномиального* распределения вероятностей (стр.13) с 11-ю членами и значениями *исходных* вероятностей $p = q = 1/2$. Очевидно, что *независимо* от значений x_0 и x'_0, *каждая* из выборок {1} *аппроксимируется нормальным* законом, с *математическими* ожиданиями $M_0(X) = (x_\mathbf{N} - x_0)/2$, $M(\mathbf{X}') = (x'_\mathbf{N} - x'_0)/2$ и *дисперсиями* $D(\mathbf{X}) = D(\mathbf{X}')$.**

<u>1.</u> <u>Первый</u> <u>случай</u> ($x'_0 = x_0$). *Относительные* частоты в *объединенной* выборке *равны исходным* $n^\mathbf{o}_\mathbf{m}/N_\mathbf{o} = n^\mathbf{k}_\mathbf{m}/N$ и, следовательно, она аппроксимируется тем же нормальным законом с *математическим* ожиданием $M(\mathbf{X} + \mathbf{X}') = M(\mathbf{X}) = (x_\mathbf{N} - x_0)/2$ и *дисперсией* $D(\mathbf{X} + \mathbf{X}') = D(\mathbf{X}) = D(\mathbf{X}')$.

<u>2.</u> <u>Второй</u> <u>случай</u> ($x'_0 = x_0 + 6\Delta_\mathbf{m}$). В *объединенной* выборке *относительные* частоты равны отношению $n^\mathbf{o}_\mathbf{v}/N_\mathbf{o}$ (v=1,2,. . . ,17) значений {2} чисел n^o_v к удвоенному объему выборки $N_\mathbf{o} = 2N$. Т.е. имеем *симметричное* распределение вероятностей, с *минимумом* $n^\mathbf{o}_\mathbf{9}/N_\mathbf{o} = 90/2048$ на средине отрезке $x_\mathbf{N} - x_0 + 6\Delta_\mathbf{m}$,

[54] **Здесь – теории случайных величин, а в [19,4-25] – теории событий**

и *двумя максимумами* $n_6^\circ/N_o = n_{12}^\circ/N_o = 252/2048$ на отрезках Δ_6 и Δ_{12}. *Математическое* ожидание распределения равно $M(\mathbf{X} + \mathbf{X}') = [M(\mathbf{X}) + M(\mathbf{X}')]/2 = (x_\mathbf{N} - x_0 + 6\Delta_m)/2$. Легко проверить: *дисперсия* распределения не будет равна *сумме дисперсий исходных* распределений. Очевидно, что *об аппроксимации* значений {2} *нормальным* законом *говорить не приходиться.*

<u>3.</u> Полагая $x_0' = x_0 + w\cdot\Delta_\mathrm{w}$, получим множество последовательностей чисел, которые *симметричны.* При значениях $0 \le w \le 4$ они будут иметь *один максимум.* При увеличении значений $w > 4$, расстояние между *максимумами будет увеличиваться*, а значение *в минимуме – уменьшаться.* Область, в которой будут находиться значения, равна $x_\mathbf{N} - x_0 + w\cdot\Delta_\mathbf{m}$. В силу *симметрии, математическое* ожидание распределения будет находиться *на средине* отрезка и равно $M(\mathbf{X}+\mathbf{X}') = [M(\mathbf{X}) + M(\mathbf{X}')]/2 = (x_\mathbf{N} - x_0 + v\cdot\Delta_\mathrm{m})/2$. Соответственно *дисперсия не равна сумме* $D(\mathbf{X}+\mathbf{X}') \neq D(\mathbf{X}) + D(\mathbf{X}')$ дисперсий.

Почему такого сравнения не было проведено до сих пор? Мы не знаем этого, хотя во многих учебниках по теории вероятностей (**например [1; 6; 12; 13; 16]**) даются элементы математической статистики (**в том числе, статистическая оценка параметров распределения и проверка гипотез**).

Конечно же, *цель применения объединения* выборок в *математической статистике другая.* Но нас интересует не то, *при каких условиях выборки принадлежат одной совокупности*, а то, *как они объединяются.* Условия абсолютно не важны, ибо *суть от этого не зависит*:

> **{A.5} В любом случае *объединение* выборок проводится по *правилу суммы действительных* функций *действительных* аргументов (примеры 7-8, стр.29-31, п.п. 1.1-1.2 приложения I, стр.95).**

А что же нам дает понимание суммы случайных величин (**пример 9, стр.32**), *принятое в теории вероятностей*?

> **{A.6} *Сумма* двух *нормальных* («независимых») законов *не зависит от взаимного расположения* случайных величин: она *определяет нормальный* закон с *математическим ожиданием* и *дисперсией*, которые равны *сумме исходных* характеристик.**

Этот результат *полностью противоречит* результату, полученному при *объединении выборок*: вместо ожидаемого[55] «одногорбого верблюда», мы получили «двугорбого». *Уж очень неожиданно, не так ли*? Мы можем только повторить: *операция объединения выборок, безусловно, находится в полном соответствии с предыдущим анализом.*

Мы *сравнили теорию с экспериментами*, и, конечно же, нарушили обещание: **при анализе исходить *только с математической* точки зрения.** Наша «несдержанность оправдана» единственной причиной:

---

[55] **Если объединять 3, 4 и более выборок, то можем получить 3, 4 и более «горбов у верблюда». Подобные картинки рисуют, объясняя отличияе сложения вероятностей в классической и квантовой механике. Но «многогорбый верблюд» есть и в классике**

{A.7} ***Операции*** **«типа *объединения выборок*» в применяемой теории вероятностей *не существует.* Это, в совокупности с *принятым пониманием суммы случайных* величин, приводит во многих случаях, мягко говоря, к *не совсем правильным* результатам *не только в теории* вероятностей, но и при ее применении *в многочисленных* приложениях.**

Отметим, что показаны некоторые из противоречий[56], которые следуют из принятых определений случайной величины. Правильны ли наши рассуждения или нет – пусть Читатели судят сами. Теперь можно и поспорить, как с выводом **W.2**, так и с выводом **Q.I**. Единственная просьба: приводить реальные аргументы, если обнаружите, что где-то что-то так (**или просто неверно – никто «не застрахован» от ошибок**) в проведенном анализе. Автор готов и будет рад обсудить Ваши аргументы[57].

Не затрагивая существующую *исходную* систему, можно устранить *некоторые противоречия*, однако вразумительно объяснить проводимые *исправления* невозможно: возникает множество вопросов, на которые нет ответа. Попытка же создать *единую неформальную*[58] *математическую теорию событий* и *случайных величин* опираясь на существующую *исходную* систему – дело безнадежное: она просто заканчивается неудачей. Такие попытки предпринимались автором и неоднократно, пока окончательно не стало очевидно: **сначала *следует изменить именно исходную систему понятий* теории событий.**

А почему и как надо изменить исходные понятия теории событий очень подробно, понятно и более точно[59] (**по крайней мере, мы думаем, что это так**) изложено в работе [19].

---

[56]**Реально противоречий больше: ряд примеров, не рассмотренных здесь, дан в [10]. Можно привести еще примеры (в последующих частях число противоречий будет существенно возрастать), но очевидно, что суть уже не в их числе**

[57]**Высказывания типа «это чушь, ерунда какая-то» и т.п. автор не считает и не воспринимает как аргументы. Чаще всего их произносят на разных совещаниях, заседаниях, конференциях и т.д., видимо для того, чтобы показать «свои великие знания и сбить с толку» докладчика. Вот только когда попросишь такого «вещателя» взять мел и показать на доске, где конкретно допущена «чушь», в большинстве случаев «вещатель как-то сразу тушуется»: скорее всего просто не знает предмета, о котором идет речь**

[58]**Т.е. теорию, обеспечивающую плавный и строгий математический переход от событий к случайным величинам**

[59]**По сравнению с работой [10,16-33]**

2. Представление *испытания*[60] *в виде* случайной величины

Построение теории случайных величин будем проводить на *основе новой исходной* системы теории событий и естественно использовать понятия и термины, примененные при ее создании. Именно *новая исходная* система позволяет определить *строгую математическую связь* случайных величин с *элементарными* и *сложными* событиями.

Напомним *положения*, определяющие *идеализацию* случайных явлений, и *аксиомы*, *принятые* при разработке *новой теории* событий:

{А.8} При повторении *испытания основные условия* его проведения *не изменяются* [19,12]. {А.9} *Вероятности* событий вычисляются при *условии*, что *испытание* проводится *мысленно* (виртуально, но не реально) и только *один раз* [19,15]. {А.10} Если *изменение* условий приводит к *изменению* вероятностей событий – это *другое испытание*, если *испытание* повторяется – это тоже *другое испытание* [19,15].

<u>Аксиома I</u>. *Возможные исходы испытания равновероятны.* При *конечном числе* M *возможных исходов* полагаем: вероятность *возможного исхода равна* $1/M$ [19,28].

<u>Аксиома II.</u> Каждому *элементарному событию* «а» *опыта* ставится *в соответствие рациональное число* $0 < \mathbf{P}(\text{a}) < 1$, называемое его *математической вероятностью* [19,51].

Начнем с очень простого определения, которое допускает двоякую интерпретацию.

> **В.2.** *Случайная* величина есть *любая переменная* (**не обязательно численная**), «значения» которой «x»$=\mathbf{X}$ образуют множество *элементарных* событий **[5, п.18.3-1]**.

Т.е. как правило, – *действительная* (**численная**) переменная, но это необязательно – может быть и *недействительной* переменной. Вот только вопрос: – *что делать с величинами, когда они являются недействительными*? – из работы как-то не совсем понятно. Тем не менее, из определения следует, что множество *элементарных* событий любого *испытания* является *дискретной случайной* величиной.

***<u>Пример</u>* <u>12.</u> Бросание кубика с изображениями «нож», «ель» «5», «α», «дом», «кол» на гранях. По определению ‘В.2’ – это *случайная* величина. *Каждому «значению»* – изображению на гранях – *соответствует* вероятность $1/6$, т.е., вообще говоря, *задано* и *распределение* вероятностей.**

[60] **Под испытанием мы понимаем идеальную модель случайного явления**

Правда, как пользоваться такой случчайой вличиной как-то не очень понято.

Однако по определениям 'A, B, B.1' нет, ибо она – *недействительная* переменная.

Можно подумать, что от такой случайной величины «пользы ни на грош». Однако: **1) изображения на кубике появляются случайно, *независимо от того*, определены их вероятности или нет; 2) можно считать бросание кубика *испытанием*, а можно – случайной величиной.** Из определения **'B.2'** и примера 12 следует:

> **W.9.** ***Случайная величина является другим представлением испытания*** **(пока еще – «не обязательно численная»). Следовательно, *алгебра событий и вероятностные модели испытания остаются в силе и для случайной величины.***

> **W.10. Существующие определения случайной величины *противоречат*: во-первых, *экспериментам* – в них *появляются элементарные* события, а *не действительные* числа; во-вторых, полученному результату, ибо из определений 'B, B.1' (стр.9-10) следует, что *случайная* величина – есть *действительная* функция.**

2.1. Случайная величина – *функция элементарных* событий

Очевидно, чтобы устранить противоречия, отмеченные при анализе, необходимо учесть выводы **W.9**, **W.10**, следующие из определения **'B.2'** понятия случайной величины. При построении случайной величины мы исходим из замечательных рассуждений В. Феллера:

> **«В преподавании теории вероятностей часто стремятся возможно быстрее сводить вероятностные задачи к задачам математического анализа, забывая при этом специфические особенности самой этой теории. Такое подход основан на негодном определении случайной величины, которое обычно вводится в самом начале. В полную противоположность этому настоящая книга строится на понятии пространства элементарных событий. Вводить случайные величины без этого понятия – значит демонстрировать искусство вводить в заблуждение» [6,14].**

Мы согласны с этим высказыванием, но с одним замечанием:

> **Понятия *элементарного и сложного* событий в смысле, *предписываемом аксиоматической* теорией, вводят в еще большее заблуждение, ибо создают только *видимость связи случайных* величин с *теорией* событий. Окончательно это будет показано при подведении итогов исследований (стр.82).**

Основное отличие от существующей теории вероятностей: при построении случайных величин мы будем исходить из *уточненного понимания элементарного* события (**определение 1 [19,28]**).

{А.11} Совокупность *возможных неотличимых* друг от друга *исходов испытания* называется *элементарным* событием.

Определение придало понятию *элементарного* события *вполне конкретный* смысл. Из него следует, что в примере 1 (**стр.12**) есть только <u>*два*</u> <u>*элементарных*</u> события, а не $M = m1 + m2$ *элементарных* событий следующих из *аксиоматической* (**или частных случаев *классической***) теории. Это «первая правка» теории вероятностей – замена неопределенных понятий элементарных событий аксиоматической и частных случаев классической теории.

Это понимание *элементарного* события определило *деление* (**определение 2 [19,29]**) *испытания на классы*:

Простой *опыт – испытание* в котором *появляется только одно элементарное* событие и *сложный* опыт – *испытание* в котором *появляется два и более элементарных* события.

В соответствии с *классами испытаний* и будем рассматривать их *представление в виде* случайных величин.

3. Представление (простого) *опыта в виде* случайной величины

Далее при применении геометрической интерпретации используем рисунки из работы [19].

Простой *опыт* разделяется на два вида (**определение 3 [19,29]**): *одномерный опыт*, каждое *элементарное* событие которого имеет *одну метку*; *многомерный опыт*, каждое *элементарное* событие которого имеет *две и более метки. Виды опыта* определяют *одномерную* или *многомерную* случайную величину соответственно.

3.1 Случайная *одномерная* величина

Рассмотрим *одномерный опыт* с множеством *элементарных* событий $\mathbf{a_j}$ **(j=1,2,...,n)**, который представим [19,29,42] в виде *одномерной* таблицы. *Одномерность* при представлении *опыта*в виде таблицы определяет, в принципе, только *принадлежность* точек, *соответствующих элементарным* событиям, *одной линии*, *но совсем не обязательно прямой*.

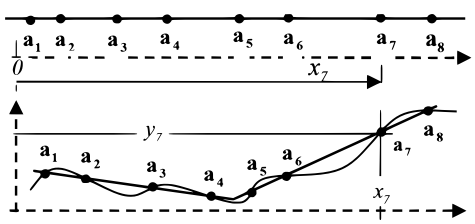

Рис. 3.

***Пример* 13. Пусть N=8. Представим его в виде точек (рис.3), расположенных на прямой (ломанной, кривой, в том числе – замкнутой) линии на плоскости или в пространстве[61]. Так как точки не отличаются друг от друга, то множество имеет только один элемент [24,6-7,10]. Для отличия точек, обозначим их последовательностью чисел (номеров) j=1,2,...,8.**

В теории множеств действительные числа – это элементы множества, такие же, как, например, события. Соответствие между элементами множеств записывается в виде $\mathbf{a_j} \to j$ и обратное соответствие $j \to \mathbf{a_j}$.

Положим, что соответствие *однозначно*, т.е. *каждому элементарному* событию $\mathbf{a_j}$ *соответствует одна* точка с номером j. *Взаимная однозначность* возможна при условии: *однозначно* и *обратное соответствие* $j \to \mathbf{a_j}$. В этом случае *соответствие* называют *отображением.*

Введем систему координат (штриховые стрелки на рис.3). Точки на координатах соответствуют точкам на линиях. Теперь точку можно характеризовать не каким-то безличным элементом из теории множеств, а действительными числами, которые определяют значения x_j (или пары (x_j, y_k) при задании на плоской кривой) координат. Они не только позволяют *отличать одну точку от другой*, но и характеризуют *положение* точки *на числовой оси* (или на плоскости). Очень *полезно*: мы имеем гораздо больше информации о *точке*, но *сама точка* как была, так и осталась *неопределяемым объектом* геометрии.

---

[61]**О случайных величинах, определенных на кривых линиях, а также поверхностях, необоходим «долгий разговор» с множеством конкретных примеров, поэтому мы здесь ими заниматься не будем: иожет быть «в другой раз и в другом месте»**

Далее рассмотрим представление *только на прямой* – координате X. Установим *однозначное соответствие* между *номерами элементарных* событий *номерами точек и их координатами* $\mathrm{a_j} \to j \to x_j$. Полагаем также *однозначность обратного соответствия* $x_j \to j \to \mathrm{a_j}$. Нам же требуется *не только соответствие* между *элементами* множеств, но и *равенства* между какими-то *элементами*. Однако запись, например, «*еж=5,5*» (что равносильно «равенству 2=1») *не имеет никакого смысла* (комментарий I.4, стр.11), ни с точки зрения *действительных чисел*, ни множеств. *Равенство* может быть только между *одинаковыми элементами*: 5,5=5,5; «*еж*»=»*еж*»[62] *двух* множеств.

Координаты точек *соответствуют не только элементарным* событиям $\mathrm{a_j}$, но и *их вероятностям*, которые *неразрывно связаны* с *элементарными* событиями. Вероятность – *действительное число*, а координата, с учетом *соответствия* $x_j \to \mathbf{j} \to \mathrm{a_j}$, определяет *положение* вероятности $\mathbf{P}(\mathrm{a_j})$ на *числовой* оси, то *справедливы равенства* $p(x_j) = \mathbf{P}(\mathrm{a_j})$ (j=1,2,...,8).

На основе анализа определены две функции:

1. На множестве *элементарных* событий $\mathrm{a_j}$ (j=1,2,...,n), которые *соответствуют точкам*, определяемых координатами x_j – *недействительная* функция $\Phi(\mathrm{a_j} \to \mathrm{j})$.

2. На множестве *действительных* чисел – *действительная* функция $p(x_j)$ *действительного* аргумента x, значения которой (в силу *однозначности соответствия* $x_j \to \mathrm{a_j}$) равны вероятностям *элементарных* событий $p(x_j) = \mathbf{P}(\mathrm{a_j})$ (j=1,2,...,8).

Вероятность $p(x_j)$ не означает, что число x_j будет появляться в *эксперименте с данной* вероятностью. *Действительные* числа x_j, как и *метки элементарных* событий, *не зависят* от вероятности и *не изменяются в эксперименте*. Они *связаны* только с тем, какие из них мы поставим *в соответствие меткам элементарных* событий.

Т.е. *они не являются случайными*: – это просто *действительный* аргумент *действительной* функции.

Недействительная функция $\mathbf{\Phi(a_j \to j)}$ **(j=1,2,...,n)** *недействительного* аргумента $\mathbf{a_j}$ определяет *случайную одномерную* величину, а *действительная* функция $p(x_j)$ *действительного* аргумента x – ее *действительную* характеристику. Из проведенного анализа следует:

> **Q.II. Введены два *основных неразрывно связанных* понятия теории: случайная величина – *недействительная* функция $\Phi(\mathrm{a_j} \to \mathrm{j})$ *недействительного* аргумента и ее характеристика – *действительная* функция $p(x_j)$ *действительного* аргумента.**

Очевидно, что мы имеем *аналогию* с *основными* понятиями *теории* событий: *элементарным* событием и его *действительной* характеристи-

---

[62] **Равенство «еж»=«ежу» тоже неверно: «ежу» – это уже другая группа, составленная из 3-х элементов множества букв русского алфавита**

кой – вероятностью. Однако:

> **Q.III. *Отличие* случайной величины от *опыта* состоит в том, что *элементарные* события, кроме *вероятности*, характеризуются *действительными* числами, которые *определяют их положение* в пространстве. Это определяет *качественно новое* понимание *статистических закономерностей*.**

Замечание. **Запись случайной величины в виде $\Phi(\mathrm{a_j} \to \mathrm{j} \to x_j)$ означает, что элементарные события соответствуют именно данному множеству действительных чисел x_j, которые определяют их положение в пространстве. Но не более.**

Таким образом, *понятие случайной* веливины – *недействительной* функции *недействительного* аргумента – *отделено от неразрывно связанного* с ней *понятия вероятностной* функции – *действительной* функции *действительного* аргумента. Пожалуй, *основное*, что реализовано в *теории* случайных величин. В последующих построениях «работает» *теория* событий, *основанная на новой* исходной системе.

> **{A.12} Недостаток *представления опыта* в этом виде: большая *неопределенность* понятия случайной величины. Это связано с тем, что *элементарным* событиям ставятся точки, которые *произвольно расположены на некотором* отрезке (комментарий I.2, стр.10).**

Очевидно, что это приводит к *неопределенности вероятностной* функции и других характеристик случайной величины.

3.1.1. Определение случайной *одномерной* величины; *вероятностная* функция и *закон* распределения

При построении будем исходить из *2-го основного понятия теории* событий – *вероятности* $\mathbf{P}(\mathbf{a_j})$ появления *элементарного* события.

> **{A.13} *Единственной известной* функцией, которая *однозначно отображает элементарное* событие $\mathrm{a_j}$ на *ограниченное* $R(0 \le r < 1)$ множество *рациональных* чисел, является его *вероятность* $\mathbf{P}(\mathrm{a_j})$ (вывод W.9 [19,30]).**

Замечание. **Тем самым, мы отказываемся от «*данной*», но *неопределенной* функции, которая «задает *неизвестное правило*» постановки *в соответствие действительных* чисел *элементарным* событиям. «Вторая правка» теории вероятностей, но относящаяся *непосредственно* к случайным величинам.**

Пусть r_j – *элемент* множества R $(0 \le r \le 1)$. Положим $r_j \to \mathbf{a_j}$: учитывая *равенство* $p(r_j) = \mathbf{P}(\mathbf{a_j})$, уточним понятия. Положение **{A.13}** позволяет уменьшить *неопределенность*, отмеченную в положении **{A.12}**.

В теории, хотя об этом практически не говорится, *опыт* также представляется как случайная величина. *Элементарным* событиям $\mathrm{a_j}$ ставятся

в соответствие («как правило») ***целые*** числа j=1,2,...,n на множестве ***действительных*** чисел. Т.е. применяется ***равномерное*** расположение точек на оси X (в общем случае расположение точек может быть неравномерным).

Разделим отрезок $0 \le r \le 1$ на N равных частей $\Delta_1 = 1/N$ и определим на множестве точек j=0,1,...,N функцию:

$$p(r_j) = \mathbf{P}(\mathbf{a_j}), \quad p(r_0) = 0, \quad r_0 = 0,\ r_j = \Delta_1 \cdot j \quad (\mathbf{j=1,2,\dots,N}). \qquad (1)$$

Наряду с функцией (1), рассмотрим функцию

$$P(r_n) = P(r_j \le r_n) = \sum_{k=1}^{n} p(r_k) \quad (\mathbf{n=0,1,\dots,N}), \quad P(r_N) = \sum_{k=1}^{N} p(r_k) = 1. \qquad (2)$$

Функцию (2) иногда называют кумулятивной вероятностью [12,75].

Свойства функций. 1. $p(r_j) = P(r_j) - P(r_{j-1})$. **2. Функция (1) определяет *один масштаб* для *всех элементарных* событий, т.е. *равномерное расположение* вероятностей на отрезке.**

Единственное существенное отличие от принятого представления:

> **{A.14} *Область определения* функций (1) и (2) *не зависит* от числа N *элементарных* событий: – при *увеличении* числа N точки, соответствующие *элементарным* событиям сгущаются.**

Такой способ *представления опыта* как случайной величины уменьшает *неопределенность*, но дает *не совсем точное* представление *опыта*: *равномерное*[63] распределение точек, соответствующих *элементарным* событиям определяет, по сути, их *равновероятность*. Это согласуется с *принятым представлением* в теории, но не совсем соответствует реальности [19,29]: *равновероятными* являются только *возможные исходы опыта* (**аксиома I стр.40**). Поэтому рассмотрим *второй способ* представления *опыта* в виде случайной величины.

Разделим отрезок $0 \le r \le 1$ на M равных частей $\Delta_2 = 1/M$ (где $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$ – число возможных исходов опыта, m_j – число возможных исходов элементарного события $\mathbf{a_j}$) и определим в точках $j = \sum_{k=1}^{j} m_k$ функцию

$$p(r_j) = \mathbf{P}(\mathbf{a_j}), \quad p(r_0) = 0, \quad r_0 = 0, \quad r_j = \Delta_2 \cdot \sum_{k=1}^{j} m_k \quad (\mathbf{j=1,2,\dots,N}). \qquad (1.a)$$

Функция (2), определенная выше, имеет тот же вид. «Внешне» (запись) функции (1.a) и (1) мало отличаются: значениями Δ_2, Δ_1 и координат r_j. Однако оно приводит к существенному отличию их свойств.

1. Из построения функции (1.a) следуют равенства:

$$r_{j+1} = r_j + \mathbf{P}(\mathbf{a_{j+1}}) \quad \{2.a\}, \qquad p(r_j) = r_{j+1} - r_j = P(r_{j+1}) - P(r_j). \quad \{2.b\}.$$

2. Из равенства {2.b} следует *отношение* $\{P(r_{j+1}) - P(r_j)\}/\{r_{j+1} - r_j\} = 1$, которое является *дискретным аналогом производной*: оно *сохраняется и при*

---

[63] **Напомним, что слово «равномерный» означает [30,638] одинаковый, постоянный в каком-то отношении. Т.е. неоднозначно характеризует что-либо, например, шар и парус, белого цвета, в отличие от слова «равновероятный», которое трактуется однозначно**

предельном переходе[64]. **3. Функция (1.а)** (**в отличие от функции (1)**) **определяет *свой масштаб* для *каждого элементарного* события, *пропорциональный* его вероятности** (**его числу возможных исходов**), **т.е** ***<u>неравномерное</u> расположение*** **вероятностей отрезке. Она дает *точное представление опыта* в виде случайной величины.** **4. В этом случае** (**в отличие от 1-го способа**) ***значения*** $P(r_n)$ **функции (2), а также *суммы*** $\sum_{w=1}^{n}(w\,/\,M)$ **(n=0,1,...,M)** ***возможных исходов опыта*** **лежат *на прямой* линии** $p = r$**.**

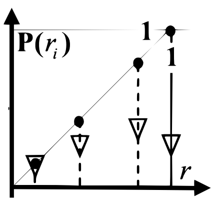

Рис. 4

Для опыта с 4-мя *элементарными* событиями (рис.4) значения функции (2) изображены точками, а значения функции (1.а) – треугольниками.

W.11. При *2-м способе* представления *опыта* как случайной величины функция (2) *не зависит* от вида функции (1.а) и определяется *прямой* линией $p = r$**.**

<u>Замечание.</u> **Если *элементарные* события *<u>равновероятны</u>*, т.е.** $m_j = m = \text{const}$ **(m>1; j=1,2,...,N), то он является дискретным аналогом *<u>равновероятного</u> непрерывного* закона распределения на отрезке** $0 \le r \le 1$**. В существующей теории его называют *<u>равномерным</u>*, однако мы, как и [19,49-50], называем *<u>равновероятным</u>*. Почему изменено его название – обсудим при рассмотрении преобразования распределений случайных величин (часть IV работы). А до пояснения, слова «*<u>равновероятный</u>*» и «*<u>равномерный</u>*» будем выделять подчеркиванием.**

Варианты представления *равноправны* в том смысле, что оба «имеют место быть»: вопрос только в их применении.

<u>Замечания</u> **<u>13</u>. <u>1.</u> Функции (1) и (1.а) *связаны* между собой нелинейным преобразованием: об этом при рассмотрении преобразования распределений случайных величин** (**часть IV исследований**). **<u>2.</u> *Первый способ* построения *вероятностной* функции определяет *<u>равномерный</u>* масштаб на оси** R**: он *отлично* подходит для практического применения** (**вычисления вероятностей событий, числовых характеристик случайных величин и т.п.**). **А второй - *<u>неравномерный</u>* масштаб на *оси*** R**: он *удобнее* при некоторых теоретических исследованиях. По факту, он нам понадобился для того, чтобы *наглядно* показать *сходимость к <u>равновероятному</u> непрерывному* распределению при *неограниченном увеличении* числа *объединяемых опытов.***

Введем *первые исходные* понятия *теории* случайных величин.

<u>Определение</u> **<u>1</u>**. *Недействительную* функцию $\mathbf{\Phi}(\mathbf{a_j} \to r_j)$ *недействительного* аргумента $\mathbf{a_j}$, *определенную* на множестве точек, *отображающих элементарные* события $\mathbf{a_j}$ **(j=1,2,...,N)** *одномерного опыта* на некоторую (**прямую, ломаную, кривую, пример 13**) линию, назовем *дискретной случайной* величиной.

---

[64] **Определив значение** $p(r_{j+1}) = P(r_{j+1}) - P(r_j)$, **получим** $\{p(r_{j+1} - p(r_j)\}/\Delta_1 = \{P(r_{j+1} - 2P(r_j + P(r_{j-1}\}/\Delta_1$ **дискретный аналог производной при 1-ом способе представления опыта в виде случайной величины. Но свойств, присущих 2-му способу он не имеет**

Замечание. **Отметим, что оно вполне созвучно с определением: «Функция, определенная на множестве элементарных событий, называется случайной величиной» [6,226]. Оно дано раньше определения 'В.1' (стр.10) с «правилом». Напомним, что для элементарных событий опыта правило суммы является единственным [19,36].**

Определение **2**. *Действительную* функцию $p(r) = p(r = r_j)$ *действительного* аргумента r, *определяемую* формулами **(1)** или **(1.a)**, назовем *вероятностной* функцией, а функцию $P(r) = P(0 \leq r_j \leq r_n)$, определяемую формулой **(2)** – *законом* распределения случайной *дискретной одномерной* величины на *ограниченном* множестве *действительных* чисел R $(0 \leq r \leq 1)$.

Замечание. **Названия вероятностная функция (позаимствовано из [8,36]) и закон распределения приняты только для того, чтобы было меньше «путаницы» между этими функциями. В существующей теории функцию $P(x)$ задают на множестве X $(-\infty < x < \infty)$ действительных чисел, обозначают $F(x)$, называют функцией распределения [1,117] и отличают от закона распределения. В нашей теории такой необходимости нет.**

{A.15} Здесь и далее будем считать, что *основными* являются *вероятностные* функции и *законы* распределения случайных величин, определенные на множествах *действительных* чисел, *ограниченных отрезками* $0 \leq r \leq 1$.

При рассмотрении преобразования законов распределения (часть IV работы) положение будет изменено: сейчас для этого нет оснований.

Из выражений **(1-2)** следует еще одно важное положение:

{A.16.1} *Закон* распределения является *монотонно возрастающей* функцией и изменяется от нуля до единицы, а *вероятностная* функция – *положительной*.

Замечания **14.** **1.** ***Закон*** **распределения – *монотонно возрастающая* функция в строгом смысле [21,270].** **2.** **По *одномерной* случайной величине, как функции *элементарных* событий, определяются *суммы* произвольных *элементарных* событий, т.е. *сложные* события A, B, C, ..., из которых образуются более *сложные* события [19,37-38]. Их вероятности вычисляются по значениям *вероятностной* функции, с учетом *совместимости* событий (определение 7 [19,36]). Т.е. *математические* модели соответствуют моделям *одномерного опыта*.**

В определении 'В' (стр.10) содержится *сумма элементарных* событий (в аксиоматической трактовке, комментарий I.4, стр.11), но только как *сумма недействительных* аргументов функции $\xi(\omega)$. Сами же *суммы элементарных* событий появляются только в определении *вероятностной* функции [9,36].

Таким образом, определены *два способа* построения случайных величин, их *вероятностных* функций и *законов* распределения. Однако. *Вероятностные* функции **(1)** и **(1.a)** зависят от *порядка расположения* вероятностей. Расстановка вероятностей *в произвольном порядке* приводит к *неоднозначности* функций и *числовых* характеристик случайной величины, а в случае использования функции в виде **(1)** – и к *неоднозначности закона* распределения. Во избежание «метаморфоз» при *изменении порядка*, введем *дополнительные* правила:

> **1**. Если *порядок* определяется *постановкой* (*условиями*) задачи, то функции *однозначны*. **2.** В противном случае для *однозначности* функций можно *элементарным* событиям *присвоить* номера (**т.е. изменить метки, которые ставятся произвольно [19,29]**) *в порядке возрастания* вероятностей. Вообще говоря, это вопрос *договоренности*: *порядок*, по крайней мере, *должен быть указан.*
>
> **Второе правило не применимо к n–мерным величинам (замечание 17.2, стр.53).**

Физические измерения ассоциируются с множеством X *действительных* чисел, определенных *на любом* конечном отрезке ($x_H \leq x \leq x_K$).

<u>*Замечание*</u> <u>15.</u> В результате проведения N (*оно всегда <u>конечно</u>*!) *физических измерений* определяются значения параметра X на <u>*конечном*</u> отрезке $x_H = x_1 < x_2 < ... < x_N = x_K$, которые соответствуют N *элементарным* событиям $x_j \to \mathbf{a_j}$ (с нулевой вероятностью), появившимся в *экспериментах.*

Отрезок $x_H \leq x \leq x_K$ делится на равные части $\Delta x_m = (x_K - x_H)/M$ ($m = 1, 2, \ldots, M$; $M \ll N$) и вычисляются *относительные частоты* $w_m = n_m/N$ (n_m – число элементарных событий $\mathbf{a_j}$, принадлежащих участку Δx_m) появления *сложных* событий $\mathbf{A_m}$. Т.е. *исходы* (результаты) *экспериментов* считаются, (но «по умолчанию») <u>*равновероятными*</u>: это только <u>*подтверждает*</u> <u>*правильность*</u> <u>*принятой*</u> <u>*аксиомы*</u> I (стр.40). *Порядок расположения* вероятностей определяется *результатами экспериментов.*

Полученное распределение *относительных частот* называется *эмпирической дискретной вероятностной* функцией. *Эмпирическая вероятностная* функция *всегда ограничена* отрезком $x_H \leq x \leq x_K$. Отметим, что ее можно преобразовать в *вероятностную* функцию на *ограниченном* множестве R ($0 \leq r \leq 1$) *действительных* чисел (замечание 16, стр.50).

Отсюда следует *третье дополнительное правило*:

> **3.** При физических измерениях *порядок вероятностей* событий определяется *результатами экспериментов* (**в отличие от событий опыта, организованного искусственно**): *изменение порядка недопустимо.*
>
> **При определении вероятностной функции по результатам экспериментов оно «незыблемо». Вопросы возникают, когда вероятностная функция определяется теоретически, ибо определить ее экспериментально невозможно.**

С применением функции $x = a \cdot r + b$ (**где a, b - действительные числа, связанные с размерностью параметра X**) *вероятностная* функция **(1)** (**или (1.а)**) и *закон* распределения **(2)** случайной величины $\mathbf{\Phi}(\mathbf{a_j} \to r_j)$ *преобразуются* (**часть IV работы**) в *вероятностную* функцию и *закон* распределения величины $\mathbf{\Phi}(\mathbf{a_j} \to x_j)$. В результате преобразования получим:

$p(x_j) = p\{r_j = (x_j - b)\,/\,a\}$, **{a}** $P(x_m) = P\{r_m = (x_m - b)\,/\,a\}$ **{b}.** **{1}**

Будем называть их вероятностной функцией и законом распределения на множестве рациональных чисел $X \quad (x_H \le x \le x_K)$.

***Замечания* 16. 1. *Линейная формула преобразования* $x = a \cdot r + b$ определяет *взаимно однозначное соответствие* между случайными величинами $\Phi(\mathrm{a_j} \to r_j)$ и $\Phi(\mathrm{a_j} \to x_j)$, и их *действительными* характеристиками. 2. На отрезке $x_H \le x \le x_K$ можно определить некоторую *нелинейную однозначную конечную* функцию (формулу преобразования) $y(x) = f\{x = a \cdot r + b\}$. Тогда в результате *преобразования* вместо функции $P(x)$ получим функцию $P[f(x)]$, *область определения* которой тоже будет *ограниченной. Преобразования законов* распределения (вероятностных функций) случайных величин изложены в [10,49-63]. Более подробно некоторые моменты будут освещены при рассмотрении преобразования распределений случайных величин в части IV работы.**

Очевидно, что в обоих случаях *изменится вероятностная* функция, ее *область определения* и *закон* распределения. При применении *2-го способа представления опыта* как случайной величины *изменится угол* наклона *прямой линии*, которой *принадлежат* значения $P(x_n)$ *закона* распределения.

Из проведенного анализа следует:

W.12. Случайная величина $\Phi(\mathrm{a_j})$ является функцией множества *элементарных* событий (простого) *опыта* (другим его представлением), т.е. *недействительной* функцией *недействительной* переменной.

W.13. В отличие от случайной величины $\Phi(\mathrm{a_j})$, *вероятностная* функция и *закон* распределения являются *действительными* функциями *действительного* аргумента.

W.14. При *2-м способе построения закон* распределения (2) случайной величины *не зависит* от вида *вероятностной* функции (1.a) и является *дискретным* аналогом *равновероятного* *непрерывного* распределения на отрезке ($0 \le r \le 1$).

W.15. *Вероятностная* функция и *закон* распределения случайной величины $\Phi(\mathrm{a_j})$ *связаны* между собой и *однозначно связывают* вероятность *элементарного* события с *действительным* числом. *Вероятностная* функция является *единственной действительной* характеристикой случайной величины $\Phi(\mathrm{a_j})$ (как для события – вероятность).

W.16. *Математические* модели *одномерной* случайной величины $\Phi(\mathrm{a_j})$ *строго следуют из математических* моделей *одномерного опыта* (т.е. каждое элементарное событие которого имеет одну метку, определение 3 [19,29]).

Сейчас, как нам кажется, можно дать ответы почти на все вопросы, которые заданы в приложении **V** [19,61]. Остались вопросы, касающиеся математических ожиданий: об этом при анализе числовых характеристик распределений (**часть V работы**).

Переход к *непрерывным одномерным* случайным величинам возможен при *неограниченном* увеличении числа N *опытов* (**т.е. предельный переход при значении** $N \to \infty$) при *объединении опытов*. По существу, этот подход[65] уже был применен, чтобы показать (**приложение II [19,48]**), что *классический* подход определяет образование *испытаний с бесконечным несчетным* множеством *элементарных* событий. *Вероятностные* функции и *законы* распределения[66] *непрерывной* случайной величины имеют вид:

$$p(r) = {dP(r)}/{dr}, \ \mathbf{\{a\}} \quad P(r_{\mathbf{dan}}) = \mathbf{P}(0 \le r < r_{\mathbf{dan}}) = \int_0^{r_{dan}} p(r)dr; \ \mathbf{\{b\}} \qquad \mathbf{\{2\}}$$

$$p(x) = {dP(x)}/{dx}, \ \mathbf{\{a\}} \quad P(x_{dan}) = \mathbf{P}(x_H \le x < x_{\mathbf{dan}}) = \int_0^{x_{\mathbf{dan}}} p(x)dx. \ \mathbf{\{b\}} \quad \mathbf{\{3\}}$$

Функции $p(r)$ или $p(x)$ называют *плотностью* распределения случайной величины на множестве *действительных* чисел ($0 \le r \le 1$) или ($x_{\mathbf{H}} \le x \le x_{\mathbf{K}}$) соответственно (функция $p(r)$ названа по аналогии с функций $p(x)$). В отличие от *вероятностной* функции *дискретной* величины, *плотность* распределения *не определяет* вероятностей событий: она является *производной* от *закона* распределения и характеризует «*скорость* роста» вероятностей при *увеличении* аргумента r (или x). Определение вероятностей событий при *непрерывной* случайной величине – «привилегия» только *закона* распределения.

Рассмотрим вопрос: *что же определяется по закону распределения* (**или, учитывая отношения {b}, по вероятностной функции**) *случайной величины*?

Ответы, которые можно найти в литературе: вероятность того, что случайная величина *примет значение меньшее чем* $x_{\mathbf{dan}}$; вероятность *нахождения* случайной величины в *интервале* $x_1 \le x < x_2$ ($x_{\mathbf{H}} \le x_1, x_2 < x_{\mathbf{K}}$); вероятность *выполнения неравенства* $x_1 \le x < x_2$. Иногда говорят о событиях, но при этом речь идет о *свойствах* функции (законе – в нашей терминологии) распределения.

Все это «имеет место быть» однако *точный* ответ дает *теория* событий, *основанная на новой* исходной системе, из которой следует: *сложные* события *опыта* являются *виртуальными* (математическими конструкциями) *не имеют* своей *метки* и *никогда не* появляются в *эксперименте* (вывод W.18 [19,37]). *Признак* появления *любого сложного* события – появление *метки одного из элементарных* событий *опыта*, из которых *состоит данное сложное* событие.

Таким образом, из *теории* событий, *основанной на новой* исходной системе, *определений* случайной одномерной величины, ее *вероятностной* функции и *закона* распределения следует:

---

[65] **Для случайных величин он рассмотрен в [10,115-119], но к сожалению есть неточности (замечания 1-2 [19,50])**

[66] **Закон распределения дискретной и непрерывной случайной величины (замечание 14.1, стр.48) – всегда строго монотонно возрастающие функции [21,115-279]**

W.17. По *закону* распределения $\mathrm{P}\{x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{dan}}\}$ *одномерной* случайной величины определяется вероятность события, *заключающегося* в том, что появится *только одно элементарное* событие из множества *элементарных* событий $\mathrm{a_j}$ *опыта*, *принадлежащие интервалу* $x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{dan}} < x_{\mathrm{K}}$.

Замечания. **1. Вывод подчеркивает правильную трактовку закона распределения: о ее необходимости будет сказано ниже. 2. Однако это вовсе не означает, что интервал не определяет сложного события. Оно как раз и заключается в появлении одного из элементарных событий, которые входят в событие (вывод W.18 [19,37]), определяемое итервалом $x_{\mathrm{H}} \le x_1 \le x < x_{\mathrm{dan}} < x_{\mathrm{K}}$. Т.е. интервал является произвольным и ограничен только областью определения распределения. 3. Вывод справедлив и для закона распределения непрерывной случайной величины (появляются элементарные события с нулевыми вероятностями).**

Вывод важен по следующим причинам:

I. Он подчеркивает, что *основой построения теории* случайных величин являются *элементарные* события *испытания.*

II. Именно выяснение того, в чем состоит событие, *вероятность* которого вычисляется, определяет *класс* (и вид) случайной величины, *необходимый* для решения задачи.

III. При решении задач естествознания, техники, экономики и т.п. *с применением вероятностных* методов, их *рассмотрение* с позиции теории событий является *важной составной частью анализа.*

Из формул **(2)** и **{1.b-3.b}** следует еще один важный вывод:

W.18. *Область определения* ($0 \le r \le 1$) *закона* распределения $\mathrm{P}\{0 \le r < r_{\mathrm{dan}}\}$ *ограничена.* Так как *законы* распределения $\mathrm{P}\{0 \le r < r_{dan}\}$ и $\mathrm{P}\{x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{dan}}\}$ *связаны однозначной зависимостью*, то область *определения* ($x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{K}}$) *закона* распределения $\mathrm{P}\{x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{dan}}\}$ также *ограничена.*

Можно не ограничивать область определения *вероятностоной* функции, однако выбор функции с *неограниченными границами должен* быть обоснован в каждом конкретном случае. Во-первых, они *не следуют из теории.* Во-вторых, случайные явления, которые мы изучаем, имеют *естественные границы.* В-третьих, *экспериментальные результаты всегда находятся в ограниченной области.*

{A.16.2} Учитывая замечание 15 (стр.49) и вывод W.18 здесь и далее (и в последующих статьях) будем считать *область определения закона* распределения (вероятностной функции) *ограниченной* отрезком ($0 \le r \le 1$) или ($x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{K}}$) *действительных* чисел.

На основе *представления опыта*, *элементарные* события которого имеют *одну метку*, *в виде* случайной величины следует:

Q.IV. Определена *одномерная* случайная величина как *недействительная* функция $\Phi(\mathbf{a_j})$ *недействительного* аргумента – *элементарных* событий $\mathbf{a_j}$ (j=1,2,...,N) *одномерного опыта.*

Q.V. С применением *отображения* множества *элементарных* событий $\mathbf{a_j}$ на множество точек, определяемых координатами x_j, введены *одномерные действительные* функции *действительного* аргумента *неразрывно связанные* с случайной величиной: *вероятностная* функция $p(x_j)$ и *закон* распределения $\mathrm{P}\{x_{\mathrm{H}} \le x < x_{\mathrm{dan}}\}$ – *действительные* характеристики случайной величины.

3.2. Случайная *двумерная* (многомерная) величина

Рассмотрим *двумерный опыт* (**определения 3, 4 [19,29]**) с множеством *элементарных* событий $\mathbf{a_{j,k}}$ **(j=1,2,...,V), (k=1,2,...,W)** *с двумя* (**и более**) *метками.* Он представляется в виде *двумерной* таблицы [19,29,43]. На множестве *элементарных* событий *двумерного* (**как и одномерного**) *опыта* определяются только их *суммы* (**т.е. сложные события [19,36-37]**), При *геометрическом* представлении *двухмерность* таблицы, в принципе, определяет только *принадлежность* точек, которым соответствуют *элементарные* события, *одной поверхности, но совсем не обязательно плоской.*

<u>*Замечания*</u> <u>17</u>. <u>1.</u> События $\mathrm{A_j} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{W}} \mathrm{a_{j,k}}$ определяются *суммой всех элементарных* событий *столбца* таблицы с *номером* $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{V}$, а события $\mathrm{B_k} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{V}} \mathrm{a_{j,k}}$ – *строки с номером* $k = 1, 2, \ldots, W$ таблицы. *Сумма* всех событий $\mathrm{A_j}$ и $\mathrm{B_k}$ равна $\sum_{j=1}^{V} \mathrm{A_j} = \sum_{k=1}^{W} \mathrm{B_k} = \sum_{j=1}^{V}\sum_{k=1}^{W} \mathrm{a_{j,k}}$. <u>2.</u> Числа *возможных исходов* событий $\mathrm{A_j}$ или $\mathrm{B_k}$ равны $m_j = \sum_{k=1}^{W} m_{j,k}$ {1*} и $m_k = \sum_{j=1}^{V} m_{j,k}$ {1} соответственно, а число *возможных исходов опыта* $M = \sum_{j=1}^{V} m_j = \sum_{k=1}^{W} m_k = \sum_{j=1}^{V}\sum_{k=1}^{W} m_{j,k}$ {1}. Формулы в п.п.1-2 соответствуют полностью заполненной таблице двумерого опыта. 3. Отметим: можно *произвольно изменять* номера *строк* или *столбцов* таблицы: при этом *изменяются номера всех элементарных* событий *строки* или *столбца* соответственно. *Присваивать* другие номера *отдельным элементарным* событиям (например, событию $a_{4,5}$ (рис.5 стр.54) номера $a_{4,1}$ или $a_{3,8}$) *не следует*; они определяют его *принадлежность именно к данной строке и к данному столбцу* таблицы.**

Будем исходить из рассуждений, которые изложены при представлении *одномерного опыта* как случайной величины.

<u>*Пример*</u> <u>14</u>. *Двумерная* таблица множества *элементарных* событий *двумерного опыта необязательно* полностью заполнена (примеры 7-8, карты и домино [19,20]). Его можно представить в виде пар (j, k) точек на плоскости[67] (рис.5; k=1,2,...,W; j=k,k+1,...,V-k+1; W=4, V=8). Номера *меток неотделимы* от *элементарного* события и друг от друга, *всегда* появляют-

[67]Можно на пересекающихся плоскостях или некоторой кривой поверхности (в том числе – замкнутой, например, сфера или эллипсоид в трехмерном пространстве)

ся *вместе* и *не зависят* друг от друга. *Элементарному* событию следует поставить *в соответствие* точки на плоскости, характеризуемые *парой* (j, k) *действительных* чисел, *соответствующих номерам меток элементарного* события $\mathbf{a_{j,k}} \to (\mathbf{j}, \mathbf{k})$.

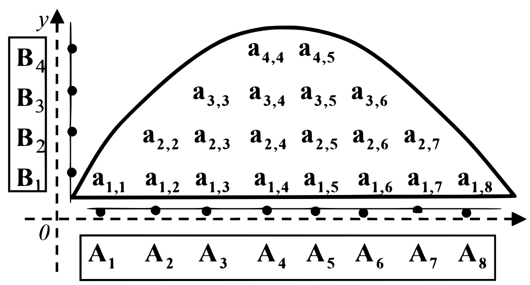

Рис. 5

На рис.5 *элементарные* события, как *исходные* (первичные элементы), выделены фигурой с утолщенными линиями, а *сложные* события (суммы элементарных событий, принадлежащих столбцу или строке), как *вторичные элементы* – прямоугольниками с тонкими линиями. Вместо точек (определяемых пересечением прямых $x = y_k$ $(k = 1, 2, ..., 4)$ и $y = x_j$ $(j = 1, 2, ..., 8))$ показаны *элементарные* события, определяющие *двухмерность*.

Точки на *осях координат* относятся к *сложным* событиям $\mathbf{A_j}$ и $\mathbf{B_k}$, образованных *суммами всех элементарных* событий *по столбцам* или *строкам* таблицы.

В декартовых координатах $X0Y$ *паре* координат $(x_j,\, y_k)$ *соответствует* точка, характеризуемая *парой* чисел (j, k′), т.е. имеем $(x_j,\, y_k) \to (\mathbf{j}, \mathbf{k}) \to \mathbf{a_{j,k}}$. На множестве точек, *отображающих элементарные* события $\mathbf{a_{j,k}}$ на плоскость, определяется *недействительная двумерная* функция $\Phi\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$ *недействительного* аргумента – множества *элементарных* событий с двумя метками.

Таблицы подобного типа в существующей теории «не встречаются». Тем не менее, это представление *двумерного опыта* как случайной величины соответствует принятому (**пример 4, стр.25**) представлению (**полностью заполненная таблица, равенство числа координат x_j или y_k по столбцам или строкам таблицы**) *двумерного* распределения в существующей теории.

3.2.1. Определение случайной *двумерной* величины: *вероятностная* функция и *закон* распределения

Для представления *двумерного опыта* как случайной величины используем *ограниченные* множества *действительных* чисел R^x $(0 \le r^x \le 1)$ и R^y $(0 \le r^y \le 1)$.

<u>*Замечание*</u> <u>18</u>. **Чтобы упростить изложение, далее будем полагать: 1) таблица полностью заполнена: 2) число $m_{j,k}$ *возможных* исходов *любого элементарного* события $\mathbf{a_{j,k}}$ не равно числу $m_{v,w}$ *возможных* исходов *других элементарных* событий $\mathbf{a_{v,w}}$ $[(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq (\mathbf{j}, \mathbf{k})]$ *опыта.* Для построения эти предположения не имеют какого-либо существенного значения.**

3.2.1.1. 1-й способ построения двумерной величины

Разделим отрезки $0 \le r^x \le 1$ и $0 \le r^y \le 1$ на V и W *равных* частей $\Delta^x = 1/V$ и $\Delta^y = 1/W$. Введем координаты $r^x_j = r^x_{j-1} + \Delta^x$ ($r^x_0 = 0$) и $r^y_k = r^y_{k-1} + \Delta^y$ ($r^y_0 = 0$). Положим, что точки, определяемые *парами* (r^x_j, r^y_k), *соответствуют элементарным* событиям $\mathbf{a_{j,k}} \to (r^x_j, r^y_k)$, т.е. имеем случайную двумерную величину $\mathbf{\Phi}\{\mathbf{a_{j,k}} \to (r^x_j, r^y_k)\}$. На точках, соответствующих *парам* (r^x_j, r^y_k) определяем *двумерную вероятностную* функцию и *закон* распределения:

$$p\{(r^x_j, r^y_k)\} = \mathbf{P}(\mathbf{a_{j,k}}), \qquad p\{(r^x_0, r^y_0)\} = 0, \qquad r^x_0 = r^y_0 = 0, \qquad r^x_j = r^x_{j-1} + \Delta^x$$
$$(\mathbf{j = 0, 1, 2, ..., V}), \qquad r^y_k = r^y_{k-1} + \Delta^y \qquad (\mathbf{k = 1, 2, ..., W}); \qquad \mathbf{(3)}$$

$$P\{(r^x_n, r^y_m\} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} p\{(r^x_j, r^y_k)\}, \quad P\{(r^x_V, r^y_W)\} = \sum_{j=1}^{V} \sum_{k=1}^{W} p\{(r^x_j, r^y_k)\} = 1. \qquad \mathbf{(4)}$$

Введем еще два *новых* понятия теории случайных величин:

<u>Определение</u> **<u>3</u>**. *Недействительную* функцию $\mathbf{\Phi}(\mathbf{a_{j,k}})$ *недействительного* аргумента $\mathbf{a_{j,k}}$ $(\mathbf{j = 1, 2, ..., V})$ $(\mathbf{k = 1, 2, ..., W})$, *определенную* на множестве точек, *отображающих элементарные* события $\mathbf{a_{j,k}}$ *двумерного опыта* на ограниченную часть плоскости (**пересекающихся плоскостей, кривой поверхности**), назовем случайной *дискретной двумерной* величиной.

Напомним, что для элементарных событий (простого) опыта правило суммы событий является единственным (вывод W.17 [19,36]).

<u>Определение</u> **<u>4</u>**. *Действительную* функцию $p\{\ (r^x_j,\ r^y_k)\}$ *действительных* аргументов r^x_j и r^y_k назовем *вероятностной* функцией, а функцию $P\{(r^x_n,\ r^y_m)\}= \mathbf{P}\{(0 \le r^x_j \le r^x_n,\ 0 \le r^y_k \le r^y_m)\}$ – *законом* распределения случайной *дискретной двумерной* величины $\mathbf{\Phi}(\mathbf{a_{j,k}})$ на *ограниченных* множествах *действительных* чисел R^x $(0 \le r^x \le 1)$ и R^y $(0 \le r^y \le 1)$.

Здесь и далее мы «восполняем пробел», имеющийся в работе [10], в которой даны определения только для одномерных величин.

Вероятностная функция $p\big\{\big(r^x_j,\ r^y_k\big)\big\}$ представляется в виде *двумерной* таблицы, как и *элементарные* события $\mathbf{a_{j,k}}$ *двумерного опыта.*

<u>Замечание</u> **<u>19</u>. Значения j *одновременно* обозначают *номера элементарных* событий $\mathbf{a_{j,k}}$ *в строке* таблицы и *номера столбцов* таблицы, а значения k – *номера элементарных* событий в *столбце* и *номера строк* таблицы.Чтобы уменьшить «путаницу» будем обозначать *номера строк* и *столбцов* таблицы индексом при вертикальной линии $r^x_j|_w$ $(\mathbf{w = 1, 2, ..., W})$ и $r^y_k|_v$ $(\mathbf{v = 1, 2, ..., V})$ соответственно. При значениях $\mathbf{w = k}$ и $\mathbf{v = j}$ имеем *соответствие* $(r^x_j|_k,\ r^y_k|_j)\to(r^x_j,\ r^y_k)\to \mathbf{a_{j,k}}$.**

Введем дополнительно функции:

Одномерные вероятностные **функции, соответствующие *строке с данным* номером $\mathbf{w = 1, 2, ..., W}$ или *столбцу с данным* номером $\mathbf{v = 1, 2, ..., V}$:**

$p(r^x_j|_w)$, $p(r^x_0|_w) = 0$ **(j=1,2,...,V) (a);** $p(r^y_k|_v)$, $p(r^y_0|_v) = 0$ **(k=1,2,...,W) (b);** **(5)**

где $p(r^x_j|_w) = p(r^x_j, r^y_w)$ $\mathbf{(j = 1, 2, ..., V)}$ **в строке с данным номером** $\mathbf{w = 1, 2, ..., W}$ **и** $p(r^y_k|_v) = p(r^x_v, r^y_k)$ $\mathbf{(w = 1, 2, ..., W)}$ **в столбце с данным номером** $\mathbf{v = 1, 2, ..., V}$**.**

Суммы **функций (5.a, 5.b) по всем *строкам* или *столбцам* таблицы, определяющие *вероятностные* функции *одномерных* величин** $\Phi_\mathbf{x}(\mathbf{A_j} \to r^x_j)$ **и** $\Phi_\mathbf{y}(\mathbf{B_k} \to r^y_k)$ **соответственно:**

$p(r^x_j) = \sum_{w=1}^{W} p(r^x_j|_w) = \mathbf{P(A_j)}$ **(j=1,2,...,V); (a)**

$p(r^y_k) = \sum_{v=1}^{V} p(r^y_k|_v) = \mathbf{P(B_k)}$ **(k=1,2,...,W). (b).** **(6)**

Очевидно, что функции (6) определяются по функциям (5), но функции (5) не могут быть определены по функциям (6), а только по двумерному распределению.

3.2.1.2. 2-й способ построения двумерной величины

Разделим отрезки $0 \le r^x \le 1$ и $0 \le r^y \le 1$ на M *равных* частей $\Delta = 1 / M$ (**замечание 17.2, стр.53**). При числе M *возможных исходов опыта* для координат r^x_m и r^y_m справедливы равенства:

$r^x_m = r^y_m = \Delta \cdot m$, $r^x_m = p(r^x_m)$, $r^y_m = p(r^y_m)$ $\mathbf{(m = 1, 2, ..., M)}$**.** **{2}**

1.A. ***Для столбца*** **таблицы *с данным* номером $\mathbf{v = 1, 2, ..., V}$ *введем* точки на оси X с координатами:** $r^x_{v,k} = r^x_{v-1,W} + \Delta \cdot \sum_{w=1}^{k} m_{v,w}$ $(r^x_{0,W} = 0)$ **{*}. Координата $r^x_{v,k}$ определяет *положение точки* на оси X, которой *соответствует элементарное* событие $\mathbf{a_{v,k}}$ *с данным* номером k=1,2,...,W в *столбце* таблицы *с данным* номером v=1,2,...,V. При k=W координате $r^x_{v,W}$ *соответствует сложное* событие** $\mathbf{A_v} = \sum_{k=1}^{W} \mathbf{a_{v,k}}$**.**

Прямые **линии $y = r^x_{v,k}$ при увеличении k от 1 до значения W *последовательно ограничивают сложные* события, равные *суммам*** $\sum_{w=1}^{k} \mathbf{a_{v,w}}$ ***элементарных*** **событий *столбца* таблицы *с данным* номером v=1,2,...,V.**

На каждой **линии $y = r^x_{v,k}$ введем точки, координаты которых *соответствуют разности* координат $r^x_{v,k}$ (формула {*}). С учетом {2}, введем для *разности координат* обозначение** $r^y_k|_v = r^x_{v,k} - r^x_{v-1,W} = \Delta \cdot \sum_{w=1}^{k} m_{v,w}$ **{3}. *В столбце с* номером v=1,2,...,V, *суммы* вероятностей событий** $\sum_{w=1}^{k} \mathbf{a_{v,w}}$ ***возрастают в направлении* оси Y от значений $r^y_0|_v = 0$ (v=1,2,...,V) *на линии* $x = 0$ до *максимальных* значений** $r^y_W|_v = \Delta \cdot \sum_{w=1}^{W} m_{v,w} = \Delta \cdot m_v = \mathbf{P(A_v)}$ **{3*} *на линии* $x = 1$.**

1.B. ***Для строки*** **таблицы *с данным* номером w=1,2,...,W *введем* точки на оси Y с координатами:** $r^y_{j,w} = r^y_{V,w-1} + \Delta \cdot \sum_{v=1}^{j} m_{v,w}$ $(r^y_{V,0} = 0)$ **{**}. Координата $r^y_{j,w}$ определяет *положение точки* на оси Y, которой *соответствует элементарное* событие $\mathbf{a_{v,k}}$ *с данным* номером j=1,2,...,V в *строке* таблицы *с данным* номером w=1,2,...,W. При j=V координате $r^y_{V,w}$ *соответствует***

сложное событие $\mathbf{B_w} = \sum_{v=1}^{V} \mathbf{a_{v,w}}$.

Прямые **линии** $x = r^y_{j,w}$ **при увеличении j от 1 до значения V *последовательно ограничивают сложные* события, равные *суммам*** $\sum_{v=1}^{j} \mathbf{a_{v,w}}$ ***элементарных* событий *строки* таблицы *с данным* номером w=1,2,...,W.**

На каждой **линии** $x = r^y_{j,w}$ **введем точки, координаты которых *соответствуют разности* координат** $r^y_{j,w}$ **(формула {**}). С учетом {2}, введем для *разности координат* обозначение** $r^x_j|_w = r^y_{j,w} - r^y_{V,w-1} = \Delta \cdot \sum_{v=1}^{j} m_{v,w}$ **{4}. *В строке с* номером v=1,2,...,V, *суммы* вероятностей событий** $\sum_{v=1}^{j} \mathbf{a_{v,w}}$ ***возрастают в направлении* оси** X **от значений** $r^x_0 |_w = 0$ **(w=1,2,...,W) *на линии*** $y = 0$ **до *максимальных* значений** $r^x_V |_w = \Delta \cdot \sum_{v=1}^{V} m_{v,w} = \Delta \cdot m_w = \mathbf{P(B_w)}$ **{4*} *на линии*** $y = 1$.

***Замечание 20*. В данном случае, в отличие от 1-го способа, координаты** $r^y_k|_v$ **и** $r^x_j|_w$**, хотя и связаны с координатами** $r^x_{v,k}$ **и** $r^y_{j,w}$ **(формулы {*} и {**} соответственно, стр.56), но, по сути, определяют *относительное положение элементарных* событий** $\mathbf{a_{j,k}}$ **только *столбца* таблицы *с данным* номером v=1,2,...,V или строки *с данным* номером w=1,2,...,W.**

1.С. Учитывая равенства {3}-{4} и {3*}-{4*}, запишем координаты $r^x_{v,k}$ **и** $r^y_{j,w}$ **в виде:**

$$r^x_{v,k} = \sum_{j=1}^{v-1} r^y_W|_j + \Delta \cdot \sum_{w=1}^{k} m_{v,w} \quad \text{(k=1,2,...,W);} \qquad \{5\}$$

$$r^y_{j,w} = \sum_{k=1}^{w-1} r^x_V|_k + \Delta \cdot \sum_{v=1}^{j} m_{v,w} \quad \text{(j=1,2,...,V).} \qquad \{5^*\}$$

Тем самым подчеркивается, что координаты $r^x_{v,k}$ **определяются *суммами возможных исходов элементарных* событий** $\mathbf{a_{v,k}}$ ***столбцов* таблицы, а координаты** $r^y_{j,w}$ **– *суммами возможных исходов элементарных* событий** $\mathbf{a_{j,w}}$ ***строк* таблицы.**

В этом виде *связь* координат $r^x_{v,k}$ и $r^y_{j,w}$ с *элементарными* событиями *данного столбца* или *данной строки* таблицы более наглядна.

По крайней мере, автор надеется, что это так. Обозначения достаточно «запутаны»: проверено на собственном опыте, ибо «запутывались не единожды» и до сих пор нет уверенности, что где-то в записях нет ошибок. Но ничего лучшего придумать не удалось.

Введение координат позволило $r^x_{v,k}$, $r^y_{j,w}$ и $r^y_k|_v$, $r^x_j|_w$ позволило:

> **W.19. Обеспечить *несовместимость элементарных* событий** $\mathbf{a_{v,k}}$ **и** $\mathbf{a_{j,w}}$**, образующих *сложные* события** $\mathbf{A_v}$ **и** $\mathbf{B_w}$ **на осях** X **и** Y **соответственно.**

Сумма значений вероятностей – действительных чисел – столбца таблицы с номером $\mathbf{w = 1, 2, ..., W}$ **равна** $\mathbf{P(A_v)} = \sum_{k=1}^{W} \mathbf{P(a_{v,k})}$ **или строки с номером** $\mathbf{v = 1, 2, ..., V}$ **–** $\mathbf{P(B_w)} = \sum_{v=1}^{V} \mathbf{P(a_{v,k})}$ **и не зависит от координат** $r^x_{v,k}$ **(или** $r^y_{j,w}$**), ибо** $p(r^x_{v,k}) = \mathbf{P(a_{v,k})}$ **(или** $p(r^y_{j,w}) = \mathbf{P(a_{j,w})}$**).**

Казалось бы, самое простое решение – это принять координаты $r^x_{v,k}$ **равными** $r^x_{v,k} = r^x_{v-1,k} + \Delta \cdot, \sum_{w=1}^{k} m_{v,w}$**. Однако: если, например значения координат 1-го столбца таблицы равны** $r^x_{1,k} = \Delta \cdot \sum_{w=1}^{k} m_{1,w}$**, то возможные исходы элементарных событий** $\mathbf{a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,W}}$

будут принадлежать элементарному событию с максимальным числом $m_{1,w} > m_{1,k}$ (w $\neq$ k) возможных исходов. Соответственно, граница столбца определяется координатой $r^x_{1,k}$. Т.е. возможные исходы события $\mathbf{A_1}$ равны значению $m_1 = m_{1,w}$, однако должно быть $m_1 = \sum_{w=1}^{W} m_{1,w}$. Т.е. самое простое решение *неверно*, ибо оно *не моделирует суммы элементарных* событий *ни столбцов, ни строк таблицы.*

W.20. Показать, что вероятности $\mathbf{P(A_v)}$ и $\mathbf{P(B_w)}$ *сложных* событий $\mathbf{A_v}$ и $\mathbf{B_w}$ определены в точках, *принадлежащих линиям* $x = 1$ и $y = 1$ соответственно.

С этой точки зрения, события на рис.5 (стр.54) следует изобразить над двумерной таблицей и слева от нее. Говоря «языков входов и выходов» (определение "D.1", стр.16): «вход» в таблицу с линии $x = 0$ или $y = 0$, а «выход» – одномерная таблица событий A_v или B_w.

Координаты $r^x_{v,k}$ и $r^y_{j,w}$ определяют *положение всех элементарных* событий *опыта* на плоскости. Они *правильно* отражают принадлежность элементарных событий *данному* столбцу или *строке* таблицы, а также *соответствие пар конкретным элементарным* событиям. *Пересечение прямых* линий $y = r^x_{v,k}$ и $x = r^y_{j,w}$ при значениях **v=j** и **w=k** *определяют на плоскости точку*, характеризуемой *парой* $(r^x_{v,k}, r^y_{j,w})$, которой соответствует *элементарное* событие $\mathbf{a_{j,k}}$ в таблице. Т.е. определена *дискретная двумерная* величина $\mathbf{\Phi}\{(r^x_{v,k}, r^y_{j,w}) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$.

На точках, *соответствующих парам* $(r^x_{v,k}, r^y_{j,w})$, определяются функции, соответствующие *2-му способу построения*:

$$p\{(r^x_{v,k}, r^y_{j,w})\},\quad p\{(r^x_{0,0}, r^y_{0,0})\} = 0,\quad r^x_{0,0} = r^y_{0,0} = 0 \ (\mathbf{j = 1, 2, ..., V; k = 1, 2, ..., W});\qquad \mathbf{(7.a)}$$
$$P\{(r^x_{v,k}, r^y_{j,w})\} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} p\{(r^x_{j,k}, r^y_{j,k})\},\quad \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\{(r^x_{j,k}, r^y_{j,k})\}.\qquad \mathbf{(7.b)}$$

Соответственно, функции (7.a) и (7.b) называются *вероятностной* функцией и *законом* распределения *дискретной двумерной* случайной величины $\Phi\{(r^x_{v,k}, r^y_{j,w}) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$ на множествах действительных чисел R^x $(0 \leq r^x \leq 1)$ и R^y $(0 \leq r^y \leq 1)$.

Для вычисления вероятностей *сложных* событий в *произвольной* части *области определения*, гораздо проще применить *1-й способ представления опыта* в виде случайной величины. *Второй способ*, вообще говоря, *для этой цели малоподходящий*, но, в принципе, его применение возможно: для этого необходимо *вероятностную* функцию **(7.a)** записать в виде таблицы, как и *элементарные* события *двумерного опыта.* В каждой ячейке этой таблицы с номером строки j=1,2,...,V и номером столбца k=1,2,...,W следует записать вероятности с координатами, вычисляемые по формулам **{3}** и **{4}** соответственно. В общем-то, сложно, да и не нужно.

На точках, определяемых координатами **{3}** и **{4}**, как и при *1-м способе построения* (**стр.56**), рассмотрим:

***Одномерные вероятностные* функции, соответствующие *строке с данным* номером w=1,2,...,W таблицы или *столбцу с данным* номером v=1,2,...,V:**

$$p(r_j^x|_w) = \mathbf{P}(\mathbf{a_{j,w}}), \quad (p\{r_0^x|_w\} = 0), \quad (r_0^x|_w = 0) \quad (\mathbf{j=1,2,...,V}), \qquad \mathbf{(5^*.a)}$$
$$p(r_k^y|_v) = \mathbf{P}(\mathbf{a_{v,k}}), \quad (p\{r_0^y|_v\} = 0), \quad (r_0^y|_v = 0) \quad (\mathbf{k=1,2,...,W}), \qquad \mathbf{(5^*.b)}$$
где координаты $r_j^x|_w$ и $r_k^y|_v$ по формулам {3} и {4} соответственно.

***Суммы* функций (5*.a) или (5*,b) по всем *строкам* или *столбцам* таблицы, определяющие *вероятностные* функции *одномерных* величин $\mathbf{\Phi}_x(\mathbf{A_j} \to r_j^x)$ и $\mathbf{\Phi}_y(\mathbf{B_k} \to r_k^y)$ соответственно:**

$$p(r_j^x) = \sum_{w=1}^{W} p(r_j^x|_w) = \mathbf{P}(\mathbf{A_j}), \quad (p\{r_0^x\} = 0), \quad (r_0^x) = 0) \ (\mathbf{j=1,2,...,V}), \qquad \mathbf{(6^*.a)}$$
$$p(r_k^y) = \sum_{v=1}^{V} p(r_k^y|_v) = \mathbf{P}(\mathbf{B_k}), \quad (p\{r_0^y\} = 0), \quad (r_0^y = 0) \ (\mathbf{k=1,2,...,W}), \qquad \mathbf{(6^*.b)}$$
где координаты r_j^x и r_k^y по формулам {5} и {6} соответственно.

Подчеркнем еще раз: функции (6*) определяются по функциям (5*), но функции (5*) не могут быть определены по функциям (6*).

В принятой теории функции **(6*)** называются распределениями вероятностей случайных величин **X** и **Y**, которые считаются исходными (**определения 'D, D.1', стр.16-17**). А вместо функций **(5*)** вводятся другие, называемые *условными* распределениями[68]. Но об этом после рассмотрения свойств распределения случайной *двумерной* величины. Покажем: *закон* распределения *дискретной двумерной* величины *не зависит* от вида функции **{(7.a) стр.58}** и является *дискретным аналогом* <u>*равновероятного*</u> *непрерывного* распределения на плоскости. Запишем формулы **{5}-{6}** в виде:

$r_{v,k}^x = \Delta \cdot \sum_{j=1}^{v-1} m_j + \Delta \cdot \sum_{w=1}^{k-1} m_{v,w} + \Delta \cdot m_{v,k}$ **{5*}, где $\mathbf{k=1,2,...,W}$ – номер *элементарного* события $\mathbf{a_{v,k}}$ *в столбце* таблицы *с данным* номером $\mathbf{j=1,2,...,V}$е, $m_j = \sum_{k=1}^{W} m_{j,k}$ – сумма возможных исходов элементарных событий столбца таблицы с номером $\mathbf{j=1,2,...,V}$, т.е. *сложного* события $\mathbf{A_j}$.**

$r_{j,w}^y = \Delta \cdot \sum_{k=1}^{w-1} m_k + \Delta \cdot \sum_{v=1}^{j-1} m_{v,w} + \Delta \cdot m_{j,w}$ **{6*}, где $\mathbf{j=1,2,...,V}$ – номер *элементарного* события $a_{j,w}$ *в строке* таблицы *с данным* номером $\mathbf{w=1,2,...,W}$, $m_k = \sum_{v=1}^{V} m_{v,k}$ – *сумма возможных* исходов *элементарных* событий *строки* таблицы с номером $\mathbf{w=1,2,...,W}$, т.е. *сложного* события $\mathbf{B_k}$.**

2.А. Из формул {5*} следует. Линии $y = r_{v,k}^x$ последовательно *ограничивают*: 1) *при увеличении* номера j от 1 до значения v-1 *суммы* $\sum_{j=1}^{v-1} \mathbf{A_j}$ *сложных* событий $\mathbf{A_j}$, *предшествующих* событию $\mathbf{A_v}$; 2) при *увеличении* номера w от 1 до значения k-1 *суммы* $\sum_{w=1}^{k-1} \mathbf{a_{v,w}}$ *элементарных* событий $\mathbf{a_{v,w}}$ *в столбце* таблицы *с данным* номером $\mathbf{v=1,2,...,V}$, предшествующих *элементарному* событию $\mathbf{a_{v,k}}$.

***Сумма элементарных* событий *ограничивается* линией $y = r_{v,k}^x$, ко-**

[68] **Отличие единственное. Значения $p(r_j^x|_w)$, $p(r_k^y|_v)$ каждой из функций (5-5*), делятся на сумму всех значений данной функции (формулы (6-6*)) $p(r_j^x|_w)/p(r_j^x)$, $p(r_k^y|_v)/p(r_k^y)$, т.е. приводится к единице**

торой *принадлежит элементарное* событие $\mathbf{a_{v,k}}$. Из равенств (2) следует. Последовательности $y_{1,1}, y_{1,2}, ..., y_{1,W}$; $y_{2,1}, y_{2,2}, ..., y_{2,W}$; ...; $y_{v-1,1}, y_{v-1,2}, ..., y_{v-1,W}$ и $y_{v,1}, y_{v,2}, ..., y_{v,W}$, которые вычисляются по значениям координат $y_{v,k} = r^x_{v,k}$, определяет на линии $y = r^x_{v,k}$ *сумму* $\sum_{j=1}^{v-1}\sum_{w=1}^{W} m_{j,v} + \sum_{w=1}^{k-1} m_{v,w} + m_{v,k}$ $\{\wedge\}$ *возможных* исходов *всех элементарных* событий, включая *элементарное* событие $\mathbf{a_{v,k}}$. Каждая *сумма* $\{\wedge\}$ на линии $y = r^x_{v,k}$, *ограничена* точкой, которая *пропорциональна* вероятности $\sum_{j=1}^{v-1}\sum_{w=1}^{W} \mathbf{P(a_{j,v})} + \sum_{w=1}^{k} \mathbf{P(a_{v,w})}$. Отсюда следует:

> **{A.17}** Все *граничные* точки *принадлежат прямой* $r^y = r^x$ на плоскости $X0Y$, а *суммы* $\sum_{j=1}^{v-1}\sum_{w=1}^{W} m_{j,w} + \sum_{w=1}^{k-1} m_{v,w}$ *всех возможных исходов элементарных* событий, *предшествующих элементарному* событию $\mathbf{a_{v,k}}$, лежат *справа от прямой* $r^y = r^x$.

2.B. *Пересечение* линий $y = r^x_{v,k}$ с линией $x = 1$ определяет точки на линии $x = 1$ с координатами $r^x_{v,W}$ $(\mathbf{v = 1, 2, ..., V})$, соответствующие *суммам* вероятностей $\mathbf{P(A_v)} = \Delta \cdot \sum_{k=1}^{W} m_{v,k}$ *элементарных* событий *столбца с данным* номером $\mathbf{v = 1, 2, ..., V}$ (п.1.А, стр.56). Вероятности $\mathbf{P(A_v)}$ *пропорциональны* координатам $r^x_{v,W}$ и, следовательно, принадлежат прямой линии $p = r^x$ на плоскости Π_1, определяемой линией $x = 1$ и перпендикулярной оси Y. Очевидно, что линии $p = r^x$ также *принадлежат*: 1) *последовательность* вероятностей, определяемых *суммами* $\Delta \cdot \sum_{k=1}^{w} m_{v,k}$ *элементарных* событий *столбца* таблицы *с данным* номером $\mathbf{v = 1, 2, ..., V}$, координаты $r^x_{v,w}$ которых определяются формулами {5*}; 2) *последовательность* вероятностей, определяемых *суммами* {2} *возможных* исходов $p(r^x_m) = \Delta \cdot m$ $(m \le M)$.

Соединим точки $p^x_m = p(r^x_m)$ $(\mathbf{m = 0, 1, 2, ..., M})$ на линии $p = r^x$ с точками на линии $x = 0$, соответствующие координатам r^x_m. Имеем M прямых линий $p^y = r^y \cdot p^x_m$ $(\mathbf{m = 1, 2, ..., M})$ {7} параллельных плоскости $Y0P$. При данном значении m, линии $p^y = r^y \cdot p^x_m$ и $y = r^x_m$ лежат в одной плоскости. При значениях $\mathbf{m = v \cdot W + w}$ они совпадают (формулы {5*}) с координатами $r^x_{v,w} = p(r^x_{v,w}) = r^x_{v-1,W} + \sum_{k=1}^{w} \mathbf{P(a_{v,k})}$, а при значениях $\mathbf{m = v \cdot W}$ – с координатами $r^x_{v,W} = p(r^x_{v,W}) = \sum_{k=1}^{w} \mathbf{P(A_j)}$.

Прямые линии $p^y = r^y \cdot p^x_m$ $(\mathbf{m = 0, 1, 2, ..., M})$ лежат на поверхности Σ_1, образованной перемещением прямой линии, параллельной плоскости $Y0P$, по прямым линиям $p = r^x$ и $x = 0$ соответственно. Из проведенного анализа, с учетом положения {A.17} следует:

> **W.21.** *Суммы* вероятностей $p(r^x_m) = \Delta \cdot m$, $\sum_{k=1}^{w} \mathbf{P(a_{v,k})}$ и $P(A_v)$ лежат *на линейчатой* поверхности Σ_1, *справа* от плоскости Π_0, определяемой *прямой* $r^y = r^x$ и перпендикулярной плоскости $X0Y$.

3.A. Рассуждая также как и в пункте 2.А (стр.59), на основе формул {6*} придем следующему:

> **{A.18}** Все *граничные* точки *принадлежат прямой* $r^y =, r^x$ на плоскости $X0Y$, а *суммы* $\sum_{k=1}^{w-1}\sum_{v=1}^{V} m_{v,k} + \sum_{v=1}^{j-1} m_{v,w}$ *всех возможных исходов элементарных* событий, *предшествующих элементарному* событию $a_{j,w}$, лежат *слева от прямой* $r^y = r^x$.

3.B. Рассуждая также как и в пункте 2.B (стр.60) **получим, во-первых:** ***прямой*** **линии** $p = r^y$ **на плоскости** Π_2**, определяемой** ***линией*** $y = 1$ **перпендикулярной оси** X**,** ***принадлежат*****: 1) вероятности** $\mathbf{P(B_w)}$**; 2)** ***последовательность*** **вероятностей, определяемых** ***суммами*** $\Delta \cdot \sum_{j=1}^{v} m_{j,w}$ ***элементарных*** **событий** ***строки*** **таблицы** ***с данным*** **номером** $\mathbf{w = 1, 2, ..., W}$ **, координаты** $r^y_{v,w}$ **которых определяются формулами {6*}; 3)** ***последовательность*** **вероятностей, определяемых** ***суммами*** **{2}** ***возможных*** **исходов** $p(r^y_m) = \Delta \cdot m$ $(m \leq M)$**.**

Во-вторых – семейство ***прямых*** **линий** $p^x = r^x \cdot p^y_m$ $(\mathbf{m = 0, 1, 2, ..., M})$ **{7*}** ***параллельных*** **плоскости** $X0P$**, при** ***данном*** **значении** m **лежат** ***в одной*** **плоскости с линиями** $x = r^y_{v,k}$**.** ***Прямые линии*** $p^x = r^x \cdot p^y_m$ ***лежат*** **на поверхности** Σ_2**, образованной** ***перемещением прямой*** **линии,** ***параллельной*** **плоскости** $X0P$**, по прямым линиям** $p = r^y$ **и** $y = 0$ **соответственно. На основе этих рассуждений придем к выводу:**

> **W.22.** ***Суммы*** **вероятностей** $p(r^y_m) = \Delta \cdot m$**,** $\sum_{j=1}^{v} \mathbf{P(a_{j,w})}$ **и** $\mathbf{P(B_w)}$ **лежат** ***на линейчатой*** **поверхности** Σ_2**,** ***слева*** **от плоскости** Π_0**, определяемой** ***прямой*** $r^y = r^x$ **и** ***перпендикулярной*** **плоскости** $X0Y$**.**

<u>Замечание</u> **<u>21</u>. Пересечение поверхностей** Σ_1 **и** Σ_2 **образует на плоскости** Π_0 **кривую, которой принадлежат точки, ограничивающие значения сумм вероятностей.**

Мы ничем *не ограничивали* ни числа *возможных исходов элементарных* событий, ни их число. С учетом этого, из проведенного исследования можно сделать общий вывод:

> **W.23. При 2-м** ***способе*** **построения** ***закон*** **распределения случайной** ***дискретной*** **величины** ***не зависит*** **от вида** ***вероятностной*** **функции и является** ***дискретным аналогом <u>равновероятного</u> непрерывного*** **распределения, определенного на плоскости** $(0 \leq r^x \leq 1, 0 \leq r^y \leq 1)$**.**

<u>Замечание</u> **<u>22.</u> Пересечение поверхностей** Σ_1 **и** Σ_2 **образует на плоскости** Π_0 **кривую, которой принадлежат точки, ограничивающие значения сумм вероятностей.**

Рассмотренный подход распространяется на *многомерные* величины, *свойства* которых аналогичны *свойствам двумерной* величины.

Двумерная (**многомерная**) величина (**как и одномерная**) является *недействительной* функцией *элементарных* событий *двумерного* (**многомерного**) *опыта.*

Она позволяет определять ***суммы произвольных элементарных*** **событий, т.е.** ***сложные*** **события A, B, C,. . . , из которых образуются более** ***сложные*** **события [19,36-37]. А их вероятности вычисляются по значениям** ***вероятностной*** **функции, с учетом** ***совместимости*** **событий. Т.е.** ***математические*** **модели** ***двумерной*** **(многомерной) случайной величины** ***соответствуют*** **моделям** ***двумерного*** **(многомерного) опыта.**

При построении *вероятностных* моделей случайной *двумерной* величины введены *одномерные вероятностные* функции **(5-5*)**, соответствующие *строке с данным* номером w=0,1,2,...,W или *столбцу с данным* номером v=0,1,2,...,V таблицы *двумерного опыта* (**рис.5, стр.54**). Они определяют *связь* между *свойствами двумерной* величины и *двумерного опыта.*

Напомним свойства *двумерного опыта* [19,38-40].

<u>1.</u> События $\mathbf{A_j}$ $(\mathbf{j = 1, 2, ..., V})$ и $\mathbf{A_v}$ $(\mathbf{v = 1, 2, ..., V;\ v \neq j})$ (или $\mathbf{B_k}$ $(\mathbf{k = 1, 2, ..., W})$ и $\mathbf{B_w}$ $(\mathbf{w = 1, 2, ..., W;\ w \neq k})$) *несовместимы*: они *не содержат одинаковых элементарных* событий (определение 7 [19,36]). Свойство *справедливо* и для *суммы* событий $\mathbf{A_j}$ (или $\mathbf{B_k}$). <u>2.</u> События $\mathbf{A_j}$ и $\mathbf{B_k}$ – *совместимы*: в них есть *одно одинаковое элементарное* событие $\mathbf{a_{j,k}}$. <u>3.</u> Из *совместимости* событий $\mathbf{A_j}$ и $\mathbf{B_k}$ следует $\mathbf{P(A_j \cdot B_k) = P(a_{j,k}) \neq P(A_j) \cdot P(B_k)}$ {8}, т.е. *вероятность произведения* событий $\mathbf{A_j}$ и $\mathbf{B_k}$ *не равна произведению* их вероятностей. Соответственно, вероятность *их суммы не равна сумме* их вероятностей $\mathbf{P(A_j + B_k) = P(A_j) + P(B_k) - P(a_{j,k}) \neq P(A_j) + P(B_k)}$ {8*}. Свойства {8}-{8*} *справедливы и для сумм,* образованных событиями $\mathbf{A_j}$ или $\mathbf{B_k}$.

Эти свойства *естественно распространяются* на *вероятностные* функции $p(r_j^x\,|_w)$ и $p(r_k^y\,|_v)$ **(5-5*)**. Неравенства **{8}** или **{8*}** определяются *пересечением вероятностных* функций или их *сумм* $\sum_{w=k1}^{k2} p(r_j^x\,|_w)$ и $\sum_{v=j1}^{j2} p(r_k^y\,|_v)$, и следуют *из совместимости* событий *двумерного опыта*, которые определяют соответствующие распределения вероятностей. Ни о какой «зависимости» здесь даже не упоминалось. Соответственно, эти *свойства следует учитывать* при вычислении вероятностей *сложных* событий, определяемых *двумерной* (**многомерной**) величиной.

С применением линейных функций $x = a \cdot r + b$ и $y = c \cdot r + d$ (где a, b, c и d – действительные числа, связанные с размерностью измеряемой физической величины) вероятностная функция случайной величины $\Phi\{(r_j^x, r_k^y) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$, определенная на множествах действительных чисел R^x $(0 \leq r^x \leq 1)$ и R^y $(0 \leq r^y \leq 1)$, преобразуется (пример 10, стр.35) в вероятностную функцию случайной величины $\Psi\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$, определенную на множествах действительных чисел X $(x_H \leq x \leq x_K)$ и Y $(y_H \leq y \leq y_K)$.

Переход к случайным *непрерывным двумерным* величинам осуществляется так же, как и при *одномерных* величинах: *неограниченным увеличением* числа N *опытов* (**т.е. предельный переход при значении $N \to \infty$**) при их *объединении.*

***<u>Замечания</u>* <u>23.</u> Если *двумерная* величина *непрерывна*, то отмеченные свойства *справедливы*: <u>1.</u> Для *плотностей* $p(x) = \int_{y_H}^{y_K} p(x,\,y)dy$ и $p(y) = \int_{x_H}^{x_K} p(x,\,y)dx$ случайных величин X и Y неравенство {8} имеет вид $p(x,\,y) \neq p(x) \cdot p(y)$. <u>2.</u> Для сечений $p(x,\ y = y_{dan})$ и $p(x = x_{dan},\ y)$ функции плотности (плоскостью, содержащей прямую $x = y_{dan}$ или $y = x_{dan}$ и перпендикулярной плоскости $X0Y$) неравенство {8} принимает вид**

$p(x,\, y) \neq p(x,\;\, y = y_{dan}) \cdot p(x = x_{dan},\; y)$. **<u>3.</u> В существующей теории оно записывается для вероятностей $P\{\delta(x)\} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x)dx$ и $P\{\delta(y)\} = \int_{y_k}^{y_{k+1}} p(y)dy$, где $\delta(x) = x_{j+1} - x_j < x_K - x_H$ и $\delta(y) = y_{k+1} - y_k < y_K - y_H$. В этом случае неравенство {8} имеет вид $P\{\delta(x);\; \delta(y)\} \neq P\{\delta(x)\} \cdot P\{\delta(xy)\}$, где $P\{\delta(x);\; \delta(y)\} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{y_k}^{y_{k+1}} p(x,\, y)dxdy$. <u>4.</u> Если разность $\delta(x) = x_{j+1} - x_j \to 0$ или $\delta(y) = y_{k+1} - y_k \to 0$ стремится к нулю, то, вообще говоря, можно доказать, что неравенство в п.3 стремится к неравенству в п.2.**

Форма области определения функции плотности (закона распределения) непрерывной двумерной величины на плоскости, может быть ограничена любой фигурой. Для примера можно рассмотреть равномерное распределение в области определения, ограниченной треугольником, трапецией, эллипсом и т.п. Примеры такого типа встречаются (редко) в работах (распределение в круге, треугольнике, на сфере), иногда с весьма странными пояснениями «зависимости» случайных величин.

Наша *цель* введения *одномерных* функций **(5-5*)** конкретна и понятна: **показать *связь* между *свойствами* случайной *двумерной* величины и *двумерного опыта*, и *необходимость учитывать эти свойства* при вычислении вероятностей *сложных* событий**. Что касается функций **{(6-6*) стр.56,59}**, то они *введены* только потому, что *они определяются* в существующей теории[69] и, по сути, *считаются исходными*: **координаты x_j и y_k полагаются значениями случайных величин X и Y соответственно.**

Вопрос только в одном: в существующей теории «ни слова» о том, *как на основе* распределений величин **X** и **Y** получить *двумерное* распределение. Восполним «этот пробел».

***<u>Пример</u>* <u>15</u>. п.1. Чтобы получить его, необходимо вычислить *совокупность* всех *условных* вероятностей $p\{(x_j,\, y_k)\} \,/\, p(x_j)$ для *каждого столбца с данным* номером $j = 1, 2, \ldots, V$: эту *совокупность* называют *условным* распределением Y при *фиксированном* значении $X = x_j$ и обозначают $p\{(y \,|\, x_j)\}$ [12,160]. Затем можно *умножить ее* на вероятность $p(x_j)$ и получить *исходную.* п.2. Аналогично, *совокупность всех условных* вероятностей $p\{(x_j,\, y_k)\} \,/\, p(y_k)$ для *каждого строки с данным* номером $k = 1, 2, \ldots, W$ называют *условным* распределением X при *фиксированном* значении $Y = y_k$ и обозначают $p\{(x \,|\, y_k)\}$. Опять же, *умножив ее* на вероятность $p(y_k)$ *возвратимся к исходной.* Но *непосредственно* по распределениям величин X и Y определить *исходное двумерное* распределение «как-то не получается» Скажем так: «очень увлекательное занятие – от тоски помереть можно», ибо лишено какого-либо смысла и абсолютно бесполезно (смотри также пример 4, стр.25 и пример 6, стр. 29).**

[69] Для их распределений даже специальное название придумано – маргинальные (частные) распределения [6,228]. Редко, но говорится: «...совместное распределение X и Y определяет распределение величин X и Y, но мы не можем найти совместное распределение X и Y по их маргинальным распределениям» [6,231]. Интересно, если двумерное распределение не связано с ними, то *зачем мы эти величины исследуем*?

А что же предлагает далее существующая теория? По-видимому, Читателю не сложно догадаться: продолжить «песнь об условных распределениях вероятностей (**функции (5*) и сноска 68, стр.59**) и *зависимых* случайных величинах». И она продолжается: вычисляются «*условные математические* ожидания, *условные* дисперсии, *линии* регрессии» и т.д. Эти понятия применяются в основном в разделе *математической* статистики, который называется *теорией корреляции*[70].

«Запрета» на определение случайных величин $\mathbf{\Phi}(x_j \to \mathbf{A_j})$ и $\mathbf{\Psi}(y_k \to \mathbf{B_k})$, а также их *действительных* характеристик по *двумерной* величине $\mathbf{\Phi}\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$ и ее *характеристикам не существует.* Однако, из *свойств* (**стр.62**) *двумерной* случайной величины следует:

1. Функции $\Phi(x_j \to \mathbf{A_j})$ и $\Psi(y_k \to \mathbf{B_k})$ *не определяют ни вероятностную* функцию, *ни закон* распределения *двумерной* случайной величины.

2. Формально записать $\Phi(x_j \to \mathbf{A_j}) \times \Psi(y_k \to \mathbf{B_k})$ и $\Phi(x_j \to \mathbf{A_j}) + \Psi(y_k \to \mathbf{B_k})$ можно, но это *лишено смысла*, ибо имеется *двумерная* случайная величина, для которой *ни произведения*, *ни суммы* случайных величин не существует.

3. *Неравенства* {8} и {8*} определяются *только свойствами двумерной* величины, *связанные* с функциями (5-5*) (стр.56,59). Они *не связаны* с функциями $\Phi(x_j \to \mathbf{A_j})$ и $\Psi(y_k \to \mathbf{B_k})$: о «зависимости» или «независимости» величин речь идти не может.

Функции **(6-6*)** (**стр.59**) трактуются в существующей теории как *исходные*. Они были *введены* нами, если говорить по делу, для того, чтобы сказать: *они не дают информации о распределении двумерной* величины, но несколько «затуманивают» понимание теории случайных величин.

<u>*Замечания*</u> <u>24</u>. <u>1.</u> Конечно, мы можем рассматривать *вероятностные* функции $p(x_j)$ и $p(y_k)$ *вне их связи с двумерной* случайной величиной $\Phi\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$. Т.е. как *вероятностные* функции некоторых *одномерных* величин $\Phi(x_j \to \mathbf{a_j})$ и $\Phi(y_k \to \mathbf{b_k})$, где $\mathbf{a_j}$, $\mathbf{b_k}$ – *элементарные* события некоторых *одномерных опытов. Но что это дает*? Ответ очевиден – *ничего.* <u>2.</u> Мы уж очень «загустили краски» – некоторая польза есть. Распределения *одномерных* величин *связаны* с распределением *двумерной* (*n-мерной*) величины и по ним вычисляются *математические* ожидания и *дисперсии*: первые определяют *положение центра группирования*, а *сумма* вторых – *дисперсию двумерного* (*n-мерного*) распределения. Впрочем, можно легко обойтись и без *одномерных* распределений.

Из анализа, проведенного в разделе, следует:

> **W.24. *Математические* модели *двумерной* (*n*-мерной) *дискретной* случайной величины $\mathbf{\Phi}\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$ (или $\Phi\{(r_j^x, r_k^y) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$) *логически строго* следуют из *математических* моделей (простого) *опыта с двумя* (и более) *метками элементарных* событий.**

[70] **Это тема другого, вообще говоря, длинного разговори: некоторые рассуждения о ковариации в части V, а об основах теории корреляции – в части VI работы**

W.25. ***Действительная* характеристика *двумерной* (n-мерной) случайной величины $\Phi\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$ – *двумерная* (n-мерная) *вероятностная* функция $p\{(x,\ y)\}$ (закон распределения $\mathbf{P}(x_H \leq x < x_{\mathbf{dan}}, y_H \leq y < y_{\mathbf{dan}})$).**

W.26. ***Трактовать закон* распределения *двумерной* (n-мерной) случайной величины $\Phi\{(x_j, y_k) \to \mathbf{a_{j,k}}\}$ как *произведение* законов распределения величин $\Phi(x_j \to \mathbf{A_j})$ и $\Phi(y_k \to \mathbf{B_k})$ *неправомерно* – они *не имеют отношения* к образованию *двумерного* распределения.**

Из теории событий, *основанной на новой* исходной системе, определений случайной *двумерной* величины, ее *вероятностной* функции и *закона* распределения следует:

W.27. **По *закону* распределения $\mathbf{P}(x_H \leq x < x_{\mathbf{dan}},\ y_H \leq y < y_{\mathbf{dan}})$ определяется вероятность события, заключающегося в том, что появляется *только одно* из множества *элементарных* событий $\mathbf{a_{j,k}}$ *опыта*, *принадлежащих области* $x_H \leq x < x_{\mathbf{dan}},\ y_H \leq y < y_{\mathbf{dan}}$.**

Замечания. **1. Вывод подчеркивает *правильную трактовку закона* распределения, однако это вовсе не означает, что в области *не определяется сложное* событие. Оно как раз и заключается в появлении *одного из элементарных* событий, *принадлежащих выделенной области* (вывод W.18 [19,37]). 2. Вывод справедлив и для закона распределения *непрерывной* случайной величины (появляются элементарные события с нулевой вероятностью).**

Вывод **W.17** (**стр.52**) отличается от вывода **W.27** только тем, что в 1-м говорится о появлении *одного элементарного* события с <u>одной</u> <u>меткой</u> $\mathbf{a_j}$ <u>*на*</u> <u>*выделенном*</u> <u>*интервале*</u>, а во 2-м - *одного элементарного* события с <u>*двумя*</u> <u>*метками*</u> $\mathbf{a_{j,k}}$ <u>*в*</u> <u>*выделенной*</u> <u>*области*</u>. Это означает (**пункты I-III, стр.52**), что мы имеем дело *с другим видом одного класса* случайных величин. Вывод **W.18** и положение **{A.16.2}** (**стр.52**) *об ограниченности области* определения случайной величины остаются в силе и для *двумерной* (**многомерной**) величины. Таким образом, имеем только *двумерную* таблицу значений *вероятностной* функции $p\{(x_j,\ y_k)\}$: ни «входов», (**определение 'D.1', стр.16**) ни «выходов» из таблицы не существует. Из анализа можно сделать еще один вывод:

W.28. **В общем случае случайная *двумерная* величина не может быть получена *в результате каких-либо операций с одномерными* величинами и *не соответствует ни* существующему *определению* понятия многомерной величины, *ни понятию прямого произведения* теории множеств.**

Остановимся на некоторых моментах, которые являются важными для искусственного *образования теоретических* распределений *двумерных* (**многомерных**) случайных величин.

***Пример* 16.** п.1. **Используя, например, *дискретные действительные* функции $v(x_m)$ (m=1,2,...,M) и $w(y_n)$ (n=1,2,...,N) *действительных* аргументов x и y, заданные на осях X и Y, можно построить *двумерное* распределение. Положим, что точкам плоскости (x_m, y_n) соответствуют *суммы* $f(x_m, y_n) = v(x_m) + w(y_n)$ и разделим каждую из сумм на сумму $C = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} f(x_m)$ (нормировка на 1). При непрерывных случайных величинах нормировочный коэффициент определяется интегрированием.**

п.2. Таким способом можно определить распределение *двумерной* случайной величины, используя *сумму вероятностных* функций случайных величин, определенных на двух координатных осях.

п.3. В обоих случаях область *определения* полученного *двумерного* распределения является прямоугольной ($x_H \leq x < x_K$, $y_H \leq y < y_K$). Ограничивая ее в пределах прямоугольника какими-либо кривыми, можно получить двумерные распределения в произвольной области.

Очевидно, что во всех случаях *по полученному распределению двумерной* случайной величины можно определить *распределения одномерных* случайных величин **X** и **Y** (**формулы (6-6*), стр.56,59**). Однако *ни двумерное* распределение, *ни исходные* функции, *на основе* которых получено *двумерное* распределение, по распределениям величин **X** и **Y** *не определяются.*

На основе представления *опыта*, *элементарные* события которого имеют *две метки*, в виде случайной величины:

Q.VI. Определена *дискретная двумерная* величина как *недействительная* функция $\mathbf{\Phi(a_{j,k})}$ *недействительного* аргумента – *элементарных* событий $\mathbf{a_{j,k}}$ $(\mathbf{j = 1, 2, \ldots, V; k = 1, 2, \ldots, M})$ *двумерного опыта.*

Q.VII. С применением *отображения* множества *элементарных* событий $\mathbf{a_{j,k}}$ на множество точек, определяемых парами координат $(x_j,\, y_k)$, введены *двумерные действительные* функции *действительного* аргумента *неразрывно связанные* с случайной величиной: *вероятностная* функция $p\{(x_j,\, y_k)\}$ и *закон* распределения $\mathbf{P}\{(x_n,\, y_m)\} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p\{(x_j,\, y_k)\}$ - *действительные* характеристики случайной величины.

Из анализа видно: *двумерная* величина подобна *одномерной* величине, но имеет *определенные свойства*, связанные *именно с ее размерностью. Их следует учитывать* при вычислении вероятностей *сложных* событий. При анализе существующего понимания случайной величины показано (**вывод W.6, стр.24**): *этот вид не следует* из определений **'D, D.1'**, т.е., *в принятой* теории вероятностей он *не существует* (**хотя примеры имеются**).

4. Представление сложного опыта в виде системы случайных величин

Сложный опыт (**определение 2 [19,29]**) образуется в результате *операций* (**алгебра опытов [19,31]**) *объединения* или *совмещения* множеств *элементарных* событий *двух* (**и более**) простых *опытов*. Они определяют *два вида* (**определение 5 [19,31]**) *сложного* опыта.

Результат *объединения опытов* – (простой) *опыт*, множество *элементарных* событий которого состоит из множеств *элементарных* событий *исходных опытов*: он назван *объединенным опытом*. Результат *совмещения опытов* – *произведение* множеств *элементарных* событий *исходных опытов*: он назван *совмещенным опытом* (пример 15 [19,32]).

В разделах **3.1** и **3.2** показано, что виды (**простых**) *опытов* определяют *одномерные* и *двумерные* (**многомерные**) случайные величины соответственно. Естественно, что при представлении *сложного* опыта в виде случайной величины, мы должны опираться на полученные результаты, т.е. рассматривать не какую-то одну конкретную случайную величину, а несколько величин.

***<u>Определение 5</u>*.** Под *системой* будем понимать *совокупность* N случайных величин. Случайная величина определена (**определение 1, стр.48; определение 3, стр.55**) как *недействительная* функция *недействительного* аргумента – множества *элементарных* событий (**простого**) *опыта*, следовательно, для *системы* определены (**как и для опытов**) *только две операции* (**вывод W.10, определение 5 [19,31]**): *объединение* или *совмещение* случайных величин.

Напомним. В *алгебре опытов*, предположение «*или ..., или ...*» *исключает* предположение «*и ..., и ...*». Это означает только то, что *эти два опыта* не могут быть проведены *одновременно с одними и теми же опытами* (замечание к выводу W.10 [19,31]).

Операций *объединения* или *совмещения* случайных величин в принятой теории не существует. Поэтому под словосочетаниями «многомерная случайная величина» и «система случайных величин» в существующей теории понимается одно и то же. Определение 5 вводит *новое* понятие, приводящее *к совершенно разной интерпретации* этих словосочетаний. Таким образом, как *одномерные*, так и *двумерные* (**многомерные**) случайные величины являются «первичными элементами» для построения (**на основе операций объединения или совмещения**) более *сложных* случайных величин. Из определения 5 следует:

Q.VIII. ***Операции объединения или совмещения*** **применимы для** ***дискретных*** **и** ***непрерывных*** **случайных величин, входящих в систему, при** ***представлении вероятностных*** **функций всех величин на множествах** ***действительных*** **чисел** ***или*** R $(0 \le r \le 1)$**, или** X $(x_H \le x \le x_K)$**.**

Поэтому далее на этих вопросах мы будем акцентировать внимание только при имеющихся отличиях.

Система случайных величин (**как и виды сложного опыта**) может состоять как из величин *одной размерности* (**одномерных, двумерных и т.д.**), так и *с разными размерностями*. В настоящей работе рассматриваются *системы*, которые *состоят только из одномерных* величин $\mathbf{\Phi}(x_j^1 \rightarrow \mathbf{a_j^1})$ $(\mathbf{j = 1, 2, ..., V})$ и $\mathbf{\Psi}(x_k^2 \rightarrow \mathbf{a_k^2})$ (**или** $\mathbf{\Psi}(y_k^2 \rightarrow \mathbf{a_k^2})$) $(\mathbf{k = 1, 2, ..., W})$, основой которых являются *одномерные опыты*.

<u>Замечание</u> **<u>25</u>. В отличие от двумерной величины** $W\{(x_j, y_k) \rightarrow \mathbf{a_{j,k}}\}$**, которая характеризуется только** ***двумя разными*** **множествами** X **и** Y ***действительных*** **чисел,** ***одномерные*** **величины** $\mathbf{\Phi}$ **и** $\mathbf{\Psi}$ **можно характеризовать как одним множеством** X $(-\infty < x < \infty)$**, так и двумя разными множествами** X $(-\infty < x < \infty)$ **и** Y $(-\infty < y < \infty)$**. При** ***геометрическом*** **представлении: на одной числовой оси или на 2-х осях. Каждую из случайных величин** $\mathbf{\Phi}(x_j \rightarrow \mathbf{a_j^1})$ **и** $\mathbf{\Psi}(x'_k \rightarrow \mathbf{a_k^2})$ (**где** x_j, x'_k **– наборы чисел, соответствующие элементарным событиям 1-го и 2-го опытов, пример 2, стр.18**) ***системы*****, можно представить точками, которые расположены на прямой, ломаной или кривой (в том числе – замкнутой) линии на плоскости или в пространстве. А случайные величины** $\mathbf{\Phi}(x_j \rightarrow \mathbf{a_j^1})$ **и** $\mathbf{\Psi}(y_k \rightarrow \mathbf{a_k^2})$ (**где** x_j, y_k **– наборы чисел, соответствующие элементарным событиям 1-го и 2-го опытов, пример 2, стр.18**) **на координатых осях** X **и** Y (**не объязательно декартовых**)**.**

Варианты представления случайных величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$, отмеченные в замечании, зависят, в первую очередь от того, *объединяtются* или *совмещаются* случайные величины.

4.1. Системы одномерных случайных величин

Различие между *вероятностными моделями* 2-х *видов сложного* опыта приводит к существенному *отличию системы* 2-х величин при их *объединении и совмещении*.

4.1.1. *Объединение* систем случайных величин

В этом случае *исходные* случайные величины $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ представляются на прямой, ломаной или кривой (**в том числе – замкнутой**) линии на плоскости или в пространстве (**рис.6**) . Применение *того или иного* варианта представления определяется *условиями* решаемой задачи, которые и определяют *вид геометрического* представления величин **Φ** и **Ψ**. В свою очередь, *вид геометрического* представления *влияет* на результат *объединения системы* величин.

Пусть $\mathbf{a_j^1}$ $(\mathbf{j = 1, 2, ..., V})$ и $\mathbf{a_k^2}$ $(\mathbf{k = 1, 2, ..., W})$ *элементарные* события *1-го и 2-го опытов* соответственно.

***<u>Замечание</u>* <u>26</u>. Числа *возможных* исходов *1-го и 2-го опытов* равны $m^1 = \sum_{j=1}^{V} m_j^1$ {1} и $m^2 = \sum_{k=1}^{W} m_k^2$ {1*} (где m_j^1, m_k^2 – числа *возможных* исходов их *элементарных* событий), а число *возможных* исходов *объединенного опыта* – $M_o = m^1 + m^2$ {1**}.**

Свойства системы случайных величин при их *объединении*, следуют из свойств *объединения опытов* (**замечания 12-14 [19,39-42]**).

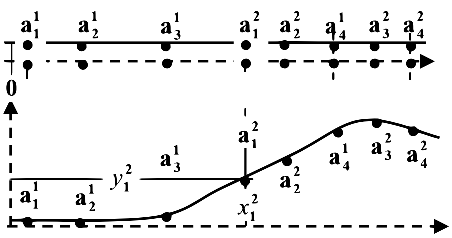

Рис. 6

***<u>Пример</u>* <u>17</u>. Пусть числа $x_H^1 < x_1^1 < x_2^1 < ... < x_V^1 = x_K^1$ и $x_H^2 < x_1^2 < x_2^2 < ... < x_W^2 = x_K^2$ определяют координаты x_j^1 и x_k^2 на оси X, которым *соответствуют элементарные* события *1-го и 2-го опытов*. Их можно представить в виде точек, расположенных на прямой (рис.6, вверху), ломаной или кривой (рис.6, внизу; в этом случае следует задать координаты точек и на оси Y) на плоскости или в пространстве. Далее будем рассматривать представление опытов на прямой линии (координате X).**

п.1. Результат *объединения* $\Phi \cup \Psi$ случайных величин $\Phi(x_j^1 \to \mathbf{a_j^1})$ и $\Psi(x_k^2 \to \mathbf{a_k^2})$ – *одномерная* случайная величина $\mathrm{E}\{x_j^1 \cup x_k^2 \to \mathbf{a_j^1} \cup \mathbf{a_k^2}\}$, которая определена *на объединенных* (пример 15 [19,32]) множествах $\mathbf{a_j^1} \cup \mathbf{a_k^2}$ *элементарных* событий *опытов*.

п.2. *Опыты пересекаются* (определение 8 [19,41]), если в них есть *элементарные* события *с одинаковыми метками*. Для определенности положим $\mathbf{V > W}$. Числа x_j^1 и x_k^2 соответствуют *элементарным* событиям $x_j^1 \to \mathbf{a_j^1}$ и $x_k^2 \to \mathbf{a_k^2}$, т.е. случайные величины Φ и Ψ *пересекаются*, если для каких-то значений $\mathbf{1 \le v \le V}$ и $\mathbf{1 \le w \le W}$ *выполняются равенства* $x_v^1 = x_w^2$ {A}. Следовательно, случайные величины *пересекаются*, если *выполняется*, по крайней мере, *хотя бы одно из равенств* {A}.

п.3. Если *равенства* {A} для случайных величин Φ и Ψ *выполняются* в K точках, то число точек, на которых *определена* случайная величина $\mathrm{E}\{x_j^1 \cup x_k^2 \to \mathbf{a_j^1} \cup \mathbf{a_k^2}\}$, *уменьшается на число* K (вывод W.31 [19,44]).

п.4. *Пересечение* величин можно *условно* назвать *произведением* случайных величин *при их объединении*, так как оно *существует только при пересечении* величин (вывод W.31 [19,44]).

п.5. *Произведение сложных* событий A^1 и A^2, определяемых *суммами элементарных* событий случайых величин Φ и Ψ соответственно, *возможно* только *при выполнении* 2-х *условий*:

I. События $\mathbf{A^1}$ и $\mathbf{A^2}$ находятся (частично или полностью) **в *области пересечения* случайных величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$.** **II. События $\mathbf{A^1}$ и $\mathbf{A^2}$ *совместимы*: в них входят *одинаковые элементарные* события** (т.е. находящиеся в области пересечения) ***объединенного опыта.***

На множествах R^1 $(0 \le r^1 \le 1)$ и R^2 $(0 \le r^2 \le 1)$ *действительных* чисел *вероятностные* функции величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ *при 1-и способе* построения имеют вид:

$$p_{\mathbf{\Phi}}(r_j^1), \quad p_{\mathbf{\Phi}}(r_0^1) = 0, \quad r_0^1 = 0, \quad r_j^1 = \Delta^1 \cdot j, \quad \Delta^1 = 1/V \quad (\mathbf{j = 1, 2, ..., V}); \qquad \{2\}$$

$$p_{\mathbf{\Psi}}(r_k^2), \quad p_{\mathbf{\Psi}}(r_0^2) = 0, \quad r_0^2 = 0, \quad r_k^2 = \Delta^2 \cdot k, \quad \Delta^2 = 1/W \quad (\mathbf{k = 1, 2, ..., W}). \qquad \{2^*\}$$

п.6. Вероятности *элементарных* событий *исходных опытов* в *объединенном опыте уменьшаются. Уменьшение* вероятностей *зависит от типа* (определение 6 [19,34]) ***объединения*** (замечание 12 [19,39]) ***опытов.* Таким же образом *уменьшаются* значения *вероятностных* функций {2} и {2*} *исходных* величин. п.7. *Объединение* $\mathbf{\Phi} \cup \mathbf{\Psi}$ случайных величин определяет *одномерную вероятностную* функцию $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{r_j^1 \cup r_k^2 \to \mathbf{a_j^1} \cup \mathbf{a_k^2}\}$ *суммы вероятностных* функций величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$, которая *полностью характеризует систему.* Если они *не пересекаются*, то будем иметь $\mathbf{V + W}$ значений *вероятностной* функции $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{r_j^1 \cup r_k^2\}$ *суммы.* Если величины $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ *пересекаются* в K точках, то значения в этих точках *суммируются*** (замечание 14 [19,42]), **т.е. *число ее значений* также *уменьшается* и равно $\mathbf{V + W - K}$.**

<u>Замечание</u>* <u>27</u>. Громоздкость обозначений $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}$ определяется двумя причинами: 1) при *объединении* случайных величин их *пересечение* образует конструкцию, которую *условно* можно назвать *вероятностной* функцией *произведения* $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\cup}$** (п.4 примера 17 стр.69); **2) *вероятностные* функции *суммы* $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}$ и *произведения* $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}$ случайных величин *существуют (обе реально, а не условно) **также *при их совмещении*** (раздел 4.1.2, стр.74).

Приведем пример построения *вероятностной* функции и *закона* распределения *суммы* 2-х случайных величин при *их объединении.*

<u>Пример</u>* <u>18.</u> Положим, что K координат *вероятностных* функций случайных величин Φ и Ψ *одинаковы (условия {A}, т.е. часть элементарных событий 1-го и 2-го опытов имеют одинаковые метки, определение 8 [19,41]).

1-й тип объединения (проведение «наугад» одного из опытов, определение 6 [19,34]). **Пусть $\mathbf{P(b_1)}$ и $\mathbf{P(b_2)}$ вероятности *элементарных* событий $\mathbf{b_1}$ и $\mathbf{b_2}$ *опыта, в соответствии* с которыми делается *случайный выбор проведения одного из 2-х опытов*** (замечание 10 [19,34]). ***Вероятностная* функция *объединенной* случайной величины имеет вид:** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}(r_j^o) = p(r_j^1) \cdot P(b_1)$ **{3a},** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}(r_{V-K+j}^o) = p(r_{V-K+j}^1) \cdot \mathbf{P(b_1)} + p(r_j^2) \cdot \mathbf{P(b_2)}$ **{3b},** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}(r_{V+j}^o) = p(r_{K+j}^2) \cdot \mathbf{P(b_2)}$ **{3c}.**

2-й тип объединения (смешение опытов, определение 6 [19,33]). ***Вероятностная* функция *объединенной* величины равна:** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}(r_j^o) = p(r_j^1) \cdot m^1/M$ **{4a},** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}(r_{V-K+j}^o) = p(r_{V-K+j}^1) \cdot m^1/M + p(r_j^2) \cdot m^2/M$ **{4b},** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}(r_{V+j}^o) = p(r_{K+j}^2) \cdot m^2/M$ **{4c}.**

1. Индекс j последовательно принимает значения $\mathbf{j = 1, 2, ..., K}$ в формулах {3a}-

{4a}, $\mathbf{j = 1, 2, ..., V - K}$ в формулах {3b}-{4b} и $\mathbf{j = 1, 2, ..., W - K}$ в формулах {3c}-{4c}.
2. Функции {3b}-{4b} можно записать как *вероятностные* функции *произведения* случайных величин при *их объединении*: $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\cup}(r^o_{V-J+j}) = p(r^1_{V-J+j}) \cdot P(b_1) + p(r^2_j) \cdot P(b_2)$ для *1-го типа* и $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\cup}(r^o_{V-J+j}) = p(r^1_{V-J+j}) \cdot m^1/M + p(r^2_j) \cdot m^2/M$ для *2-го типа объединения.* Правда, какого-то особого смысла в этом нет: для вычисления вероятностей *любых* событий *достаточно закона* распределения *суммы.* Поэтому и говорится *об условности вероятностной* функции *произведения.* 3. При значениях $\mathbf{P(b_1)} = m^1/M$ и $\mathbf{P(b_2)} = m^2/M$ формулы не *отличаются.* В этом случае *закон* распределения *не зависит от типа объединения и имеет одинаковый вид.*

Запись *закона* распределения *объединенной* случайной величины мало чем *отличается* от *закона* распределения *одномерной* случайной величины. Введем еще два *новых* понятия:

***Определение* 6.** *Недействительную* функцию $\mathbf{E}\{r^1_j \cup r^2_k \to \mathbf{a^1_j} \cup \mathbf{a^2_k}\}$ *недействительных* аргументов $\mathbf{a^1_j}$ ($\mathbf{j = 1, 2, \ldots, V}$) и $\mathbf{a^2_k}$ ($\mathbf{k = 1, 2, \ldots, W}$), *определенную* на *объединенных* множествах $\mathbf{a^1_j} \cup \mathbf{a^2_k}$ *элементарных* событий *2-х опытов,* назовем *объединенной дискретной* случайной величиной.

***Определение* 7.** *Действительную* функцию $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{r^1_j \cup r^2_k\}$ *действительных* аргументов $0 \le r^1 \le 1$ $0 \le r^2 \le 1$ назовем *вероятностной* функцией суммы *объединяемых* случайных величин.

***Действительную* функцию $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\cup}\{r^1_j \cup r^2_k\}$, образованную *пересечением вероятностных* функций *исходных* величин можно *условно* назвать *вероятностной* функцией *произведения* при *объединении* величии.**

Говоря о *вероятностных* функциях *суммы* или *произведения*, мы *намеренно подчеркиваем* их *принадлежность к объединению* величин, ибо они *существуют* при *их совмещении* (**замечание 27, стр.70**).

Обратим внимание на следующие моменты:

1. При использовании множеств *действительных* чисел R^1 и R^2 *области определения исходных вероятностных* функций, а также *вероятностной* функции *суммы* $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{r^1_j \cup r^2_k\}$ *одинаковы* и определяются отрезками $0 \le r \le 1$.

2. Однако при использовании множеств действительных чисел X^1 и X^2 *области* определения *исходных вероятностных* функций в общем случае *разные.*

Пусть *непрерывные* случайные величины Φ и Ψ определены на отрезках ($x^1_H \le x^1 < x^1_K$) и ($x^2_H \le x^2 < x^2_K$) соответственно. Для определенности положим $l_\Phi = x^1_K - x^1_H > x^2_K - x^2_H = l_\Psi$. Если $x^1_K > x^2_H$ или $x^2_K > x^1_H$, то случайные величины *пересекаются*, в противном случае (если $x^1_K \le x^2_H$ или $x^2_K \le x^1_H$) – *не пересекаются. Область определения вероятностной* функции *суммы* зависит от *области пересечения и изменяется* от значения $l_{\max} = l_\Phi + l_\Psi$ (если $x^1_K \le x^2_H$ или $x^2_K \le x^1_H$) до значения $l_{\min} = l_\Phi$ (если $x^1_K > x^2_H$ и $x^2_K > x^1_H$).

3. При *непрерывных* величинах значения *вероятностных* функций *исходных* случайных величин *уменьшаются пропорционально отношениям*

$l_{\Phi}/l_{\max}$ **и** $l_{\Psi}/l_{\max}$ **соответственно.**

Замечание **к п.3. По факту, при *непрерывных* случайных величинах мы рассматриваем только *2-й тип объединения* (т.е. соответствующий *смешению опытов* определение 6 [19,34]). Мы просто не смогли придумать реального примера *с 1-м типом объединения*, а описание его применения далеко не просто и громоздко.**

4. Если случайные величины Φ и Ψ *дискретны*, то *при условиях* $x_K^1 \leq x_H^2$ или $x_K^2 \leq x_H^1$ они *точно не пересекаются*. Однако они могут *не пересекаться* и *при условиях* $x_K^1 > x_H^2$ или $x_K^2 > x_H^1$: чтобы они *пересекались должны выполняться равенства* {A} (п.2 примера 17, стр.69).

Приведем пример *вероятностных* функций *суммы* и *произведения* при *объединении* случайных величин для крайних вариантов.

***Пример* 19. Для упрощения положим W=V, $m^2 = m^1$ и $\mathbf{P}(\mathbf{b_2}) = \mathbf{P}(\mathbf{b_1}) = 1/2$. В этом случае *вероятностные* функции $p_{\Sigma}|_{\cup}$ при *1-м и 2-м типе объединения одинаковы* (замечание 12 [19,39]). Рассмотрим два варианта: п.1. *Равенства* $x_v^1 = x_w^2$ {A} *не выполняются при любом* значении $\mathbf{v} = 1, 2, ..., \mathbf{V}$, т.е величины *не пересекаются*. Есть *только вероятностная* функция *суммы*, определяемая значениями $p_{\Sigma}|_{\cup}(x_j^o) = p(x_j^1)/2$ и $p_{\Sigma}|_{\cup}(x_{V+j}^o) = p(x_j^2)/2$ $(j = 1, 2, ..., V)$. п.2. Равенства {A} выполняются для всех значений $\mathbf{v} = 1, 2, ..., \mathbf{V}$, т.е. величины *полностью пересекаются*. Существует *только вероятностная* функция *произведения*, которая определяется значениями $p_{\Pi}|_{\cup}(x_j^o) = \{p(x_j^1) + p(x_j^2)\}/2$ $(\mathbf{v} = 1, 2, ..., \mathbf{V})$. Если $p(x_j^2) = p(x_j^1)$ (т.е. вероятностные функции исходных величин одинаковы), то получим *вероятностную* функцию *исходного опыта* (сравни с примером 11, стр.36).**

Отметим следующее. **1.** Построение *вероятностной* функции и *закона* распределения *объединенной* величины *вторым способом* проще всего выполнить, *исходя* из вероятностей *элементарных* событий *объединенного опыта*, учитывая, что он представляется в виде *одномерной* таблицы (**пример 15 и замечания 12-14 [19,39,41,42]**). Поэтому здесь он не рассматривается. **2.** Так как *вероятностная* функция *суммы* случайных величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ при *их объединении* является *одномерной*, то *при 2-м способе* построения ее *закон* распределения не *зависит* от вида *вероятностной* функции и является *дискретным аналогом* <u>*равновероятного*</u> *непрерывного* распределения, определенного на отрезке (**вывод W.14, стр.50**).

Рассмотренный подход распространяется на системы N случайных величин. *Свойства* полученных *объединенных* величин *аналогичны свойствам объединения двух* случайных величин.

Из теории событий, основанной *новой исходной* системе, определений *объединенной* случайной величины, *вероятностной* функции и *закона* распределения *суммы* величин при *их объединении* следует:

W.29. По *закону* распределения $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\Sigma}}|_{\cup}(x_H \leq x < x_{\mathbf{dan}})$ определяется вероятность события, *заключающегося* в появлении *только одного* (или $\mathrm{a}_{\mathrm{j}}^{1}$, или $\mathrm{a}_{\mathrm{k}}^{2}$) *элементарного* события из множеств *элементарных* событий *двух опытов*, *принадлежащих интервалу* $x_H \leq x < x_{\mathbf{dan}}$.

<u>*Замечания.*</u> 1. Вывод подчеркивает правильную трактовку закона распределения, однако это вовсе не означает, что в области не определяется сложное событие. Оно как раз и заключается в появлении одного из элементарных событий объединенного опыта, принадлежащих интервалу (вывод W.18 [19,37]). 2. Вывод справедлив и для закона распределения непрерывной случайной величины (появляются элементарные события с нулевой вероятностью.

Смысл вывода **W.29** существенно изменился по отношению к выводам **W.17** (**стр.52**) и **W.27** (**стр.65**). Хотя при *объединении* тоже появляется *одно элементарное* событие, но оно может быть *любым элементарным событием* из 2-х (**и более**) множеств *элементарных* событий *2-х* (**и более**) *опытов*. Это означает, что мы имеем дело с *другим классом* случайных величин, который определяется *системой* величин *первого класса*. Вывод **W.18** и положение **{A.16.2}** (**стр.52**) *об ограниченности области* определения случайной величины остаются в силе и при *объединении системы* случайных величин. На основе *представления сложного* опыта *в виде* случайной величины:

Q.IX. Определен *второй* более сложный *класс* случайных величин – системы величин, основой которого являются случайные величины первого класса. Введены две возможные операции с величинами: *объединение или совмещение* случайных величин.

Q.X. *Операция объединения* определяет *первый вид* случайных величин *второго класса – объединенные* случайные величины. *Объединенная* случайная величина *полностью* характеризуется *действительной* функцией *действительного* аргумента: *вероятностной* функцией *суммы вероятностных* функций *исходных* случайных величин *системы*.

<u>*Замечание.*</u> При *пересечении* случайных величин можно использовать другую характеристику: *условную вероятностную* функцию их *произведения*, которая *существует только в области пересечения* величин.

Легко видеть, что есть аналогия (**не только внешнее сходство**) между *объединенной и одномерной* случайной величиной. Но *при вычислении* вероятностей *сложных* событий, определяемых *объединенной* величиной, *следует* учитывать *условия* **(1-2)**, оговоренные в п.5 (**пример 17, стр.69**).

Очевидно, что *сумма* случайных величин при *их объединении противоречит принятому пониманию* в существующей теории вероятностей (**пример 9, стр.32**). Однако *операция объединения* случайных величин дает такое же понимание *суммы* величин, которое *существует в математической* статистике (**пример 11, стр.36**).

Следовательно, *операция объединения* случайных величин и *теоретическое* построение *вероятностной* функции *суммы* случайных величин при *их объединении* согласуется с *экспериментами* и, в принципе, *соответствует операции суммы действительных* функций *действительных* аргументов (**примеры 7, 8 стр.29,31**).

В применяемой теории вероятностей понятия *двумерной* (n**-мерной**) величины и *системы* N величин *неразличимы*, а *операций объединения или совмещения* случайных величин *не существует*. Соответственно, *нет ни объединенной* случайной величины, ни ее *вероятностной* функции *суммы*.

4.1.2. *Совмещение систем* случайных величин

В этом случае исходные случайные величины $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ могут быть представлены в 2-х вариантах: **1 (основной).** Двумя разными множествами X и Y *действительных* чисел на осях системы *ортогональных* (**не только декартовых**) координат. **2 (дополнительный).** На одной оси.

Далее используем декартову систему X и Y. Пусть $\mathbf{a^1_j}$ $(\mathbf{j=1,2,...,V})$ и $\mathbf{a^2_k}$ $(\mathbf{k=1,2,...,W})$ *элементарные* события *1-го и 2-го опытов* соответственно.

Замечание **28. Числа *возможных* исходов *1-го и 2-го опытов* равны** $m^1=\sum_{j=1}^{V} m^1_j$ **{1} и** $m^2=\sum_{k=1}^{W} m^2_k$ **{1*} (где** m^1_j, m^2_k **– числа *возможных* исходов их *элементарных* событий), а число *возможных* исходов *совмещенного опыта*** – $M_\times = m^1\cdot m^2$ **{1**}.**

Свойства системы случайных величин при их совмещении следуют из свойств совмещения опытов.

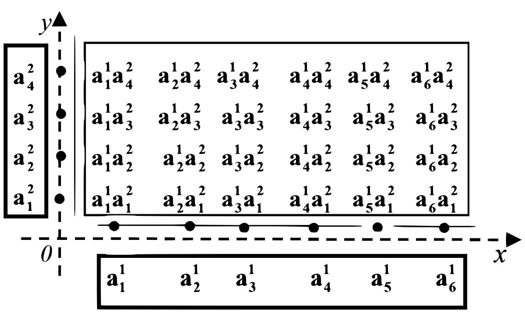

Рис. 7

Пример **20. Числа** $x_H < x_1 < x_2 < ... < x_V = x_H$ **и** $y_H < y_1 < y_2 < ... < y_V = y_H$ **в этом случае определяют координаты** x_j **и** y_k **на осях** X **и** Y**, которым *соответствуют элементарные* события** $\mathbf{a^1_j}$ $(\mathbf{j=1,2,...,V})$ **и** $\mathbf{a^2_k}$ $(\mathbf{k=1,2,...,W})$ ***1-го и 2-го опытов* соответственно. Для наглядности, на рис.7 изображены *элементарные* события *1-го* (ниже оси** X**) и *2-го* (слева от оси** Y**) *опытов*. Как *исходные* (первичные элементы), они выделены прямоугольниками с утолщенными линиями. *Сложные* события (*произведения*** $\mathbf{a^1_j}\cdot\mathbf{a^2_k}$ **множеств *элементарных* событий), как *вторичные* элементы, – прямоугольниками с тонкими линиями. Точки на отрезках *прямых* относятся к *элементарным* событиям *1-го и 2-го опытов*. Вместо точек (пересечение прямых** $x=y_k$ **и** $y=x_j$**),**

изображены *произведения* $\mathbf{a^1_j \cdot a^2_k}$, которые определяют *сложные* события $\mathbf{A_{j,k} = a^1_j \cdot a^2_k}$ События $\mathbf{A_{j,k}}$ *несовместимы* (вывод W.27 [19,40]).

п.1. **Результат *совмещения* $\mathbf{\Phi \times \Psi}$ случайных величин $\mathbf{\Phi(x^1_j \to a^1_j)}$ и $\mathbf{\Psi(x^2_k \to a^2_k)}$ – *двумерная* случайная величина $\mathbf{\Pi\{(x_j, x_k) \to a^1_j \cdot a^2_k = A_{j,k}\}}$, которая определяется *отображением* множества *произведений* $\mathbf{A_{j,k}}$ *элементарных* событий *совмещенного опыта* (пример 15 [19,32]) на плоскость. Точки плоскости, определяемые *парами* (x_j, x_k) координат, соответствуют *произведениям элементарных* событий.**

п.2. **1. Случайная величина $\mathbf{\Pi\{(x_j, x_k) \to a^1_j \cdot a^2_k = A_{j,k}\}}$ представима *только в двумерном* виде. В этом случае *исходные* величины $\mathbf{\Phi(x^1_j \to a^1_j)}$ и $\mathbf{\Psi(x^2_k \to a^2_k)}$ представляются на отрезках $(x_H \leq x \leq x_H)$ и $(y_H \leq y \leq y_H)$ координатных осей. 2. *Пересечение опытов не изменяет* число *произведений* $\mathbf{A_{j,k}}$ *совмещенного опыта.* Следовательно, *пересечение* величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ *не влияет на двумерную* случайную величину. 3. В некоторых приложениях теории (например, теории надежности) необходимо знать *область пересечения* величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$. Ее можно определить по представлению *исходных* случайных величин на одной оси так же, как это делается при *объединении* величии (раздел 4.1.1, стр.68). Т.е. при *совмещении опытов* это представление *дополняет первое*, что необходимо для определения *пересечения* величин.**

п.3. **Пусть события $\mathbf{A^1}$ и $\mathbf{B^2}$ определяются выражениями $\mathbf{A^1 = \sum_{v=1}^{j} a^1_v \cdot \sum_{w=1}^{W} a^2_w}$ и $\mathbf{B^2 = \sum_{v=1}^{V} a^1_v \cdot \sum_{w=1}^{k} a^2_w}$, а их вероятности (с учетом равенств $\sum_{k=1}^{W} \mathbf{P(a^2_k)} = 1$ и $\sum_{k=1}^{V} \mathbf{P(a^1_j)} = 1$) $\mathbf{P(A^1)} = \sum_{v=1}^{j} \mathbf{P(a^1_v)}$ $\{2\}$ и $\mathbf{P(B^2)} = \sum_{w=1}^{k} \mathbf{P(a^2_w)}$ $\{2^*\}$.**

В события $\mathbf{A^1}$ и $\mathbf{B^2}$ входят *одинаковые произведения* $\mathbf{A_{v,w} = a^1_v \cdot a^2_w}$ $(\mathbf{v = 1, 2, ..., j;\ w = 1, 2, ..., k})$ *элементарных* событий *исходных опытов*, следовательно, *они совместимы. Совместимость* событий определяет: *произведение*, вероятность которого равна $\mathbf{P(A^1 \cdot B^2)} = \sum_{v=1}^{j} \mathbf{P(a^1_v)} \cdot \sum_{w=1}^{k} \mathbf{P(a^2_w)}$ $\{3\}$, и вероятность их *суммы* – $\mathbf{P(A^1 + B^2) = P(A^1) + P(B^2) - P(A^1 \cdot B^2)}$ $\{3^*\}$.

На множествах R^x $(0 \leq r^x \leq 1)$ и R^y $(0 \leq r^y \leq 1)$ *действительных* чисел *вероятностные* функции величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ *при 1-и способе* построения (**формулы (1), стр.46**) имеют вид:

$$p(r^x_j),\quad (p\{r^x_0\}) = 0,\quad (r^x_0 = 0),\quad r^x_j = \Delta^x \cdot j,\quad \Delta^x = 1/V \ \ (\mathbf{j = 0, 1, 2, ..., V}); \qquad \{4\}$$

$$p(r^y_k),\quad (p\{r^y_0\} = 0),\quad (r^y_0 = 0),\quad r^y_k = \Delta^y \cdot k,\ \ \Delta^y = 1/W \ \ (\mathbf{k = 0, 1, 2, ..., W}). \qquad \{4^*\}$$

п.4. **Вероятности *элементарных* событий *исходных опытов в совмещенном опыте не изменяются* (вывод W.28 [19,40]), следовательно, не *изменяются* и значения *вероятностных* функций {4} и {4*} *исходных* случайных величин.**

п.5. ***Совмещение*** $\mathbf{\Phi \times \Psi}$ **величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ определяет *двумерную вероятностную* функцию и *закон* распределения случайной величины $\mathbf{\Pi\{(r^x_j, r^y_k) \to a^1_j \cdot a^2_k\}}$, которые являются *произведением вероятностных* функций (законов распределения) *исходных* случайных величин:**

$p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(r^x_j, r^y_k)\}= p(r^x_j)\cdot p(r^y_k), \qquad p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(r^x_0, r^y_0)\}= 0, \qquad r^x_0 = r^y_0 = 0$
$(\mathbf{j = 0,1,2,...,V;\ k = 0,1,2,...,W});$ **(1)**

$P_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(r^x_n, r^y_m)\}= \mathbf{P_{\Pi}}|_{\times}(r^x_j \le r^x_n, r^y_k \le r^y_m)= \sum_{j=0}^{n} p(r^x_j)\cdot \sum_{r=0}^{m} p(r^y_k),$
$P_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(r^x_V, r^y_W)\}= \sum_{j=0}^{V} p(r^x_j)\cdot \sum_{r=0}^{W} p(r^y_k)= 1.$ **(2)**

{A.19.1} ***Область определения*** **распределения вероятностей, определяемого** ***системой*****, образованной** ***совмещением*** **двух случайных является** ***прямоугольной и зависит только от областей определения исходных*** **распределений на осях X и Y.**

п.6. По формуле {3*} вычисляется вероятность *суммы сложных* событий $\mathbf{A^1}$ и $\mathbf{B^2}$, которые определяются *элементарными* событиями *1-го и 2-го опытов* соответственно. Это позволяет определить *вероятностную* функцию и *закон* распределения *суммы исходных* случайных величин (с учетом их совместимости) при их *совмещении*. На множествах R^x ($0 \le r^x \le 1$) и R^y ($0 \le r^y \le 1$) *действительных* чисел они принимают вид:

$p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}\{(r^x_j, r^y_k)\} = p(r^x_j)+p(r^y_k)-p(r^x_j)\cdot p(r^y_k), \ (p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}\{(r^x_0, r^y_0)\}= 0),$
$(r^x_0 = r^y_0 = 0)$ $(\mathbf{j = 0,1,2,...,V;\ k = 0,1,2,...,W});$ **(3)**

$P_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}(r^x_n, r^y_m)= \sum_{j=1}^{n} p(r^x_j)+ \sum_{r=1}^{m} p(r^y_k)- \sum_{j=0}^{n} p(r^x_j) \cdot \sum_{k=0}^{m} p(r^y_k),$
$P_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}(r^x_V, r^y_W)= 1.$ **(4)**

Вероятностная функция **(1)** *полностью* характеризует систему. Как и для *двумерной* случайной величины (**стр.56**), *введем дополнительные* функции:

Одномерные вероятностные **функции, соответствующие *строке с данным* номером $\mathbf{w = 1,2,...,W}$ таблицы *или столбу с данным* номером $\mathbf{v = 0,1,2,...,V}$ (замечание 19, стр.55):**

$p(r^x_j|_w)$, $(p\{r^x_0|_w\}= 0)$ $(\mathbf{j = 1,2,...,V});$ **(a)** $\quad p(r^y_k|_v)$, $(p\{r^y_0|_v\} = 0)$ $(\mathbf{w = 1,2,...,W}).$ **(b)** **(5)**

где $p(r^x_j|_w)= p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(r^x_j, r^y_w)\}= p(r^x_j)\cdot p(r^y_w)$ $(\mathbf{j = 0,1,2,...,V})$ **{5} в строке с данным номером** $\mathbf{w = 1,2,...,W}$ **и** $p(r^y_k|_v) = p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(r^v_j, r^y_k)\}= p(r^x_v)\cdot p(r^y_k)$ $(k = \mathbf{0,1,2,...,W})$ **{5*} в столбце с данным номером** $\mathbf{v = 1,2,...,V}$.

Одномерные вероятностные **функции, определяемые *суммами* функций (a) и (b) *по всем строкам* (с номерами $k = 1,2,...,W$) *или столбцам* (с номерами $j = 1,2,...,V$) таблицы:**

$\sum_{w=1}^{W} p(r^x_j|_w) = p(r^x_j) = \mathbf{P(a^1_j)},$ **(a)** $\quad \sum_{v=1}^{V} p(r^y_k|_v) = p(r^y_k) = \mathbf{P(a^2_k)}.$ **(b)** **(6)**

Формулы получены с учетом равенств $\sum_{k=1}^{W} P(a^2_k)= 1$ **и** $\sum_{k=1}^{V} P(a^1_j)= 1$.

{A.19.2} ***Одномерные вероятностные*** **функции** $p(r^x_j|_w)$ **(j=1,2,...,V) (w=1,2,...,W) (или** $p(r^y_k|_v)$ **(k=1,2,...,W) (v=1,2,...,V))** ***отличаются друг от друга только*** **множителем** $p(r^y_w)$ **(или множителем** $p(r^x_v)$ **) общим для всех значений j при данном w=1,2,...,W.**

Таким образом, в результате *суммирования вероятностных* функций **(5)** мы получили *вероятностные* функции *исходных* случайных величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$.

Говоря «языком входов и выходов» (**определение 'D.1', стр.17**) имеем *двумерную* таблицу значений *вероятностной* функции **(1)** с двумя «входами» (**в направлении осей** X **и** Y) – ***вероятностные* функции {4}-{4*}**, и двумя «выходами» – **те же самые функции**. Но это просто так – для сравнения с *вероятностной* функцией *двумерной* случайной величины, у которой нет «входов», зато есть «выходы» – вот только «ведут они в никуда». Важны следствия из п.3 (**пример 20, стр.74**) и формул **{3}-{3*}**: *вероятностные* функции и *законы* распределения *произведения* и *суммы исходных* случайных величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ при *их совмещении.*

Цель введения одномерных функций **{3}**– показать *связь* между *свойствами совмещения* случайных величин *и* (**простых**) *опытов* [19,44-45].

> **W.30.** ***Одномерные вероятностные* функции** $p(r_j^x|_w)$ (**или** $p(r_k^y|_v)$) ***не пересекаются*** (**в них нет точек** (r_j^x, r_k^y) **соответствующих хотя бы одному произведению** $\mathbf{A_{j,k}} = \mathbf{a_j^1} \cdot \mathbf{a_k^2}$ **элементарных событий**)**.** ***Вероятностные* функции** $p(r_j^x|_w)$ **и** $p(r_k^y|_v)$ ***пересекаются*** (**при значениях** $w = k$ **и** $v = j$ **они содержат точку соответствующую произведению** $(r_j^x, r_k^y) \rightarrow \mathbf{A_{j,k}}$)**.**

Имеем *схожесть свойств* распределения *совмещенной* случайной величины $\mathbf{\Pi}\{(r_j^x, r_k^y) \rightarrow \mathbf{a_j^1} \cdot \mathbf{a_k^2}\}$ и *двумерной* величины $\mathbf{\Phi}\{(r_j^x, r_k^y) \rightarrow \mathbf{a_{j,k}}\}$, однако *отличие их распределений весьма существенно*, что следует из анализа в настоящем подразделе и разделе 3.2.1.

Эти свойства справедливы и для сумм функций $p(r_j^x|_w)$ или $p(r_k^y|_v)$: свойства необходимо учитывать при вычислении вероятностей событий, определяемых случайной величиной $\mathbf{\Pi}\{(r_j^x, r_k^y) \rightarrow \mathbf{a_j^1} \cdot \mathbf{a_k^2}\}$.

Из вывода **W.30** и анализа, данного в пунктах 3 и 6, следует:

> **W.31. При *совмещении* случайных величин *вероятностная* функция** $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}\{(r_j^x, r_k^y)\}$ ***суммы исходных* величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ является следствием *пересечения одномерных вероятностных* функций** $p(r_j^x|_w)$ **и** $p(r_k^y|_v)$**. Она определяется формулами (3) по *вероятностной* функции *произведения* величин.**

Таким образом, имеем *вероятностную* функцию *суммы* $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}\{(r_j^x, r_k^y)\}$ *исходных* величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$, но *связанную с их совмещением.* Она *существенно отличается* от *вероятностной* функции $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{(r_j^x, r_k^y)\}$ (**формулы (3-4), пример 18, стр.70**) *суммы при объединении* величин. Введем последние *новые* понятия *теории* случайных величин.

Определение 8. *Недействительную* функцию $\mathbf{\Pi}\{(r^x_j, r^y_k) \rightarrow \mathbf{a^1_j} \cdot \mathbf{a^2_k}\}$ $(\mathbf{j = 0, 1, 2, ..., V})$ $(\mathbf{k = 0, 1, 2, ..., W})$ *недействительных* аргументов, *определенную* на плоскости, точки которой, определяемые *парами* (r^x_j, r^y_k) координат, соответствуют множеству *произведений* $\mathbf{A_{j,k} = a^1_j \cdot a^2_k}$ *элементарных* событий *совмещаемых опытов*, назовем *дискретной совмещенной* случайной величиной.

Определение 9. *Действительную* функцию $p_{\mathbf{\Pi}}|_\times\{(r^x_j, r^y_k)\}$ *действительных* аргументов ($0 \le r^x \le 1, 0 \le r^y \le 1$) назовем *дискретной вероятностной* функцией *произведения совмещаемых* величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$.

Определение 10. *Двумерную действительную* функцию $p_{\mathbf{\Sigma}}|_\times\{(r^x_j, r^y_k)\}$ *действительных* аргументов назовем *дискретной вероятностной* функцией *суммы совмещаемых* величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$.

Говоря о *вероятностных* функциях *суммы* или *произведения*, мы *намеренно подчеркиваем* их *принадлежность* к *совмещению* величин, ибо они *существуют* и при *их объединении* (**замечание 27, стр.70**).

Отметим следующее. **1.** Построение *вероятностной* функции и *закона* распределения *совмещенной* величины *вторым способом* проще всего выполнить, *исходя* из вероятностей *элементарных* событий *совмещенного опыта*, учитывая, что он представляется в виде *двумерной* таблицы (**пример 15 и замечания 13-14 [19,32,39-42]**).

Поэтому здесь он не рассматривается. **2.** Так как *вероятностные* функции *произведения* и *суммы* случайных величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ при *их совмещении* являются *двумерными*, то *при 2-м способе* построения *закон* распределения при *совмещении* величин *не зависит* от вида *вероятностной* функции и является *дискретными аналогами* *равновероятного непрерывного* распределения, определенного на плоскости (**вывод W.23, стр.61**).

Рассмотренный подход распространяется на системы N случайных величин. *Свойства* полученных *совмещенных* величин *аналогичны свойствам совмещения двух* случайных величин. Из теории событий, основанной *новой исходной* системе, определений *совмещенной* случайной величины, *вероятностной* функции и *закона* распределения *произведения* величин при *их совмещении* следует:

W.32. По *закону* распределения $\mathbf{P_\Sigma}|_\times(x_H \le x < x_{\mathbf{dan}}, y_H \le y < y_{\mathbf{dan}})$ определяется вероятность события, *заключающегося* в одновременном появлении *элементарных* событий «*и* $\mathbf{a^1_j}$, *и* $\mathbf{a^2_k}$» из множеств *элементарных* событий *каждого из опытов*, *принадлежащих области* $(x_H \le x < x_{\mathbf{dan}}, y_H \le y < y_{\mathbf{dan}})$.

Замечание. **1. Вывод подчеркивает правильную трактовку закона распределения, однако это вовсе не означает, что в области не определяется сложное событие. Оно как раз и заключается в одновременном появлении по одному элементарному событию каждого из опытов, которые входят в событие (вывод W.18 [19,37]), выделенное в области определения. 2. Вывод справедлив и для закона распределения непрерывной случайной величины (появляются элементарные события с нулевой вероятностью).**

Смысл вывода **W.32** существенно *отличатся* от всех предыдущих выводов (**W.17, W.27, W.29 стр.52, 65,73**). При *совмещении* случайных величин одновременно появляются *два* (**и более**) *элементарных* события: *по одному* из множества *элементарных* событий *каждого из опытов.* Тем не менее, *совмещенная* величина, как и *объединенная* величина, определяется *системой* случайных величин *первого класса. Отличие* означает, что мы имеем дело *с другим видом* случайной величины *того же класса.* Вывод **W.18** (**стр.52**) и положение **{A.16.2}** (**стр.52**) об *ограниченности области определения* случайной величины остаются в силе и при *совмещении системы* случайных величин.

Последний пример – *объединение двух совмещенных* величин.

***Пример* 21. Положим: совмещенные величины $\mathbf{\Pi^1}\{(x_j, y_k)\rightarrow \mathrm{a_j}\cdot \mathrm{b_k}\}$ {10} и $\mathbf{\Pi^2}\{(x'_j, y'_k)\rightarrow \mathrm{a_j}\cdot \mathrm{b_k}\}$ {10*} определены на множествах *элементарных* событий $\mathrm{a_j}$ ($\mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{N}$) и $\mathrm{b_k}$ ($\mathrm{k}=1,2,...,\mathrm{M}$). Для *вероятностных* функций *одномерных* величин справедливы равенства $p^1(x_j) = p^2(x'_j) = \mathbf{P}(\mathrm{a_j})$ {11} и $p^1(y_k) = p^2(y'_k) = \mathbf{P}(\mathrm{b_k})$ {11*}. Соответственно, равны значения *вероятностных* функций $p_{\mathbf{\Pi}^1}|_\times\{(x_j, y_k)\} = p^1(x_j)p^1(y_k$ и $p_{\mathbf{\Pi}^2}|_\times\{(x'_j, y'_k)\}, = p^2(x'_j)p^2(y'_k)$ произведения совмещенных величин. *Объединим* совмещенные величины {10} и {10*}. Рассмотрим два крайних варианта.**

п.1. При любых значениях $\mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{N}$ и $\mathrm{k}=1,2,...,\mathrm{M}$ для *пар* (x_j, y_k) и (x'_j, y'_k) координат *выполняются равенства* $x_j = x'_j$ и $y_k = y'_k$ {12} (двумерный аналог условий {A}, п.2 примера 17, стр.69), т.е. случайные величины {10} и {10*} *полностью пересекаются.* Есть только *двумерная вероятностная* функция (п.2 примера 19 стр.72) *произведения* при *объединении* величин, которая равна $p_{\mathbf{\Pi}}|_\cup\{(x^o_j, y^o_k)\}=[p_{\mathbf{\Pi}^1}|_\times\{(x_j, y_k)\}+p_{\mathbf{\Pi}^2}|_\times\{(x'_j, y'_k)\}]/2 = p^1(x_j)p^1(y_k)$: т.е. значения ее вероятностей, равны значениям вероятностей функций {11} и {11*}.

п.2. Равенства {12} *не выполняются ни для одной из пар* $(x_j, y_k\ )$ и (x'_j, y'_k), т.е. случайные величины {10} и {10*} *не пересекаются.* В этом случае существует только *двумерная вероятностная* функция *суммы* (пример 19, п.1, стр.72) при *объединении* величин, которая определяется значениями $p_{\mathbf{\Sigma}}|_\cup\{(x^o_j, y^o_k)\}=p_{\mathbf{\Pi}^1}|_\times\{(x_j, y_k)\}/2 = p^1(x_j)p^1(y_k)/2$ для точек плоскости, определяемых *парами* (x_j, y_k) и $p_{\mathbf{\Sigma}}|_\cup\{(x^o_j, y^o_k)\}= p_{\mathbf{\Pi}^2}|_\times\{(x'_j, y'_k)\}/2 = p^1(x_j)p^1(y_k)/2$ для точек плоскости, определяемых *парами* (x'_j, y'_k).

Таким образом, получаем *двумерную* величину в $\mathrm{N}\cdot\mathrm{M}$ точках, соответствующие *парам* (x_j, y_k), и в $\mathrm{N}\cdot\mathrm{M}$ точках, соответствующие *парам* (x'_j, y'_k).

Значения *вероятностной* функции *суммы объединенной* величины *меньше* вероятностей *исходных* функций {11} или {11*} *в два раза.* Вычислив *вероятностные* функции *одномерных* величин $\Phi(x_j^o \to \mathbf{A_j})$ и $\Psi(x_k^o \to \mathbf{B_k})$, *на основе* полученной *вероятностной* функции *суммы при объединении* величин {10} и {10*}, легко убедиться в следующем:

> **{A.20} *Двумерная вероятностная* функция *суммы* $p_\Sigma \,|\, \cup\{(x_j^o, y_k^o)\}$ *объединенной* случайной величины не может быть представлена в виде *произведения 2-х вероятностных* функций *одномерных* величин $\Phi(x_j^o \to A_j)$ и $\Psi(x_k^o \to B_k)$ даже тогда, когда *исходные двумерные* функции являются *вероятностными* функциями *произведения совмещенных* величин.**

Единственное исключение из положения **{A.20}** – вариант, рассмотренный в п.1 примера 21. На анализе, приведенном в этом примере, и было *основано утверждение*, данное в замечании 11 (**стр.32**).

На основе *представления совмещения одномерных опытов в виде* случайной величины:

> **Q.XI. Определен *второй вид систем* случайных величин – *совмещенные* случайные величины. *Совмещенная* случайная величина полностью характеризуется одной *действительной* функцией *действительных* аргументов: *вероятностной* функцией *произведения вероятностных* функций совмещаемых величин.**
>
> **Q.XII. *Совмещенная* случайная величина имеет вторую *действительную* характеристику: *вероятностную* функцию *суммы вероятностных* функций *совмещаемых* величин, которая определяется *по вероятностной* функции их *произведения* с учетом свойств *совмещенной* величины..**

Ранее уже было сказано, что *сумма* случайных величин при их *объединении противоречит* пониманию *суммы* величин, *принятому* в существующей теории. Из анализа в подразделе 4.1.2 следует: понимание *суммы* величин, *принятое* в существующей теории, *не соответствует и вероятностной* функции *суммы вероятностных* функций исходных *совмещаемых* величин.

В применяемой теории имеется аналог *совмещения* случайных величин. Он определяется *на основе* понятия *двумерной* величины (**определения 'D, D.1', стр.16-17**) для частного (**хотя и наиболее важного**) случая: – так называемых «независимых испытаний» (**пояснение III, стр.28**).

При этом оговаривается, что **«... дело обстоит так только в том случае, когда**

вероятности на пространстве определены по правилу $P(\alpha_j, \beta_k) = p_j \cdot q_k$. Такое задание вероятностей правомерно, потому что в сумме они дают единицу» [6,149].

Реально же, в *принятой* теории вероятностей *не существует ни совмещаемых* случайных величин, *ни систем* случайных величин, как отдельного класса вообще. На этом разработку *новой исходной* системы понятий *теории* случайных величин можно считать завершенной.

5. Итог проведенных исследований

Вообще говоря, краткий итог исследований дан почти во всех разделах работы. Повторять их не будем (**за небольшим исключением**): при необходимости ограничимся ссылками. Разговор пойдет в основном о том, что мало освещено (**или вообще не упоминалось**) при изложении.

5.1. Итоги анализа принятой исходной системы

Начнем с того, *что исследовалось* при анализе *принятого* понимания (**стр.6-39**) случайной величины.

Соответствие принятых математических **моделей случайных величин: 1.** ***Исходной*** **системе** ***теории*** **событий (элементарной теории). 2.** ***Операциям с действительными*** **функциями** ***действительных*** **аргументов. 3.** ***Понятиям*** **теории множеств,** ***используемых*** **в теории вероятностей.**

Т.е. *принцип* анализа чисто *математический. Основной* результат, *подтвержденный* анализом:

> **{A.22}** ***Операции*** **со случайными величинами** ***не соответствуют ни операциям*** **с событиями,** ***ни операциям с действительными*** **функциями** ***действительных*** **переменных.**

Далее «ударение поставим» на другом аспекте, практически не используемом ранее.

> **{A.23}** ***Сравнение*** **некоторых** ***утверждений принятой теории*** **случайных величин с «Его Величеством» экспериментом.**

При анализе уже было сказано (**замечание к выводу W.2, стр.16**): ***аксиомы существования, нормировки математической*** **вероятности и** ***суммы*** **вероятностей 2-х событий – это** ***основа всей аксиоматической теории*** **вероятностей.**

Есть еще ***аксиома «непрерывности»*** **(или «равносильная» ей** ***расширенная аксиома сложения*****), необходимость которой «...объясняется тем, что в теории вероятностей постоянно приходится рассматривать события, подразделяющаяся на бесконечное число частных случаев» [1,52]. Однако она, мягко говоря, не всегда «работает» [19,48-52]. Возможно, поэтому при рассмотрении таких множеств примеры в большинстве случаев даются с применением точек, расположенных на** ***действительной числовой оси.*** **Фактически используется** ***<u>равномерное</u> непрерывное*** **распределение точек на отрезке, но об этом, по-видимому, в существующей теории говорить как-то не принято: кстати, оно тоже не соответствует упомянутой аксиоме. В частности, геометрическая вероятность рассматривается как пример непрерывного распределения. В аксиоме есть и внутренне противоречие, но на этом мы останавливаться не будем.**

Однако вопрос в том, что этими аксиомами «дело не заканчивается»: **для построения теории случайных величин дополнительно используются 4-е** ***утверждения*****, которые мы условно назвали «*****негласными аксиомами*****».**

Почему «негласные»? Хотя бы потому, что они *повторяются* в многочисленной литературе (**в первую очередь по теории вероятностей, но и в ее приложениях иногда тоже**) как *«само собой разумеющееся» без каких-либо* пояснений и *без каких-либо* указаний на то, какие *доводы* «послужили» *основой* для данного утверждения. Да и вообще *нигде нет даже намека* на то, что эти *утверждения* являются *аксиомами*. Отметим, что уже *сама попытка* пояснить, откуда следует то или иное *утверждение* могла бы «посеять сомнения» в логичности какого-то их них.

Но *ни попыток, ни сомнений*: *Никаких*!

Фактически же, только одно из них – **существование случайных величин *разной размерности* (вторая «негласная аксиома», стр.19) является *аксиомой*, ибо *связано с практикой*. *Они реальна существуют*!.**

О трех других поговорим ниже. Учитывая, что случайная величина является *другим представлением испытания*, далее будем говорить об *опытах* (**или *сложных* опытах**), *элементарных* и *сложных* событиях.

***Утверждение*: случайная величина – *действительная* функция (первая «негласная аксиома», вывод W.1, стр.15).**

Рассмотрим примеры №1 и №2, предваряющие анализ принятого понимания случайной величины (**стр.6-7**).

***Пример* 22. Бросание игральной кости. Числа очков j=1,2,. . . ,6, изображенные на гранях, являются *метками* (ничто не запрещает заменить их другими, например, картинками с разными изображениями на гранях) *элементарных* событий a_j. Мы заменили им пример с монетами: пояснения существенно проще.**

В *экспериментах* появляются только *элементарные* события с *метками*, определяемых числами очков. *Действительные* числа будут только тогда, когда мы *поставим каждому из них в соответствие*, например, какую-то *сумму* выигрыша $x_j > 0$ (j=1,2,...,6) или проигрыша $x'_k < 0$ (k=1,2,...,6-j) в рублях, но *числа* x_j или x'_k рублей *никогда не появляются* при бросании игральной кости.

***Пример* 23. Выстрел по плоскости (например, из дерева), часть которой ограничена замкнутой линией – мишень.**

п.1. Результат выстрела: появление *только* «дырки» в плоскости: она может быть *либо в мишени*, *либо вне мишени*. Мы условно определяем их как *два элементарных* события *с метками* «попадание» и «промах». Если произведено N выстрелов, получим N «дырок», из которых какие-то будут с *меткой* «попадание», а какие-то – с *меткой* «промах». Если выстрелы производятся в *одинаковых условиях* (один стрелок, одно оружие, одно расстояние до мишени и т.п.), то подсчитав число *элементарных* событий «попадание» или «промах», можно вычислить вероятности обозначенных событий. Мы также увидим, что «дырки» *расположены* на некоторой

части плоскости, *ограниченной* замкнутой кривой. Т.е. можно считать, что это случайное явление имеет *двумерное* распределение[71]. Если число выстрелов достаточно велико, то, возможно, можно будет *предположить*, что эта кривая является эллипсом (или окружностью).

п.2. ***Но никаких действительных** (и мнимых тоже) **чисел как не было, так и нет**!* Для того, чтобы они появились необходимо: 1) определить *на плоскости систему координат* (например, декартовых); 2) положить, что «дырка» много *меньше размера* мишени и представить *ее точкой* (идеализация); 3) определить значения *пар* (x_j, y_k) $(\mathrm{j, k} = 1, 2, ..., \mathrm{N})$ координат *для каждой точки*; 4) положить, что *элементарным* событием (в нашем понимании, положение {A11} стр.41: точнее – одного из его возможных исходов) является «дырка» в плоскости и поставить ему в соответствие пару (x_j, y_k) координат. Однако, как и в примере с игральной костью, *действительные числа никогда не появляются в экспериментах*!

Можно привести множество других примеров и аналогичным образом «расставить все по полкам», как и в этих примерах, но вполне достаточно этого анализа, чтобы утверждать следующее:

> **{A.24}** *Случайность* определяется *свойствами* изучаемого объекта (вообще-то – свойством природы): результат *эксперимента* – появление *элементарного* события (точнее – одного из его возможных исходов). *При физических измерениях случайность* определяется его состоянием *в тот момент и в тех условиях*, при которых *проводится данное измерение*, но *никоим образом не числами* – результатами *измерений.*

__Замечание.__ Проводя измерение, мы *ставим в соответствие элементарному* событию результат *измерения – действительное число* $\mathrm{a_j} \to x_j$. Если принципиально, то мы ставим *элементарным* событиям *метки* в виде *действительных* чисел, которые *совпадают с результатами измерений*: тем самым *отличаем их друг от друга* и определяем их *положение на действительной* оси (на плоскости или в пространстве).

Таким образом, *рассматриваемое утверждение противоречит результатам экспериментов.*

Следующее *утверждение: двумерная* случайная величина – *произведение одномерных* случайных величин (третья «негласная аксиома», пункт II, стр.19).

Оно, видимо, *непосредственно* связано с определением *произведения*[72] событий в *классической* теории.

---

[71] Относится ли оно к двумерной величине, или к совмещению двух одномерных величин остается открытым, ибо по расположению точек этот вопрос не решаем

[72] Формулировка и доказательство теоремы умножения вероятностей впервые даны А. Муавром в 1718г [1,37]

{1} **«Произведением событий А и В называют событие АВ, которое состоит в появлении "и А, и В"» [1,23], те. в одновременном появлении обоих событий. Формулировка *аксиоматической* теории: {2} «Событие АВ, [состоящее из элементарных событий, принадлежащих одновременно событиям А и В, называется пересечением (одновременным осуществлением[73]) событий» [6,33].**

Отличие *аксиоматической* формулировки **{2}** от *классики* **{1}** определяет *предположение* в квадратных скобках. Оно *весьма существенное* (**по факту, *аксиоматическая* формулировка определяет *совместимые* события, определение 7 [19,36]**), однако «одновременное осуществление» (**предположение в круглых скобках**) сводит его к *классическому* определению *произведения* событий. Рассмотрим пример.

***Пример* 24.** **В урне находятся шары с номерами j=1,2,...,V (множество элементарных событий a_j опыта) по числу шаров m_j^1 каждого номера (общее число шаров $M^1 = \sum_{j=1}^{V} m_j^1$, верхний индекс – номер опыта). Рассмотрим события $A_1^1 = \sum_{j=v1}^{w1} a_j$ и $A_2^1 = \sum_{j=v2}^{w2} a_j$. Положим $v1 \le v2 < w1$ и $w1 \le w2$, тогда согласно определению событие $S = \sum_{j=v2}^{w1} a_j$ {3} является произведением $A_1^1 \cdot A_2^1$ событий.**

п.1. *Математика*. Запишем *предположение*, выделенное квадратными скобками (определение {2}): в события А и В входит хотя бы *одно одинаковое элементарное* событие *опыта*. Исчезли слова «*одновременным осуществлением*» и смысл *существенно изменился*. В таком виде оно определяет понятие *совместимых* (*несовместимых*[74], если в них нет *одинаковых элементарных* событий) событий (определение 7 [19,36]). Сумма {3} определяет число *элементарных* событий, которые *входят и в событие* A_1^1, *и в событие* A_2^1. *Совместимость исключает произведение* их вероятностей, которое можно создать *только искусственно*: введением *условной* вероятности, что, в принципе, и выполнено А. Муавром. Но в этом случае *они сразу же «станут зависимыми»*. Отметим, что в подавляющем большинстве работ говорится только о *несовместных* событиях. Иногда упоминаются *несовместимые* (они фигурируют в аксиоме [1,51], но в оригинале [9,14] они называются *несовместными*) и *совместимые*[75] события (например [12,24], но уже на следующей странице они «превращаются» в совместные) и даже приводится формула вычисления вероятности их *суммы* $P(A_1^1 + A_2^1) = P(A_1^1) + P(A_2^1) - P(A_1^1 \cdot A_2^1)$ (например [12,45], на этой странице термины «совместимый» и «совместный» почти рядышком). Однако тут же (через несколько страниц) «выскакивает» *условная* вероятность, а за ней – понятие *независимости* (*зависимости*) событий. Некоторые авторы предупреждают «об опасности смешения понятий несовместимости и независимости событий», считая, что ошибка «кроется в слишком вольном употреблении выражения»: «не имеет никакого отношения одно к другому». Только вот как понять, где кончается «слишком вольное употребление выражения и начинается строгое», чтобы отличить «совместимость» от «зависимости» рекомендаций почему-то никаких.

Короче: «забудьте» о *совместимости* и *несовместимости*, ибо

---

[73] **Или появлением, т.е. произведением событий**

[74] **Понятие несовместимости событий впервые дано Т. Байесом в 1763г [1,410]**

[75] **В работах намного чаще применяется слово «совместный» («несовместный»), означающее происходящий с чем-то. Однако правильно отражает смысл понятия слово «совместимый», означающее входящий во что-то**

далее будет «повесть об *условной* вероятности событий, их *зависимости* и *независимости*», что в принципе и делается.

Возможно поэтому в большинстве работ «умалчивают о *совместимости* событий», а сразу начинают «повествование» с *условной* вероятности, а затем разговор о «*совместных*» событиях. Мы тоже не знаем, как это отличие пояснить на основе существующей теории, ибо, к сожалению, ошибка скрыта в понимании «зависимости» – в данном случае оно просто избыточно, что и показано на основе разработанной теории событий (приложении III [19,53]).

п.2. Теперь о том, что «говорит нам» *эксперимент*. Его результат – появление *только одного* из множества *элементарных* событий a_j $(j = 1, 2, ..., V)$ *опыта*. И повторяя *опыт много раз*, мы будем наблюдать *только одно из* множества *элементарных* событий и *ничего другого*: *ни* тебе события A_1^1, *ни* события A_2^1, *ни* события S.

Т.е. имеем *противоречие* между *математикой* (определения {1}, {2}) *и экспериментами*. Именно это *противоречие* стало поводом для вывода W.18 [19,37].

Ладно, в русском языке эти слова близки по написанию и произношению – можно и «спутать», однако, например, в английском это *достаточно сложно*, ибо они *разные*: ***совместимый*** – это ***compatible*** (with) сочетается с творительным падежом (*совместимость – compatibility*), а совместный – *joint*, *combined*.

п.3. ***Но когда же появляются два события?*** Будем одновременно бросать две (разные или одинаковые) монеты: на *одной* монете может появиться «*или* герб, *или* число» и на *другой* монете *то же самое* – «*или* герб, *или* число». Т.е. на *двух* монетах *два элементарных* события будут появляться *одновременно*, *вместе* (или *совместно*: одно событие *происходит с одновременно* другим событием).

Пусть во 2-й урне (1-я – в примере 24) находятся шары с номерами k=1,2,. . . ,W (множество элементарных событий b_k опыта) по числу шаров m_k^2 каждого номера (общее число шаров $M^2 = \sum_{k=1}^{W} m_k^2$, верхний индекс – номер опыта). Можно, как и в 1-м опыте образовать сложные совместимые или несовместимые события B_1^2 и B_2^2, но ничего нового мы не получим.

Если же, как и с монетами, будем проводить *1-й и 2-й опыты одновременно*, то в таком *эксперименте* также будут появляться два элементарных события: «*и* a_j, *и* b_k» *1-го и 2-го опытов*, а *это соответствует* только понятию (определение 5 [19,31]) *совмещения опытов. Альтернативы нам не дано*! Из *совмещения опытов* следуют и *произведения* $A_1^1 \cdot B_1^2$, $A_1^1 \cdot B_2^2$, $A_2^1 \cdot B_1^2$ и $A_2^1 \cdot B_2^2$ *сложных* событий.

> **{A.25.1}** Однако *ни* *сложные* события, ни *их* *произведения* (тоже матматическая кострукция) *никогда* не появляются *в* *эксперименте*: *ни* *по* *отдельности*, *ни* *вместе* – появляются *только* *элементарные* события: *более правильно* – *возмажные* *исходы* (метки) *данного* (или данных элементарных в сложном опыте) *элементарного* события!

> **{A.25.2}** Соответственно, *ни в экспериментах* с монетами, *ни* с урнами (ни в любом другом испытании) *никогда не появляются действительные* числа, которые будут *только тогда*, когда мы *элементарным* событиям *поставим в соответствии действительные* числа.

Конечно же, можно просто *повторять опыт с 1-й* (**или 2-й**) урной, так как для *совмещения опытов* это не имеет *какого-либо значения*: *пересечение опытов* не влияет *ни на число произведений*, *ни на свойства совмещенного опыта*.

Снова имеем *противоречие* между *утверждением существующей теории* случайных величин и *экспериментами*.

И последняя «*негласная аксиома*» существующей теории: принятое *определение суммы* случайных величин как *суммы координат* (стр.32).

Ее *противоречие*, как с *математикой*, так и с *экспериментами* было показано *при анализе* существующего *понимания* случайной величины (**примеры 7-10,11 и их анализ стр.29-37**). Тем не менее, приведем пример из статистической физики, данный в [25,26].

***<u>Пример</u>* <u>25.</u>** **Сосуды 1 и 2 объемом V наполнены одним газом с числом частиц N находятся в одном термостате. Сосуд 2 разделен на 2 части V_1 и V_2 очень тонкой упругой перегородкой так чтобы число частиц в каждой части было велико [26,334].**

Пусть число частиц в частях *пропорционально* их объемам $N_1 = N \cdot V_1/V$ и $N_2 = N \cdot V_2/V$. Очевидно, что 1-м сосуде, а также в обеих частях 2-го газ будет находиться в *равновесном* состоянии с *одинаковыми* параметрами: только *полная* энергия во 2-м сосуде будет определяться *суммой* $E = E_1 + E_2$. *Что будет, если во 2-м сосуде убрать перегородку*? Почти ничего, газ в обоих сосудах будет находиться в *равновесном* состоянии *с теми же* параметрами. *Единственное*, что все-таки произойдет (если бы мы только могли это увидеть): через какое-то (достаточно длительное) время частицы, находившиеся в разных частях объема, перемешаются и распределятся практически равномерно по всему объему. Отметим, что при выводе канонического распределения Гиббса [27,119] сосуд также разделяется (но только мысленно) на 2 части, а равенство $E = E_1 + E_2$ следует из некоторого предположения: с точки зрения физики сомнений оно не вызывает.

В принципе, это не суть столь важно, ибо для нас имеет значение дальнейшее «развитие событий»: распределение вероятностей того или иного параметра, например, скорости v частиц в начальном состоянии (до изъятия перегородки). Распределение *скоростей в 1-м и двух частях 2-го сосуда* характеризуется *одномерными* плотностями $f(v)$, $f_1(v)$ и $f_2(v)$ распределения соответственно. Так как *параметры состояния одинаковы*, то и *плотности* распределения *одинаковы*, т.е. имеем *равенство* $f(v) = f_1(v) = f_2(v)$.

***Какова плотность $f'(v)$ распределения значений скорости во 2-м сосуде после удаления перегородки*? В соответствии с принятой теорией случайных величин, с учетом «*независимости*» величин E_1 и E_2, она следует из «*теоремы умножения* вероятностей» [27,120]: $f'(v) = f_1(v) \cdot f_2(v)$ {4}. Т.е. получаем (п.2 примера 20 стр.75) *двумерную* плотность $f'(v)$ распределения, что *существенно отличает ее от одномерной* плотности $f(v)$.**

Если 2-й сосуд был *предварительно разделен* перегородками на небольшое *число* M частей (так чтобы в каждом объеме V_j $(\mathbf{j = 1, 2, ..., M})$ число частиц было велико [26,334]) с числами $N_j = N \cdot V_j \,/\, V$ частиц, *пропорциональным объемам* частей, то после удаления перегородок получим *m-мерную плотность* $f''(v) = \Pi_{j=1}^{M} f_j(v)$ {4*} распределения скоростей, где $f_1(v), f_2(v), ..., f_M(v)$ - *плотности* распределения скоростей в частях объема *до удаления* перегородок.

Таким образом, на основе существующей теории (**теореме умножения**) вероятностей получен результат, который противоречит физике. По всем «ее канонам» должно быть равенство $f'(v) = f(v)$ **{5}** (**и равенство** $f_1(v) = f_2(v) = ... = f_M(v) = f(v)$ **{5*}, конечно же, тоже**). Т.е. *плотность* распределения *не должна изменяться*, однако поставить *знак равенства между одномерной и двумерной* (**многомерной**) функциями «рука что-то не поднимается».

Замечание **29. Работа [25] посвящена, в первую очередь анализу задачи статистической физики (впервые поставленную и решенную Максвеллом) о распределении скоростей частиц газа, находящегося в *равновесном* состоянии. Анализ проведен с позиции *новой исходной* системы понятий теории событий, подробно рассмотренной в [19]. Рассмотренный выше пример *был приведен* в ней [25,26-27] в связи с *выводом канонического распределения* Гиббса. Возможно (мы в этом не уверены) при его выводе *впервые применена теорема умножения* вероятностей для *2-х слабовзаимодействующих* между собой *подсистем*, находящихся *в равновесии*. Далее последовало *умножение статистических* весов [26,332] *макросостояний* подсистем и все вытекающие отсюда последствия, которые подробно показаны в [25,18-25].**

По этому поводу можно только повторить сказанное в [25]: физиками *применялось и применяется* то, что «*предлагала и предлагает*» существующая теория вероятностей[76]. А она *не позволяет* получить *равенство* **{5}**, ибо *альтернативы произведению* случайных величин (**определения 'D, D.1', стр.16-17**) *в ней не существует*. Добавим, что применение *принятого понимания суммы* случайных величин (**пример 9, стр.32**) тоже ничего «хорошего не дает»: полученный *закон* распределения *не будет соответствовать исходным законам* (**отличие числовых характеристик полученного и исходных законов**). Отметим, что в рассмотренном примере *отмеченные равенства* не очень сложно получаются *на основе объединения одинаковых полностью пересекающихся вероятностных* функций случайных величин (**п.2 примера 19, стр.72**). Обобщая проведенный анализ можно уверенно утверждать:

> **{A.26} *Три* из 4-х рассмотренных *утверждений* существующей теории – *это постулаты*, которые *противоречат теории* вероятностей и *результатам экспериментов*.**

Вывод **Q.I** (**стр.36**), который подводит итог анализа существующих понятий теории случайных величин, положения **{A.5}**, **{A.6}** (**стр.38**), **{A.22}** (**стр.82**) и **{A.24}** (**стр.84**) позволяют сделать общие выводы:

> **W.33. Понятия *элементарного* и *сложного* событий в *смысле, предписываемом аксиоматической* теорией, позволили *формально***

[76] **Максвелл, Больцман, Гиббс и другие выдающиеся физики применяли классическую теорию вероятностей (обобщение Лапласа): аксиоматическая теория только «узаконила ее правила»**

определить случайную величину *на основе элементарных* событий. Однако это *создало <u>только</u> <u>иллюзию</u> связи*, а не *<u>реальную</u> связь теории* случайных величин с *теорией* событий.

W.34. Для *обоснования* существующей *теории* случайных величин, кроме *аксиом теории* событий, потребовало введения 4-х *дополнительных* предположений: одной *аксиомы* и трех *постулатов*. По существу, они и определили *<u>отсутствие</u> <u>связи</u> теории* случайных величин с *теорией* событий. Однако *постулаты <u>противоречат</u>* как <u>экспериментам</u>, так, вообще говоря, и <u>самой</u> <u>теории</u>.

Некоторое отступление от основного содержания (**«философствование»**). Как обычно, начнем с цитаты:

«Аксиоматический подход стал применяться во всей современной математике, им даже пользуются преподаватели математики старших классов школы. Один учитель недавно сказал мне: "В былое время все эти процедурные правила были погребены в изысканных печатных трудах и в значительной степени игнорировались на уроках. Сегодня они успешно включены в основной курс математики, и учащимся грозит опасность, понимая, что 2+3 в соответствии с коммутативным законом равно 3+2, так и не узнать, что эта сумма равна 5.". Конечно, здесь все утрировано. Исключительное внимание, уделяемое ныне аксиоматике, можно было бы сравнить с занятиями в таком хореографическом кружке, где ежедневно проводятся дискуссии о хореографии, но никто никогда не танцует. Хотелось бы, чтобы в математике, как, впрочем, и во всем остальном, всегда соблюдалось разумное чувство меры» [30,42].

I. Можно вводить какие-то *исходные понятия*, *аксиомы*, *постулаты* и на этой основе создать некоторую теорию. Это ни кем и ни чем не запрещено: проблема заключается в других вопросах ***<u>Во-первых</u>***, необходимо *сказать*: какое явление природы *описывает разработанная математическая* модель, или просто *создана* некая *математическая абстракция*, не имеющая *никакого отношения* к явлениям природы. ***<u>Во-вторых</u>***, следует показать, что *исходные понятия*, *аксиомы*, *постулаты математической* модели *правильно отражают основные закономерности*, *присущие данному* явлению. ***<u>В-третьих</u>***, показать, что *исходные понятия*, *аксиомы*, *постулаты* согласованы между собой (**т.е. не противоречат друг другу**).

Если создана некая *математическая абстракция*, не имеющая отношения к *явлениям природы*, то для нее необходимо только *внутреннее согласование*, которое составляет *суть третьего положения. Имеет ли такая теория на существование*? Конечно имеет: возможно, когда-нибудь где-нибудь пригодится. *Может ли применяться она для описания какого-либо явления природы*? Ответ однозначен: Нет! Но с оговоркой: до тех пор, пока *не найдется явление природы*, *основные закономерности* которого будут *правильно отражаться* этой *математической* моделью.

II. «Почти неизбежный спутник» современных *аксиоматических* теорий – *теория множеств*[77]. *Никаких возражений против* применения теории множеств нет, однако, она является, в определенной степени, *философией* математики: *ее понятия*, как и вообще философские понятия, часто *носят очень общий характер*. Поэтому при *ее применении в какой-либо области знаний*, в том числе, и в других разделах математики, требуется «расшифровка» ее понятий.

Например, арифметические операции с комплексными числами отличаются от операций с действительными числами. Арифметические операции с матрицами отличаются от операций с действительными и комплексными числами: для них вообще определены только две операции – суммы и произведения. Соответствено, необходимы пояснения, как и какие из них применять, а также проверка достаточости понятий теории множеств для данной математической модели.

	обозначение	Термины	
		Теория множеств	Теория вероятностей
1	Ω	Множество, пространство	Пространство элементарных событий, достоверное событие
2	ω	Элемент множества	Элементарное событие
3	A, B	Подмножество A, B	Случайные события A, B
4	$A+B=A\bigcup B$	Объединение (сумма) множеств A и B	Сумма случайных событий A и B
5	$AB=A\bigcap B$	Пересечение множеств A и B	Произведение событий A и B
6	$\bar{A}$	Дополнение множества A	Событие, противоположное для A
7	$A\backslash B$	Разность множеств A и B	Разность событий A и B
8	$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
9	$AB=A\bigcap B=\varnothing$	Множества A и B не пересекаются (не имеют общих элементов)	События A и B несовместимы
10	$A=B$	Множества A и B равны	События A и B равносильны
11	$A\subset B$	A есть подмножество B	Событие A влечет событие B

Рис. 8

1. Для событий в существующей теории, как и для матриц, определены две операции – суммы и произведения, которые существенно отличаются от операций с действительными и комплексными числами, кстати, и с матрицами тоже. В [19] проведен анализ принятых понятий теории событий и показано: для применения теории множеств в теории вероятностей некоторые понятия теории множеств необходимо видоизменить и привести понятия теории событий в согласие с экспериментами.

Этот раздел подвел некоторый промежуточый итог результатов неточного построения теории событий, которое которое в значительной степени повлияло как на основы, так и на последующие положения теории случайных величин, а также на теорию случайных процессов. Об этом в частях IV-VII работы.

2. В таблице на рис.8 (это таблица 5 из работы [1,50], которая получена некоторыми изменениями таблицы в [9,14-15]) дан «... словарь переводов с языка теории множеств на язык теории вероятностей».

Обратим внимание только на основное отличие между упомянутыми таблицами: в п.9 и в аксиоме сложения [1,51] – события *несовместимы*, а в п.1-2 [9,14] и, по-видимому, в аксиоме сложения [9,11] – события *несовместны*.

Таким образом, между *совместимыми* и *совместными* событиями в существующей теории событий *различия не существует*. Странно это, ибо *смысл* слов *совершено разный*: *совместимый* – входящий во что-то; *совместный* – происходящий с чем-то: об этом уже говорилось не один раз, как в этой, так и в работе [19].

[77]Пока еще попадаются современные работы (например, по механике), в которых есть аксиомы, но нет теории множеств: поэтому «почти»

3. Отличие смысла слов, по идее, должно определять и различие понятий. Но вопрос не только в этом. Дело в том, что только пункты 6, 8 и 11 «перевода» не вызывают сомнений. Во-первых, понятие элементарного события в классической теории не существует. Его вводит аксиоматическая теория, но не определяет его. Как следствие: неразличимость понятий элементарного и сложного событий. Комментарии к выводу биномиального распределе-ния (стр.13) – прекрасное подтверждение того, что понятие элементарного события «расплылось дальше некуда»[19,17-27]: до полного непонимания, что же это такое. А это приводит к определенным сомнениям и в точности остальных пунктов «перевода». Вообще говоря, и некоторым понятиям существующей теории событий.

4. Цитата. «Читатель, который интересуется лишь чисто математическим развитием теории, может этот параграф не читать – дальнейшее изложение основывается на аксиомах §1 и не использует рассуждений этого параграфа». Это пояснение (сноска 1) к содержанию §2. Отношение к данным опыта [9,12], который начинается со схемы «применения теории вероятностей к действительному миру опыта». Именно в этом параграфе дается пример с бросанием 2-х раз одной монеты и говорится, что при каждом бросании может появиться «цифра» *или* «герб». Затем определяются четыре «элементарных» события: «цифра»-«цифра», «цифра»-«герб», «герб»-«цифра» и «герб»-«герб». Таким образом, при одном бросании применяется логическое отношение «*или* . . . , *или* . . . », но в парах только тире: *что обозначает тире между ними*? Если судить по *теореме о повторении независимых испытаний*, то будем иметь [12,63-64; 13,59]: 1) *и* «цифра», *и* «цифра»; 2) *и* «цифра», *и* «герб»; 3) *и* «герб», *и* «цифра»; 4) *и* «герб», *и* «герб». Отметим, что это понятно из *классической* теории, но из *аксиоматической* теории такой *ясности не следует. Однако почему отношение «и ..., и ...»? Откуда следует именно это логическое отношение? Почему нельзя воспользоваться другим «или ..., или ...»*? Оно вполне законно в теории событий и ничто не мешает сказать, что может появиться: 1) *или* «цифра», *или* «цифра»; 2) *или* «цифра», *или* «герб»; 3) *или* «герб», *или* «цифра»; 4) *или* «герб», *или* «герб». Такой «расклад» тоже *правомочен*, что показано при разработке *новой исходной системы теории* событий (раздел 3.2 [19,31]). В первом случае имеем *произведения* событий, соответствующие *совмещению опытов*, а во втором – *суммы* событий, соответствующие *объединению опытов* (определение 5 [29,.31]). Напомним: *совмещение опытов* есть в принятой теории, но под другим «именем», а *объединение опытов* вообще *не существует*.

Отметим, что все понятия и положения новой исходной системы теории событий следуют именно из приведения в соответствие математических понятий и экспериментов («. . . действительного мира опытов»).

5.2. Итоги разработки новой исходной системы

Разработка *новой исходной* системы *теории* случайных *величин полностью основана на новой исходной* системе *теории* событий.

> **{A.26} *Основное*, что выполнено при разработке: – *понятие* случайной величины (выводы {Q.II}, стр.43, {Q.IV} и {Q.V}, стр.52) *отделено от неразрывно связанных* с ней *понятий вероятностной* функции (плотности) и *закона* распределения.**

По-видимому, *неразрывная связь* этих понятий и определила *отождествление* случайной величины *с координатами*, которым присваиются вероятности. Это было сказано при рассмотрении «интуитивного» определения **'A'** (стр.9), однако *аксиоматическое* определение *ничего не из-*

менило (**скорее оно «окончательно запутало» понимание, ибо создало видимость ее связи с событиями**): *понятие* случайной величины *точно также отождествляется с координатами*, которым приписываются вероятности.

Для лучшего понимания приведем простой пример (комментарий I.4, стр.10): задана *действительная однозначная* функция[78] $f(x_m) > 0$ (m=1,2,...,M), *сумма всех* значений которой *равна* $F(x_M) = \sum_{m=1}^{M} f(x_m)$. Разделив значения функции на сумму $F(x_M)$, получим действительную функцию действительного аргумента x_m, удовлетворяющую условиям $0 < f_1(x_m) = f(x_m)\ /\ F(x_M) < 1$ и $\sum_{m=1}^{M} f_1(x_m) = 1$. Очевидно, что функция $f_1(x_m)$ *ничем не отличается от вероятностной* функции, а *сумма* $F(x_n) = \sum_{m=1}^{n} f(x_m)$ (n=1,2,...,M) – от *закона* распределения. Их, конечно же, можно связать с некоторой случайной величиной, хотя при этом построении даже упоминания о случайной величине не понадобилось. С этих же позиций можно рассмотреть примеры: 3 п.п.5.1-5.2 (стр.22); 5 п.3 (стр.26); 7, п.4 (стр.30) и 8 п.4 (стр.32).

Поэтому *отделение понятия* случайной величины – ***недействительной* функции *недействительного* аргумента** – от *понятий вероятностной* функции и *закона* распределения – **ее *действительных* характеристик** – мы считаем *основным* из того, что *выполнено в теории* случайных величин. В общем-то – немного: его *легко* сделать в рамках *существующей теории* событий. *Изменило бы это что-либо в теории*? *Однозначного ответа нет*, но возможно, *изменения* все же появились бы.

По крайней мере, в начале исследований на основе определения **'B.2'** и примера «с кубиком» (**стр.39**) стало понятно, что по распределению вероятностей *одномерной* случайной величины *вычисляются* вероятности *произвольных* событий. Вполне естественно возникло *предположение*: если есть распределение *суммы одномерных* случайных величин, то по нему должны вычисляться *суммы сложных* событий, определяемых каждой из величин[79]. Был рассмотрен, в общем-то, простой случай.

***Пример* 26. Одновременно производится два независимых выстрела оп мишени[80]. Считаем: «попадание» и «промах» – *элементарные* события с вероятностями P(a₁)** $= p_1$, **P(a₂)** $= q_1 = 1 - p_1$ **при 1-м и P(b₁)** $= p_2$, **P(b₂)** $= q_2 = 1 - p_2$ **при 2-м выстрелах соответственно. «Ход» рассуждений был приблизительно следующим:**

п.1. *Теория* случайных величин. Определим (определение 'D.1', стр.17) на пространствах *элементарных* событий a_1, a_2 и b_1, b_2 случайные величины X и Y. Положим, что им соответствуют координаты x_1, x_2 и y_1, y_2. Их распределения вероятностей равны: $p(x_1) = p_1$, $p(x_2) = q_1$ {6} и $p(y_1) = p_2$, $p(y_2) = q_2$ {6*} соответственно (снизу и слева от осей, рис.7 стр.74). *Совместное* распределение вероятностей, учитывая «неза-

---

[78] Пример дополнен условиями однозначности и положительности для того, чтобы функция была аналогом распределения вероятностей: ранее в этом не было необходимости, ибо примеры использовались в других целях

[79] Оно *неверно* в принципе, ибо принятое понимание *суммы* случайных величин *таковой не является*: это *одномерное* распределение, полученное *линейным преобразованием двумерного* (n-мерного) распределения [10,57-58]

[80] Иногда он приводится в работах, но чаще всего для того, чтобы показать, что «независимые» события могут быть «совместными»

висимость» величин, определяется *двумерной* таблицей *произведений*. В соответствии с принятым пониманием (п.2 примера 9 стр.33), *сумма* величин определяется значениями $p_1 \cdot p_2$; $q_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot q_2$ и $q_1 \cdot q_2$ {7} соответственно.

п.2. *Теория* событий. Определим вероятность события $\mathbf{A_1 = a_1 + b_1}$ – «попадание» при 1-м и 2-м выстрелах. Вероятность *совместного* попадания равна $\mathbf{P(a_1 \cdot b_1)} = p_1 \cdot p_2$, а вероятность их *суммы* $\mathbf{P(A_1 = a_1 + b_1)} = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$. Аналогично для вероятностей событий $\mathbf{A_2 = a_1 + b_2}$, $\mathbf{A_3 = a_2 + b_1}$ и $\mathbf{A_4 = a_2 + b_2}$ получим: $\mathbf{P(A_2)} = p_1 + q_2 - p_1 \cdot q_2$, $\mathbf{P(A_3)} = q_1 + p_2 - q_1 \cdot p_2$ и $\mathbf{P(A_4)} = q_1 + q_2 - q_1 \cdot q_2$.

> **{А.27} Отсюда следует: *ни одна из сумм* {7} вероятностей, полученных на основе *принятого* понимания *суммы* случайных величин, *не соответствует ни одной из* вероятностей событий $\mathbf{A_k}$ $(\mathbf{k = 1, 2, 3, 4})$, определяемых *суммами элементарных* событий.**

Очевидно, что *совершенно не важно*, по какой из теорий – *классической* или *аксиоматической* – решать задачу: *результат один и тот же*. Итак, получено *противоречие* между *принятым* пониманием *суммы* вероятностей *в теории* случайных величин *и в теории* событий, чего «*быть не должно*». *Несоответствие* можно «как-то подправить», что и было проделано автором сего трактата[81], однако «силы и время потрачены почти впустую»: появились *вопросы*, на которые *не было ответа*, а вместо пояснений – «топтание на одном месте и пустое бульканье».

Именно поэтому *главную роль* в построении *новой исходной* системы *теории* случайных величин «*сыграло*» *создание новой исходной* системы *теории* событий: *это убедительно* покали *исследования*, изложенные в разделах 2-4. Обобщая выводы, которые подводили итог исследований разделов, можно сделать общее заключение:

> **{А.28} *Математические модели классов* (и видов) случайных величин *строго следуют из математических моделей классов* (и видов) *испытаний*.**

Это определило создание *новой исходной* системы *теории* случайных величин, *свободной от недостатков*, присущих существующей теории.

Небольшое отступление (**«философствование 2»**). Обратим внимание на интересные размышления В. Феллера, созвучные нашему пониманию:

«В принципе можно ограничить теорию вероятностей изучением пространств элементарных событий, определенных в терминах распределений вероятностей случайных величин. При таком подходе не нужно будет обращаться к абстрактному пространству элементарных событий, и использовать термины типа "испытание" и "исходы эксперимента". Сведение теории вероятностей к случайным величинам является кратчай-

[81] Приведено в соответствие с теорией событий, но только для суммы "независимых" величин. «Подобная история» произошла и с теоремами о математическом ожидании суммы и произведения случайных величин: «вразумительного пояснения правкам не нашлось»

шим путем к применению анализа и упрощает многие ее стороны. Однако оно имеет и недостаток, состоящий в затушевывании вероятностных оснований. Представление о случайной величине как "о чем-то принимающем разные значения с разными вероятностями" легко может остаться неясным» [6.233].

Дополним эти размышления. «Затушевывание *вероятностных оснований*» произошло с *самого начала развития* понятия случайной величины: *отождествление* понятия случайной величины – ***недействительной* функции *недействительного* аргумента** – с *действительными* числами, т.е. с *физическими измерениями исследуемого случайного* явления – ***координатами* точек измерения.**

Аксиоматическое определение случайной величины «облекло его в формальную математическую форму» (определение 'B', стр.9), которая «легализовала право» обращаться со случайными величинами как с действительными функциями. Но оно не изменило первоначального понимания, несмотря на то, что в определении говорится о сумме элементарных событий (комментарий 4, стр.10), однако влияние этих сумм проявляется только в определении [9,36] вероятностной функции. Это со всей очевидностью показал анализ, проведенный в 1-м разделе настоящей работы.

Определения **1** (**стр.47**) и **3** (**стр.55**) случайной величины, по сути, *отменяют* «*легализацию*» исторически сложившихся «*правил*». Из них следует, что *операции* со случайными величинами – ***недействительными* функциями** – *должны соответствовать операциям* с множествами *элементарных* событий (**простых**) *опытов*.

Возможность применения *операций с действительными* функциями *действительных* аргументов к *вероятностным* функциям и *законам* распределения следует из *определений* **2** (**стр.48**) и **4** (**стр.55**) *при условии*: **они не *противоречат* определениям 1, 3 и определению 5 (стр.67) *возможных операций с ними.***

<u>*Замечание*</u> <u>30</u>. В частности, условию отвечают операции дифференцирования, интегрирования, преобразования законов распределения. В теории событий введены *операции разности* и *деления* вероятностей (приложение IV [19,60]), которые *не противоречат операциям* с событиями: подобные *операции* с распределениями одномерных случайных величин даны в приложении I (стр.95). Другие операции рассмотрены в части IV исследований.

Отметим еще один момент, касающийся «затушевывания *вероятностных оснований*»:

{A.29} *Особенно важно* опираться на *вероятностные основания* – *теорию* событий – при *применении теории* вероятностей в многочисленных приложениях.

Это показано, во-первых, на примере анализа теории надежности [10,120-156]. Во-вторых, на примере анализа задачи о размещении частиц по ячейкам [25]. В-третьих, будет показано при рассмотрение построения случайных процессов (часть VII работы).

Приложение I. Об операциях *разности и деления* в теории случайных величин

Здесь нет (**да и не может быть**) ничего нового: во-первых, это просто напоминание о некоторых хорошо известных простых «вещах». Во-вторых, мы уже об этом говорили при *анализе существующей исходной* системы (**примеры 3,5,7,8,11, стр.21, 26, 29, 31, 36; замечание 10, стр.30**) и (**в меньшей степени**) при разработке *новой исходной системы* случайных величин (**разделы 4.1.1 и 4.1.2, стр.68, 74**).

Казалось, что этих упоминаний достаточно и писать об этом отдельно нет смысла. Однако при анализе вычисления числовых характеристик *одномерных* и *двумерных* распределений и положений о них, принятых в существующей теории, потребовалось более подробное рассмотрение операций *суммы* и *произведения действительных* функций *действительного* аргумента, но рассуждения об этом «затуманивали» понимание основного материала. Во-вторых, они непосредственно связаны с операциями *разности и деления вероятностных* функций. В-третьих, они, явно или неявно, «присутствуют» при рассмотрении других положений как существующей теории случайных величин, так и теории, основанной на новой исходной системе. Кроме того, в существующей теории вероятнстей эти правила, как показал анализ (стр.6-38), иногда не соблюдаются. Указанные причины и обусловили появление этого раздела.

1. *Правила* выполнения операций суммы и произведения с *действительными* функциями *действительных* аргументов.

Функции одного аргумента могут быть определены на прямой, плоской или пространственной кривой (**ломаной**) линии. Ограничимся 2-мя случаями: **1)** функции аргумента x, определенные на отрезках ($x_{\mathbf{H}} \leq x \leq x_{\mathbf{K}}$) и ($x'_{\mathbf{H}} \leq x' \leq x'_{\mathbf{K}}$) координатной оси X; **2)** функции аргументов x и y, определенные на отрезках ($x_{\mathbf{H}} \leq x \leq x_{\mathbf{K}}$) и ($y_{\mathbf{H}} \leq y \leq y_{\mathbf{K}}$) декартовых координат X и Y соответственно.

1.1. Функции, заданные на координатной оси X

Пусть: 1) $f(x)$ **и** $\phi(x')$ ***непрерывные*** **функции аргумента** x**, определенные на отрезках** ($x_{\mathbf{H}} \leq x \leq x_{\mathbf{K}}$) **и** ($x'_{\mathbf{H}} \leq x' \leq x'_{\mathbf{K}}$) **оси** X **соответственно; 2)** $f(x_v)$ **и** $\phi(x'_w)$ ***дискретные*** **функции аргумента** x**, определенные в точках отрезков** ($x_{\mathbf{H}} \leq x_1 < x_2 < ... < x_V \leq x_{\mathbf{K}}$) **и** ($x'_{\mathbf{H}} \leq x'_1 < x'_2 < ... < x'_W \leq x'_{\mathbf{K}}$) **соответственно.**

Условия пересечения**: положим** $l_{\mathbf{f}} = |x_{\mathbf{K}} - x_{\mathbf{H}}| \geq \left|x'_K - x'_{\mathbf{H}}\right| = l_\phi$ **и** $V \geq W$**.**

1. Если $x'_{\mathbf{H}} \geq x_{\mathbf{K}}$ **или** $x'_{\mathbf{K}} \leq x_{\mathbf{H}}$**, то функция** $\phi(x')$ ***не пересекается*** **с функцией** $f(x)$**, если** $x_{\mathbf{H}} + l_\phi < x'_{\mathbf{H}} < x_{\mathbf{K}}$ **или** $x'_{\mathbf{K}} > x_{\mathbf{H}}$**, то функции** $f(x)$ **и** $\phi(x')$ ***частично*** **или** ***полностью*** **(*одновременное* выполнение условий** $x_{\mathbf{H}} \leq x'_{\mathbf{H}}$ **и** $x'_{\mathbf{K}} < x_{\mathbf{K}}$**)** ***пересекается*** **с функцией** $f(x)$**.**

2. Если для каких-то значений $1 \leq v \leq V$ **и** $1 \leq w \leq W$ **координат** x'_w **и** x_v ***выполняются равенства*** $x'_w = x_v$ **{A}, то *дискретная* функция** $\phi(x'_w)$ **частично или полностью (если условия {A} выполняются для всех значений w=1,2,...,W)** ***пересекается*** **с функцией** $f(x_v)$**: в противном случае функции *не пересекаются*. Т.е. для *пересечения дискретных* функций достаточно выполнения равенства {A} хотя бы для одной из точек, а условие**

«перекрытия» областей определения является только необходимым.

{A.21.1} ***Сумма*** **$E(x) = f(x) + \phi(x')$ существует при** ***любом расположении*** **функций $f(x)$ и $\phi(x')$на координатной оси X.** ***Произведение*** **$\Pi(x) = f(x) \cdot \phi(x')$ существует** ***только*** **на участке** ***пересечения*** **функций.**

I. ***Правило*** ***<u>суммы</u>. Значения*** **функций** ***суммируются только в области пересечения*: *непрерывные*** **функции – в каждой точке $x = x' = x_{\mathbf{d}}$;** ***дискретные*** **– в точках, отвечающих условию {A}. В** ***непересекающихся*** **областях значения $E(x)$ определяются значениями функции $f(x)$ или $\phi(x')$.**

II. ***Правило <u>произведения</u>. Значения*** **функций в области** ***пересечения перемножаются*: *непрерывные*** **функции – в каждой точке $x = x' = x_{\mathbf{d}}$;** ***дискретные*** **– в точках, отвечающих условию {A}.**

<u>Замечания</u>. <u>1.</u> Область **определения функции** ***суммы*** **$E(x)$ зависит** ***от области пересечения*** **функций $f(x)$ и $\phi(x')$, и изменяется** ***от минимального*** **значения $l_{\min} = l_{\mathbf{f}}$, если функции** ***полностью пересекаются***, **до** ***максимального*** **значения $l_{\max} = l_{\mathbf{f}} + l_\phi$, если функции** ***не пересекаются***, **т.е. при значениях $x'_{\mathbf{H}} \geq x_{\mathbf{K}}$ или $x'_{\mathbf{K}} \leq x_{\mathbf{H}}$** ***размер области*** **определения остается** ***постоянным***. **<u>2.</u>** ***Область*** **определения функции** ***произведения*** **$\Pi(x)$ изменяется** ***от максимального*** **значения $l_{\max} = l_\phi$, если функции** ***полностью пересекаются до минимального*** **значения $l_{\min} = 0$, если функции** ***не пересекаются***.

III. Операции ***дифференцирования и интегрирования*** **функций $E(x)$ и $\Pi(x)$ (если $f(x)$ и $\phi(x')$ непрерывны) производятся** ***по правилам*** **функций** ***одной*** **переменной.**

<u>Примеры</u>.* <u>1.</u> Пусть $f(x) = x^2$ $(1 \leq x \leq 6)$) и $\phi(x') = x'e^{x'}$ $(4 \leq x' \leq 8)$. Тогда $E_1(x) = x^2$ $(1 \leq x < 4)$, $E_2(x) = x^2 + xe^x$ $(4 \leq x < 6)$ и $E_3(x) = xe^x$ $(6 < x \leq 8)$.** ***Произведение **существует только на 2-м участке и равно $\Pi_2(x) = x^3e^x$ $(4 \leq x \leq 6)$. Область** ***определения суммы*** **– отрезок $1 \leq x \leq 8$, а** ***произведения*** **– $4 \leq x \leq 6$. В точках $x = 4$ и $x = 6$ функция суммы $E(x)$ имеет разрывы 1-го рода (скачки). <u>2.</u> Положим, что функции $f(x_v) = x_v^2$ и $\phi(x'_w) = x'_w e^{x'_w}$ определены в точках[82] $x_{j+1} = x_j + 1$, $x_1 = 1$ (j=1,2,...,5) и $x'_{k+1} = x'_k + 0,5$, $x'_1 = 4$ (k=1,2,...,8) соответственно. Тогда: $E_1(x_n) = x_n^2$ при значениях $x_n = n$ (n=1,2,3); $E_2(x) = x_n^2 + x_n e^{x_n}$ при значениях $x_n = n$ (n=4,5,6); $E_3(x) = x_n e^{x_n}$ при значениях $x_n = n + 0,5$ (n=4,5,6,7) и $x_n = n$ (n=7,8). Функция** ***произведения*** **равна $\Pi_2(x_n) = x_n^3 e^{x_n}$ при значениях $x_n = n$ (n=4,5,6).**

При *задании* функций $f(S)$ и $\phi(S)$ в точках, *расположенных* на (**плоской, пространственной**) *кривой* S (**или ломаной**) линии *правила не изменяются.*

1.2. Функции, заданные на координатных осях X и Y

Пусть: 1) $f(x)$ и $\phi(y)$ ***непрерывные*** **функции аргументов x и y, определенные на отрезках $(x_{\mathbf{H}} \leq x \leq x_{\mathbf{K}})$ и $(y_{\mathbf{H}} \leq y \leq y_{\mathbf{K}})$ осей X и Y соответственно; 2) $f(x_v)$ и $\phi(y_w)$** ***дискретные*** **функции x и y, определенные в точках $(x_{\mathbf{H}} \leq x_1 < x_2 < ... < x_V \leq x_{\mathbf{K}})$ и $(y_{\mathbf{H}} \leq y_1 < y_2 < ... < y_W \leq y_{\mathbf{K}})$ соответственно.**

---

[82] Вообще говоря, расстояния между значениями дискретной функции могут отличаться, но мы полагаем их одинаковыми, т.е. значения расположены равномерно на отрезке: по аналогии с непрерывной функцией, значения которой всегда расположены равномерно.

{A.21.2} Прежде всего, отметим, что в этом случае *пересечение* функций *невозможно* и, следовательно, *размеры и положения* областей какой-либо особой роли не играют. *Произведение* $\Pi(x,y) = f(x)\cdot\phi(y)$ и *сумма* $E(x,y) = f(x) + \phi(y)$ *существуют при любом расположении областей определения* функций на осях X и Y.

Теперь о *правилах выполнения* операций

IV. *Правило* <u>*произведения*</u>. *Дискретные* функции: *каждое из значений* функции $f(x_v)$ в точках x_v *с номерами* v=1,2,...,V *умножаются на значение* функции $\phi(y_w)$ в точке y_w с *данным номером* w=1,2,...,W. *Результат произведения* присваивается точкам, которые *определяются парами* (x_v, y_w) на плоскости $X0Y$ *с данной координатой* y_w.

V. *Правило* <u>*суммы*</u>. *Дискретные* функции: *каждое из значений* функции $f(x_v)$ в точках x_v *с номерами* v=1,2,...,V *сложить со значением* функции $\phi(y_w)$ в точке y_w с *данным номером* w=1,2,...,W. *Результат суммы* присваивается точкам, которые *определяются парами* (x_v, y_w) на плоскости $X0Y$ *с данной координатой* y_w.

<u>*Замечания*</u>. <u>3.</u> Других *правил выполнения* операций *суммы* и *произведения* с *действительными* функциями *двух действительных* аргументов *просто не существует*: подробнее об этом в разделе 5.4. <u>4.</u> Если результат представить в виде *двумерной* таблицы, то *последовательность выполнения* операций определяет строки таблицы в направлении оси Y. Но ее можно изменить, т.е. начать с функций $\phi(y_w)$, а не $f(x_v)$: тогда *последовательность* будет определять столбцы таблицы в направлении оси X, <u>5.</u> При *непрерывных* функциях – каждое значение функции $f(x)$ во всех точках x области определения $x_{\text{H}} \le x_{\text{d}} \le x_{\text{K}}$ *умножаются на значение* или *суммируется* со значением функции $\phi(y_{\text{d}})$ в *данной* точке *с координатой* $y = y_{\text{d}}$ из области определения $y_{\text{H}} \le y \le y_{\text{K}}$. *Результат произведения* или *суммы* $\Pi(x, y = y_{\text{d}}) = f(x)\cdot\phi(y = y_{\text{d}})$, $E(x, y = y_{\text{d}}) = f(x) + \phi(y = y_{\text{d}})$ $(y_{\text{H}} \le y_{\text{d}} \le y_{\text{K}})$ {1} присваивается точкам, которые *определяются парами* (x, y_{d}) на плоскости $X0Y$ *с данной координатой* y_{d}.

Если применить интегрирование с переменным верхним пределом, то операции произведения и суммы принимают более наглядный вид $\int_{y_{\text{H}}}^{y_{\text{d}}} \Pi(x,y)dy = f(x)\cdot\int_{y_{\text{H}}}^{y_{\text{d}}}\phi(y)dy$ и $\int_{y_{\text{H}}}^{y_{\text{d}}} E(x,y)dy = f(x)\cdot(y_{\text{d}} - y_{\text{H}}) + \int_{y_{\text{H}}}^{y_{\text{d}}}\phi(y)dy$ {1*}. Дифференцированием по переменной y_{d} они приводятся к виду {1}.

Мы начали с определения правил для *дискретных* функций только потому, что на их примере сущность операций более понятна.

VI. Операции *дифференцирования и интегрирования* функций $\Pi(x,y)$ и $E(x,y)$ (если $f(x)$ и $\phi(y)$ *непрерывны*) производятся *по правилам* функций *двух* переменных.

<u>*Пример*</u> <u>3.</u> Пусть значения $f(x_v) = x_v^2$ и $\phi(y_w) = y_w e^{y_w}$ определены в точках $x_{j+1} = x_j + 1$ (j=1,2,...,5), $x_1 = 1$ и $y_{k+1} = y_k + 0,5$ (k=1,2,...,8), $y_1 = 4$. Функция *произведения* $\Pi(x_v, y_1) = f(x_v)\cdot\phi(y_1) = x_v^2 y_1 e^{y_1}$, $\Pi(x_v, y_2) = f(x_v)\cdot\phi(y_2) = x_v^2 y_2 e^{y_2}$, $\ldots\, \Pi(x_v, y_8) = f(x_v)\cdot\phi(y_8) = x_v^2 y_8 e^{y_8}$ (v=1,2,...,6); а *суммы* – $E(x_v, y_1) = f(x_v) + \phi(y_1) = x_v^2 + y_1 e^{y_1}$, $E(x_v, y_2) = f(x_v) + \phi(y_2) = x_v^2 + y_2 e^{y_2}$, $\ldots\, E(x_v, y_8) = f(x_v) + \phi(y_8)$ (v=1,2,...,6).

В обоих случаях применятся *одни и те же операции*, а толкование *операций* для функций, заданных *на одной* координатной оси и *на двух* *осях, существенно отличаются.*

Разительное отличие и в *результатах применения операций*:

{A.21.3} В *первом* случае получаем *одномерные* функции, *определенные на той же* координатной оси, а во втором – *двумерные* функции, *определенные в прямоугольной* области ($x_{\mathbf{H}} \le x \le x_{\mathbf{K}}$, $y_{\mathbf{H}} \le y \le y_{\mathbf{K}}$) *декартовой* плоскости.

Во 2-м случае получены *два частных* вида *двумерных* функций:

{A.21.4} *Сумма одномерных* функций определяет все *возможные двумерные* функции, *представимые в виде сумм* (в математическом анализе), а их *произведение* – все *возможные двумерные* функции, *представимые в виде произведений.*

Очевидно, что они «далеко не исчерпывают» всего имеющегося *многообразия двумерных* функций.

При известном результате *операций суммы* или *произведения* и *одной из исходных* функций, можно определить *другую исходную* функцию, используя операции *разности* и *деления* функций.

***<u>Исключение</u>* – *операция произведения* функций, заданных *на одной* координатной оси: в общем случае *исходные* функции по ее результату *не определяются*, хотя *операция деления* существует. В частном случае, если *области определения* функций *равны*, и функции *полностью пересекаются*, то задача определения *одной из исходных* функций *по известному* результату их *произведения* решаемая.**

Наша цель – определение *операций* с *вероятностными* функциями (***законами* распределения**) случайных величин, поэтому здесь рассмотрим простые примеры для последующего сравнения: *сумму* и *произведение* *действительных* функций *действительных* аргументов x и y.

***<u>Пример</u>* <u>4.</u> Пусть известны: функция *произведения* $\Pi(x_v, y_w)$ или *суммы* $E(x_v, y_w)$ дискретных функций $f(x_v)$ и $\phi(y_w)$; одна из исходных функций, например $\phi(y_w)$. Для определения функции $f(x_v)$ применить *операцию деления* или *разности* функций для любой данной строки с данным номером w=1,2,..., W, например: $f(x_v) = \Pi(x_v, y_1) / \phi(y_1)$, $f(x_v) = E(x_v, y_1) - \phi(y_1)$ {2}. Если функции *непрерывны*, то из выражений {1} получим $f(x) = \Pi(x, y_{\mathbf{d}}) / \phi(y_{\mathbf{d}})$ и $f(x) = E(x, y_{\mathbf{d}}) - \phi(y_{\mathbf{d}})$ {2*} соответственно. Операции более наглядны в интегральном представлении $f(x) = \int_{y_{\mathbf{H}}}^{y_{\mathbf{K}}} \Pi(x,y)dy \,/\, \int_{y_{\mathbf{H}}}^{y_{\mathbf{K}}} \phi(y)dy$, $f(x) = \int_{y_{\mathbf{H}}}^{y_{\mathbf{K}}} E(x,y)dy \,/\, (y_{\mathbf{K}} - y_{\mathbf{H}}) - \int_{y_{\mathbf{H}}}^{y_{\mathbf{K}}} \phi(y)dy \,/\, (y_{\mathbf{K}} - y_{\mathbf{H}})$ {2**}.**

***<u>Замечание</u>* <u>6.</u> Правила просты и, в принципе, легко обобщаются на сумму и произведение двумерных (многомерных) функций одной размерности: несколько сложнее – на функции разной размерности. Мы их не приводим, ибо не рассматривали при построении новой исходной системы теории случайных величин.**

2. Операции *разности и деления* распределений вероятностей *одномерных* случайных величин

Сначала о применении правил *суммы* и *произведения действительных* функций *в теории* случайных величин[83], *развитой* в работе.

1. Правило *суммы действительных* функций *действительного* аргумента x используется для вычисления *вероятностной* функции *системы*, образованной *объединением* случайных величин (раздел 4.1.1, стр.67).

***Пример* 5.** **Пусть плотности $p_{\mathbf{\Phi}}(x)$ и $p_{\mathbf{\Psi}}(x')$ величин $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ расположены на отрезках $l_{\mathbf{\Phi}} = x_{\mathbf{K}} - x_{\mathbf{H}}$ и $l_{\mathbf{\Psi}} = x'_{\mathbf{K}} - x'_{\mathbf{H}} \leq l_{\mathbf{\Phi}}$ оси X соответственно, так что $0 \leq l_1 = x_{\mathbf{K}} - x'_{\mathbf{H}} \leq l_{\Psi}$ (или $x_{\mathbf{K}} - l_{\Psi} \leq x'_{\mathbf{H}} \leq x_{\mathbf{K}}$). Тогда функция *суммы объединенного опыта* равна $p^1_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi} \cup \mathbf{\Psi}\} = p_{\mathbf{\Phi}}(x) \cdot l_{\mathbf{\Phi}} / l_{\mathbf{\Sigma}}$ при значениях $x_{\mathbf{H}} \leq x < l_{\mathbf{\Phi}} - l_1$, $p^2_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi} \cup \mathbf{\Psi}\} = p_{\mathbf{\Phi}}(x) \cdot l_{\mathbf{\Phi}} / l_{\mathbf{\Sigma}} + p_{\mathbf{\Psi}}(x') \cdot l_{\mathbf{\Psi}} / l_{\mathbf{\Sigma}}$ при значениях $l_{\Phi} - l_1 \leq x < x_K$ и $p^1_{\Sigma}|_{\cup}\{\Phi \cup \Psi\} = p_{\Psi}(x') \cdot l_{\Psi} / l_{\Sigma}$ при значениях $x_{\mathbf{K}} \leq x < x'_{\mathbf{K}}$ $l_{\mathbf{\Sigma}} = l_{\mathbf{\Phi}} + l_{\mathbf{\Psi}} - l_1$.**

Функцию $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi} \cup \mathbf{\Psi}\}$, образованную *пересечением вероятностных* функций *исходных* величин, хотя мы и назвали ее *условно произведением при объединении* случайных величин, но, принципиально, к *произведению* она *отношения не имеет*. Можно для разнообразия сравнить функции суммы и произведения, полученные в примерах 1-2 на участках пересечения функций. Их легко преобразовать в плотности распределения (вероятностные функции) случайных величин, проведя нормировку.

2. Правило *произведения действительных* функций *действительного* аргумента x используется для *вычисления числовых* характеристик (*начальных* и *центральных* моментов) *одномерных* случайных величин (часть V работы).

Вычисляются *произведения* $x^k_v \cdot p(x_v)$ (v=1,2,...,V) аргумента x^k_v *данной степени* k=1,2,... на значение *вероятностной* функции $p(x_v)$ в каждой точке области определения, затем все *произведения* суммируются.

3. Правило *произведения действительных* функций *действительных* аргументов x и y используется для *вычисления вероятностной* функции *произведения* $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(x_v, y_w)\}$ *системы*, образованной *совмещением* случайных величин (раздел 4.1.2, стр.74). Оно же применяется для *вычисления числовых* характеристик (смешанных моментов) *двумерного* (в том числе – *совмещенной* величины) распределения (часть V работы).

***Пример* 6.** **п.1. Вычисляются *произведения* $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(x_v, y_w)\} = p_{\mathbf{X}}(x_v) \cdot p_{\mathbf{Y}}(y_w)$ (v=1,2,...,V; w=1,2,...,W) *вероятностных* функций случайных величин X и Y для каждой пары $(x_v,\, y_w)$ координат. п.2. Для определения смешанных моментов вычисляются *произведения* $x^k_v \cdot y^j_w \cdot p(x_v, y_w)$ аргументов x^k_v и y^j_w *данных степеней* k=1,2,... и j=1,2,... соответственно на значение *двумерной вероятностной* функции $p(x_v, y_w)$ в каждой точке области определения, определяемой парой $(x_v,\, y_w)$: все *произведения* суммируются.**

4.1. Правило *суммы действительных* функций *действитель-*

---

[83] **Напомним, что действительные функции в теории вероятностей несколько отличаются от обычных действительных функций**

ных аргументов x и y используется для *вычисления вероятностной* функции *суммы* $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}\{(x_v, y_w)\}$ *системы*, образованной *совмещением* случайных величин (раздел 4.1.2, стр.74). **4.2.** Оно может быть *применено* для *построения различных теоретических вероятностных* функций *двумерных* случайных величин (пример 16, стр.66).

Пример **7.** **п.1.** 1-й случай определяет $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\times}(x_v, y_w) = p(x_v)+p(y_w)-p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\ (x_v, y_w)$ (v, 1,2,...,V; w=1,2,...,W) *суммы вероятностных* функций (с учетом *пересечения одномерных вероятностных* функций $p(x_j|_w)$ $(j = 1, 2, ..., V)$ и $p(y_k|_v)$ $(k = 1, 2, ..., W)$, вывод W.31, стр.76) случайных величин **X** и **Y** для каждой точки, определяемой парой $(x_v,\ y_w)$. **п.2.** Во 2-м случае (пример 16, стр.66) вычисляются *суммы* $p(x_m,\ y_n)=\{p(x_m)+p(y_n)\}/(M+N)$, где $1/(M+N)$ – нормирующий множитель. При непрерывных случайных величинах имеем $p(x,\ y)=\{\ p(x)\ +\ p(y)\}/(l_{\mathbf{\Phi}} + l_{\mathbf{\Psi}})$, где $l_{\mathbf{\Phi}} = |x_{\mathbf{K}} - x_{\mathbf{H}}|$, $l_{\mathbf{\Psi}} = |y_{\mathbf{K}} - y_{\mathbf{H}}|$ – длины областей определения. Оно использовано для построения *двумерного* распределения в примере 16 (стр.66) по *действительным* функциям *действительных* аргументов.

Таким образом, ***правила выполнения операций суммы*** **и** ***произведения действительных*** **функций** ***действительных*** **аргументов подтверждают** ***правильность построения видов систем*** **и операций** ***с распределениями одномерных*** **случайных величин, определенных в** ***новой исходной*** **системе** ***теории*** **случайных величин.**

Теперь об определении *плотности* распределения (**вероятностной функции**) *одной* из *исходных* величин. Рассмотрим примеры.

Пример **8.** Пусть известны: *плотность* $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi}\cup\mathbf{\Psi}\}$ распределения *суммы системы* случайных величин **Φ** и **Ψ**, образованной их *объединением*; *одна* из *плотностей*, например $p_{\mathbf{\Psi}}(x')$ величины **Ψ**, ее образующих; области *определения и взаимное расположение плотностей* $p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi}\cup\mathbf{\Psi}\}$ и $p_{\mathbf{\Psi}}(x')$ на оси X. Тогда *плотность* $p_{\mathbf{\Phi}}(x)$ распределения величины **Φ** определяется *разностью* $p_{\mathbf{\Phi}}(x) = p_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi}\cup\mathbf{\Psi}\} - p_{\mathbf{\Psi}}(x')$ значений плотностей. Если области соответствуют примеру 5, то имеем $p_{\mathbf{\Phi}}(x) = p^1_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi}\cup\mathbf{\Psi}\}\cdot l_{\mathbf{\Sigma}}\,/\,l_{\mathbf{\Psi}}$, при значениях x, соответствующих интервалу $x_{\mathbf{H}} \le x < l_{\mathbf{\Phi}} - l_1$ и $p_{\mathbf{\Phi}}(x) = p^2_{\mathbf{\Sigma}}|_{\cup}\{\mathbf{\Phi}\cup\mathbf{\Psi}\}\cdot l_{\mathbf{\Sigma}}/, l_{\mathbf{\Phi}} - p_{\mathbf{\Psi}}(x')\cdot l_{\mathbf{\Psi}}/l_{\mathbf{\Phi}}$ при значениях $l_{\mathbf{\Phi}} - l_1 \le x < x_{\mathbf{K}}$.

Пример **9.** Пусть известны: *плотность* $p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(x_v, y_w)\}$ распределения *произведения системы* случайных величин **Φ** и **Ψ**, образованной их *совмещением*; *одна* из *плотностей*, например $p_{\mathbf{Y}}(y)$ величины Ψ, ее образующих. Тогда плотность $p_{\mathbf{X}}(x)$ распределения величины **Φ** определяется *операцией деления* плотностей $p_{\mathbf{X}}(x) = p_{\mathbf{\Pi}}|_{\times}\{(x, y)\}/p_{\mathbf{Y}}(y)$.
Исходя из интегрального представления (пример 4, стр.98), получим $p_{\mathbf{X}}(x) = \int_{y_{\mathbf{H}}}^{y_{\mathbf{K}}} p_{\mathbf{\Pi}}\,|_{\times}\{(x, y)\}dy$. Очевидно, что оно сложнее первого.

Пример **10.** Пусть известны: *плотность* $p_{\mathbf{\Sigma}}\{(x_v, y_w)\}$ распределения, образованной *суммой* плотностей $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ *одномерных* случайных величин **X** и **Y**, определенных на осях X и Y соответственно; *одна из плотностей*, например $p_{\mathbf{Y}}(y)$ величины **Y**, ее образующих. Тогда *плотность* $p_{\mathbf{X}}(x)$ распределения величины **X** определяется *операцией разности* плотностей $p_{\mathbf{X}}(x) = p_{\mathbf{\Sigma}}\{(x, y)\}\cdot(l_{\mathbf{\Phi}} + l_{\mathbf{\Psi}}) - p_Y(y)$.

Это все, что можно получить на основе п.1-4, определяющих применение *правил выполнения операций суммы и произведения действительных* функций *действительных* аргументов в теории случайных величин, развитой в настоящей работе. Об *операциях* со случайными величинами, *принятыми в существующей* теории в следующем разделе.

Замечание* 7. Вроде бы можно «извлечь» еще одно отношение из п.4.1 (стр.99), определяющее *разность* случайных величин. Однако в этом случае для определения, например плотности $p_X(x)$, необходимо знать, кроме плотностей $p_{\mathbf{\Sigma}} \mid_{\times}\{(x_v, y_w)\}$ и $p_{\mathbf{\Psi}}(y)$, еще и плотность произведения $p_{\mathbf{\Pi}} \mid_{\times}\{(x_v, y_w)\}$. Очевидно (пример 10), что $p_X(x)$ вычисляется по плотности $p_{\mathbf{\Pi}} \mid_{\times}\{(x_v, y_w)\}$. Поэтому определение *разности* на основе п.4.1 *не имеет смысла.

3. О возможности определения операций разности и деления распределений случайных величин, исходя из операций с действительными функциями действительных аргументов

В *аксиоматической* теории вероятностей введена *операция разности* событий [8,10], ибо она есть в теории множеств[84]: в [19,60] показано: в таком виде она, мягко говоря, не очень подходит для событий.

Хорошо, что операции *деления* событий в ней нет: зато постулируется *операция деления* вероятностей событий – *условная* вероятность события. В классической теории определяются понятий *независимости* и *зависимости* событий, а затем доказывается *теорема умножения* вероятностей [13,45-47], для чего вводится понятие *условной* вероятности. Из теоремы умножения следует *операция деления* вероятостей.

В принятой теории случайных величин, как показано при анализе, имеется *одна операция* – «произведение» случайных величин (**определения 'D, D1' и их анализ, стр.16-35**). А *сумма* и *деление* случайных величин *введены на основе* понятия *функций от* случайных величин (**часть IV работы**). Они принципиально являются *видами преобразований*[85] *двумерного* (**многомерного**) распределения к *одномерному* распределению: ***никакого отношения* *ни к сумме*, *ни к делению* случайных величин они *не имеют*!** Об операции *разности* случайных величин вообще говорится как-то «вскользь, как само собой разумеющееся», но на *чем она основана* «ни гу-гу», можно только догадываться[86].

В *новой исходной* системе *теории* событий *операции* введены [19,60] *на основе теорем о сумме и произведения* (**т.е. совместимых**) событий (**простого**) *опыта*, а также событий *объединенного* и *совмещенного опы-*

[84] **В классической теории она нам «не повстречалась»**

[85] **С применением *линейной* $y = z - x$ и гиперболической $y = z / x$ формул преобразования соответственно**

[86] **Что она введена: то ли, по аналогии с суммой, как функция Z=X-Y от случайных величин X и Y, то ли с операцией разности событий [19,60], то ли еще по какой-то, нам неизвестной аналогии**

тов. Кроме того, введена дополнительная *операция деления* вероятностей $\mathbf{P}(\mathbf{A}) / \mathbf{P}(\mathbf{B})$ событий **A** и **B**, однако ее можно применять *при условии* $\mathbf{P}(\mathbf{A}) < \mathbf{P}(\mathbf{B})$ и *в отдельных* случаях.

***Замечание* 8. Нам, по крайней мере, не удалось придумать примера необходимости ее *применения в теории* событий: поэтому отнесли эти случаи к случайным величинам. Например. *Преобразование двумерной* случайной величины производится с применением формулы преобразования зависящей от параметра a, заданной в неявном виде $F(x, y; a) = 0$. Область изменения параметра ограничена: это может быть отрезок $a_1 \leq a \leq a_2$, односторонний или двусторонний интервал и т.п. Ограничение может быть связано с условиями задачи или с существование решения уравнения $F(x, y; a) = 0$ в области действительных чисел. Соответственно, ограничивается область изменения функции $F(x, y; a)$, которая может оказаться меньше области определения распределения вероятностей. В этом случае полученная *одномерная плотность* $p_{\mathbf{Z}}(z)$ (*вероятностная* функция) распределения не отвечает условию $\int_{z_{\mathbf{H}}}^{z_{\mathbf{K}}} p_{\mathbf{Z}}(z)dz = 1$, т.е. не определяет закон распределения случайной величины Z: используя операцию $\mathbf{P}(\mathbf{A}) / \mathbf{P}(\mathbf{B})$, ее можно нормировать. Однако один маленький нюанс: *а нужна ли эта нормировка*? Дело в том, что *вероятности* событий, *определенные* по этому «закону» *будут больше тех*, которые *получены без нормировки*. Получается: делить можем, а зачем не знаем. Жаль, красиво было.**

В разделе 2 (**стр.99**)определены *два правила* выполнения *операции разности* (**пример 8 и пример 10, стр.100**) и *одно правило* выполнения *операции деления* (**пример 9**) распределений *одномерных* случайных величин. Они *непосредственно* следуют из *построения новой исходной* системы *теории* случайных величин и определяются теорией *действительных* функций *действительного* аргумента.

Можно ли на основе операций с действительными функциями действительных аргументов определить операции с одномерными распределениями, отличающиеся от тех, которые получены в разделе 2?

Для этого обратимся к *действительным* функциям *действительных* аргументов. Отметим важные обстоятельства:

> **{A.21.5} *Операции разности* или *деления одномерных действительных* функций *действительных* аргументов и их свойства *следуют* из *операций суммы* или *произведения*.**

Из положения **{A.21.5}** следует:

> **{A.21.6} *Правила* выполнения *операций разности* или *деления* функций соответствуют *правилам* выполнения *операций* их *суммы* или *произведения*.**

По существу мы их уже применили в примерах 4, 8-10. Отметим еще одно обстоятельство, которое как раз и определяет *правила арифметических операций* с функциями двух аргументов x и y:

{A.21.7} ***Правила*** **выполнения** ***арифметических операций*** **связаны с** ***независимостью*** **аргументов** x **и** y**: при** ***данном*** **значении** x_{dan} **аргумент** y **может принять** ***любое из допустимых*** **значений** $y_H \le y \le y_K$**; аналогично при** ***данном*** **значении** y_{dan} **аргумент** x **может принять** ***любое из допустимых*** **значений** $x_{\mathbf{H}} \le x \le x_{\mathbf{K}}$**.**

Допустимые **значения аргумента определяется** ***областью*****, в которой значения функции имеют** ***вполне определенное, конечное действительное значение.*** **Используя правила, можно из** ***любой одномерной*** **функции образовать разные** ***двумерные*** **функции, например:** x^n, $(x \pm y)^n$, $(x \cdot y)^n$, $(x/\,y)^n$**. Можно взять любую из элементарных функций, повторить то же самое и определить область существования функций и т.д. Можно взять любую из элементарных функций, повторить то же самое и определить область существования функций и т.д. Можно продолжить, применяя различные комбинации арифметических операций, суперпозиции функций: дополнить их операциями математического анализа – предельный переход, дифференцирование, интегрирование и т.д. Правила выполнения арифметических операций не изменятся.**

А как быть, если аргументы x ***и*** y ***зависимы*****? Например,** ***зависимость*** **определяется функцией** $y = g(x)$**. Это означает: функции** $f(x)$ **и** $\phi(y)$ **связаны** ***функциональной зависимостью*** $y = g(x)$**, позволяющей** ***по значению*** **функции** $f(x)$ **определить** ***точное*** **значение функции** $\phi(y)$**.**

Теперь рассмотрим, к чему приводит применение операций *разности* и *деления* в теории случайных величин, учитывая их особенность:

“A”. Значения ***вероятностной*** **функции** $p(x_v)$ **(v=1,2,...,V) или** ***плотности*** **распределения** $p(x)$ **должны отвечать условиям:** $0 < p(x_v) < 1$ **или** $p(x) \ge 0$ **соответственно.**

“B”. ***Сумма*** **значений** ***вероятностной*** **функции или** ***плотности*** **распределения** ***всегда равна единице*****:** $\sum_1^V p(x_v) = 1$ **или** $\int_{x_H}^{x_K} p(x) = 1$ **соответственно.**

В результате *операций разности* или *деления вероятностных* функций (**плотностей распределения**) мы должны получить *вероятностную* функцию (**плотность распределения**) некоторой случайной величины Z. По крайней мере, это следует из теории случайных величин. *Но так ли это на самом деле?*

п.1. Пусть на оси X **определены** ***вероятностные*** **функции** $p_{\mathbf{\Phi}}(x_v)$ **и** $p_{\mathbf{\Psi}}(x'_w)$ **случайных величин Φ и Ψ в точках отрезков** $(x_{\mathbf{H}} \le x_1 < x_2 < \ldots < x_V \le x_{\mathbf{K}})$ **и** $(x'_{\mathbf{H}} \le x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_W \le x'_{\mathbf{K}})$ **соответственно. Положим** $V > W$**. Если функции не пересекаются или пересекаются частично (п.2 примера 17, стр.69), то** ***разность*** $p_{\mathbf{\Phi}}(x_v) - p_{\mathbf{\Psi}}(x'_w)$ ***вероятностных*** **функций определяет** ***отрицательные*** **вероятности, по крайней мере, на отрезке не пересечения функций. Однако при** ***разности*** $p_{\Psi}(x'_w) - p_{\Phi}(x)$ ***отрицательные*** **и/или** ***нулевые*** **вероятности будут в любом случае. Т.е. уже условие “A” не выполняется.** ***Деление*** $p_{\mathbf{\Phi}}(x_v)\,/\,p_{\mathbf{\Psi}}(x'_w)$**, как и** ***произведение*****, существует только в области пересечения: в этом случае не выполняется условие “B”. Теперь положим V=W и** $x'_v = x_v$ **(v=1,2,...,V), т.е.** ***области*** **определения** ***равны*** **и** ***вероятностные*** **функции** ***полностью пересекаются.*** **1. При** ***разности вероятностных*** **функций будет, по крайней мере, хотя бы одна** ***отрицательная*** **вероятность. 2. При** ***делении*** **– по крайней мере, хотя бы одна вероятность** ***больше*** **единицы. В общем случае при** ***разности сумма*** **всех вероятностей** $\sum_1^V \{p_{\mathbf{\Phi}}(x_v) - p_{\mathbf{\Psi}}(x'_w)\} < 1$ **(может быть и отрицательной!). а при делении –** $\sum_1^V \{p_{\mathbf{\Phi}}(x_v)\,/\,p_{\mathbf{\Psi}}(x'_w)\} > 1$**. При значениях** $p_{\mathbf{\Psi}}(x'_v) = p_{\mathbf{\Phi}}(x_v)$ **получим**

$\sum_1^V \{p_{\Phi}(x_v) - p_{\Psi}(x'_w)\} = 0$ **и** $\sum_1^V \{p_{\Phi}(x_v) \,/\, p_{\Psi}(x'_w)\} = V$.

п.2. Пусть на осях X **и** Y **определены *вероятностные* функции** $p(x_v)$ **и** $p(y_w)$ **в точках отрезков** ($x_{\mathbf{H}} \le x_1 < x_2 < ... < x_V \le x_{\mathbf{K}}$) **и** ($y_{\mathbf{H}} \le y_1 < y_2 < ... < y_W \le y_{\mathbf{K}}$) **соответственно. Здесь еще более очевидно. 1. Для выполнения операции разности необходимо из *каждого значения* функции** $p(x_v)$ **в точках** x_v ***с номерами* v=1,2,...,V *вычесть значение* функции** $p(y_w)$ **в точке** y_w **с *данным номером* w=1,2,...,W. 2. А для выполнения операции деления – *каждое значение* функции** $p(x_v)$ **в точках** x_v ***с номерами* v=1,2,...,V *разделить на значение* функции** $p(y_w)$ **в точке** y_w **с *данным номером* w=1,2,...,W. Следовательно, при операции *разности* обязательно будут *отрицательные* и *нулевые* вероятности, а при делении – вероятности *большие либо равные единице*. В общем случае: 1) при выполнении операции *разности* – *сумма* всех вероятностей будет *меньше единицы* (в том числе – может быть и меньше нуля), а при *делении* – *больше единицы*. При значениях** $p(x_v) = p(y_w)$ **сумма всех вероятностей при разности равна нулю, а при делении –** $V \cdot W$.

***<u>Замечание</u>* <u>9.</u> Для *непрерывных* случайных величин получим подобные результаты. Отметим, что проще рассматривать *законы* распределения, а не их плотности. А чтобы еще больше упростить задачу, разделить области определения законов на равные сравнительно малые участки.**

Таким образом, *непосредственное* применение операций *разности* и *деления действительных* функций *действительных* аргументов к распределениям случайных величин приводит к весьма «несуразным результатам»: «виноваты» ограничения **''A''** и **"B"**, накладываемые на значения вероятностей – **во всех рассмотренных случаях (пункты 1-2) они не выполняются.**

Из проведенного анализа <u>*однозначно*</u> следует:

> **{A.21.8} Операции *разности* распределений случайных величин существуют как операции, *обратные* операциям *суммы*, определяемых: *объединенной* случайной величиной (пример 8, стр.100); *суммой* распределений величин, *заданных на* 2-х осях (пример 10). А операция *деления* – как операция, *обратная* операции *произведения* распределений, определяемой *совмещением* величин (пример 9).**

Если в теории событий, принятую операцию «разности» событий мы «приспособили» хотя бы к одному частному случаю (**Приложеие IV [19,60]**) – *совместимым* событиям *одномерного* (**простого**) *опыта*, то в теории случайных величин даже какого-то частного случая не существует.

Отметим, что в части IV исследований будут определены еще две операции, *обратные операциям преобразования двумерного* распределения *системы*, образованной *совмещением случайных* величин.

Список литературы

1. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с

2. Л.Е Майстров. Теория вероятностей. Исторический очерк.– М: Наука, 1967. – 321с

3. О.Б. Шейнин. Теория вероятностей до П. Л. Чебышёва // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. – № 23. – с. 284-306

4. Я. Бернулли. О законе больших чисел. – М: Наука, 1986. – 176с

5. Википедия: История теории вероятностей.

6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с.

7. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 738с.

8. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с

9. А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. – Изд.2-е – М. "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 120с.

10. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. "East-West" Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с

11. С.Н. Бернштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.-Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с

12. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Изд. 3-е - М. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 511с

13. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей.- Изд. 7-е – М. Издательский центр «Академия», 2003. – 576с

14. А.А. Марков. Исчисление вероятностей. – Изд.4-е – М.-Л.: – Госиздат, – 1924. – 589с.

15. В.И. Гливенко. Курс теории вероятностей. – М.-Л. Государственное объединенное научно-техническое издательство, 1939г. – 220с.

16. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с

17. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. "Наука", 1980г. – 976с

18. А.А. Боровков. Теория вероятностей: учебное пособие для вузов. – Изд.2-е –. – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 432с.

19. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 1: «*совершенство*» *или видимостъ*? ч.I. Теории событий: критика сцществующих понятий и создание новой исходной системы понятий. – https://iibondarchuk.github.io/. 2018/ – 66с

20. В.И. Лотов. Теория вероятностей. Конспект лекций для студентов механико-математического факультета Новосибирского Государственного Университета

21. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – Изд. 6-е, стереотипное. – М. "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1966г. – 607с

22. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 – Изд. 7-е, стереотипное. – М. "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 800с

23. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 – Изд. 5-е, стереотипное. – М. "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 656с

24. Р. Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. – Изд. 4-е.– Одесса. Mathesis, 1923. – 44с

25. С.А. Ануфриенко. Введение в теорию множеств и в комбинаторику, Учебное пособие. – Екатеринбург. УрГУ, 1998. – 62с

26. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 2: идеал или иллюзия? ч.II. Замечания к распределениииям скоростей (импульсов, энергий) Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака.. – https://iibondarchuk.github.io/. 2019/ – 31с

27. Энциклопедический словарь. Гл. ред. Б.А. Введенский, – Т.1. – М. Советская энциклопедия, 1963. – 656с

28. Энциклопедический словарь. Гл. ред. Б.А. Введенский, - Т.2. – М. Советская энциклопедия, 1964. – 736с

29. С. Н. Ожегов, Н.Ю. Шведова. Толковый словарь русского языка. – Изд.4-е, доп. – М. «Азбуковник», 1997. – 944с

30. Филипп Дж. Дейвис. Арифметика. Сборник статей «Математика в современном мире». Пер. с англ. – М. «Мир» 1967. – 205с.