

«То все ошибки, все накладки  
И заблуждения веков»  
Автор неизвестен.

УДК 519.211; ББК 22.171

**Теория вероятностей 6: иллюзия идеала!**  
**ч. VI. Виды зависимости случайных величин**

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

*21 июля 2020 г.*

**Содержание.**

|   |    |
|---|----|
| Введение .....  | 2  |
| 1. Функциональная зависимость .....   | 4  |
| 1.1. О теории корреляции .....  | 7  |
| 1.2. Функциональная зависимость (линия регрессии) двух случайных величин: предварительные рассуждения .....       | 12 |
| 1.3. Влияние погрешностей измерений параметров на построение линии регрессии и решение задачи прогноза .....      | 15 |
| 1.3.1 Линейная зависимость между 2-мя параметрами (15). 1.3.2 Нелинейная зависимость между 2-мя параметрами (20). |    |
| 1.4. Влияние нескольких случайных величин на одну величину .....  | 22 |
| 1.4.1. Случайность параметров технологического процесса и прочность металлов (сплавов) (22).                      |    |
| 2. Вероятностная зависимость случайных величин .....  | 27 |
| Список литературы .....   | 29 |

**Примечания**

**1.** Ссылки на работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. Если работ несколько, то они разделяются знаком «;». При ссылках внутри работы указывается положение, на которое дается ссылка, и № страницы на которой оно находится.

**2.** Выводы, следующие из анализа, обозначаются номерами W.1, W.2, .... Чтобы обратить внимание Читателя на некоторые важные моменты, следующие из анализа, они выделены как положения и обозначены номерами {A.1}, {A.2}, ....

**3.** Понятия, используемые в настоящее время, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита. Уточненные предположения – римскими цифрами, а уточненные и вновь введенные определения понятий – словом «определение» с арабскими цифрами.

## Введение

Анализ *условий независимости* случайных величин (подраздел 1.3, стр.123), принятых в существующей теории, показал, что они приводят к противоречию (вывод W.14, стр.74): «*независимые*» случайные величины могут быть *функционально зависимыми*.

Обратимся к пояснению смысла понятия *зависимости* и *независимости* случайных величин в существующей теории. Начнем с цитаты:

«Понятие “зависимости” случайных величин, которым мы пользуемся в теории вероятностей, несколько отличается от понятия “зависимости” величин, которым мы оперируем в математике. Действительно, обычно под “зависимостью” величин подразумевают один тип зависимости – полную, жесткую, так называемую функциональную зависимость. Две величины называются независимыми, если, зная значение одной из них, можно точно указать значение другой. В теории вероятностей мы встречаемся с другим, более общим типом зависимости – с вероятностной или “стохастической” зависимостью. Если величина  $Y$  связана с величиной  $X$  вероятностной зависимостью, то, зная значение  $X$ , нельзя указать точно значение  $Y$ , а можно указать только ее закон распределения, зависящий от того какое значение приняла величина  $X$ . Вероятностная зависимость может быть более менее тесной; по мере увеличения тесноты вероятностной зависимости она все более приближается к функциональной. Таким образом, функциональную зависимость можно рассматривать как крайний, предельный случай наиболее тесной вероятностной зависимости. Другой крайний случай – полная независимость случайных величин. Между этими двумя крайними случаями лежат все градации вероятностной зависимости – от самой сильной до самой слабой» [13,173].

Странно одно: в другой главе говорится о *функциональной зависимости* случайной величины  $Y$  от величины  $X$  [13,263]. Далее записывается *действительная* функция *действительного* аргумента  $y = \phi(x)$ , определяющая кривую на плоскости: мало того, определяется *функциональная связь законов* распределения  $P(Y < y) = P(a < X < x)$ , где  $x = \psi(y)$  – функция, обратная к функции  $y = \phi(x)$  [13,264]. О какой-либо *вероятностной зависимости* даже не упоминается. – *Загадка?*

В цитате, по нашему мнению, *наиболее полно и концентрированно* поясняет, что понимается под *зависимостью* случайных величин в существующей теории вероятностей.

Во-первых, из цитаты следует: в существующей теории под *функциональной зависимостью* понимается *только зависимость*  $y = f(x)$  между двумя *действительными* функциями  $V(x)$  и  $W(y)$  *действительных* аргументов  $x$  и  $y$ , когда *по значению одной* (положение {A.1}, стр.59) *вычисляется точное значение другой* функции. Она рассмотрена нами на примере из механики (стр.58), однако такого типа *зависимости* между случайными величинами, вообще говоря, в принципе быть не может.

В отличие от механики (т.е. обычных действительных функций *действительного* аргумента), *функциональная зависимость* в теории вероятностей *связывает законы* распределения, тоже *действительные* функции *действительного* аргумента, 2-х случайных величин.

W.1. *Функциональная связь* позволяет по *закону* распределения

одной случайной величины определять *точные значения* вероятностей появления событий *другой* случайной величины.

**W.2.** *Функциональная зависимость* между 2-мя законами распределения такая же, как и между *действительными функциями действительных* аргументов  $x$  и  $y$ , но только *связывающая вероятности* событий, определяемых случайными величинами.

Выводы следуют из работы [30] (выводы W.1, W.5, W.6 и W.11-W.12, стр.11-12, 28) для одномерных распределений а также (выводы W.21-W.25 стр.40-41) для двумерных распределений.

И второе, следующее из цитаты. В существующей теории понятие *вероятностной* (стохастической) *зависимости* связывают, если говорить о сути, с понятием *ковариации*. Более точно – с *коэффициентом корреляции*: именно он, по принятой версии, и определяет «... все *градации вероятностной зависимости* – от самой сильной» (функциональной) «до самой слабой» («полной независимости»).

В других работах «с места и в карьер»: сразу об «условиях независимости», а о смысле понятия, кроме упоминания о его важности в теории вероятностей, ничего<sup>1</sup>. Например:

«Понятие *независимости* двух или нескольких опытов занимает в известном смысле центральное место в теории вероятностей. В самом деле, мы уже видели, что теорию вероятностей с математической точки зрения можно рассматривать как специальное применение общей теории аддитивных функций множеств. Естественно задать вопрос, каким же образом теория вероятностей развилась в большую, обладающую своими собственными методами самостоятельную науку? Для ответа на этот вопрос следует указать на ту специализацию, которую получают в теории вероятностей общие проблемы, касающиеся аддитивных функций множеств. То обстоятельство, что наша аддитивная функция множеств  $P = P(\bullet)$  неотрицательна и удовлетворяет условию  $P(\Omega) = 1$ , не обуславливает еще собой возникновения новых глубоких проблем. Случайные величины (ср. третью главу) с математической точки зрения представляют собой не что иное, как измеримые (относительно  $\mathcal{F}$ ) функции, а их математические ожидания являются абстрактными интегралами Лебега. Эта аналогия впервые полностью разъяснена в работах Фреше. Введение упомянутых понятий не может, следовательно, еще доставить никакого базиса для развития большой оригинальной теории. Исторически независимость испытаний и случайных величин явилась тем математическим понятием, которое придало теории вероятностей своеобразный отпечаток. Классические работы Лапласа, Пуассона, Чебышева, Маркова, Ляпунова, Мизеса и Бернштейна действительно посвящены в основном изучению рядов независимых случайных величин. Если в новейших исследованиях (Марков, Бернштейн и др.) часто отказываются от предположения полной независимости, то оказываются принужденными для получения результатов ввести аналогичные ослабленные предположения (ср. в этой главе §6, о цепях Маркова). Мы приходим, следовательно, к тому, чтобы в понятии независимости видеть, по крайней мере, первый зародыш своеобразной проблематики теории вероятностей ...» [9,17-18].

А далее сразу об условиях, при которых *испытания* или события называются *независимыми*. Если же обратится к случайным величинам

---

<sup>1</sup>Исключение: работы, написанные до того, как «... удалось построить логически совершенное здание современной теории вероятностей» [1,49]. Только в них пояснения «разбросаны по разным местам»

[9,84], то там сразу об условиях. «Интересные» рассуждения, но комментировать их не будем<sup>2</sup>, а проведем анализ того, что определяют *условия независимости* и что означает понятие «*полной независимости*» 2-х (и более) случайных величин. Для этого, во-первых, более подробно остановимся на *функциональной зависимости*, о которой разговор шел в приложении II (стр.73). Во-вторых, разберемся, что же представляет собой понятие *вероятностной зависимости*, о которой упоминается в цитате из работы [13].

---

<sup>2</sup>Многое уже сказано до этого, однако: — «продолжение следует ...»

— Но ведь в природе так не бывает!  
 — Природа тут не причем.  
 Мое уравнение. Что хочу, то и пишу!  
 Диалог («Физики шутят»)

## 1. Функциональная зависимость

Обратим внимание на некоторые моменты, связанные с *функциональной зависимостью системы* 2-х (в нашем понимании) случайных величин. Об этом не могло быть речи в существующей теории вероятностей: в ней *независимость* и *зависимость* случайных величин связана (стр.73) *только с выполнением или невыполнением условия (3)*  $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$ .

**Пример 19.** На рис.19 изображены: *формула преобразования*  $y = f(x)$  и семь (счет слева направо) положений случайной величины  $X$  на отрезке  $0 \leq x \leq b$ . Границы областей  $(x_H^j, x_K^j)$  и  $(y_H^j, y_K^j)$  плотности  $p^j(x) = p(x)$  и  $p^j(y)$  распределений величин  $X$  и  $Y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) смещены в точки их пересечения с кривой. Области определения изображены в виде прямоугольников, у которых вершины, определяемые парами  $(x_H^j, y_H^j)$  и  $(x_K^j, y_K^j)$ , принадлежат кривой  $y = f(x)$ .

**п.1.** Пусть *вероятностные функции*  $p^j(y)$  определены. Моделируя функции  $p^1(x)$  и  $p^1(y)$  методом Монте-Карло  $N$  раз, получим последовательности точек  $x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1$  и  $y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1$ . По плотностям для этих точек можно определить вероятности  $P^1(x_v^1) = \int_{x_{v-1}}^{x_v} p(x) dx$  ( $v=1, 2, \dots, N$ ) {1} и  $P^1(y_w^1) = P^1(x_w^1)$  ( $w=1, 2, \dots, N$ ) {1\*} соответственно. Т.е. имеем *вероятностные функции* дискретных случайных величин, соответствующие плотностям распределений  $p^j(x) = p(x)$  и  $p^j(y)$ .

{A.36.1} Подчеркнем, ибо это важно. Моделирование каждой из величин  $X$  и  $Y_j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) проводится *раздельно*: в соответствии с принятой теорией они *независимы*, а, следовательно, и *не коррелированы* (раздел 3 приложения II, стр.73).

Считаем: *элементарные события*, образующие величины  $X$  и  $Y_j$ , происходят *одновременно*, т.е. являются *системой*, образованной *совмещением* случайных величин (определение 5, стр.47). Составим из полученных значений координат последовательность пар  $(x_v^1, y_w^1)$  ( $v, w=1, 2, \dots, N$ ) и нанесем точки, соответствующие парам  $(x_v^1, y_w^1)$  на плоскость. Очевидно, что все точки будут находиться внутри 1-го прямоугольника. Повторив операцию для других положений функции  $p(x)$ , получим семь пар  $(x_x^j, y_w^j)$  последовательностей: точки, определяемые парами, будут внутри соответствующих прямоугольников.

Система точек в каждом прямоугольнике определяет *двумерное дискретное распределение*. В соответствии с *новой исходной системой* (вывод W.13, стр.73; положение {A.12}, стр.74) оно является *произведением*  $p^1(x_v^1, y_w^1) = p^1(x_v^1) \cdot p^1(y_w^1)$  ( $v, w=1, 2, \dots, N$ ) {2} функций  $p(x)$  и  $p^j(y)$  *системы* величин  $X$  и  $Y_j$ , образованной их *совмещением*. Согласно существующей теории они «*полностью независимы*», несмотря на то, что *расположение областей* определения *двумерных* распределений явно указывает на *функциональную зависимость* величин.

**п.2.** Вторая интерпретация. Присвоим значения *вероятностной функции*  $p(x)$  на отрезке  $x_H^j \leq x \leq x_K^j$  точкам кривой  $y = v(x)$ , соответствующих проекциям точек кривой на ось  $X$ . В этом случае получим одномерные распределения  $p^j(l)$  (где  $l$  – длины кривых, ограниченные отрезками  $x_H^j \leq x \leq x_K^j$ ) случайных величин  $L_j$ , определенных на кривой  $y = v(x)$ , а функции  $\int_L p_L^j(l) dx = p_L^j(x)$ ,  $\int_L p_L^j(l) dx = p_L^j(y)$  {3} – проекциями

распределений  $p^j(l)$  на оси  $X$  и  $Y$  соответственно. Проведя моделирование распределений  $p_L^j(x)$  и  $p_L^j(y)$ , как и в п.1, в каждом прямоугольнике опять получим *двумерное дискретное* распределение: учитывая равенства  $p_L^j(x) = p(x)$  и  $p_L^j(y) = p^j(y)$  {3\*}, оно будет таким же, как и в п.1, т.е. определяться формулой {2}.

**{А.36.2}** Рассматривая *всю совокупность* точек в п.1 или в п.2, полученных *в результате моделирования*, получим некоторое *двумерное* распределение.

Именно это двумерное распределение исследуется в существующей теории: определяется коэффициент корреляции (сноска 5, стр.94), по которому судят о «тесноте» *вероятностной связи* между случайными величинами  $X$  и  $Y$  (пример 20, стр.103).

**п.3. Третья интерпретация.** При значении  $k = 1$  оединим точки, определяемые парами  $(x_1^1, y_1^1), (x_1^2, y_1^2), \dots, (x_1^7, y_1^7)$  в порядке *возрастания* значений координат  $x_1^j$ , отрезками прямых линий, а точку с минимальным значением координаты  $x$  с началом координат. В результате получим некоторую ломаную линию. Последовательно изменяя значение  $k = 2, 3, \dots, N$ , получим  $N$  ломаных линий, отличающихся друг от друга, которые, вообще говоря, будут пересекаться друг с другом. Т.е. получаем «нечто» напоминающее то, что в теории вероятностей называют *случайным процессом*.

С точки зрения теории, развитой в настоящей работе, в п.1 имеем задачу, определяемой *функциональной зависимостью закона* распределения величин  $\Psi_j$  от *условий* проведения *эксперимента* с величиной  $\Phi$ , а в п.2 – *закон* распределения *одномерного* распределения, заданного на *плоской кривой*. Т.е. задачи *абсолютно разные*, однако результаты *моделирования одинаковы*.

Интерпретация в п.3 может быть применена как к результатам моделирования в п.1, так и в п.2. Семейства ломаных, полученных по результатам моделирования в пунктах 1-2, с учетом равенств {3\*}, будут подобны.

**Замечание 23.** При увеличении числа  $j=1,2,\dots,V$  положений исходной функции, ломаные будут все больше походить на кривые: в пределе, при неограниченном увеличении числа  $V$  получим  $N$  непрерывных кривых. Такое семейство иногда приводится в работах, например, рис.81-82 [12,424,425]; рис.15.1.2, 15.1.5, 15.3.1-3 [13,372-378]: их называют реализациями случайных процессов (или случайных функций).

Приведем, для примера, случайный процесс [1,298]  $p\{t, x_n\} = \{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!\}$  {3\*}, где  $x_{n+1} = x_n + \Delta$  ( $x_0 = 0$ ) (в существующей теории<sup>3</sup>  $\Delta = 1$ ,  $x_n = n$ ),  $\lambda$  – некоторое положительное число ( $\lambda = -\ln p$  [1,296]),  $n=0,1,2,\dots$  – число появлений события за промежуток времени от 0 до  $t$ ). Он весьма схож с *вероятностной* функцией распределения Пуассона  $p(x_n) = \lambda_0^n e^{-\lambda_0} / n!$  ( $\lambda_0 = n p$ ) {\*\*} и тоже носит его имя<sup>4</sup>. В существующей теории доказывается, что «... число событий в каком-либо промежутке длины  $t$  распределено по закону Пуассона ... с параметром (*математическим ожиданием*), равным  $\lambda t$ » [12,428]. Считать, что параметр  $t$  является временем не обязательно [1,300]. Формула

<sup>3</sup>Используется принятое значение. Мы просто подчеркнули, что  $\Delta$  – произвольное действительное число: более правильно представление распределения (формулы (1)-(3), вывод W.18, стр.32,34,36) на ограниченном отрезке  $0 \leq x \leq b$ , тогда  $\Delta = b/(n+1)$

<sup>4</sup>Поведение вероятностных функций {\*\*} в зависимости от соотношения  $\lambda_0 / n$  дано в [1,100]. Напомним, что закон распределения (определение 2, стр.33) определяется суммой  $P\{t_k, x_n\} = \sum_{v=0}^n p\{t_k, x_v\}$

{\*} представима в виде<sup>5</sup>  $p(t, x_0) = e^{-\lambda t}$ ,  $p(t, x_1) = (\lambda t)e^{-\lambda t}$ ,  $p(t, x_2) = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} / 2!$ , ...,  $p(t, x_n) = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$ , ... {\*\*\*}. Имеем семейство  $n + 1$  непрерывных кривых заданных на декартовой плоскости  $T0X$ , каждая из которых расположена в плоскости, перпендикулярную плоскости  $T0X$  и содержащую прямую линию  $t = x_n$  соответственно.

Рассмотрим фиксированные моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K$ . На прямых линиях  $x = t_k$  получим множество точек, определяемых парами  $\{t_k, p(t_k, n)\}$ , в которых вероятность определяется значениями  $p\{t_k, x_0\} = e^{-\lambda t_k}$ ,  $p\{t_k, x_1\} = (\lambda t_k)e^{-\lambda t_k}$ ,  $p\{t_k, x_2\} = \{(\lambda t_k)^2 / 2!\}e^{-\lambda t_k}$ , ...,  $p\{t_k, x_n\} = \{(\lambda t_k)^n / n!\}e^{-\lambda t_k}$ , ... ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). При каждом значении  $t_k$  (сечение процесса) реально получаем распределение Пуассона с параметром  $\lambda_0^k = \lambda t_k$ . Из анализа следует:

{A.37} Для любого сечения процесса  $x = t_k$  сумма всех вероятностей равна единице  $\sum_{n=0}^{\infty} p\{t_k, n\} = 1$ . Это означает: 1) *распределение вероятностей имеет место только на прямых линиях  $n = t_k$* ; 2) *несмотря на то, что для каждого значения  $n$  вероятность  $p\{t_k, n\} = \{(\lambda t)^n / n!\}e^{-\lambda t}$  зависит от времени  $t$ , распределения вероятностей по оси  $t$  не существует.*

1. *Интересно, не так ли?* В существующей теории, хотя и доказывается, что «... число событий в каком-либо промежутке длины  $t$  распределено по закону Пуассона ...» [12,428], но об этих свойствах процесса не говорится: почему, мы не знаем, но они очевидны. 2. Отметим: п.3 в примере 19 появился, когда это приложение было написано: после определения возможности построения случайного процесса на основе функциональной зависимости распределений вероятностей (пример 1 приложения VI, стр. 123). А пример в замечании 21 и положение {A.37} – только после детального рассмотрения построения некоторого вида процессов (раздел 3 приложения VI, стр.136). В приложении VI (замечание 13.5, стр.152) показано, что трактовка функций {\*\*\*} несколько отличается от принятого понимания.

По существу, имеем 3-ю задачу, которая, при определенных условиях<sup>6</sup>, может быть подобной 2-м предыдущим.

По сути, совокупности точек в пунктах 1-2 получены статистическим моделированием реальных ситуаций при проведении экспериментов. Возможные интерпретации совокупности точек, полученных в экспериментах, приведены потому, что необходимо различать эти задачи<sup>7</sup>, ибо они существенно отличаются. Соответственно, возможны отличия: в решении вероятностных задач, постановке экспериментов, необходимых для получения информации, и методах обработки экспериментальных данных. Вообще-то, анализ построения случайных процессов в наших планах не предусматривалось: решающим фактором, который «принудил» провести его<sup>8</sup>, была задача, рассмотренная в примере 24 (стр.104).

<sup>5</sup>Такое представление процесса Пуассона в литературе нам «не повстречалось»

<sup>6</sup>Например, при экспериментальных исследованиях процесса Пуассона в дискретные моменты времени

<sup>7</sup>Отличие распределения, заданного на кривой, от 2-х других интерпретаций очевидно (раздел 3 приложения III, стр.99): в принятой теории этого понятия просто нет

<sup>8</sup>Результаты исследований изложены в приложении VI (стр.150)

### 1.1. О теории корреляции

Сначала о том, что делается в существующей теории, в которой нет *ни связи функциональной зависимости распределений с преобразованием, ни зависимости распределений от условий проведения эксперимента, ни одномерных распределений на кривых линиях.*

**Пример 20.** п.1. Для начала изобразим рисунки, подобные приводимым в некоторых работах потому, что: «На практике, перед тем как исследовать корреляцию случайных величин, всегда полезно построить наблюдаемые пары значений на графике для первого качественного суждения о типе корреляции» [13,181].

На рис.20 изображены пары точек, совокупность которых отвечает определенному типу корреляции: явно выраженная положительная корреляция (рис.А) и еще более ярко выраженную – на рис.В, сравнительно слабая (рис.С) и практическое отсутствие корреляции между случайными величинами (рис.Д). Иногда для иллюстрации отсутствия корреляционной связи приводится расположение точек, изображенное на рис.Е.

Дополнительно изображены штриховые прямые линии (в работах их почему-то не приводят), чтобы показать: 1. Точки можно связать с прямой линией. Это видно, по крайней мере, из рис.А-С, Е. 2. Экспериментальные точки определяют связь функциональной зависимости с преобразованием распределений (рис.А- Д). Теоретически это показано в разделе 1 (стр.58) настоящего приложения. 3. Возможное направление одной из главных осей (рис.А-С, Д-Е). Направление осей определяется значением ковариации, что показано в разделе 3, (примеры 17-18, выводы W.27-29, стр.94,97,98). 4. При одной и той же линейной связи между величинами можно получить семейство точек, которые будут характеризовать разные типы корреляции (рис.А-Д).

**{А.38.1}** *Расположение совокупности экспериментальных точек на плоскости зависит от вида кривой (или угла наклона прямой) линии, распределения вероятностей величины  $X$  и погрешности измерений параметров  $X$  и  $Y$ .*

п.2. Прежде всего, отметим, что задачи подобного рода решаются в разделе математической статистики, который называется *теорией корреляции* (о чем говорилось ранее, стр.44 и сноска 2 на ней). Две задачи, которые решаются в этом разделе [1,356]: 1. Оценка зависимости. По результатам «...последовательности наблюдений сразу двух случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . ...Выяснить наличие функциональной или корреляционной связи между  $\xi$  и  $\eta$ ». 2. Управление процессами. Определить «нарушение нормального течения ...» процесса и своевременно «...оказать управляющее воздействие с целью восстановления нормального хода процесса».

О понимании *вероятностной* связи в математической статистике: «Стохастическая связь между двумя случайными величинами появляется обычно тогда, когда имеются общие случайные факторы, влияющие как на одну, так и на другую величину наряду с другими неодинаковыми для обеих величин случайными факторами» [12,313]. Мы привели его только потому, что в нем вообще никаких упоминаний о функциональной связи, в отличие от [13]: в большинстве работ по теории вероятностей об этом вообще ничего не говорится. Далее дается пример стохастической связи<sup>9</sup>: функции от случайных величин  $X = f(Z, V)$  и  $Y = g(Z, U)$ , где  $Z$  – общая случайная величина (фактор),  $V$  и  $U$  – случайные величины (факторы), влияющие только на величину  $X$  или  $Y$  соответственно. Подобные пояснения даются и в ряде других работ по математической статистике.

Однако просмотрев некоторое число работ, мы не нашли примера (может работ мало просмотрели или просто «прозевали») с *одновременным* влиянием

<sup>9</sup>В работе приведен более сложный пример



одной случайной величины на две (три и более) другие: хотя при решении практических задач они встречаются.

{A.38.2} В основном рассматривается задачи: 1) влияние случайной величины  $X$  на величину  $Y$ ; 2) влияние одного фактора только на величину  $X$  и одного – только на величину  $Y$  (погрешности измерения параметров  $X$  и  $Y$ ); 3) влияние нескольких случайных величин  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) на величину  $Y$ .

Учитывая анализ, данный в примере 19 (п.2 и положение {A.36.2}, стр.107-108), а также положения {A.38.1} и {A.38.2}, совокупности точек, изображенных на рисунке, можно трактовать: Рис.А – как линейную зависимость распределения величины  $Y$  от положения распределения величины  $X$ ; рис.В – влияние погрешности измерений на положение прямой, а на рис.С, D – как линейную зависимость, соответствующую рис.А, но «сдобренную» погрешностью измерений, разной для рисунков С и D (примеры 22-23, стр.112,114). Что касается совокупности точек на рис.Е, то она характеризует (следующий раздел) чисто вероятностную зависимость величины  $X$  от величины  $Y$ .

п.3. Теперь о методах обработки экспериментальных данных, которые предлагаются в существующей теории.

1. Приведем некоторые цитаты из работы<sup>10</sup> [12] с нашими пояснениями: «Основное применение, которое находит теория корреляции, относится к решению задачи обоснованного прогноза, т.е. указания пределов, в которых с наперед заданной надежностью будет содержаться интересующая нас величина, если другие связанные с ней величины получают определенные значения» [12,314]. Сначала вычисляются условные распределения [12,159] (также пример 15, стр.44) двумерного распределения:  $p(y|x)$  – величины  $Y$  при данном значении  $x$  и  $p(x|y)$  – величины  $X$  при данном  $y$ . Далее следует: «Наиболее важные особенности стохастической связи находят выражения в тех изменениях, какие испытывает центр условного распределения одной величины при изменении другой. Если рассматриваются две величины  $X$  и  $Y$ , то мы одновременно будем иметь две линии регрессии  $\dots: M(Y|x) = \bar{y}(x)$  – регрессия  $Y$  по  $X$  и  $M(X|y) = \bar{x}(y)$  – регрессия  $X$  по  $Y$ . Эти «линии» представляют геометрическое место центров условных распределений, соответствующих заданным значениям одной из переменных» [12,314-315]. Затем вычисляются условные дисперсии  $D(Y|x)$  и  $D(X|y)$ , «средневзвешенное значение» условной дисперсии  $\bar{D}(Y|x)$  (или  $\bar{D}(X|y)$ ), которое «... тем меньше, чем меньше в среднем условные дисперсии, т.е. тем более точна и определена зависимость  $Y$  по  $x$ , чем ближе эта зависимость к строго функциональной  $Y = \bar{y}(x)$  и чем точнее, следовательно, прогноз величины  $Y$  при данном  $x$ » [12, 316]. Далее вычисляется коэффициент корреляции  $r_{x,y}$  (сноска 5, стр.94; в [12] другое обозначение « $\rho$ ») двумерного распределения и поясняется, как построить линии регрессии в случае, когда они близки к прямой линии. На основе проведенного построения утверждается: «... чем ближе  $\rho^2$  к единице (т.е.  $1 - \rho^2 \rightarrow 0$ ), тем плотнее концентрируются массы распределения около каждой из прямых. В предельных случаях при  $\rho = \pm 1$  обе прямые сливаются в одну ...» [12, 321]. «В случае нелинейной связи представляют интерес показатели, характеризующие концентрацию распределения (и, следовательно, тесноту связи) около кривых  $\bar{y}(x)$  и  $\bar{x}(y)$  регрессии. Таким показателем является «корреляционное отношение»  $\eta_{Y|x}^2$  и  $\eta_{X|y}^2$ , введенное К. Пирсоном» [12,322]. Мы их не рассматриваем, ибо, как будет показано далее, в этом нет смысла.

2. Большое внимание в работах уделяется факторам, влияющим только на случайную величину  $X$  или/и только на величину  $Y$ : чаще всего, это неизбежные погрешности измерения величин  $X$  и  $Y$ . Иногда случайным полагают параметр  $Y$ , а  $X$  – неслучайным: в предположении, что погрешность измерения  $Y$ , много

<sup>10</sup>В этой работе, по нашему мнению, дается наиболее простое и понятное объяснение теории корреляции: по крайней мере, из цитируемых работ, хотя и в других просмотренных работах лучшего не нашлось

больше погрешности измерения  $X$ . В этих задачах определяется «жесткая» *функциональная зависимость* между 2-мя физическими параметрами в смысле, следующем из понимания, данного в цитате из [13] (стр.100). В большей части просмотренных работ (их немного) по математической статистике именно эту «жесткую» *функциональную зависимость* называют *линией регрессии*. Решение этой задачи подробно дается в работах; если приводятся рисунки, то они, по характеру разброса точек относительно зависимости  $y = f(x)$  подобны рис.20.В (например, рис.14.8.1-5 [13, 352-354]). Разговор о решении этой задачи будет продолжен в примере 22. Отметим, что эта задача, в принципе, не имеет отношения к корреляционному анализу: по крайней мере, в понимании, изложенном в п.3.1 примера. В некоторых работах говорится, что после определения «жесткой» *функциональной зависимости* необходимо определить еще и «тесноту стохастической связи» между величинами, но об этом – при рассмотрении *вероятностной зависимости* случайных величин (раздел 2, стр.108).

Иногда эта задача дается в другой интерпретации. Рассматривается некоторый параметр  $Y$ , зависящий от неслучайных аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , а параметр  $Y$  полагается случайной величиной  $Y$ , которая зависит от некоторых случайных переменных. Вообще говоря, она связана с задачей 3), отмеченной в п.2, однако, после общих рассуждений, решение задачи обычно дается для случаев, которые связаны только с погрешностями измерений: разговор об этом продолжим в примере 23 (стр.109).

При решении задач, для построения *линий регрессии* обычно применяются *метод наименьших квадратов*, применению которого тоже уделяется много внимания.

По нашему мнению, все изложенное в работе, вроде бы достаточно убедительно, но *правильно только* с точки зрения существующей теории. *Во-первых*, при разработке *новой исходной системы теории* случайных величин показано: несмотря на то, что в существующей теории случайные величины  $X$  и  $Y$  считаются исходными, они *никоим образом* не определяют *двумерную* величину<sup>11</sup> (свойства двумерной величины и следствия 1-3 из них, стр.44). Т.е. таковыми они не являются. *Во-вторых*, в подразделе 3.2.1 введены дополнительные *одномерные вероятностные функции* (5-5\*) (стр.38,40), которые определяют *свойства двумерной* (в том числе непрерывной, замечание 23, стр.43) величины и их *связь со свойствами двумерного опыта*. Опять же: они *не определяются* по распределениям случайных величин  $X$  и  $Y$ , а *только по распределению двумерной* величины. В существующей теории они трактуются как *условные* распределения, но *их отличие* от функций (5-5\*) *только в нормировке* (сноска 14, стр.41). *В-третьих*, из анализа, данного в подразделе 1.3, следует (вывод W.17, стр.93): 1) *функциональная зависимость* существует *только для* случайных величин, образующих систему; 2) *одномерные* величины  $X$  и  $Y$ , образованные по распределению *двумерной* (или  $n$ -мерной) случайной величины *не могут быть функционально зависимыми*. И последнее: *линии регрессии*  $M(Y|x) = \bar{y}(x)$  и  $M(X|y) = \bar{x}(y)$  сольются в одну линию только тогда, когда величины не будут случайны-

<sup>11</sup>Это же следует из анализа существующей исходной системы случайных величин (стр.12-22)

ми (что принципиально невозможно). Нас же интересует именно «жесткая» функциональная зависимость (выводы W.1-W.2., стр.126) между случайными величинами.

Анализ подтверждает утверждение, высказанное в замечании к положению {А.37} (стр.102). Из положения и алгоритма, изложенного в п.3.1 следует: существующий подход, по факту, выявляет некоторые свойства распределения двумерной случайной величины (они, вообще говоря, определяются свойствами, отмеченными при рассмотрении ее построения, (раздел 3.1.1, стр.31)). Покажем это более наглядно.

**Пример 21. п.1.** В примере 16 (стр.86) рассмотрены две двумерные вероятностные функции: произведения системы, образованной совмещением 2-х одномерных дискретных случайных величин (таблица 4); двумерной дискретной случайной величины (таблица 5).

Нас интересует двумерная случайная величина, поэтому приведем таблицу ее распределения  $p(x_j, y_k)$  ( $x_j, y_k = 0, 1, 2, 3, 4$ ): изображение осей координат условное, ибо они просто дают направление. Вероятностные функции величин  $X$  и  $Y$  одинаковы и определяются значениями  $p(x_j) = p(y_k) = 0.10; 0.15; 0.20; 0.25; 0.30$ , а их математические ожидания равны  $M(X) = M(Y) = 2,5$ .

Для вычисления математических ожиданий вероятностных функций (5-5\*), определяемые значениями вероятностей строки таблицы с данным номером  $k$  (или столбца с данным номером  $j$ ) необходимо: вычислить суммы  $\sum_{j=1}^4 x_j \cdot p(x_j, y_k)$  при значении  $k$  (или  $\sum_{k=1}^4 y_k \cdot p(x_j, y_k)$  при значении  $j$ ) и разделить их на соответствующее значение вероятностей  $p(x_j) = \sum_{k=1}^4 p(x_j, y_k)$  (или  $p(y_k) = \sum_{j=1}^4 p(x_j, y_k)$ ). В результате получим значения координат математических ожиданий:  $\bar{y}(x_k) = 3; 8/3; 2,5; 2,4; 7/3$  и  $\bar{x}(y_k) = 3; 8/3; 2,5; 2,4; 7/3$  соответственно. Их и называют линиями регрессии  $M(Y|x_j)$ ,  $M(X|y_k)$ . Значения уменьшаются при увеличении координат и не лежат на прямой линии (это следует из значения приращений). Отметим, что изменяя значения вероятностей  $p(x_j, y_k)$ , можно получить самые разнообразные линии регрессии: от прямых линий до некоторых зигзагообразных ломаных, описать которые какой-либо непрерывной функций вряд ли возможно.

**п.2. Однако.** Математические ожидания вероятностных функций (5-5\*), определяемых строками или столбцами таблицы, вычислены по аналогии с определением центра тяжести системы материальных точек в механике, без опоры на понятие условного распределения: в нем нет никакой необходимости. В механике можно объединять в группы разные материальные точки системы, соблюдая условия: в разные группы не должны входить одни и те же точки; сумма точек во всех группах, на которые разбита система, равна числу материальных точек системы. Определив центры тяжести групп, можно определить по ним центр тяжести системы. Аналогично можно определять осевые и центробежные моменты инерции системы. В механике этот подход применяется для вычисления указанных характеристик твердых тел, имеющих сложную геометрическую форму, а не для системы материальных точек. В любом случае, характеристики отдельных групп материальных точек – это некоторые промежуточные результаты (вспомогательные характеристики), которые иногда могут упростить вычисление характеристик системы.

Таким же способом можно вычислять характеристики (не только математические ожидания, но также дисперсии и ковариации в начальных и центральных координатах) как дискретных, так и непрерывных случайных величин. Понятно, что его применение, как и в механике, имеет смысл для непрерывных случайных величин при сложной геометрии области определения распределения двумерных (многомерных) случайных величин. Очевидно, что и в этом случае характеристики групп также

носят вспомогательный характер.

**П.3.** Ни в примере 16, ни в пунктах 1-2 данного примера, мы даже не «заикались» о какой-либо функциональной зависимости, ибо в приведенных примерах ее просто не существует. Есть только связь характеристик системы с промежуточными результатами (вспомогательными характеристиками), которые получены разбиением системы на какие-то группы (несовместимых событий). В частности показано, что одномерные случайные величины  $X$  и  $Y$ , образованные по распределению двумерной величины, не могут быть функционально зависимыми. Что же тогда определяют линии регрессии? К чему приближаются зависимости они в пределе? Вопросы не праздные, ибо доказательство того, что коэффициент корреляции определяется отрезком ( $-1 \leq r_{x,y} \leq 1$ ), основано на равенстве  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K(X, Y)$ , но последнего «в природе» не существует, а связь ковариации с дисперсиями определяется несколько другими отношениями (формулы (А), (В) и (С), стр.95), связанными с углом поворота системы координат. На их основе можно показать, что минимальное или максимальное значения коэффициента корреляции  $r_{x,y} = K_{x,y} / (\sigma_X \cdot \sigma_Y)$  достигаются при минимальном или максимальном значении ковариации: учитывая формулы (5\*-5\*\*) (стр.96), получим:  $r_{x,y} = \pm [D(X) - D(Y)] / [D(X) + D(Y)]$ .

**{А.39}** Отсюда следует: значение коэффициента корреляции определяется интервалом ( $-1 < r_{x,y} < 1$ ). Значение  $\pm 1$  возможно только при равенстве одной из дисперсий нулю, т.е. при одномерном распределении для которого ковариация (и коэффициент корреляции) не существует.

Анализ, данный в примере 21, подтверждает все сказанное перед примером и показывает: в п.3.1 примера 20 (стр.104) определяется «нечто», которое, вообще-то, какому-либо «внятному пояснению не поддается».

Из анализа, проведенного в примерах 19-21, очевидно:

**{А.40}** Условия «независимости», принятые в существующей теории, определяют отличие закона распределения произведения вероятностных функций системы, образованной совмещением случайных величин («полная независимость и некоррелированность»), от закона распределения двумерной случайной (многомерной) величины («зависимость и коррелированность»).

В кавычках, ибо к реальной зависимости (независимости) они отношения не имеют: с точки зрения теории, развитой в настоящей работе, это пояснение единственное: в принятой теории его не существует. Тем не менее, это можно «проследить», рассматривая пояснения отличия понятий независимости и некоррелированности случайных величин, приводимые в некоторых работах, на примере равновероятного распределения, заданного в круге, треугольнике, на сфере: пояснения, вообще говоря, «путанные» и иногда выглядят странно.

## 1.2. Функциональная зависимость (линия регрессии) двух случайных величин: предварительные рассуждения

Теперь рассмотрим, как определяется *функциональная зависимость* по *экспериментальным* исследованиям в рамках теории, развитой в настоящей работе. Предварительные замечания.

**Пример 22.** Требуется определить *функциональную зависимость*  $y = f(x)$  физического параметра  $X$  от параметра  $Y$  на основе экспериментов. На рис.21, изображены для примера три зависимости: сплошная, штриховая или пунктирная<sup>12</sup> кривые. Все выглядит просто: задав значения<sup>13</sup>  $x_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) параметра  $X$  на отрезке  $a \leq x \leq b$ , вычисляем значения  $y_m = f(x_m)$  параметра  $Y$ , получаем на плоскости точки, определяемые парами  $(x_m, y_m)$ , которые аппроксимируем некоторой кривой: при увеличении числа точек приближаемся к «истинной» зависимости. Красивая «картинка», но этому «идеалу» не дано осуществиться. Мешает<sup>14</sup> «Ее Величество – Случайность». Случайны параметры  $X$  и (как следствие)  $Y$ , значения измерений параметров.

**п.1.** Если известны законы распределения  $P(a < x)$  ( $a \leq x < b$ ) и  $P(c < y)$  ( $c \leq y < d$ ) непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$ , то для них всегда можно определить некоторую *функциональную зависимость*  $y = f(x)$  на основе построения (примеры 1 и 1.а, формулы 1-2, замечания 3, стр.72-731, выводы W.11-W.12, стр.89) преобразования одномерных величин. Вычисляем вероятности  $P(a < x_m)$  при данном значении ( $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_M < b$ ), а из равенства  $P(c < y_m) = P(a < x_m)$  – значения  $y_m$ . Точки  $(x_m, y_m)$  пересечения прямых линий  $x = x_m$ ,  $y = y_m$  (сплошные тонкие стрелки) и будут принадлежать искомой зависимости<sup>15</sup>. В редких случаях задача может быть решена аналитически: в основном – приближенно: численными методами с применением методов приближения функций. Для дискретных случайных величин это возможно только в случае равенства  $p(x_m) = p(y_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) значений вероятностных функций. Имеем «идеальную картинку», рассмотренную в начале примера.

**п.2.** Положим: На отрезке  $l_X = x_K - x_H$  случайным является только параметр  $X$  с известной<sup>16</sup> плотностью  $p_X(x)$  его распределения. Неизвестна зависимость  $y = f(x)$  и, как следствие, распределение параметра  $Y$ . Зависимость определяется на отрезке  $0 \leq a \leq x \leq b$ : его длина превышает значение  $l_X$ .

Для лучшего понимания последующего изложения, считаем функцию  $y = f(x)$  известной: например, она имеет вид одной из кривых, изображенных на рис.21. Теоретические области определения законов распределения двумерных величин, образованные совмещением величин  $X$  и  $Y$ , прямоугольные: обозначены тонкими сплошными, штриховыми и пунктирными линиями для соответствующих кривых. В каждом из прямоугольников зависимость не определяется (вывод W.32, стр.99).

Случаи, изображенные на рис.19,21, в принятой теории не рассматриваются, хотя в разных ее приложениях они встречаются.

Во-первых, в теории отличия многомерных случайных величин от систем «днем с огнем не найдешь», тем более существовании 2-х разных систем, – все «в одной ку-

<sup>12</sup> До разветвления пунктирная и штриховая кривые, сливаются со сплошной кривой

<sup>13</sup> Здесь и до конца приложения различия обозначений начальных и центральных координат не будет: применение центральных координат будет отмечаться в тексте

<sup>14</sup> Правда, она не помешала великим умам прошедших веков открывать законы, приписывая тем или иным явлениям природы

<sup>15</sup> С точностью, определяемой погрешностью расчетов и погрешностью аппроксимации (при ее применении)

<sup>16</sup> Если она неизвестна, то ее следует определить, лучше отдельно

че» (раздел 1.2, стр.10). Во-вторых, в ней нет понятия *преобразования законов* распределения случайных величин: *формулу преобразования*  $y = f(x)$  – *действительную функцию действительного аргумента* – почему-то называли «функцией  $Y = U(X)$  от случайной величины  $X$ ». В-третьих, не существует понятия *зависимости* распределения от *условий* проведения *испытания*. В-четвертых, подавляющее большинство *законов* распределения, применяемых в теории, имеют неограниченную область определения: соответственно, полагают, что он определен на всем отрезке.

Однако при *экспериментальном* определении *функциональной зависимости основную* роль играет область, в которой сосредоточена *основная «масса» вероятностей*<sup>17</sup>. Приведем примеры. 1. Распределение Пуассона. Данные при значении  $\lambda_0 = 3$  в точках  $n=0,1,\dots,12$  взяты из работы [12,107] (таблица 3.1.8): 0,0498; 0,1494; 0,2240; 0,2240; 0,1680; 0,1008; 0,0504; 0,0216; 0,0081; 0,0027; 0,0008; 0,0002; 0,0001. Сумма вероятностей, определенная по 9 точкам, равна  $P_1 = 0,996$ . Это означает, что при достаточно большом числе  $N$  *экспериментов* приблизительно 99,6% результатов будут находиться в точках  $n=0,1,\dots,8$  и только 0,4% – придется на бесконечное число  $9 \leq n < \infty$  точек. 2. При *нормальном законе* распределения 99,73% результатов будут находиться в точках на интервале, ограниченном значениями  $M(X) \pm 3\sigma x$  и только 0,27% – вне этого интервала; по половине слева и справа от интервала.

Отметим: в большинстве случаев при вероятности  $P < 0,001$  событие считается практически «невозможным»<sup>18</sup>, а, например, для высоконадежных систем – вероятность отказа элементов системы  $P < 0,0001$ .

По сути – при *неограниченных законах* распределения, которые *основные* в принятой теории, *экспериментальные исследования возможны только в ограниченной области*.

Цель принятых *предположений* и последующих рассуждений в *данном* пункте *показать именно это*, ибо *ограниченность* области необходимо *учитывать* при проведении *экспериментальных исследований* – можно «сильно промахнуться».

### п.3. К построению *функциональной зависимости*.

1. **Теория.** На основе анализа показано (положения {А.35} стр.100): она такая же «жесткая», как и между 2-мя *действительными функциями действительных* аргументов  $x$  и  $y$ , но только *связывающая вероятности* событий, определяемых 2-мя случайными величинами. Отличие, конечно же, *существенное*, но, к нашему счастью, оно *не оказывает никакого влияния на зависимость* (п.1). После долгих рассуждений мы «*неизбежно*» пришли к задаче, о которой говорилось в п.3.2 примера 20 (стр.104):

{А.41.1} Определение «жесткой» *функциональной зависимости*  
 $y = f(x)$  между 2-мя физическими параметрами (когда по значению  $X$  определяется *точное значение* параметра  $Y$ ).

*Независимость* решения задачи от случайности параметров  $X$ ,  $Y$  и позволяет, *задавая* на отрезке  $a \leq x \leq b$  конкретные значения  $x_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) параметра  $X$ , определять в *экспериментах изменение* (отклик) параметра  $Y$  при изменении параметра  $X$ . Снова имеем почти «идеальную картинку», рассмотренную в начале примера, осуществлению которой мешают «мелочи»: неизбежные погрешности измерения параметров  $X$  (при его задании) и  $Y$ , которые «портят идеал». Приходится применять *аппроксимацию экспериментальных результатов некоторой известной*  $y = v(x; a_1, a_2, \dots, a_W)$  кривой<sup>19</sup> с неизвестными коэффициентами  $a_W$ , которые подлежат определению. Для их определения чаще всего применяется *метод наименьших квадратов*: пожалуй, наиболее

<sup>17</sup>Т.е. область, содержащую математическое ожидание (положение {А.30}, стр.92)

<sup>18</sup>Практически «невозможные» события, как это ни странно, тоже случаются: иногда «совсем нехстати»

<sup>19</sup>Этот процесс иногда называют сглаживанием экспериментальной зависимости

надежный и простой в реализации из имеющихся методов приближения функций.

**{А.41.2}** Именно «жесткая» функциональная зависимость  $y = f(x)$  между 2-мя физическими параметрами является линией регрессии: она подлежит определению в первую очередь. Ее определение позволяет определить влияние случайности параметра  $X$  на распределение вероятностей параметра  $Y$ .

К «великому огорчению» это справедливо для частных случаев: в общем случае (задача 3) положения {А.38}, стр.104) нет, но об этом позже (пример 23, стр.110).

**2. Практика.** На применении метода наименьших квадратов к решению задачи определения коэффициентов  $a_m$  кривой  $y = v(x; a_1, a_2, \dots, a_W)$  останавливаться не будем: описание метода и его применение приводится во многих работах – и не только в математической статистике. Можем порекомендовать работу [13, 351-361], в которой он дается просто, понятно и не «отягощен» последующей оценкой погрешности определения коэффициентов и решением задачи прогноза (как, например, в [13, 335-345]). Решение этой части задачи, безусловно, правильно, но о погрешностях определения зависимости немного поговорим. Законы распределения погрешностей измерения параметров  $X$  и  $Y$  – всегда известны, не связаны с функциональной зависимостью параметров и, по постановке задачи, следует считать, что они проводятся одновременно: эти обстоятельства существенно упрощают решение. На рис.21 узкими прямоугольниками с утолщенными (сплошными, штриховыми и пунктирными) линиями условно изображены области<sup>20</sup>, в которых будут расположены экспериментальные точки на плоскости, как следствие погрешностей параметров  $X$  и  $Y$ . математические ожидания  $m_X$  и  $m_Y$  являются точками  $x = m_X$  и  $y = m_Y$  на осях  $X$  и  $Y$ , около которых группируются погрешности измерений

**{А.41.3}** Следовательно, точка  $(m_X, m_Y)$  на плоскости, определяемая математическими ожиданиями распределений погрешностей, лежит на кривой  $y = f(x)$  в любой из точек измерения.

**Замечания 24.** Утверждение справедливо: **1.** Для распределений погрешностей измерений – всегда. **2.** При линейной формуле преобразования произвольных случайных величин. **3.** Приближенно, если формула преобразования на всем отрезке  $a \leq x \leq b$  почти линейная [13,254]: требуется оценка возможности линейного приближения. **4.** В общем случае нелинейной зависимости между величинами ошибка будет значительной. На рис.21 изображено положение математического ожидания  $m_X$  исходной величины  $X$ . В существующей теории приближенное значение  $\hat{m}_X = f(m_X)$  вычисляется в точке пересечения линии  $y = m_X$  с кривой  $y = f(x)$  и естественно принадлежит кривой. Отклонения же определяются расстояниями между точками кривой и касательной к кривой (штриховая линия с двойным пунктиром) в этой точке: максимальное отклонение сравнимо с размером области определения величины  $Y$ . Ошибка определения дисперсии, вычисляемой по формуле  $\hat{D}_Y = |f'(m_X)|^2 D(X)$  (где  $f'(m_X)$  – производная от функции  $y = f(x)$ ) намного хуже. Более точно значение  $\hat{m}_X$  определяется пересечением линии  $y = m_X$  и штрих пунктирной линии (рис.21,стр.112), проходящей через вершины прямоугольника, принадлежащие кривой: точное значение  $m_X$  – выше или ниже этой точки; несколько повыситься точность вычисления дисперсии. Для применения линейного приближения все же лучше разделить этот участок, по крайней мере, на два.

Таким образом, функциональная связь центра группирования распределения погрешностей с зависимостью  $y = f(x)$  позволяет: **1.** Опре-

<sup>20</sup> Область (утрировано – для отличия на рисунках и понимания последующих преобразований: это не влияет на них) изображена для случая, принятого в существующей теории (п.2 примера 20, стр.104): погрешность измерения  $Y$ , много больше погрешности измерения  $X$ . Реально, они могут быть не только сравнимы, но и 1-я много меньше 2-й. Например, при зависимости пути от скорости или, что еще хуже, ускорения

делить погрешность ее определения по результатам экспериментов.  
 2. Учесть влияние погрешности определения зависимости  $y = f(x)$  на распределение случайной величины  $Y$ , которое связано функцией  $y = f(x)$  с распределением величины  $X$ .

### 1.3. Влияние погрешностей измерений на построение линии регрессии и решение задачи прогноза

Теперь собственно о погрешности построения функциональной зависимости по экспериментальным данным. Мы не даем анализ того, как это делается в принятой теории: во-первых, методика достаточно сложна; во-вторых, она дается для линейной зависимости и нормального распределения. Ее пригодность в общем случае нелинейной зависимости (вообще говоря, и произвольного закона распределения) вызывает очень большие сомнения.

#### 1.3.1 Линейная зависимость между 2-мя параметрами

Сначала рассмотрим построение оценки погрешности на примере линейной зависимости  $y = c_0 + c_1x$  между параметрами: пример более нагляден и дает лучшее понимание построения.

**Пример 23. п.1. Теория.** Для упрощения изложения, положим  $c_0, c_1 > 0$ . . Будем считать, что расположение (рис.22b, стр.115) точек  $(x_v, y_v)$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) подобно схеме, изображенной на рис.20В (пример 20, стр.109). Введем систему координат  $\tau\theta\omega$  (рис. 22.а, штриховые стрелки), в которой осью  $T$  является линия  $y = c_0 + c_1x$ . На рисунке изображены: положение теоретической области определения погрешностей параметров<sup>21</sup> в точках  $x_1$  и  $x_2$ ; три определенных методом наименьших квадратов положения прямой  $\hat{y} = \eta_0 + \eta_1x$  (линии регрессии, штрих пунктирные линии) по результатам экспериментов, из бесконечного числа возможных; нижняя граница (сплошная тонкая линия, параллельная оси  $\tau$ ) доверительного интервала, соответствующего данной доверительной вероятности.

Задача состоит в оценке возможных отклонений положения линии регрессии  $y = \eta_0 + \eta_1x$  от истинной прямой  $y = c_0 + c_1x$  линии (оси  $\tau$ ). Возможные отклонения можно условно разделить на два вида: связанные со смещением ( $\eta_0 \neq c_0$ ) и направлением ( $|\eta_1| \neq c_1$ ) линии регрессии  $y = \eta_0 + \eta_1x$  относительно прямой  $y = c_0 + c_1x$ . Максимально возможные теоретические отклонения определяются расстоянием от линии  $y = c_0 + c_1x$  до линий  $y_{\min} = c_0 - m_Y + c_1x$  и  $y_{\max} = c_0 + (l_Y - m_Y) + c_1x$  (где  $l_Y$  – длина области определения погрешности параметра  $Y$ ), проходящих через вершины прямоугольников (рис.21.а), которые противоположны относительно прямой. В пределах отрезка  $0 \leq x \leq b$ , вообще говоря, эти границы не должны пересекать и экспериментальная прямая. Очевидно, что они одновременно ограничивают оба вида отклонений, соответственно, это справедливо для границ доверительного интервала, которые опреде-

<sup>21</sup> Полагаем: распределения погрешностей симметричными (в большинстве случаев это оправдано); области их определения сравнимы между собой. Погрешность – характеристика приборов (или методики) измерений. В общем случае она зависит (линейно или нелинейно) от величины измеряемого параметра, т.е. области определения погрешностей на разных отрезках будут отличаться



ляются прямыми линиями  $y' = c'_0 + c_1x$  и  $y'' = c''_0 + c_1x$  ( $c'_0 < c_0$ ) ( $c''_0 > c_0$ ): при *симметричном* распределении имеем равенства  $m_Y = l_Y/2$  и  $c'_0 = c''_0$ .

Оценка погрешности определения коэффициентов  $\eta_0$  и  $\eta_1$  только существенно усложняет задачу и, вообще говоря, смысла не имеет: это будет показано далее.

**{А.42.1}** Положение линий  $y'$ ,  $y''$  определяется *по двумерному* распределению погрешностей в *любом* из прямоугольников.

**Замечание.** Нагляднее и проще отклонения и границы доверительного интервала определяются в координатах  $\tau\omega$ , в которых они параллельны оси  $\tau$  (п.5 примера 1 и положения {А.8.3}-{А.8.6}, стр.97). По распределению погрешности<sup>22</sup>  $p_\Omega(\omega)$  определяются значения  $\omega'_0$  и  $\omega''_0$  для заданной доверительной вероятности  $P_d$ , по которым, исходя из геометрии, определяются значения коэффициентов  $c'_0$  и  $c''_0$  соответственно. Можно, конечно, непосредственно по исходному распределению  $p(x, y)$ : двойные интегралы по области, ограниченной линиями  $y' = c'_0 + c_1x$  и  $y''' = c''_0 + c_1x$ , вычисляются значительно сложнее.

**п.2. Практика.** Пусть в заданных точках  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_V < a$  определены значения  $y_v$  ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) параметра  $Y$  (рис.22.b слева). Положим  $c_0 = 0$ , т.е. теоретическая функция равна  $y = c_1x$ . Соответственно, (положение {А.41.3}, стр.114) математические ожидания погрешностей измерения параметров лежат на линии  $y = c_1x$  (оси  $T$ ).

1. По-первых, в принятой теории координаты  $x_v$  считаются *неслучайными*, однако, это совсем не так: *здать* значение координат  $x_v^d$  точек можно *на чертеже*, в *техническом задании* и т.п. В *эксперименте* положение *заданной* координаты определяется *измерением*. Значения координат  $x_v$  отличаются от значений  $x_v^d$ , которые мы задали, а значения  $y_v$  будут лежать на линиях  $y = x_v$ . Для каждой из заданных координат  $x_v^d$  можно только сказать, что значение  $x_v$  находится в области определения распределения погрешности параметра  $X$ . Точно так же, как о каждом измеренном значении  $y_v$  параметра  $Y$ , которое находится в области определения распределения его погрешности. Значения  $x_v$  и  $y_v$  в каждой точке измерений  $x_v^d$  и  $y_v^d$  группируются около своих математических ожиданий  $m_X$  и  $m_Y$ , но их *положение в эксперименте неизвестно*.

2. Во-вторых, в принятой теории, делением *сумм*, входящих в уравнения для определения коэффициентов  $\eta_0$  и  $\eta_1$ , на число точек  $V$ , вычисляют [13,358]: математические ожидания<sup>23</sup>  $\bar{M}_X = \sum_1^V x_v/V$ ,  $\bar{M}_Y = \sum_1^V y_v/V$  {1}, дисперсии  $\bar{D}_0(X)$ ,  $\bar{D}_0(Y)$  и ковариацию  $\bar{K}_0(X, Y)$  в *начальных* координатах<sup>24</sup>. Дисперсия  $\bar{D}_0(Y)$  не входит в уравнения: иногда считается неизвестной<sup>25</sup> и используется [12,338] для оценки погрешности определения коэффициента  $\eta_1$ .

**{А.42.2}** *Имеют ли полученные характеристики отношение к погрешностям измерений?* Ответ *однозначен – нет!* Они относятся к некоторому *двумерному* распределению, связаны с *положением* точек на плоскости и следуют из *метода наименьших квадратов*.

Погрешность измерений – положение точки  $(x_v, y_v)$  в одном из прямоугольников.

*Возможные* отклонения определяются расстоянием от каждой точки, определяемой парой  $(x_v, y_v)$ , до линии  $y = c_1x$  (рис. 22b слева, ось  $T$  – сплошная стрелка): т.е.  $\delta(x_v) = x_v - y_v/c_1$  и  $\delta(y_v) = y_v - c_1x_v$  соответственно. Но трудности на этом пути большие.

<sup>22</sup>Учитывая, что функция  $p_\Omega(\omega)$  связана с исходной функцией  $p_Y(y)$  линейной зависимостью  $\omega' = y'/\sin \alpha$  (замечание к положению {А.34.2}, стр.97)

<sup>23</sup>Обозначены заглавными буквами, ибо они не относятся к погрешностям измерений

<sup>24</sup>Согласно нашей терминологии: в теории вероятностей их называют начальными моментами, а в математической статистике – выборочными характеристиками

<sup>25</sup>Почему не понятно – можно только догадываться: хотя распределение погрешности параметра  $Y$  известно, но правил как ее использовать в оценках нет

Во-первых, значение  $c_1$  неизвестно: можно использовать функцию  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$ , но результат мало предсказуем, ибо, в зависимости от расположения точек, можно получить одну из линий, обозначенных пунктирными стрелками. Во-вторых, коэффициенты вычисляются по формулам  $\eta_0 = \bar{M}_Y - \eta_1 \bar{M}_X$  и  $\eta_1 = \sum_1^V x_v y_v / \bar{D}_0(X)$ . Сумму  $\sum_1^V x_v y_v$  приводят к виду  $\sum_1^V (x_v - \bar{M}_X)(y_v - \bar{M}_Y)$  (т.е. в центральных координатах) и часто называют ковариацией: возможно, на основе «очевидного равенства»<sup>26</sup>  $K_{kk} = b_{kk} = D\xi_k$ . Значение  $\eta_0$  – это просто точка пересечения с осью: нам более интересны значения  $\bar{M}_X$  и  $\bar{M}_Y$ , ибо через точку  $(\bar{M}_X, \bar{M}_Y)$  линия  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$ , и они влияют на точность ее определения. При данном числе  $V$  точек, наиболее точно определяются оценки значений  $\bar{M}_X$  и  $\bar{M}_Y$ , несколько хуже оценка дисперсий  $\bar{D}_0(X)$  и  $\bar{D}_0(Y)$ . Наибольшую погрешность вносит коэффициент  $\eta_1$ : он определяет направление линии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$ , которая проходит через точку  $(\bar{M}_X, \bar{M}_Y)$ . Учитывая эти обстоятельства, уравнение линии можно записать в виде  $\tilde{y} = \bar{M}_Y + \eta_1(x - \bar{M}_X)$  {2}. Есть еще некоторые мелочи. Отметим один момент:

**{А.42.3}** Ковариация дает точное направление и положение теоретической функции  $y - c_0 + c_1 x$ , экспериментальное уравнение  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$  определяет только некоторые «усредненные» значения направления и положения.

И последнее: основные проблемы связаны с постановкой экспериментов: например, хорошо, когда в одном эксперименте можно получить значения в большом числе точек, но, во многих случаях в одном эксперименте определяется только одна точка – затраты увеличиваются многократно.

2. Вообще говоря, нам интересны не столько отклонения  $\delta(x_v)$  и  $\delta(y_v)$ , а отклонения в координатах<sup>27</sup>  $T0\Omega$  (где координата  $T$  – линия  $y = c_1 x$ , сплошная утолщенная стрелка), что следует из анализа в п.1 (штриховые линии ограничивают максимально возможные отклонения).

А эта задача решается значительно проще.

Отклонения по оси  $\Omega$  определяются расстоянием от оси до данной точки. Оно определяется проекцией точки  $(x_v, y_v)$  в координатах  $X0Y$  на ось  $\Omega$  формула  $\omega_v = -x_v \sin \alpha + y_v \cos \alpha = f'(x) = c_1$ , где  $f'(x) = c_1$  – производная от функции  $y = f(x)$  (рис.21.b слева, изображена ось  $T$  – утолщенная стрелка). В результате получим значения координат  $\omega_v$ , по которым вычисляется оценка  $\tilde{M}(\Omega) = \tilde{m}_\Omega = \sum_1^V \omega_v / V$  {3} математического ожидания  $m_\Omega$  случайной величины  $\Omega$ .

Немного сложнее оценка  $\tilde{m}_T$  математического ожидания  $m_T$  случайной величины  $T$ . Отклонения  $\delta(x_v)$  точек определяются по разности значений функции  $x = y / c_1$  обратной к функции  $y = c_1 x$ . Обратная функция определяется зеркальным отображением исходной рис.22b справа, утолщенная сплошная стрелка) функции (положение {А.12.1} приложения II, стр.75) относительно биссектрисы прямого угла (штриховая линия). В результате преобразования получим прямую линию  $y = c_1 x'$  ( $0 \leq x' \leq b / c_1$ ) (пунктирная стрелка) в координатах  $X0Y$ : она проходит через точку  $(0,0)$  под углом  $\alpha' = \pi / 2 - \alpha$  к оси  $X$ . Каждая точка, определяемая парой  $(x_v, y_v)$ , преобразуется в точку, соответствующую паре  $(x'_v = x_v / c_1, y_v = x_v)$ . Для наглядности на рисунке слева дополнительно изображены две точки, соответствующие парам  $(x_v, y_v)$  и  $(x'_v = x_v / c_1, y_v = x_v)$ , и их координаты, обозначенные сплошными и пунктирными линиями соответственно.

Введем оси координат  $T'0\Omega'$ , где ось  $T'$  – линия  $y = x / c_1$ . Отклонения от оси  $T'$

<sup>26</sup> В приложении III показано (положение А.7, стр.95), что такого равенства «в природе не существует» – это коэффициент метода наименьших квадратов

<sup>27</sup> По отклонениям в координатах  $T0\Omega$  легко определяются отклонения  $\delta(x_v)$  и  $\delta(y_v)$

определяются расстоянием от оси до данной точки. Оно определяется проекцией данной точки ( $x'_v = x_v / c_1$ ,  $y_v = x_v$ ) в координатах  $XOY$  на ось  $T'$ : формула  $\tau' = x' \cos(\alpha') + y \sin(\alpha')$  или, с учетом значения  $\alpha'$ , имеем  $\tau' = -x' \sin \alpha + y \cos \alpha$ .

В результате имеем значения координат  $\tau'_v$ , по которым вычисляется оценка  $\tilde{M}(T') = \tilde{m}'_T = \sum_1^V \tau'_v / V$  {3\*} математического ожидания  $m'_T$  случайной величины  $T'$ . Обратным линейным преобразованием  $x = y$  получим расположение точек, определяемых парами ( $x'_v = x_v / c_1$ ,  $y_v = x_v$ ), в координатах  $XOY$ , а на оси  $T$  – оценку  $\tilde{m}_T = -\tilde{m}'_T$  математического ожидания  $m_T$  случайной величины  $T$ . Фактически, определение значений  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$  соответствует вычислению выборочных характеристик распределения случайной величины по  $V$  экспериментам.

Значения  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$  отличаются от теоретических значения  $m_T$ ,  $m_\Omega$  и находится на некоторых расстояниях  $\delta_T = \tilde{m}_T - m_T$  ( $-m_T < \delta_T < l_T - m_T$ ) от оси  $\Omega$  и  $\delta_\Omega = \tilde{m}_\Omega - m_\Omega$  ( $-m_\Omega < \delta_\Omega < l_\Omega - m_\Omega$ ) от оси  $T$  соответственно, где  $l_T = l_X \sin \alpha + l_Y \cos \alpha$  и  $l_\Omega = l_X \cos \alpha + l_Y \sin \alpha$ ,  $l_X$ ,  $l_Y$  – длины областей определения погрешностей параметров  $X$  и  $Y$  (замечание к п.2 приложения III, стр.96). На этих же расстояниях от осей  $\Omega$  и  $T$  находится значения  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$ .

Значения  $\delta_\Omega$  как раз и характеризуют отклонения необходимые для определения границ доверительного интервала. Для значения вероятности  $P_d$  они определяются из формулы  $P(\theta \leq z < z_d) = \int_0^{z_d} p_\Omega(\omega) d\omega \int_0^{z_d - \omega} p_\Omega^{(V)}(\omega) d\omega$  {4} (формула 8.6а [10,127]), где  $p_\Omega^{(V)}(\omega)$  – плотность распределения выборочной характеристики, определенной по  $V$  экспериментам.

**3.** Все красиво в теории, однако кажется красота «куда-то улечучивается»: мы не знаем ни положения, ни ее направления прямой. Но это – только на первый взгляд. Все же известны: экспериментальная прямая  $\tilde{y} = \tilde{M}_Y + \eta_1(x - \tilde{M}_X)$ , которая проходит через точку  $(\tilde{M}_X, \tilde{M}_Y)$  под углом  $\tilde{\alpha}_1$  к оси  $X$ , определяемый значением  $\tilde{\alpha}_1 = \arctg(\eta_1)$ ; распределение погрешностей измерения параметров; центр группирования погрешностей принадлежит теоретической прямой. Эти знания мы и используем далее. Отметим, что угол  $\alpha_0 = \beta_1$  определяет точное значение (пример 2 приложения III, стр.98) коэффициента  $c_1 = \tg(2\beta_1) = 2K_0(X, Y) / \{D_0(X) - D_0(Y)\}$  прямой  $y = c_0 + c_1x$ . Очевидно: если положить  $\eta_1 = c_1$ , то значения углов  $\alpha_0$  и  $\tilde{\alpha}_1$  будут одинаковы. Т.е., рассматривая совокупность экспериментальных точек, как некоторое двумерное распределение, название ковариация экспериментального коэффициента  $\tilde{K}_0(X, Y) = \sum_1^V x_v y_v / V$  правильно. В конце концов, это не так уж важно.

Далее используем запись экспериментальной функции (рис.22с, штриховая стрелка) в виде  $\tilde{y}_1 = \tilde{M}_Y^1 + (x - \tilde{M}_X^1) \tg(\tilde{\alpha}_1)$  {5}. Из теории следует: существует прямая линия (штрих пунктирная стрелка)  $\tilde{y}_2 = \tilde{M}_Y^2 + (x - \tilde{M}_X^2) \tg(\tilde{\alpha}_2)$  {5\*}, математические ожидания которой  $\tilde{M}_X^2 = \tilde{M}_Y^1$  и  $\tilde{M}_Y^2 = \tilde{M}_X^1$ , а угол  $\tilde{\alpha}_2$  находится из условия  $\tg(\tilde{\alpha}_2) = -\eta_1$ .

Геометрически преобразование означает: **1. Переименование** – это зеркальное отображение относительно биссектрисы прямого угла (рис.22с, штриховая линия с двойным пунктиром). **2. Определение угла** – зеркальное отображение относительно оси  $T$ . Угол  $\alpha_0 = (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1) / 2$  определяет коэффициент  $c_1 = \tg \alpha_0$  теоретической линии  $y = c_0 + c_1x$ , т.е. точное направление оси  $T$  (тонкая сплошная стрелка).

Для наглядного представления, какова реальная «стоимость прогноза», предлагаемого в принятой теории, изображены два прямоугольника, определяющих совместное распределение погрешностей измерений. Их центры группирования следует переместить по линиям  $\tilde{y}_1$  и  $\tilde{y}_2$  соответственно, до совпадения линии  $y = m_X$  с линией  $y = b$ , разместить на них еще два прямоугольника, математическое ожидание  $m_X$  которых совпадало бы с осью<sup>28</sup>  $Y$  и провести границы возможных отклонений  $y_{\min}$  и  $y_{\max}$  (п.1, стр.114). Напомним, что оценка проводится только по линии  $\tilde{y}_1$ : возможность существования линии  $\tilde{y}_2$  она не определяет, ибо ни в теории вероятностей, ни в математической статистике для этого никаких объективных предпосылок нет.

<sup>28</sup>Мы не стали их приводить, чтобы не увеличивать рисунок

Чем «круче» направление линии  $\tilde{y}_1$ , тем хуже прогноз<sup>29</sup>: *И какова «цена» прогноза?*

Но вернемся «к нашим баранам». Положение линии  $y = c_0 + c_1x$  определено *относительно биссектрисы*. Чем больше *отличается* коэффициент  $c_1$  от единицы, тем больше погрешность *оценки положения* оси и тем *меньше уверенность* в *правильности* прогноза. Однако! До сих пор мы занимались только преобразованием прямых линий, не касаясь экспериментального положения точек. По условию задачи они относятся к линии  $\tilde{y}_1$ . Определим оценки  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$  теоретических значения  $m_T$ ,  $m_\Omega$  математических ожиданий погрешностей в соответствии с п.2.2 (стр.116). Проведем ось  $\Omega$  через точку  $(\tilde{M}_X^1, \tilde{M}_Y^1)$ . Переместим верхний прямоугольник на ось так, чтобы пересечение линий  $\omega = \tilde{m}_T$  и  $\tau = \tilde{m}_\Omega$  совпало с точкой  $(\tilde{M}_X^1, \tilde{M}_Y^1)$ , тогда *точка*  $(m_T, m_\Omega)$  на оси  $\Omega$  будет определять *точное положение* линии  $y = c_0 + c_1x$  (утолщенная сплошная стрелка).

Есть другой способ определения *точного положения* линии регрессии  $y = c_0 + c_1x$ . Например, провести прямую линию через крайние точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_V, y_V)$ , и определить ее положение по значениям  $\tilde{M}_X^1, \tilde{M}_Y^1$  и углу  $\tilde{\alpha}'_1$  наклона к оси  $X$ . Применяя те же геометрические преобразования, что и выше, получим 2-ю прямую, которая проходит через точку  $(\tilde{M}_X^2, \tilde{M}_Y^2)$  под углом  $\tilde{\alpha}'_2$ . Угол  $\tilde{\alpha}' = (\tilde{\alpha}'_2 - \tilde{\alpha}'_1)/2$  определяет направление некоторой оси  $T''$ , которое не совпадает ни с направлением, ни с положением линии  $y = c_0 + c_1x$ . Но известен угол  $\tilde{\alpha}'$  поворота осей  $T''O\Omega''$  относительно осей  $XOY$ . Это позволяет определить координаты точек  $(x_v, y_1)$  ( $v=1, 2, \dots, V$ ) в новых координатах  $(\tau''_v, \omega''_v)$ . Теперь, применив метод наименьших квадратов, получим *точное значение коэффициента*  $c_1$ . *Точное положение* линии  $y = c_0 + c_1x$ , определяется также как и в предыдущем абзаце. Отметим: Во-первых, способ имеет 2 операции, которые не требуются в 1-м способе. Во-вторых, он имеет определенное значение, если *линия регрессии является нелинейной*: об этом в примере 24.

Анализ, данный в примере, привел к следующему:

{A.42.4} Знание распределений *погрешностей измерений* параметров  $X$  и  $Y$ , позволяет определить *точное уравнение линейной регрессии*. Т.е. определить *точное значение* параметра  $Y$  при *данном значении* параметра  $X$ .

*Замечание.* Оценки  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$  используются *только* для определения *положения* точки  $(\tilde{m}_T, \tilde{m}_\Omega)$  в *двумерной области* определения *произведения системы*, образованной *совмещением* величин  $T$  и  $\Omega$  (погрешностей измерений). В *данном эксперименте* определяются *конкретные* значения  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$ , которые *характеризуют отклонения* от *точных значений именно в этом эксперименте*, а *принадлежность* точки  $(m_T, m_\Omega)$  *теоретической* прямой – ее *точное положение и направление*. Погрешность определения значений  $m_T$  и  $m_\Omega$ , связанная с числом точек, здесь вообще не причем!

Таким образом: никаких доверительных интервалов. Красота! – Прямо как в сказке<sup>30</sup>.

Итак: исключено не только *влияние погрешности* измерений параметров, но, фактически, и *влияние погрешности* определения *матема-*

<sup>29</sup>Это по минимальной оценке возможных отклонений. Есть факторы, которые только увеличивают их, например, полагается: отклонения связаны только со смещением по линии  $y = \tilde{M}_X^1$ . Учитывая их симметричность относительно линии  $y = c_0 + c_1x$ , получим точку, отмеченную окружностью с крестиком

<sup>30</sup>Сомнения «мучают» до сих пор: проверил бы кто тщательно – может где-то ошибка «сидит себе тихонечко, не мурчит, не пищит». Но может быть «обожглись молоком, а на воду дуем»

тических ожиданий  $\tilde{m}_T$  и  $\tilde{m}_\Omega$  (о дисперсиях  $\tilde{D}_T$  и  $\tilde{D}_\Omega$  или их оценках разговора вообще не было), зависящей от числа точек. «Велик соблазн»: ограничиться двумя точками. Однако: «торопись не спеши, спеши не торопясь».

**Замечание 25.** Мы «не заметим», что реальная связь может быть нелинейной: это легко видно из схемы на рис.21 (стр.112): одна из кривых изображена на рис.21d (стр.118). Не поможет и многократное повторение эксперимента: кстати, в этом случае, чтобы определить оценку математического ожидания  $M_X$  необходимо проводить измерения в 2-х заданных точках перед каждым повторением.

Отметим два важных момента, косвенно следующих из анализа.

**{А.42.5}** При *линейной зависимости*  $y = c_0 + c_1x$  случайной величины  $Y$  от случайной величины  $X$ , величина *отклонений* параметра  $Y$  определяется: 1. *Значением коэффициента  $c_1$ , т.е. углом наклона* прямой линии к оси  $0x$ . 2. *Длинной области определения*  $l_X = |x_K - x_H|$  распределения величины  $X$ .

Подробнее о влиянии угла наклона в разделе 3 (стр.146) данного приложения.

Таким образом, при *линейной зависимости* между случайными параметрами  $Y$  и  $X$  решение задачи *прогноза* определяется двумя факторами, из которых *только один* (параметр  $X$ ) является случайным.

### 1.3.2. Нелинейная зависимость между 2-мя параметрами

Рассмотрим *влияние погрешностей измерений* на определение *нелинейной зависимости* между параметрами: при анализе построения ограничимся некоторыми замечаниями.

**Пример 24.** На рис.23а даны изображения: 1. Одной из кривых (утолщенная сплошная линия), приведенных на рис.21. (стр.112). 2. Касательных  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  (штриховые тонкие стрелки) к точкам перегиба функции  $y = f(x)$  на отрезках, на которых она почти линейна. Одна из точек изображена точкой в центре (сноска 23, стр.114) двумерного распределения погрешностей. 3. Для наглядности окружностями обозначены точки пересечения касательных, а также направление оси  $\omega_2$ .

**п.1. Теория.** Для определения границ *возможных* теоретических отклонений необходимо: Во-первых, переместить кривую  $y = f(x)$  параллельно оси  $Y$  вверх или вниз в точку пересечения линии  $y = m_X$  с верхней или нижней границей любого из прямоугольников (тонкие сплошные кривые). Во-вторых, сместить параллельно оси  $X$  нижнюю кривую вправо, а верхнюю – влево так, чтобы они проходили через соответствующие вершины прямоугольников (утолщенные штриховые кривые). Для наглядности границы соединены утолщенными штриховыми прямыми линиями.

1. В принятой теории имеют значения смещения по оси  $Y$ , которые определяют границы доверительных интервалов. Например, тонкие сплошные кривые, полученные смещением кривой  $y = f(x)$  параллельно оси  $Y$ , соответствуют одному доверительному интервалу по оси  $Y$ . Во-первых, вероятность нахождения определяется по области в прямоугольниках, ограниченных отрезками кривых: очевидно, что при одинаковых интервалах вероятности будут зависеть от расположения прямоугольников на кривой. Это очень хорошо видно при сравнении области в прямоугольнике, контур которого выделен утолщенными штриховыми линиями, с областями в других прямоугольниках. Во-вторых, из рисунка легко видно, что границы доверительного интервала не соответствуют границам возможных отклонений. Если, например, определять доверительную

вероятность по выделенному прямоугольнику, то при некотором значении вероятности границы доверительного интервала окажутся в некоторых частях отрезка выше и ниже границ возможных теоретических отклонений. Отсюда следуют закономерные вопросы: *Какую из вероятностей  $x$  считать доверительной вероятностью? Можно ли согласовать доверительные границы с границами возможных отклонений?*

**2.** Как и при *линейной* зависимости параметров (п.1 примера 23, стр.114), приведем функцию  $y = f(x)$  к системе координат, в которой решение задачи является наиболее простым.

Для этого, применяя метод наименьших квадратов, аппроксимируем функцию<sup>31</sup>  $y = f(x)$  прямой линией  $y = \lambda x$  и положим, что она определяет ось  $T$  системы координат  $T0\Omega$  (рис.23а, сплошные тонкие стрелки). Ось  $T$  определяет некоторое усредненное направление и положение кривой  $y = f(x)$  на плоскости  $X0Y$ . Используя формулы *преобразования при повороте* координат (его *линейный* вариант, положение {А.8.6} приложения III, стр.98), определим функцию  $y = f(x)$  и области определения погрешностей измерений в новой системе координат. В координатах  $T0\Omega$  функция  $\omega = f(\tau)$ , учитывая *линейность преобразования*, подобна исходной функции  $y = f(x)$  (рис.23б, сплошная утолщенная кривая). Границы *возможных теоретических* отклонений в координатах  $T0\Omega$  определяются *смещением* кривой  $\omega = f(\tau)$  *параллельно* оси  $\Omega$  так, чтобы они проходили через *точки пересечения* прямых линий  $\omega = m_T$  с *нижними или верхними* сторонами прямоугольников (рис.23б, штриховые кривые). Для кривой, изображенной на рис.23а, это *наибольшее и наименьшее* значения *экстремумов* функции (рис.23б, прямоугольники, выделенные утолщенными линиями), определяемые в координатах  $T0\Omega$ .

Аналогичным *перемещением* кривой  $\omega = f(\tau)$  определяются *границы интервалов* (сплошные тонкие кривые) для *заданной доверительной* вероятности  $P_d$ . Значение  $P_d$  вычисляется в выделенных прямоугольниках в областях, ограниченных прямыми линиями  $\tau = P_d$  и верхней или нижней сторонами соответственно. Кривые, определяющие границы доверительных интервалов, проводятся так, чтобы линии  $\tau = P_d$  определяли касательные в точках максимума и минимума соответственно (рис.23б). В общем случае – проходили через *наибольшее и наименьшее* значения функции  $\omega = f(\tau)$ .

**п.2. Практика.** Пусть по *заданным* на отрезке  $0 \leq x \leq a$  значениям  $x_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) параметра  $X$ , в *экспериментах* на отрезке  $0 \leq y \leq b$  определены значения  $y_v$  параметра  $Y$  при изменении параметра  $X$ . Отметим, что для правильного представления о кривой число  $V$  точек измерения должно быть значительно больше, чем при *линейной* зависимости. Для аппроксимации используется известная функция  $y = f(x : c_1, c_2, \dots, c_W)$  с неизвестными параметрами  $c_w$ . Анализ, данный в настоящем разделе, определяет следующую последовательность операций для определения коэффициентов. **1.** Следуя правилам, определенным выше в п.1.2, переходим к координатам  $T0\Omega$ . **2.** На основе пунктов 2.2-2.3 примера 23 (стр.116) находим точное направление оси  $T$ , а также уточняем расположение экспериментальных точек в координатах  $T0\Omega$ . **3.** В координатах  $T0\Omega$ , применяя метод наименьших квадратов, определяем параметры  $c_w$  функции.

{А.43.1} *Выполнение операций позволяет правильно определить доверительную вероятность и границы доверительного интервала при нелинейной зависимости между параметрами.*

{А.43.2} *Последовательность операций позволяет уменьшить (вообще говоря, значительно, но не исключить ее) влияние погрешности измерений параметров  $X$  и  $Y$ . Однако это не влияет на погрешность аппроксимации: она связана (в первую очередь) с выбором кривой.*

**1.** *Уменьшение погрешности связано, в первую очередь, с большим числом точек измерения, необходимых для определения нелинейной зависимости.* **2.** В общем случае *нелинейной зависимости* между физическими параметрами  $X$  и  $Y$ , *точного*

<sup>31</sup>Определив, например, значения  $y_n = f(x_n)$  в достаточно большом числе ( $n=1,2,\dots,N$ ) точек  $x_n$

уравнения *линии регрессии* мы не получим. Однако в этом случае *основным* является *правильное* определение *доверительного интервала*, определяемое *преобразованием*.

#### 1.4. Влияние нескольких случайных величин на одну величину

Мы рассмотрели *суть* построения *функциональной зависимости*, в том числе, – по результатам *экспериментов* с учетом погрешностей *задания* параметра  $X$  и *измерения* параметра  $Y$ . Однако *оценка погрешности* вычисления коэффициентов  $c_w$  ( $w=1,2,\dots,W$ ) функции  $y = f(x : c_1, c_2, \dots, c_W)$ , хотя и имеет определенное значение, но, вообще говоря, во множестве случаев *не является самоцелью* проведения исследований.

{А.44.1} В этом случае, *основная постановка* задачи состоит в определении *влияния случайности* некоторых физических параметров  $X_j$  (случайных величин  $X_j$ ) на *функционально связанный* с ними, *физический* параметр  $Y$  (случайную величину  $Y$ ).

*Именно* решение этой задачи определяет возможность *обоснованного прогноза* изменений параметра  $Y$  при случайных отклонениях параметров  $X_j$  и решение задачи *управления процессами*. Начнем с цитат:

«Рассмотрим следующую задачу, различные варианты которой часто встречаются в практике. Пусть мы имеем  $k$  аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и зависящую от них величину  $Y$ . Переменные  $x_j$ , вообще говоря, не случайные величины и принимают в каждом наблюдении данной серии вполне определенные значения. Наоборот, величина  $Y$  предполагается случайной величиной, имеющей нормальное распределение с центром в точке  $M(Y) = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$  (9.3.1) и постоянной дисперсией  $\sigma^2$ , независимой от  $x_j$ » [12,333]. «Предположим, что проведена серия из  $n$  независимых наблюдений, дающих  $n$  систем значений:  $y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) (9.3.2). По этим значениям требуется оценить неизвестные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta_j$  ( $j=1,2,\dots,k$ ). Так поставленная задача, по аналогии с рассмотренной в п.9.1.3 задачей теории корреляции, носит название задачи «регрессии». Пусть величина  $Y$  представляет какое-либо интересующее нас свойство металлического сплава, например, ударную вязкость образцов, вырезаемых из стальных отливок, а  $x_1, x_2, \dots, x_k$  выражают определенные факторы, от которых зависят свойства ударной вязкости (содержание различных химических элементов, условия термической обработки и т.д.). . . . Эти последние в рассматриваемых экспериментах могут принимать определенные значения, предписываемые постановкой экспериментов в определенных пределах их изменения. В то же время перечисленные и поддающиеся нашему контролю факторы не исчерпывают всей совокупности факторов, определяющих значения величины  $Y$ . В числе этих последних, как правило, находятся также случайные переменные, в результате чего и величина  $Y$  будет испытывать, помимо функционально обусловленных, также и случайные воздействия. Таким образом, при некоторых допущениях придем к задаче определения коэффициентов в уравнении «регрессии» (9.1.13)» [12,334]. «Если задача оценки параметров будет решена, то мы сможем с некоторой надежностью производить прогноз поведения величины  $Y$  в зависимости от аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Другими словами, мы можем с определенной надежностью производить прогноз относительного возможного значения  $y$  при данной комбинации  $x_1, x_2, \dots, x_k$ » [12,335].

##### 1.4.1. Случайность параметров технологического процесса и прочность металлов (сплавов)

Пример из механики выбран двум причинам. Во-первых, эту область науки мы знаем намного лучше других, о чем говорилось ранее. Во-вторых, наличие «картинки» с изображением более 2-х десятков диаграмм деформирования в одной системе координат  $\varepsilon\theta\sigma$

**Замечание 26.** Построение выполнено давно, и было связано с *утверждением* (сначала услышанном, а потом прочитанном в статье<sup>32</sup>, любезно показанной одним из коллег,) о «некоррелированности», т.е. *отсутствии какой-либо связи* между значениями  $\sigma_B$  и  $\varepsilon_B$ . Любопытно было посмотреть, что представляет собой совокупность большого числа реальных диаграмм одного сплава: в литературе она что-то «не попадалась». Вообще-то, их было больше сотни случайно сохранившихся в архиве, но уже для построенных картина была достаточно «запутанной»: пришлось остановиться. Как ни странно, рисунок сохранился среди бумаг. Хотя он изрядно выцвел, удалось разобратся как в диаграммах, так и в нескольких комментариях к ним. Среди них была цитата<sup>33</sup>: «Например, характеристики прочности неоднородного стержня, могут рассматриваться как случайные функции абсциссы сечения  $x$ ». Не очень было понятно, о чем идет речь, но это не имеет значения: упоминание о случайных процессах надолго «охладило любопытство», ибо теория вероятностей тогда не интересовала, не говоря о случайных процессах.

О неизбежной погрешности задания значений  $x_i$  в эксперименте и определении *линии регрессии* достаточно подробно говорилось выше (примеры 22-24 (стр.112,114,118)). Наши знания о том, какое влияние оказывает случайность тех или иных параметров  $X_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) технологического процесса производства деталей, на интересующее нас свойство (параметр)  $Y$  металла (сплава), конечно же, важны. Однако мы обратим внимание на другое обстоятельство: *любой* параметр, *независимо* от того, *контролируется он* или нет, знаем ли мы *зависимость* свойства (параметра)  $Y$  от *изменения* данного параметра или нет, является случайной величиной. Это определяется в первую очередь возможностями технологии.

{A.44.2} Следовательно, случайность параметра  $Y$  определяется случайностью всех параметров  $X_v$ . Очевидно: это следует учитывать при решении задачи прогноза поведения случайного параметра  $Y$ .

Для примера рассмотрим определение характеристик прочности металлов (сплавов), определяемых при испытании образцов на растяжение.

**Пример 25.** Прежде всего, отметим: анализ проводится только на примере характеристик прочности, которые в механике называют статическими. Хорошо бы иметь и динамические характеристики, но их определение связано со сложностью (и дороговизной) постановки экспериментов, за исключением простых экспериментов для определения ударной вязкости<sup>34</sup>. Есть еще испытания на усталостную прочность, ползучесть

<sup>32</sup>В которой это доказывалось на основе теории корреляции: это тоже отталкивало

<sup>33</sup>Без ссылки: она «нашлась» в [13,373] при чтении литературы о случайных процессах, но это было намного позже написания данного приложения

<sup>34</sup>Ударная вязкость, ее значение и применение – очевидно и понятно: она учитывается при конструировании, исходя из общих рассуждений, основанных на опыте. Осталось



и т.п., но они далеки от темы данного анализа. Впрочем, как и влияние температуры или скорости деформирования на поведение и характеристики металла (сплава).

На рис.24 в координатах  $\varepsilon\sigma$  (где  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – деформация и напряжение в образце) условно изображены диаграммы, которые характеризуют *пластическое поведение* металла при испытании образцов на растяжение.

П.1. По сути, это диаграммы *изменения силы*  $F$ , действующей на образец, деленные на *исходную* площадь  $S$  поперечного сечения образца  $\sigma = F/S$ . При удлинении образца  $\delta_L = l - l_0$  (где  $l_0$ ,  $l$  – начальная и текущая длина измеряемой части образца), площадь все время уменьшается. Следовательно, истинные напряжения все время увеличиваются. Учитывая местное сужение поперечного сечения при интенсивном образовании шейки (точки максимума, отмеченные на диаграммах) показывается, что истинные напряжения растут вплоть до разрушения образца.

Из характеристик, определяемых по результатам испытаний<sup>35</sup>, рассмотрим *предел текучести*  $\bar{\varepsilon}_T$ ,  $\bar{\sigma}_T$  и *предел прочности*  $\bar{\varepsilon}_B$ ,  $\bar{\sigma}_B$  (штриховые линии). Число испытанных образцов (следовательно, и диаграмм деформирования) за время производства конкретного металла достаточно большое: в справочниках приводятся данные по всем характеристикам, полученные по результатам обработки 2-5 тысяч испытаний. Точками ( $\varepsilon_B^j$ ,  $\sigma_B^j$ ), отмеченными на диаграммах, показаны пределы прочности конкретных образцов.

П.2. Методы обработки диаграмм существуют давно: старые совершенствуются, разрабатываются новые. Но все они относятся к обработке диаграммы, полученной на конкретном образце. Иногда приводятся так называемые «типичные» диаграммы деформирования конкретного сплава, но что это такое – непонятно, ибо пояснений, как они определяются, не приводится<sup>36</sup>. Далее следуя теории вероятностей, данные по какой-либо характеристике прочности образца, полученные по всем испытанным образцам, объединяются в одну совокупность и определяются, во-первых, выборочные характеристики: среднее значение и дисперсия. Например,  $\bar{\varepsilon}_B$ ,  $\bar{\sigma}_B$  и  $\bar{D}(\varepsilon_B)$ ,  $\bar{D}(\sigma_B)$ .

Во-вторых, они используются для построения закона распределения характеристик: чаще всего полученные данные почти симметричны относительно математического ожидания, поэтому обычно полагается, что они распределены нормально, и решается задача аппроксимации. «Дань» пониманию того, что характеристики являются случайными величинами Е и  $\Sigma$ . Однако эти данные применяются в основном при оценках надежности: расчетчики для определения коэффициентов запаса чаще используют минимальные значения, гарантируемые производителем данного сплава.

П.3. Рассмотрим диаграммы деформирования с другой позиции. Каждая из диаграмм характеризует *отличие прочностных свойств* данного образца от *свойств множества других* испытанных образцов, определяемых случайностью параметров технологического процесса их изготовления, в том числе, неоднородность свойств по объему образца<sup>37</sup>: по длине значительно больше, чем по диаметру (или толщине и ширине плоских образцов), учитывая их соотношение. Случайная неоднородность свойств (в

---

определить как ее применять в расчетах конструкций, но с решением этого вопроса «что-то уж слишком туго»

<sup>35</sup> Они и пояснения, намного подробнее и лучше, чем данные выше, приводятся в учебниках по сопротивлению материалов, например [27]: из известных нам учебников по сопромату наиболее подробные пояснения даны в работе С.П. Тимошенко «Сопротивление материалов» часть 2-я

<sup>36</sup> Как-то в журналах появились (как минимум – лет 15 назад) статьи, посвященные характеристикам каких-то сплавов. Авторы привели «типичные» диаграммы, которые, по их утверждению, получены по нескольким диаграммам. Но о способе обработки, каким она проводилась – ни слова. Возможно, методом наименьших квадратов, но это из «области догадок»: по крайней мере, этот он был применен для определения усредненной кривой, после раздумий над совокупностью построенных диаграмм (замечание 26, стр.141). Однако что делать дальше, было абсолютно непонятно

<sup>37</sup> Явление уменьшения прочности подобных деталей при увеличении размеров давно известно: в деталях машин для его учета используются масштабные коэффициенты,

основном) по длине предопределяет образование шейки в наиболее слабом случайном месте. «Картина» изображенная на рис.24, вообще говоря, это только некоторая тенденция: реально она сложнее. Дальнейшее описание основано на построении кривых в одной системе координат (замечание 26, стр.141). На основе этого рисунка удалось выделить отличия реальной картины от «нарисованной тенденции».

**Во-первых.** Если провести прямую линию  $\sigma = \varepsilon'$ , то точки ее пересечения с кривыми, т.е. значения напряжений  $\sigma^j$  на кривой образца с номером «j», группируются около точки, расположенной приблизительно посередине между нижней и верхней кривой. Проведя прямую линию  $\varepsilon = \sigma'$ , получим подобный результат, но для значения деформаций  $\varepsilon^j$  на кривой образца с номером «j».

**Во-вторых.** Если выделить какую-либо прямоугольную область (условно обозначена пунктирными линиями) так, чтобы левая нижняя вершина совпала с точкой на нижней кривой, а правая верхняя – с точкой на верхней кривой, то можно увидеть, что отрезки кривых, определяемые прямоугольником, также группируются около некоторой кривой. В области группирования, кривая, полученная на одном образце, может пересекать кривые, полученные на других образцах и не только в одной, но и в двух точках. Может ли она пересекать все кривые в этой области, или какие-то кривые более, чем в 2-х точках, не знаем: по крайней мере, для изображенных диаграмм, таких пересечений не было. В принципе, важен другой момент. В результате экспериментов определяется семейство кривых, похожее на изображение случайного процесса: пример 19 (стр.127) с которого мы начали этот раздел.

Сейчас, на основе исследований, изложенных в приложении II, настоящего раздела и анализа построения случайных процессов, выполненных в приложении VI, можно уверенно утверждать:

{A.45.1} Каждая из диаграмм деформирования определяют однозначную функциональную взаимосвязь  $\sigma^j = g(\varepsilon^j)$  (или  $\varepsilon^j = h(\sigma^j)$ ) между напряжениями  $\sigma^j$  и деформациями  $\varepsilon^j$  в образце с данным номером «j».

**Подчеркнем:** в том числе, однозначную функциональную взаимосвязь между напряжениями  $\sigma_T^j$  и деформациями  $\varepsilon_T^j$  (или  $\sigma_B^j$  и  $\varepsilon_B^j$ ), определяющие пределы текучести и прочности данного образца.

{A.45.2} Каждая из диаграмм деформирования характеризует одно и то же свойство твердого деформируемого тела: способность сопротивляться изменению формы и размеров при действии на тело внешней нагрузки  $F$ .

Эта способность твердого тела определяется взаимодействием между частицами (атомами, молекулами), из которых оно состоит. Технология изготовления металлов (сплавов) и деталей оказывает существенное влияние на это взаимодействие. Этими вопросами занимается ветвь науки о прочности материалов, которая называется *физикой прочности*: мы на этом не останавливаемся, ибо цель анализа другая. Случайность диаграмм деформирования каждого образца (детали), определяется случайным отклонением параметров данного технологического процесса изготовления, как для разных образцов, так и по объему конкретного образца. Отсюда следует:

{A.45.3} Диаграммы деформирования каждого образца (детали) случайно отклоняются от некоторой гипотетической (по-видимому, можно сказать – теоретической) функциональной зависимости  $\sigma = g(\varepsilon)$  (или  $\varepsilon = h(\sigma)$ ), которая присуща данному технологическому процессу изготовления образца (детали).

---

которые определяются на основе опыта применения деталей из данного материала в конструкциях

**Замечание.** Технологический процесс изготовления образцов всегда стремятся приблизить к процессу изготовления деталей, тем не менее, он имеет отличия от последнего.

**{А.45.4} Отклонения деформаций и напряжений** для двух произвольных точек диаграмм отличаются друг от друга и от зависимости  $\sigma = g(\varepsilon)$  (или  $\varepsilon = h(\sigma)$ ) и являются случайными. Следовательно, они определяют *зависимость* вероятностей от *изменения внутренних условий* опыта при *постоянстве внешних условий*: при *любом* данном значении  $F_d$  *внешней* нагрузки  $F$  имеем *разные* значения напряжений  $\sigma^j$  и деформаций  $\varepsilon^j$  в *разных* образцах.

Утверждения, данные в положениях, не согласуются с принятым пониманием статической прочности образцов как случайного процесса (случайных функций). Для того, чтобы понять, что является правильным, наш анализ или предположение существующей теории, необходимо было провести анализ построения случайных процессов с позиций теории, развитой в настоящей работе. Анализа построения случайных процессов в принятой теории просто не существует: исключением является частный случай (пример 7 приложения VI, стр.139), в котором имеется предпосылки для его проведения.

Анализ, проведенный в приложении VI, подтвердил правильность утверждений {А.45.1-4}: совокупность *диаграмм деформирования* определяет *функциональную зависимость законов* распределения случайных величин от *изменения внутренних условий эксперимента*. Она является только «прелюдией» к построению случайного процесса, который связан непосредственно с проведением испытаний. Дело в том, что машины, применяющиеся при испытаниях образцов на растяжение (сжатие, кручение), устроены так, чтобы обеспечить *движение подвижного захвата с постоянной скоростью*<sup>38</sup>. Т.е. *экспериментальный* способ определения прочностных характеристик является *случайным* процессом с *постоянной* скоростью *изменения деформаций*. Его построение достаточно сложно, однако какого-либо особого смысла мы в этом не видим. Подобный процесс движения твердого тела рассмотрен в примере 8 приложения VI (стр.143).

**В-третьих.** Приблизительно при равном значении напряжений  $\sigma_B^k \cong \sigma_B^j$ , значения деформаций  $\varepsilon_B^k$  и  $\varepsilon_B^j$  могут отличаться значительно, например: точка  $(\varepsilon_B^j, \sigma_B^j)$  может находиться вблизи левой, а точка  $(\varepsilon_B^k, \sigma_B^k)$  – вблизи правой границы прямоугольника. Подобным образом могут отличаться напряжения  $\sigma_B^k$  и  $\sigma_B^j$  при приблизительно равных деформациях  $\varepsilon_B^k \cong \varepsilon_B^j$ . Т.е. *экспериментальные* точки  $(\varepsilon_B^j, \sigma_B^j)$ , определяющие предел прочности данного металла (сплава), находятся в пределах, ограниченных некоторой областью.

В существующей теории утверждается: случайные величины  $E$  и  $\Sigma$  «некоррелированные», т.е. не то что *функциональная*, а вообще *какая-либо* связь между ними отсутствует. С точки зрения механики, картинка весьма странная: для *каждого* образца *связь* между значениями *жесткая*, а в совокупности – *никакой*.

Рассмотрим данные, полученные при испытаниях, на основе теории, развитой в [19] и настоящей работе.

Событие А – *появление конкретного значения* деформации  $\varepsilon^j$  в образце с номером «j» определяет *одновременное* появление события В – *конкретного значения* напряжения  $\sigma^j$ . Это справедливо для любой из диаграмм в любой точке произвольного отрезка  $0 \leq \varepsilon_H \leq \varepsilon \leq \varepsilon_K \leq \varepsilon_B$  на оси  $\varepsilon$  и *связанного* с ним *функциональной зависимостью*

<sup>38</sup>Для определения статических характеристик скорость должна быть небольшой: обычно она не превышает нескольких миллиметров в минуту

$\sigma = g(\varepsilon)$  отрезка  $0 \leq \sigma_H \leq \sigma \leq \sigma_K \leq \sigma_B$  на оси  $\sigma$ . В том числе – характеристик пределов прочности  $\varepsilon_B^j, \sigma_B^j$  и текучести  $\varepsilon_T^j, \sigma_T^j$ .

Одновременность появления событий (пример 15 [19,33]) определяет (раздел 4.1.2, стр.54) произведение системы, образованной совмещением случайных величин  $E$  и  $\Sigma$ . Согласно положению {A.19.1} (стр.55), область определения произведения является прямоугольником (рис.24, стр.140), стороны которого параллельны осям координат.

Из положения {A.6} (стр.115) следует: в этом случае ковариация распределения (и коэффициент корреляции) равна нулю. По сути, применение положений принятой теории, только подтверждает (положение {A.40}, стр.132): двумерное распределение, определяемое совокупностью точек  $(\varepsilon_B^k, \sigma_B^k)$  ( $k=1,2,\dots,K$ ) является произведением вероятностных функций  $p_E(\varepsilon_B)$  и  $p_\Sigma(\sigma_B^k)$  одномерных случайных величин  $E$  и  $\Sigma$ .

Анализ, проведенный в разделах 2.2.1 и 2.2.2 (стр.114,118) приложения III показал (вывод W.8, стр.120): равенство ковариации нулю совсем не означает, что функциональной зависимости между величинами нет.

п.4. Кратко о построении функциональной зависимости  $\sigma = g(\varepsilon)$ , а также одномерных распределений напряжений  $p_\Sigma(\sigma)$  и деформаций  $p_E(\varepsilon)$  в выделенной части диаграмм.

Зависимость  $\sigma = g(\varepsilon)$  достаточно просто строится методом наименьших квадратов. Подобрать для аппроксимации какую-либо одну функцию весьма сложно: лучше всего, по нашему мнению, использовать метод сплайнов. При построении следует опираться только на часть каждой из диаграмм, ограниченной точкой  $(\varepsilon_B^k, \sigma_B^k)$ , определяющей характеристики предела прочности: использование ниспадающей части диаграмм приведет к неправильному определению поведения функции  $\sigma = g(\varepsilon)$  в области разрушения образца.

{A.45.5} Подчеркнем: полученная кривая не является линией математических ожиданий (замечание 24.4, стр.134) распределений случайных величин  $E$  и  $\Sigma$ . Ее можно толковать как пересечение линий равных вероятностей, определяемых распределениями  $p_E(\varepsilon)$  и  $p_\Sigma(\sigma)$ .

Отсюда следует: для определения распределений одномерных случайных величин  $E$  и  $\Sigma$  вполне достаточно построить распределение одной из величин, например, деформаций  $p_E(\varepsilon)$  в области изменения характеристик предела текучести или прочности. Если, например, для требуемой вероятности определено допустимое значение деформаций  $\varepsilon_B^{dop}$ , то по функции  $\sigma = g(\varepsilon)$  легко определяется (вывод W.1, стр.126) допустимое значение напряжений  $\sigma_B^{dop} = g(\varepsilon_B^{dop})$  с той же вероятностью. «Запрета» на построение распределения второй характеристики, конечно же, нет, однако это лишняя работа, приводящая к дополнительным погрешностям: значения  $\varepsilon_B^{dop}$  и  $\sigma_B^{dop}$ , определенные по распределениям  $p_E(\varepsilon_B)$  и  $p_\Sigma(\sigma_B)$ , будут отличаться, а этого «быть не должно».

## 2. Вероятностная зависимость

Теперь положим, что на проведение опыта влияет не только функциональная зависимость  $y = f(x)$  от изменения условия  $x$ , но и другое условие, которое является случайным.

**Пример 26.** Рассмотрим линейное преобразование  $y = cx + d$  (сплошная линия на рис.25) величины  $X$  с функцией плотности  $p(x)$ , определенной на отрезке  $a \leq x \leq b$ . п.1. В результате преобразования получим величину  $Y$ , распределение  $p_0(y)$  которой определено на отрезке  $y_a \leq y \leq y_b$ , где  $y_a = ca + d$ ,  $y_b = cb + d$ .

п.2. Положим, что положение прямой изменяется случайно параллельно самой

себе вдоль оси  $Y$  в пределах, которые ограничены прямыми  $y_1 = cx - d_1$  и  $y_2 = cx + d_1$  (пунктирные линии). Например, коэффициент  $d$  в уравнении является случайной величиной  $D$ , плотность распределения которой симметрична. В этом случае, распределение  $p_1(y)$  величины  $Y_1$  будет определяться распределениями 2-х величин  $X$  и  $D$ . Оно будет отличаться от распределения  $p_0(y)$  при чисто *функциональной* зависимости величин. В частности область его определения увеличивается  $y_{a1} \leq y \leq y_{b1}$ , где  $y_{a1} = y_a - d_1$ ,  $y_{b1} = y_b + d_1$ . Имеем *влияние распределения* случайной величины  $D$  на *распределение* случайной величины  $Y$ , которое *функционально зависит* от величины  $X$ .

**П.3.** Изменять случайным образом положение функции  $y = cx + d$  можно другими способами. Например: 2) перемещать ее параллельно оси  $X$ , а не  $Y$ ; 3) поворачивать линию  $y = cx + d$  относительно некоторой точки  $(x_A, y_A)$  4) перемещать вдоль некоторой кривой или прямой линии; 5) совмещать отмеченные способы и т.д. Очевидно, что случайным образом можно изменять положение произвольной функции  $y = f(x)$ . Во всех случаях имеем *влияние распределения* некоторой случайной величины  $D$  на *распределение* случайной величины  $Y$ , которая *функционально зависит* от величины  $X$ .

**{А.44}** Таким образом, *распределение* случайной величины  $Y$  зависит от *распределения* случайной величины  $D$ , которая функционально не связана ни с величиной  $Y$ , ни с величиной  $X$ . Это и есть *вероятностная зависимость*, рассматриваемая в теории.

Если определить в области  $(a \leq x \leq b, y_{a1} \leq y \leq y_{b1})$  *двумерное* распределение системы, образованной *совмещением* величин  $X$  и  $Y$  (или  $X$  и  $Y_1$ ), то его *ковариация* равна нулю (раздел 1.3, стр.90).

Можно не использовать *функциональной зависимости* величин, а просто изменять случайным образом положение функции  $p(x)$  вдоль оси  $X$  или положение оси  $X$  в направлении оси  $Y$ . В 1-м случае получим *одномерный*, а во 2-м – *двумерный закон* распределения, которые определяются *системами*, образованные *объединением* или *совмещением* двух случайных величин. Таким образом, с точки зрения, определенной в положении **{А.44}**, распределения *систем*, образованных их *объединением* или *совмещением* случайных величин можно рассматривать (раздел 4, стр.48) как *вероятностную зависимость* их распределения от распределения *исходных* величин.

При *объединении* величин *ковариация вообще не существует*, а при *совмещении* – *равна нулю*.

В примере 26 *вероятностная зависимость* «размывает» *функциональную*: она становится не такой явной.

**Пример 27.** Рассмотрим *двумерную* случайную величину  $\Phi(x, y)$  с плотностью распределения  $p(x, y)$ , определенной в эллипсе и *симметричной* относительно *центральных осей* (рис.26А, оси  $X, Y$  и  $X', Y'$  – параллельны), т.е. *ковариация* в *центральных*  $K\{\Phi(x, y)\}$  координатах равна *нулю*. Пусть его *положение* изменяется случайно *параллельно* оси  $Y'$ . При *симметричном* распределении  $p_D(y)$  получим распределение

(рис.А1, правая и левая границы – прямые линии, верхняя и нижняя – смещенные половинки эллипса), которое также *симметрично*. При *несимметричном* распределении  $p_D(y)$  получим распределение *симметричное* относительно *центральной* оси  $Y$ . Если положение распределения изменяется случайным поворотом относительно точки  $(m_X, m_Y)$ , то при *симметричном* распределении  $p_{D1}(\theta)$  получим распределение, (рис.А2, правая и левая границы – дуги окружности с центром в точке  $(m_X, m_Y)$ , верхняя и нижняя – пересечение половинок эллипса в крайних положениях угла поворота  $\theta$ ), которое тоже *симметрично*. Во всех случаях *ковариация равна нулю*.

Повернем распределение  $p(x, y)$  на угол  $\alpha$  относительно точки  $(m_X, m_Y)$  (рис.В): *ковариация* примет некоторое значение  $K\{\Phi(x, y)\} = k_1$  отличное от нуля. Точка (О) – пересечение осей  $X_1$  и  $Y'$ . Пусть *положение* распределения изменяется случайно *параллельно центральной* оси  $Y_1$ . Если распределение  $p_D(y)$  *симметрично*, то получим *симметричное* распределение (рис.В1). Оно определяется поворотом распределения, изображенного на рис.А1 на угол  $\alpha$ . При *несимметричном* распределении  $p_D(y)$  получим распределение *симметричное* относительно *центральной* оси  $Y_1$ . Будем *изменять положение* распределения случайным *поворотом относительно* точки (О). При *симметричном* распределении  $p_{D1}(\theta)$  получим распределение, *симметричное* относительно оси  $X_1$  (рис.А2, правая и левая границы – дуги окружности с центром в точке (О), а верхняя и нижняя – половинки эллипса в крайних положениях угла поворота). Во всех случаях значение  $k_1$  *ковариации* не изменится.

Легко показать, что при *смещении* положений распределения  $p(x, y)$ , изображенных на рисунках А и В, *параллельно произвольному* направлению (например, в направлении пунктирных стрелок) *ковариации* тоже *не изменяется*: в 1-м случае она остается равной нулю, а во 2-м – значению  $k_1$ .

Если величины  $D$  и  $\Phi(x, y)$  не связаны *функциональной зависимостью*, то *ковариации изменяется в одном* случае: когда *влияние* случайной величины  $D$  на величину  $\Phi(x, y)$  приводит к *повороту центральных* координат распределения  $p(x, y)$  *относительно исходного* положения.

## Список литературы

1. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с
2. Л.Е Майстров. Теория вероятностей. Исторический очерк.– М: Наука, 1967. – 321с
3. О.Б. Шейнин. Теория вероятностей до П. Л. Чебышёва // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. – № 23. – с. 284-306
4. Я. Бернулли. О законе больших чисел. – М: Наука, 1986. – 176с
5. Википедия: История теории вероятностей.
6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с.
7. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 738с.
8. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с
9. А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. – Изд.2-е – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 120с.
10. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. “East-West” Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с

11. С.Н. Берштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.-Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с
12. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Изд. 3-е – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 511с
13. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей.- Изд. 7-е – М. Издательский центр «Академия», 2003. – 576с
14. А.А. Марков. Исчисление вероятностей. – Изд.4-е – М.-Л.: – Госиздат, – 1924. – 589с.
15. В.И. Гливенко. Курс теории вероятностей. – М.-Л. Государственное объединенное научно-техническое издательство, 1939г. ? 220с.
16. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с
17. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. “Наука”, 1980г. – 976с
18. А.А. Боровков. Теория вероятностей: учебное пособие для вузов. – Изд.2-е – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 432с.
19. И.И. Бондарчук. Теории вероятностей: «совершенство» или видимость? Часть I. Теория событий: критика исходных понятий и создание новой исходной системы.
20. В.И. Лотов. Теория вероятностей. Конспект лекций для студентов механико-математического факультета Новосибирского Государственного Университета
21. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – Изд. 6-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1966г. – 607с
22. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 – Изд. 7-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 800с
23. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 – Изд. 5-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 656с
24. Р. Дедекин. Непрерывность и иррациональные числа. – Изд. 4-е.– Одесса. Mathesis, 1923. – 44с
25. С.А. Ануфриенко. Введение в теорию множеств и в комбинаторику, Учебное пособие. – Екатеринбург. УрГУ, 1998. – 62с
26. И.И. Бондарчук. Теории вероятностей: «идеал» или видимость? Часть II. О распределениях скоростей Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака
27. М.М. Филоненко-Бородич, С.М. Изюмов, Б.А. Олисов, Л.И. Мальгинов. Курс сопротивления материалов. Часть первая. – Изд. 5-е – М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961г. – 656с
28. М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. – Изд.5-е – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1967г. – 480с
29. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей: *видимость «совершенства»!* Часть III. Теория случайных величин: критика существующих исходных понятий и создание новой исходной системы
30. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей: *подобие «совершенства»!* Часть IV. Преобразование законов распределения случайных величин
31. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей: *«иллюзия» совершенства»!* Часть V. Числовые характеристики случайных величин