

«То все ошибки, все накладки  
И заблуждения веков.»  
Автор неизвестен.

УДК 519.211; ББК 22.171

## Критика теории вероятностей. Часть VI.

### Виды зависимости случайных величин

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

21 июля 2020 г.

Без разговора о независимости случайных величин и условий, ее обеспечивающих, не обходится ни одна работа по теории вероятностей. Но раздел с таким названием в существующей теории не мог появиться в принципе: в ней понятие зависимости случайных величин связано, во-первых, с условиями независимости. Во-вторых, – с ковариацией, а точнее – с коэффициентом корреляции, который и определяет «... все градации вероятностной зависимости – от самой сильной» (функциональной) «до самой слабой» (полной независимости). В статье дан анализ смысла понятия зависимости случайных величин, принятого в существующей теории. При анализе, как и ранее, применяется чисто математический принцип: построение математических моделей должно основываться исключительно на исходной системе теории событий [19; 29; 30; 31].

{А.0} *Главная цель исследований* остается неизменной [19,1]  
– *показать, какая есть и какой должна быть* теория вероятностей случайных явлений, которые называют *массовыми*<sup>1</sup>.

Анализ показал: 1. В существующей теории линии регрессии, согласно принятому пониманию, определяют «нечто», которое какому-либо «внятному пояснению не поддается». 2. Условия «независимости», принятые в существующей теории, определяют отличие закона распределения произведения вероятностных функций системы, образованной совмещением случайных величин («полная независимость и некоррелированность»), от закона распределения многомерной случайной величины («зависимость и коррелированность»). 3. Именно жесткая функциональная зависимость между физическими параметрами является линией регрессии. Ее определение позволяет оценить влияние случайности параметра  $X$  на распределение вероятностей параметра  $Y$

---

<sup>1</sup>Т.е. теории, занимающейся изучением только тех случайных событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз при неизменных условиях проведения опыта, обладают статистической устойчивостью и в отношении которых имеет смысл не только утверждение об их случайности, но и возможна объективная оценка доли случаев их появления. Подробнее об этом можно почитать в [1,16]

## Содержание

Введение .....	3
1. Функциональная зависимость .....	6
1.1. Замечания к теории корреляции .....	10
1.2. Построение функциональной зависимости двух случайных величин: предварительные рассуждения .....	17
1.3. Влияние погрешностей измерений параметров на построение линии регрессии и решение задачи прогноза .....	22
1.3.1. Об условии наилучшего приближения метода наименьших квадратов (22).	
1.3.2. Линейная связь между 2-мя параметрами (24).	
1.3.3. Погрешность построения линейной зависимости (33).	
1.3.4. Нелинейная связь между 2-мя параметрами (40).	
1.4. Влияние нескольких случайных величин на одну величину .....	53
1.4.1. Случайность параметров технологического процесса и характеристики прочности сплавов (металлов) (54).	
1.4.2. Диаграммы деформирования и характеристики прочности (58).	
1.4.3. Определение законов распределения характеристик прочности и зависимость между напряжениями и деформациями (66).	
2. Вероятностная зависимость случайных величин .....	74
Список литературы .....	78

**Примечания**

**1.** Ссылки на работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. Если работ несколько, то они разделяются знаком «;». При ссылках внутри работы указывается положение, на которое дается ссылка, и № страницы на которой оно находится.

**2.** Выводы, следующие из анализа, обозначаются номерами W.1, W.2, .... Чтобы обратить внимание Читателя на некоторые важные моменты, следующие из анализа, они выделены как положения и обозначены номерами {A.1}, {A.2}, ....

**3.** Понятия, используемые в принятой теории вероятностей, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита. Уточненные предположения – римскими цифрами, а уточненные и вновь введенные определения понятий – словом «определение» с арабскими цифрами.

**4.** Нумерация формул: в круглых скобках – по крайней мере, в пределах данного раздела-сквозная; в фигурных скобках – в пределах рассматриваемого примера.

## Введение

В разделе 1.3 статьи [30,30] проведен анализ *условий независимости* случайных величин, принятых в существующей теории. Анализ показал, что принятые *условия* приводят к противоречию (выводы W.14-W.18 [30,32]): «*независимые*», согласно условиям, случайные величины могут быть *функционально зависимыми*.

Обратимся к пояснению смысла понятия *зависимости* и *независимости* случайных величин в существующей теории. Начнем с цитаты:

«Понятие “зависимости” случайных величин, которым мы пользуемся в теории вероятностей, несколько отличается от понятия “зависимости” величин, которым мы оперируем в математике. Действительно, обычно под “зависимостью” величин подразумевают один тип зависимости – полную, жесткую, так называемую функциональную зависимость. Две величины называются зависимыми, если, зная значение одной из них, можно точно указать значение другой. В теории вероятностей мы встречаемся с другим, более общим типом зависимости – с вероятностной или “стохастической” зависимостью. Если величина  $Y$  связана с величиной  $X$  вероятностной зависимостью, то, зная значение  $X$ , нельзя указать точно значение  $Y$ , а можно указать только ее закон распределения, зависящий от того какое значение приняла величина  $X$ . Вероятностная зависимость может быть более менее тесной; по мере увеличения тесноты вероятностной зависимости она все более приближается к функциональной. Таким образом, функциональную зависимость можно рассматривать как крайний, предельный случай наиболее тесной вероятностной зависимости. Другой крайний случай – полная независимость случайных величин. Между этими двумя крайними случаями лежат все градации вероятностной зависимости – от самой сильной до самой слабой» [13,173].

1. Одно только как-то странно: в главе 12 под названием «Законы распределения функций случайных аргументов» говорится о *функциональной зависимости*  $Y = (X)$  случайной величины  $Y$  от величины  $X$  [13,263]. Затем записывается *действительная функция*– *действительного* аргумента  $y = \phi(x)$ , определяющая кривую на плоскости: «Когда величина  $X$  принимает на участке различные значения на участке  $(a, b)$ , случайная точка  $(X, Y)$  перемещается только по кривой  $y = \phi(x)$ ; ордината этой точки полностью определяется ее абсциссой» [13,264]. Мало того, определяется *функциональная связь законов* распределения  $P(Y < y) = P(a < X < x)$ , где  $x = \psi(y)$  – функция, обратная к функции  $y = \phi(x)$ . О *вероятностной зависимости* даже не упоминается. – *Загадка?* 2. Подчеркивание в цитате – «дело рук» автора сего труда.

В цитате, по нашему мнению, *наиболее полно и концентрированно* поясняется, что понимается под *зависимостью* случайных величин в существующей теории вероятностей. Во-первых, из цитаты следует: в существующей теории под *функциональной зависимостью* понимается *только зависимость*  $y = f(x)$  между двумя *действительными* функциями  $V(x)$  и  $W(y)$  *действительных* аргументов  $x$  и  $y$ , когда *по значению одной* (положение {A.1} [30,7]) *вычисляется точное значение другой* функции. Она рассмотрена нами на примере из механики [30,6], однако такого *типа зависимости* между случайными величинами, *согласно существующей теории вероятностей*, вообще говоря, *принципиально быть не может*.

При рассмотрении *преобразования законов* распределения случайных величин показано: в отличие от механики (т.е. обычных действительных функ-

ций действительного аргумента), *функциональная зависимость* в теории вероятностей связывает *законы* распределения 2-х случайных величин, тоже *действительных* функций *действительного* аргумента. Из анализа *преобразования законов* распределения *одномерных* случайных величин (выводы W.1, W.5-W.6 [30,11-12] и W.11-W.12 [30,28]) и *анализа смысла числовых* характеристик распределений (выводы W.2-W.8 [31,27] и положения {A.23.3}-{A.23.4} [31,22,25]) следуют выводы:

**W.1.** *Функциональная связь* позволяет по *закону* распределения *одной* случайной величины определять *точные значения* вероятностей появления событий *другой* случайной величины.

**W.2.** *Функциональная зависимость* между 2-мя *законами* распределения такая же «жесткая», как и между *действительными* функциями *действительных* аргументов  $x$  и  $y$ , но только *связывающая вероятности* событий, определяемых случайными величинами.

**W.3.** Если подходить принципиально, то *формула преобразования*  $y = f(x)$  определяет *функциональную связь* между *действительными* аргументами  $x$  и  $y$  *действительных* функций  $V(x)$  и  $W(y)$ , которые, при *выполнении необходимых условий*, могут являться *законами* распределения. Именно *функциональная связь* между аргументами  $x$  и  $y$  определяет и *функциональную связь* между функциями  $V(x)$  и  $W(y)$  (законами распределения).

Учитывая выводы W.1-W.3, можно предложение, подчеркнутое в цитате (стр.3) записать в виде: Если законы распределения случайных величин  $Y$  и  $X$  связаны функциональной зависимостью  $y = f(x)$ , то, зная значение аргумента  $x'$ , можно точно указать значение аргумента  $y' = f(x')$ , для которого вероятность появления значения  $y$  на интервале  $\{y_H \leq y < y'\}$  будет равна вероятности появления значения  $x$  на интервале  $\{x_H \leq x < x'\}$ , где  $\{x_H \leq x' < x_K\}$ ,  $\{y_H = f(x_H) \leq y' < y_K = f(x_K)\}$ .

И второе, следующее из цитаты. В существующей теории понятие *вероятностной* (стохастической) *зависимости* связывают, если говорить о сути, с понятием *ковариации*. Более точно – с *коэффициентом корреляции*: именно он, по принятой версии, и определяет «...все *градации вероятностной зависимости* – от самой сильной» (функциональной) «до самой слабой» («полной независимости»).

В других работах «с места и в карьер»: с самого начала об «условиях независимости», а о смысле понятия, кроме упоминания (а иногда и долгих разговоров) о его важности в теории вероятностей, ничего<sup>2</sup>. Например:

<sup>2</sup>Исключение: работы, написанные до того, как «...удалось построить логически совершенное здание современной теории вероятностей» [1,49]. Только в них пояснения «разбросаны по разным местам»; их, в общем-то, сложно собрать в одно целое, к тому же в них обычно чего-нибудь да не хватает для полноты картины

«Понятие *независимости* двух или нескольких опытов занимает в известном смысле центральное место в теории вероятностей. В самом деле, мы уже видели, что теорию вероятностей с математической точки зрения можно рассматривать как специальное применение общей теории аддитивных функций множеств. Естественно задать вопрос, каким же образом теория вероятностей развилась в большую, обладающую своими собственными методами самостоятельную науку? Для ответа на этот вопрос следует указать на ту специализацию, которую получают в теории вероятностей общие проблемы, касающиеся аддитивных функций множеств. То обстоятельство, что наша аддитивная функция множеств  $P = P(\bullet)$  неотрицательна и удовлетворяет условию  $P(\Omega) = 1$ , не обуславливает еще собой возникновения новых глубоких проблем. Случайные величины (ср. третью главу) с математической точки зрения представляют собой не что иное, как измеримые (относительно  $\mathcal{F}$ ) функции, а их математические ожидания являются абстрактными интегралами Лебега. Эта аналогия впервые полностью разъяснена в работах Фреше. Введение упомянутых понятий не может, следовательно, еще доставить никакого базиса для развития большой оригинальной теории. Исторически независимость испытаний и случайных величин явилась тем математическим понятием, которое придало теории вероятностей своеобразный отпечаток. Классические работы Лапласа, Пуассона, Чебышева, Маркова, Ляпунова, Мизеса и Бернштейна действительно посвящены в основном изучению рядов независимых случайных величин. Если в новейших исследованиях (Марков, Бернштейн и др.) часто отказываются от предположения полной независимости, то оказываются принужденными для получения результатов ввести аналогичные ослабленные предположения (ср. в этой главе §6, о цепях Маркова). Мы приходим, следовательно, к тому, чтобы в понятии независимости видеть, по крайней мере, первый зародыш своеобразной проблематики теории вероятностей ... » [9,17-18].

А далее об условиях, при которых *испытания* или события называются *независимыми*. Если же обратится к случайным величинам [9,84], то там сразу об условиях. Интересные рассуждения, но комментировать их не будем<sup>3</sup>, а проведем анализ того, что в *действительности* определяют *условия независимости*, принятые в существующей теории, и что означает понятие «*полной независимости*» 2-х (и более) случайных величин. Для этого, во-первых, более подробно остановимся на *функциональной зависимости*, о которой разговор шел при рассмотрении *преобразования законов* распределения случайных величин [30]. Во-вторых, разберемся (раздел 2 стр.74), что же *реально* представляет собой понятие *вероятностной (стохастической) зависимости*, о которой много говорится в существующей теории (не только в [13]).

---

<sup>3</sup>Многое сказано до этого [10; 19; 26; 29-31], но: – «продолжение следует ...»

« — Но ведь в природе так не бывает!  
 — Природа тут не причем.  
 Мое уравнение. Что хочу, то и пишу! »  
 Диалог («Физики шутят»)

## 1. Функциональная зависимость

Обратим внимание на некоторые моменты, связанные с функциональной зависимостью системы 2-х (в нашем понимании, определение 5 [29,66]) случайных величин, определяющей преобразование законов распределения случайных величин (раздел 1.3 [30,30]). Об этом не могло быть речи в существующей теории вероятностей: в ней независимость и зависимость случайных величин связана исключительно с выполнением или невыполнением условия  $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$  (1), которое приводит к противоречиям (случайные величины, отвечающие «условиям независимости» могут быть функционально зависимыми, пример 10 [30,31]).

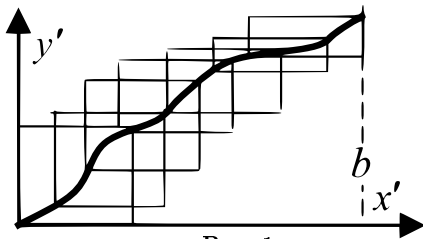


Рис. 1

областей определения образуют прямоугольники, у которых вершины, определяемые парами  $(x_H^m, y_H^m)$  и  $(x_K^m, y_K^m)$ , принадлежат кривой  $y = f(x)$ .

**Пример 1.** На рис.1 изображены: формула преобразования  $y = f(x)$ , семь (счет слева направо) положений случайной величины  $X$  на отрезке  $0 \leq x \leq b$  и соответствующие им положения случайных величин  $Y_m$  ( $m=1,2,\dots,7$ ), полученные преобразованием. Границы областей  $(x_H^m, x_K^m)$  и  $(y_H^m, y_K^m)$  плотности  $p^m(x) = p(x)$  и плотностей  $p^m(y)$  распределений величин  $X$  и  $Y_m$  смещены в точки их пересечения с кривой. Пересечение границ

**п.1. Первая интерпретация.** Пусть в результате преобразования определены вероятностные функции  $p^m(y)$ , которые зависят только от переменной  $y$  (пример 10 [30,31]).

**{А.1.1}** Так как плотность  $p^m(x) = p(x)$  зависит только от переменной  $x$ , а плотность  $p^m(y)$  — только от переменной  $y$ , то в соответствии с принятой теорией величины  $X$  и  $Y_m$  отвечают условию (1), т.е. они независимые и (как следствие) некоррелированные.

Моделируя функции  $p^1(x)$  и  $p^1(y)$  методом Монте-Карло  $N$  раз, получим последовательности точек  $x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1$  и  $y_1^1, y_2^1, \dots, y_N^1$ . По плотностям для этих точек можно определить вероятности  $P^1(x_v^1) = \int_{x_{v-1}^1}^{x_v^1} p(x) dx$  ( $v=1,2,\dots,N$ ) **{1}** и  $P^1(y_w^1) = \int_{y_{w-1}^1}^{y_w^1} p(y) dy$  ( $w=v=1,2,\dots,N$ ) **{1\*}** соответственно. Т.е. имеем вероятностные функции дискретных случайных величин, соответствующие плотностям распределений  $p^j(x) = p(x)$  и  $p^j(y)$ .

Считаем: элементарные события, образующие величины  $X$  и  $Y_j$ , про-

исходят одновременно<sup>4</sup>.

{A.1.2} В соответствии с теорией, развитой в работах [19; 29-31], имеем систему, образованную совмещением случайных величин (определение 5 [29,67]).

Составим из полученных значений координат последовательность пар  $(x_v^1, y_w^1)$  ( $v, w=1,2,...,N$ ) и нанесем точки, соответствующие парам  $(x_v^1, y_w^1)$  на плоскость. Очевидно, что все точки будут находиться внутри 1-го прямоугольника. Повторив операцию для других положений функции  $p(x)$ , получим семь пар  $(x_v^m, y_w^m)$  последовательностей: точки, определяемые парами, будут внутри соответствующих прямоугольников.

Система точек в каждом прямоугольнике определяет *двумерное дискретное* распределение.

{A.1.3} Согласно принятой теории (условие (1) выполнено) они «*полностью независимы*», несмотря на то, что способ образования *двумерных* распределений явно указывает на *функциональную зависимость* случайных величин.

{A.1.4} В соответствии с *новой исходной системой* (вывод W.13 [30,31]; положения {A.13.1}-{A.13.2} [30,32]), является *произведением*  $p^1(x_v^1) = p^1(x_v^1) \cdot p^1(y_w^1)$  ( $v, w=1,2,...,N$ ) {2} *вероятностных* функций  $p(x)$  и  $p^j(y)$  системы величин  $X$  и  $Y_j$ , образованной их *совмещением*.

п.2. *Вторая интерпретация.* Присвоим значения *вероятностной* функции  $p(x)$  на отрезках  $x_H^m \leq x \leq x_K^m$  ( $m=1,2,...,7$ ) точкам кривой  $y = v(x)$ , соответствующих проекциям точек кривой на ось  $X$ .

{A.1.5} В соответствии с *новой исходной системой теории* случайных величин, получим *одномерные* распределения  $p^m(l)$  (где  $l$  – переменные, связанные с отрезками кривой  $y = v(x)$ , ограниченными отрезками проекций кривой  $x_H^m \leq x \leq x_K^m$  на ось  $X$ ) случайных величин  $L_m$  (раздел 3.1 [29,43]), *определенных на кривой*  $y = v(x)$ .

Функции  $\int_L p_L^m(l)dx = p_L^m(x) = p(x)$  и  $\int_L p_L^m(l)dy = p_L^m(y) = p^m(y)$  {3}, которые равны исходным функциям, в этом случае являются проекциями распределений  $p^m(l)$  на оси  $X$  и  $Y$  соответственно. Т.е. имеем распределения случайных величин  $X$  и  $Y_m$ , для которых справедливы положения {A.1.1}- {A.1.2} (о том, что это реально означает – на стр.9-10). Проведя моделирование распределений  $p_L^m(x)$  и  $p_L^m(y)$ , как и в п.1, в каждом прямоугольнике опять получим двумерное дискретное распределение: учитывая равенства  $p_L^m(x) = p(x)$ ,  $p_L^m(y) = p^m(y)$  оно будет подобно распределениям, полученным в п.1, т.е. определяться формулой вида {2}.

{A.2} Рассматривая точки внутри всех прямоугольников в п.1 или в п.2, определенных в *результате моделирования*, как *единую совокупность* точек, получим некоторое *двумерное* распределение, которое «жестко» связано с кривой  $y = f(x)$ .

*Подобные двумерные* распределения чаще всего и исследуются в существующей теории: определяются линии регрессии и коэффициент корреляции, по которому судят о «тесноте» *вероятностной связи* между случайными величинами  $X$  и  $Y$  (об этом в

<sup>4</sup>Это соответствует реальности: в эксперименте данное значение (отклик) параметра  $Y$  появляется только при данном значении (воздействии) параметра  $X$ . Но что это реально означает? Ответ на стр.9-10

примере 2, стр.10). Вот только то, что оно может быть образовано некоторой совокупностью других двумерных распределений (п.1), или распределений, определенных на некоторой кривой<sup>5</sup> (п.2), даже какой-либо мысли не вызывает.

**п.3. Третья интерпретация.** При значении  $w = v = 1$  соединим точки, определяемые парами  $(x_1^1, y_1^1), (x_1^2, y_1^2), \dots, (x_1^7, y_1^7)$  в порядке *возрастания* значений координат  $x_1^m$ , отрезками прямых линий, а точку с минимальным значением координаты  $x$  с началом координат. В результате получим некоторую ломаную линию. Последовательно изменяя значение  $w = v = 2, 3, \dots, N$ , получим  $N$  ломаных линий, отличающихся друг от друга, которые, вообще говоря, будут пересекаться друг с другом. Т.е. получаем «нечто» напоминающее то, что в теории вероятностей называют *случайным процессом*.

С точки зрения теории, развитой в статьях [19; 29-31], в п.1 имеем задачу, определяемой *функциональностью зависимости закона* распределения величин  $\Psi_m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) от *условий* проведения эксперимента с величиной  $\Phi$ , а в п.2 – *закон одномерного* распределения, заданного на *плоской кривой*. Задачи разные, но результаты моделирования *очень похожи* (Это совсем не так, стр.9-10).

Интерпретация в п.3 может быть применена как к результатам моделирования в п.1, так и в п.2. Легко видеть, что семейства ломаных, полученных по результатам моделирования в пунктах 1-2, с учетом равенств  $\{3\}$ , будут подобны.

**Замечание 1.** При увеличении числа  $m=1, 2, \dots, M$  положений исходной функции, ломаные будут все больше походить на кривые: в пределе, при неограниченном увеличении числа  $M$  получим  $N$  непрерывных кривых. Такое семейство иногда приводится в работах, например, рис.81-82 [12,424,425]; рис.15.1.2, 15.1.5, 15.3.1-3 [13,372-378]: их называют реализациями случайных процессов (или случайных функций).

Приведем, для примера, случайный процесс [1,298]  $p\{t, x_n\} = \{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!\} \{*\}$ , где  $x_{n+1} = x_n + \Delta$  ( $x_0 = 0$ ) (в существующей теории<sup>6</sup>  $\Delta = 1$ ,  $x_n = n$ ),  $\lambda$  – некоторое положительное число ( $\lambda = -\ln p$  [1,296]),  $n=0, 1, 2, \dots$  – число появлений события за промежуток времени от 0 до  $t$ ). Он весьма схож с *вероятностной* функцией распределения Пуассона  $p(x_n) = \lambda_0^n e^{-\lambda_0} / n!$  ( $\lambda_0 = n p$ )  $\{**\}$  и тоже носит его имя<sup>7</sup>. В существующей теории доказывается, что «... число событий в каком-либо промежутке длины  $t$  распределено по закону Пуассона ... с параметром (математическим ожиданием), равным  $\lambda t$ » [12,428]. Считать, что параметр  $t$  является временем не обязательно [1,300]. Формула  $\{*\}$  представима в виде<sup>8</sup>  $p(t, x_0) = e^{-\lambda t}$ ,  $p(t, x_1) = (\lambda t)e^{-\lambda t}$ ,  $p(t, x_2) = (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} / 2!$ , ...,  $p(t, x_n) = (\lambda t)^n e^{-\lambda t} / n!$ , ...  $\{***\}$ . Имеем семейство  $n+1$  *непрерывных* кривых заданных на декартовой плоскости  $T0X$ , каждая из которых расположена в плоскости, перпендикулярной плоскости  $T0X$  и содержащую прямую линию  $t = x_n$  соответственно.

Рассмотрим фиксированные моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K$ . На прямых линиях  $x = t_k$  получим множество точек, определяемых парами  $\{t_k, p(t_k, n)\}$ , в которых вероятность определяется значениями  $p\{t_k, x_0\} = e^{-\lambda t_k}$ ,  $p\{t_k, x_1\} = (\lambda t_k)e^{-\lambda t_k}$ ,

<sup>5</sup>В принятой теории их не существует: по крайней мере, нам они «не попались»

<sup>6</sup>Используется принятое значение. Мы просто подчеркнули, что  $\Delta$  – произвольное действительное число: более правильно представление распределения (формулы  $\{1\}$ - $\{3\}$ , вывод W.18 [29,52]) на ограниченном отрезке  $0 \leq x \leq b$ , тогда  $\Delta = b/(n+1)$

<sup>7</sup>Поведение функций  $\{**\}$  в зависимости от отношения  $\lambda_0 / n$  дано в [1,100]. Напомним: закон распределения определяется [29,46-48] суммой  $P\{t_k, x_n\} = \sum_{v=0}^n p\{t_k, x_v\}$

<sup>8</sup>В работах такое представление процесса Пуассона нам что-то «не повстречалось»



$p\{t_k, x_2\} = \{(\lambda t_k)^2 / 2!\} e^{-\lambda t_k}, \dots, p\{t_k, x_n\} = \{(\lambda t_k)^n / n!\} e^{-\lambda t_k}, \dots$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). При каждом значении  $t_k$  (сечение процесса) реально получаем распределение Пуассона с параметром  $\lambda_0^k = \lambda t_k$ . Из анализа следует:

**{А.3.1}** Для любого сечения процесса  $x = t_k$  сумма всех вероятностей равна единице  $\sum_{n=0}^{\infty} p\{t_k, n\} = 1$ . Это означает: 1) *распределение вероятностей имеет место только на прямых линиях*  $n = t_k$ ; 2) несмотря на то, что для каждого значения  $n$  вероятность  $p\{t, n\} = \{(\lambda t)^n / n!\} e^{-\lambda t}$  *зависит от времени  $t$ , распределения вероятностей по оси  $t$  не существует – это зависимость закона распределения, определенного на линиях  $n = t_k$ , от времени.*

1. *Интересно, не так ли?* В принятой теории, хотя и доказывается, что «... число событий в каком-либо промежутке длины  $t$  распределено по закону Пуассона ...» [12,428], но об этих свойствах процесса не говорится: почему, мы не знаем, но они следуют непосредственно из формулы  $\{*\}$ . 2. Отметим, что п.3 в примере 1 появился, когда эта часть была уже почти написана: после построения случайного процесса на основе функциональной зависимости распределений вероятностей (часть VII работы) от условия проведения испытания. А пример в замечании 1 и положение {А.3} – только после детального рассмотрения построения некоторого вида процессов. 3. В части VII показано: трактовка функций  $\{***\}$  отличается от принятого понимания.

Таким образом, имеем 3-ю задачу, которая, при определенных условиях, может быть подобной 2-м предыдущим. Вообще-то, анализ построения случайных процессов в наших планах не предусматривался: решающий фактор, который «вынудил» провести его<sup>9</sup> – это задача рассмотренная в разделах 1.4.1-1.4.3 (стр.54,58,66), в которых поговорим об этом подробно.

Возможные интерпретации совокупности точек приведены потому, что необходимо различать эти задачи<sup>10</sup> при обработке экспериментальных данных, ибо они отличаются. Как следствие этого, возможны также отличия: в решении вероятностных задач, постановке экспериментов, необходимых для получения информации, и методах обработки экспериментальных данных.

Однако! При проведении экспериментов возможность появления совокупности точек полученных статистическим моделированием в п.п.1-2 (пример 1 стр.6), следует только из анализа, проведенного на основе положений существующей теории вероятностей.

<sup>9</sup>Результаты исследований изложены в части VII работы

<sup>10</sup>Когда из теории или на практике известно, что распределение задано на кривой, то его отличие от первой интерпретации очевидно (вообще говоря, от 3-й тоже): в принятой теории этого понятия просто нет

{А.3.2} Все дело в том, что из *анализа на основе теории вероятностей*, развитой в статьях [19; 29-31] настоящей работы, следует, что ситуации, рассмотренные в пунктах 1-2 примера 1 (а также интерпретация в п.3, которая основана на 2-х первых пунктах), *возникнуть в принципе не могут*.

Причина I. Из выводов W.1-W.3 (стр.4) (точнее – из работы [30]) следует:

*Функциональная зависимость законов распределения означает, что появление значения (воздействие)  $x'$  ( $x_H \leq x' \leq x_K$ ) параметра  $X$  однозначно определяет одновременное появление только конкретного значения (отклик)  $y' = f(x')$  (где  $y_H = f(x_H)$ ,  $y_K = f(x_K)$ ) параметра  $Y$ .*

Отсюда очевидно: *разыгрывая значения  $x_v$ , следует определять соответствующее ему значения  $y_v = f(x_v)$  ( $v=1,2,...,N$ ) (другого значения просто не может быть, выводы W.11-W.12 [30,28]), определяемое функциональной зависимостью, а не разыгрывать его.* Соответственно, по точкам  $y_v$  на оси  $Y$  определяются *закон* распределения случайной величины  $Y$ , а *система* точек  $\{x_v, y_v\}$  на плоскости принадлежит *функции* (формуле преобразования) *связи*  $y = f(x)$  между параметрами  $X$  и  $Y$ .

Причина II. *Задание случайной величины  $L$  на кривой  $y = v(x)$  означает, что ее вероятностная функция  $p_L(l)$  (где  $l$  – переменная, связанная с отрезком кривой  $y = f(x)$ , который ограничен отрезком  $x_H \leq x \leq x_K$  проекции кривой на ось  $X$ ) также определена на этой кривой.*

С учетом этого, *моделируя значения  $x_v$  по проекции  $p_L(x)$  распределения  $p_L(l)$  на ось  $X$ , следует определять значения  $y_v$  по формуле  $y_v = v(x_v)$  (как и выше другого значения просто не может быть), а не разыгрывать их в соответствии с проекцией распределения  $p_L(l)$  на ось  $Y$ .*

При дальнейшем анализе показано: ситуации, рассмотренные в пунктах 1-2 примера 1, возникают *в экспериментах как следствие неизбежной погрешностей измерений* параметров  $X$  и  $Y$ .

## 1.1. Замечания к теории корреляции

Сначала о том, что определяется в существующей теории, в которой нет ни *связи функциональной зависимости распределений с преобразованием*, ни *зависимости распределений от условий проведения эксперимента*, ни *одномерных распределений на кривых линиях*.

Пример 2. п.1. Для начала изобразим рисунки, подобные приводимым в

некоторых работах потому, что: «На практике, перед тем как исследовать корреляцию случайных величин, всегда полезно построить наблюдаемые пары значений на графике для первого качественного суждения о типе корреляции» [13,181].

На рис.2 изображены точки, совокупность которых отвечает определенному типу корреляции: 1. Явно выраженная положительная корреляция (рис.2А) и еще более ярко выраженная – на рис.2В. 2. Сравнительно слабая (рис.2С) корреляция. 3. Слабая корреляция (практически – ее отсутствие) между случайными величинами (рис.2D). 4. Иногда для иллюстрации отсутствия корреляционной связи приводится расположение точек, изображенное на рис.2Е.

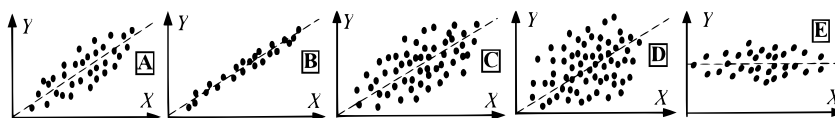


Рис. 2

Дополнительно изображены штриховые прямые линии (в работах их почему-то не приводят, хотя они могут быть

получены), чтобы показать: 1. Точки можно связать с прямой линией. Это видно, по крайней мере, из рис.2А-2С, 2Е. 2. Экспериментальные точки, с одной стороны, определяют связь функциональной зависимости с преобразованием распределений (рис.2А-2D). Теоретически это показано в разделе 1 [30,6]. С другой стороны, возможное направление одной из главных осей (рис.2А-2С, 2D-2Е). Направление осей определяется значением ковариации, что показано в примерах 4-5 [31,21,25]. 3. При одной и той же линейной связи между величинами можно получить семейство точек, которые, согласно существующей теории, будут характеризовать разные типы корреляции (рис.2А-2D).

{А.4} В соответствии с новой исходной системой теории случайных величин [29-31], расположение экспериментальных точек на плоскости зависит от кривой (угла наклона прямой) линии, распределения величины  $X$  и погрешности измерений параметров.

п.2. Прежде всего, отметим, что задачи подобного рода решаются в разделе математической статистики, который называется теорией корреляции (о чем говорилось ранее [29,36-38]). Две основные задачи, которые решаются в этом разделе [1,356]: 1. Оценка зависимости. По результатам «... последовательности наблюдений сразу двух случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . ... Выяснить наличие функциональной или корреляционной связи между  $\xi$  и  $\eta$ ». 2. Управление процессами. Определить «нарушение нормального течения ...» процесса и своевременно «... оказать управляющее воздействие с целью восстановления нормального хода процесса».

О понимании вероятностной связи в математической статистике: «Стохастическая связь между двумя случайными величинами появляется обычно тогда, когда имеются общие случайные факторы, влияющие как на одну, так и на другую величину наряду с другими неодинаковыми для обеих величин случайными факторами» [12,313]. Мы привели его только потому, что в нем вообще никаких упоминаний о функциональной связи, в отличие от [13]: в большинстве работ по теории вероятностей об этом вообще ничего не говорится. Далее дается пример стохастической связи<sup>11</sup>: функции от случайных величин  $X = f(Z, V)$  и  $Y = g(Z, U)$ , где  $Z$  – общая случайная величина (фактор),  $V$  и  $U$  – случайные величины (факторы), влияющие только на величину  $X$  или  $Y$  соответственно. Подобные пояснения даются и в ряде других работ по математической статистике.

<sup>11</sup>В работе [12,313-314] приведен более сложный пример

Прочтение некоторого числа работ (их, вообще-то, немного) показало, что в математической статистике в основном рассматриваются задачи:

{А.5.} 1. *Влияние* случайной величины  $X$  на величину  $Y$ . 2. *Влияние одного фактора только на величину  $X$  и одного – только на величину  $Y$*  (чаще всего – погрешности измерения). 3. *Влияние нескольких случайных величин  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) на величину  $Y$ .*

Учитывая анализ, данный в примере 1 (стр.6), а также положения {А.4} и {А.5}, совокупности точек, изображенных на рисунке, можно трактовать: рис.2А – как *линейную зависимость* распределения величины  $Y$  от *положения* распределения величины  $X$ ; рис.2В – *влияние погрешности* измерений на *положение* прямой, а на рис.2С, 2D – как *линейную зависимость*, соответствующую рис.2А, но «сдобренную» *погрешностью измерений, разной для рисунков 2С и 2D* (примеры 4-5, стр.17,24). Что касается совокупности точек на рис.2Е, то она может (но не обязательно) характеризовать (раздел 2 стр.74) *чисто вероятностную зависимость* распределения случайной величины  $Y$  от распределения случайной величины  $X$ .

п.3. Теперь о методах обработки экспериментальных данных, которые предлагаются в существующей теории.

1. Приведем цитаты из работы<sup>12</sup> [12] с нашими пояснениями: «Основное применение, которое находит теория корреляции, относится к решению задачи обоснованного прогноза, т.е. указания пределов, в которых с наперед заданной надежностью будет содержаться интересующая нас величина, если другие связанные с ней величины получают определенные значения» [12,314]. Сначала вычисляются *условные* распределения [12,159] (а также пример 15 [29,62]) *двумерного* распределения:  $p(y|x)$  – величины  $Y$  при данном значении  $x$  и  $p(x|y)$  – величины  $X$  при данном  $y$ . Далее следует: «Наиболее важные особенности стохастической связи находят выражения в тех изменениях, какие испытывает центр условного распределения одной величины при изменении другой. Если рассматриваются две величины  $X$  и  $Y$ , то мы одновременно будем иметь две линии регрессии  $\dots: M(Y|x) = \bar{y}(x)$  – регрессия  $Y$  по  $X$  и  $M(X|y) = \bar{x}(y)$  – регрессия  $X$  по  $Y$ . Эти «линии» представляют геометрическое место центров условных распределений, соответствующих заданным значениям одной из переменных» [12,314-315]. Затем вычисляются *условные* дисперсии  $D(Y|x)$  и  $D(X|y)$ , «средневзвешенное значение» условной дисперсии  $\bar{D}(Y|x)$  (или  $\bar{D}(X|y)$ ), которое «... тем меньше, чем меньше в среднем условные дисперсии, т.е. тем более точна и определена зависимость  $Y$  по  $x$ , чем ближе эта зависимость к строго функциональной  $Y = \bar{y}(x)$  и чем точнее, следовательно, прогноз величины  $Y$  при данном  $x$ » [12,316].

Далее вычисляется *коэффициент корреляции*  $r_{x,y}$  (в [12] другое обозначение « $\rho$ ») *двумерного* распределения и поясняется, как построить линии *регрессии* в случае, когда они близки к прямой линии. На основе проведенного построения утверждается: «... чем ближе  $\rho^2$  к единице (т.е.  $1 - \rho^2$  – к нулю), тем плотнее концентрируются массы распределения около каждой из прямых. В предельных случаях при  $\rho = \pm 1$  обе прямые сливаются в одну ...» [12, 321]. «В случае нелинейной связи представляют интерес показатели, характеризующие концентрацию распределения (и, следовательно, тесноту связи) около кривых  $\bar{y}(x)$  и  $\bar{x}(y)$  регрессии. Таким показателем является «*корреляционное отношение*»  $\eta_{Y|x}^2$  и  $\eta_{X|y}^2$ , введенное К. Пирсоном» [12,322]. Мы их не рассматриваем, ибо, как будет показано далее, в этом нет смысла.

2. Большое внимания в работах уделяется факторам, *влияющим только на случайную величину  $X$  или/и только на величину  $Y$* : чаще всего, это

<sup>12</sup>В этой работе, по нашему мнению, дается наиболее простое и понятное объяснение теории корреляции: по крайней мере, из цитируемых работ, хотя и в других просмотренных работах лучшего тоже не нашлось

неизбежные погрешности измерения величин  $X$  и  $Y$ . Обычно случайным полагают параметр  $Y$ , а  $X$  – неслучайным: в предположении, что погрешность измерения  $Y$ , много больше погрешности измерения  $X$ . В этих задачах определяется «жесткая» *функциональная зависимость* между 2-мя физическими параметрами *в смысле*, следующем из понимания, данного в цитате из [13] (стр.3). В большей части просмотренных работ (их не много) по математической статистике *именно эту* «жесткую» *функциональную зависимость* называют *линией регрессии*. Решение этой задачи подробно дается в работах; если приводятся рисунки, то они, по характеру разброса точек относительно зависимости  $y = f(x)$  подобны рис.2В (например, рис.14.8.1-5 [13, 352-354]). Разговор о решении этой задачи будет продолжен в разделе 1.3 (стр.22). Отметим, что эта задача, в принципе, не имеет отношения к корреляционному анализу: по крайней мере, в понимании, изложенном в п.3.1 данного примера. Хотя в некоторых работах и говорится, что после определения «жесткой» *функциональной зависимости* необходимо определить еще и «тесноту стохастической связи» между величинами, но об этом – при рассмотрении *вероятностной зависимости* случайных величин (раздел 2 стр.74).

Иногда эта задача дается в другой интерпретации [12,333-335]. Рассматривается параметр  $Y$ , зависящий от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_K$ , которые полагаются *неслучайными* величинами, принимающими в каждом испытании данной серии определенные значения. А параметр  $Y$  – случайной величиной  $Y$  с нормальным распределением и постоянной дисперсией  $\sigma^2$ , не зависящей от переменных  $x_j$ . По результатам серии «независимых» испытаний получают  $N$  систем значений  $y_n; x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{K,n}$  ( $n=1,2,\dots,N$ ), по которым, методами приближения функций, определяются неизвестные коэффициенты заданной функции. Т.е. рассматривается некоторый параметр  $Y$ , зависящий от неслучайных аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , который полагается случайной величиной, зависящий от некоторых случайных переменных, которые не связаны с переменными  $x_k$ . О постановке этой задачи в работе [12] поговорим подробнее в разделе 1.4 (стр.53). Вообще говоря, она связана с задачей 3), отмеченной в п.2 (положение {А.5} стр.12), однако, после общих рассуждений, решение задачи чаще всего дается для случаев, которые связаны с погрешностями измерений.

{А.6.1} При решении задач, для построения *линий регрессии* обычно используется *метод наименьших квадратов*, применению которого также уделяется много внимания.

Все выглядит, вроде бы достаточно убедительно, но *правильно оно только* с точки зрения существующей теории – что-либо другое на ее основе предложить сложно (она не соответствует реальности [19,17-26; 29,6-39]).

*Во-первых*, при разработке *новой исходной системы теории* случайных величин показано:

{А.6.2} В принятой теории случайные величины  $X$  и  $Y$  *считаются исходными* (что следует из определений ‘D,D.1’ [29,16-17] многомерных величин), однако они *вычисляются только по двумерной* величине, *но ни в коем случае ее не определяют* (свойства двумерной величины и следствия 1-3 из них [29,62-64]): т.е. *исходными они просто быть не могут*.

*Во-вторых*, в разделе 3.2.1 [29,54] введены *дополнительные одномерные вероятностные функции (5-5\*)* [29,56,57], которые определяют *свойства двумерной* (в том числе непрерывной, замечание 23 [29,62]) величины и их *связь со свойствами двумерного опыта*.

{A.6.3} Опять же: они *не определяются* по распределениям случайных величин  $X$  и  $Y$ , а *только по распределению двумерной* величины.

В существующей теории они трактуются как *условные* распределения, но это *всего лишь* функции (5-5\*), но *только нормированные* (сноска 68 [29,59]) *на единицу*.

В-третьих, из анализа, данного в разделе 1.3 [30,29], следует (вывод W.17 [30,31]):

{A.6.4.} 1. *Функциональная зависимость* существует *только для* случайных величин, *образующих систему*. 2. *Одномерные* величины  $X$  и  $Y$ , *образованные по распределению двумерной* (или  $n$ -мерной) случайной величины *не могут быть функционально зависимыми*.

И последнее:

{A.6.5} Линии *регрессии*  $M(Y|x) = \bar{y}(x)$  и  $M(X|y) = \bar{x}(y)$  *сольются в одну линию* только тогда, когда *двумерное* распределение *обратится в одномерное*.

1. Это принципиально невозможно (п.3 примера 3 стр.15). 2. Если *двумерное* распределение определяется *системой*, образованной *совмещением* случайных величин  $X$  и  $Y$ , то линии *регрессии* будут определяться *прямыми взаимно перпендикулярными* линиями  $\bar{y}(x) = M_X$  и  $\bar{x}(y) = M_Y$  (где  $M_X$  и  $M_Y$  – математические ожидания величин), перпендикулярными осям  $X$  и  $Y$  соответственно.

Таким образом, рассуждения, изложенные выше, вызывают сомнения в *применимости линий регрессии* для характеристики какой-либо связи между случайными величинами (мы вернемся к этому несколько позже).

Нас же интересует, в первую очередь, «жесткая» *функциональная зависимость* (выводы W.1-W.3 стр.4) между случайными величинами.

Анализ подтверждает утверждение, высказанное в замечании к положению {A.2} (стр.7). Из данного положения и алгоритма, изложенного в п.3.1 примера 2 (стр.12) следует: существующий подход, по факту, выявляет некоторые *свойства* распределения *двумерной* случайной величины (они определяются свойствами, отмеченными при рассмотрении ее построения, которые следуют свойств двумерного опыта, раздел 3.2 [29,53])). Покажем это более наглядно.

**Пример 3.** п.1. В примере 16 [30,50] рассмотрены две *дискретные двумерные вероятностные* функции: *произведения системы*, образованной *совмещением одномерных* случайных величин (табл.4); *двумерной случайной величины* (табл.5).

▲	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
├	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
├	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
├	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
├	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
└					

Табл.5

ские ожидания равны  $M(X) = M(Y) = 2, 5$ .

Так как нас интересует *двумерная* случайная величина, то приведем таблицу только ее распределения  $p(x_k, y_n)$  ( $x_k, y_n = 0, 1, 2, 3, 4$ ): изображение осей координат условное, ибо они просто дают направление. *Вероятностные* функции величин  $X$  и  $Y$  одинаковы и определяются значениями  $p(x_k) = p(y_n) = 0.10; 0.15; 0.20; 0.25; 0.30$ , а их математические

Для вычисления математических ожиданий вероятностных функций (5-5\*) [29,55,57], определяемых значениями вероятностей строки таблицы с данным номером  $n$  (или столбца с номером  $k$ ) необходимо: вычислить суммы  $\sum_{k=0}^4 x_k \cdot p(x_k, y_n)$  при значении  $n$  (или  $\sum_{n=0}^4 y_n \cdot p(x_k, y_n)$  при значении  $k$ ) и разделить их на соответствующее значение вероятностей  $p(x_n) = \sum_{k=0}^4 p(x_k, y_n)$  (или  $p(y_k) = \sum_{n=0}^4 p(x_k, y_n)$ ). В результате получим значения координат математических ожиданий<sup>13</sup>:  $\bar{y}(x_k) = 3; 8/3; 2, 5; 2, 4; 7/3$  и  $\bar{x}(y_k) = 3; 8/3; 2, 5; 2, 4; 7/3$  соответственно. Их и называют линиями регрессии  $M(Y|x_k)$ ,  $M(X|y_n)$ . Значения уменьшаются при увеличении координат и не лежат на прямой линии (легко видно по приращениям). Отметим: изменяя значения  $p(x_k, y_n)$  при условии  $\sum_{k=0}^4 \sum_{n=0}^4 p(x_k, y_n) = 1$ , можно получить разнообразные линии регрессии – от прямых линий до некоторых зигзагообразных ломаных: описать их непрерывной функцией вряд ли возможно. Разве что разложением в какой-то бесконечный ряд .... А вот пояснить, что они характеризуют, по крайней мере, нашего воображения для этого не хватает.

**П.2. Однако.** Математические ожидания вероятностных функций (5-5\*) [29,55,57], определяемых строками или столбцами таблицы, вычислены по аналогии с определением центра тяжести системы материальных точек в механике, *без опоры* на понятие *условного* распределения: *в нем нет никакой необходимости*. В механике можно объединять в группы разные материальные точки системы, соблюдая условия: 1) в разные группы не должны входить одни и те же точки; 2) сумма точек по всем группам, на которые разбита система, равна числу материальных точек системы. Определив центры тяжести групп, можно по ним определить центр тяжести системы. Аналогично можно определять *осевые и центробежные* моменты инерции системы. Однако в механике этот подход применяется для вычисления центра тяжести, *осевых и центробежных* моментов инерции твердых тел, имеющих сложную геометрическую форму, а не для системы материальных точек. В любом случае, характеристики отдельных групп материальных точек – это некоторые промежуточные результаты<sup>14</sup> (вспомогательные характеристики), которые в определенных случаях существенно упрощают вычисление характеристик системы в целом.

Таким же способом можно вычислять характеристики (не *только математические* ожидания, но также *дисперсии и ковариации*) как *дискретных*, так и *непрерывных* случайных величин. Например, вычисляя математические ожидания (или дисперсии) для каждой строки (или столбца) двумерной таблицы. Понятно, что его применение, как и в механике, *имеет смысл* для непрерывных случайных величин *при сложной геометрии* области определения распределения *двумерных* (многомерных) случайных величин. Очевидно, что, как и в механике, характеристики групп носят вспомогательный характер.

**П.3.** Ни в примере 16 [30,50], ни в пунктах 1-2 этого примера, мы даже не «заикались» *о какой-то функциональной зависимости*, ибо в приведенных примерах *ее не существует*. Есть только связь характеристик системы с промежуточными результатами (вспомогательными характеристиками), которые получены разбиением системы на какие-то группы (сложные события). В частности показано: *одномерные* случайные величины  $X$  и  $Y$ , образованные по распределению *двумерной* величины, *не могут быть функционально зависимыми*. *Что же тогда определяют линии регрессии? К чему приближаются зависимости в пределе?* Вопросы не праздные, ибо доказательство того, что *коэффициент корреляции* определяется отрезком  $(-1 \leq r_{x,y} \leq 1)$ , основано на равенстве  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K(X, Y)$ , но последнего «в природе» не существует (разделы 2.1, 2.2 [31,16-17]), а связь ковариации с дисперсиями определяется другими

<sup>13</sup> Делением значений  $p(x_k, y_n)$  строки с номером  $n$  (или столбца с номером  $k$ ) на значение  $p(x_n)$  (или  $p(y_k)$ ) получим так называемые «условные распределения», по которым определяются «линии регрессии» в принятой теории вероятностей

<sup>14</sup> В принципе, в механике группы точек и их характеристики могут быть использованы для упрощения описания движения системы

отношениями (формулы (А), (В) и (С) [31,20]), связанными с *углом поворота системы координат*. На их основе можно показать: *минимальное или максимальное значения коэффициента корреляции  $r_{x,y} = K_{x,y} / (\sigma_X \cdot \sigma_Y)$  достигаются при минимальном или максимальном значении ковариации [31,21]:* учитывая формулы (5-5\*) [29,55,57], получим:  $r_{x,y} = \pm[D(X) - D(Y)] / [D(X) + D(Y)]$ .

Отсюда следует:

**{А.7.1}** Значение *коэффициента корреляции* определено *интервалом  $-1 < r_{x,y} < 1$* . Значение  $\pm 1$  возможно *только при равенстве одной из дисперсий нулю*, т.е. при *одномерном распределении*: для него *ковариация* (и, конечно же, *коэффициент корреляции*) не существует.

Анализ, данный в примере 3 (стр.14), подтверждает все сказанное перед примером и показывает:

**{А.7.2}** В существующей теории линии регрессии (п.3.1 примера 2 стр.12)  $M(Y|x_j)$  и  $M(X|y_k)$ , согласно принятому пониманию, определяют «нечто», которое какому-либо «внятному пояснению не поддается».

Из анализа, проведенного в примерах 1-3, очевидно:

**{А.7.3}** Условия «независимости», принятые в существующей теории, определяют *отличие* распределения *произведения вероятностных функций системы*, образованной *совмещением* случайных величин («полная независимость и некоррелированность»), от распределения *двумерной* случайной величины («зависимость и коррелированность»).

В существующей теории есть еще величины «некоррелированные, но зависимые». Например: если  $Y=X^2$ , а распределение  $X$  симметрично относительно начала  $x_H$  координаты  $X$ , то величины  $X$  и  $Y$  «некоррелированные» [12,170], ибо в силу симметрии ковариация  $K(XY = X^3) = 0$ , но они «зависимы», ибо сомножители  $XX=X^2$  и  $XXX=X^3$  одинаковы [12,169].

Последнее утверждение не поясняется, но, *по сути*, оно *неверно* и связано с *основным противоречием* существующей теории<sup>15</sup>: *теория случайных величин и теория событий – это две разные теории [29,6-39]*. Операции со случайными величинами определяются известными *операциями с действительными функциями* – применение *операций с действительными числами* к событиям *абсолютно неприемлемо*. Существующие понятия в кавычках, ибо к *реальной зависимости (независимости)*, как и к *связи между величинами* («коррелированности»), они *отношения не имеют*. С точки зрения теории, развитой в настоящей работе, это пояснение единственное. Из существующей теории оно, конечно же, не следует.

На основе анализа, данного в разделе, можно утверждать о несостоятельности теории корреляции, опирающейся на существующее понима-

<sup>15</sup>Операции со случайными величинами определяются операциями (в частности, арифметическими) с действительными функциями, что категорически запрещено в теории событий – проводить операции с событиями, как с действительными числами, (выводы W.1-W.2 [29,15,16]). Оно определяет, например, то, что в записи моментов  $\nu_k = M(X^k)$  (раздел 1.2 [31,4]) выражение  $X^k$  считается «операцией возведения в степень случайной величины  $X$ »



ние ковариации, которая трактуется как «... характеристика системы, описывающая, помимо рассеивания величин, еще и связь между ними» [13,177].

## 1.2. Построение функциональной зависимости двух случайных величин: предварительные рассуждения

Теперь рассмотрим подход к построению *функциональной зависимости* по результатам *экспериментальных* исследований на основе теории, развитой в работах [10; 19; 29-31].

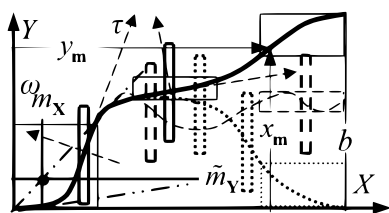


Рис. 3

параметра  $Y$ . В результате получаем на плоскости точки, определяемые парами  $(x_m, y_m)$ , которые аппроксимируем некоторой кривой. При увеличении числа точек приближаемся к «истинной» зависимости: если, конечно же, кривая правильно отражает закон зависимости  $y = f(x)$ . Красивая «картинка», но этому «идеалу» не дано осуществиться. Мешает «Ее Величество – Случайность»<sup>18</sup>. Случайны параметры  $X$  и  $Y$ , а также значения измерений параметров.

**Пример 4.** Пусть требуется определить *функциональную зависимость*  $y = f(x)$  физического параметра  $Y$  от параметра  $X$  на основе *экспериментов*. На рис.3, изображены для примера три зависимости: сплошная, штриховая и пунктирная<sup>16</sup> кривые. Теоретически все выглядит просто: задав значения<sup>17</sup>  $x_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) параметра  $X$  на отрезке  $a \leq x \leq b$ , определяем отклик (реакцию, значение)  $y_m = f(x_m)$  па-

**п.1.** Если *известны законы* распределения  $P(a < x)$  ( $a \leq x < b$ ) и  $P(c < y)$  ( $c \leq y < d$ ) *непрерывных* случайных величин  $X$  и  $Y$ , то для них можно определить некоторую *функциональную зависимость*  $y = f(x)$  на основе (примеры 1 и 1.а [30,6-7], формулы (1-2) и замечания 3 [30,9], выводы W.11-W.12 [30,28]) *преобразования одномерных* величин. Вычисляем вероятности  $P(a < x_m)$  при данном значении аргумента ( $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_M < b$ ), а из равенства  $P(c < y_m) = P(a < x_m)$  – соответствующие им значения  $y_m$ . Точки  $(x_m, y_m)$  пересечения прямых линий  $x = y_m$ ,  $y = x_m$  (сплошные тонкие стрелки) и будут принадлежать искомой зависимости<sup>19</sup>. В редких случаях задача может быть решена аналитически: в основном – приближенно, численными методами с применением методов приближения функций. Для *дискретных* случайных величин это возможно только в случае равенства  $p(x_m) = p(y_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) значений *вероятностных* функций (пример 1.а. [30,7]). Имеем «почти идеальную картинку», рассмотренную в начале примера.

**п.2.** Положим: на отрезке  $l_X = x_K - x_H$  случайным является только параметр  $X$  с *известной*<sup>20</sup> плотностью  $p_X(x)$  распределения. *Неизвестна зависимость*  $y = f(x)$

<sup>16</sup> До разветвления пунктирная и штриховая кривые, сливаются со сплошной кривой

<sup>17</sup> Здесь и до конца статьи различия обозначений начальных и центральных координат не будет: применение центральных координат будет отмечаться в тексте

<sup>18</sup> Правда, она не помешала великим умам прошедших веков открывать законы, при-  
сущие тем или иным явлениям природы

<sup>19</sup> С точностью, определяемой погрешностью расчетов и погрешностью аппроксима-  
ции (при ее применении)

<sup>20</sup> Если она неизвестна, то ее следует определить, по возможности лучше отдельно

и, как следствие, распределение параметра  $Y$ . Зависимость определяется на отрезке  $0 \leq x \leq b$ ; его длина  $b$  превышает значение  $b > l_X$ .

1. Для лучшего понимания последующего изложения, при теоретическом анализе будем считать функцию  $y = f(x)$  известной: например, она имеет вид одной из кривых, изображенных на рис.3. Границы *областей* определения распределения величин  $X$  и  $Y$  при различном положении области определения распределения  $p_X(x)$ , условно<sup>21</sup> обозначены прямоугольниками с тонкими сплошными, штриховыми и пунктирными сторонами для соответствующих кривых. Две противоположные вершины каждого прямоугольника принадлежат кривой. Средствами существующей теории случайных величин в каждом из прямоугольников зависимость не определяется (раздел 1.3 [30,29]).

Влияние изменения расположения распределения параметра  $X$  (рис.1, 3 стр.6, 17) на распределение параметра  $Y$  в принятой теории не рассматриваются, хотя в разных ее приложениях они встречаются.

Во-первых, в существующей теории отличия многомерных случайных величин от систем случайных величин «днем с огнем не сыщешь», тем более существовании 2-х разных систем, – все «в одной куче» (раздел 1.2 [29,16]). Во-вторых, в ней нет понятия *преобразования законов* распределения случайных величин: *формулу преобразования*  $y = f(x)$  – *действительную* функцию *действительного* аргумента, которая никоим образом не зависит (выводы W.1-W.5 [30,10-11]) ни от случайной величины  $X$ , ни от случайной величины  $Y$  – почему-то называли [30,3] «функцией  $Y = U(X)$  от случайной величины  $X$ ». В-третьих, не существует понятия *зависимости* распределения от *условий* проведения *испытания*. В-четвертых, подавляющее большинство *законов* распределения, применяемых в теории, имеют неограниченную область определения: по существу, *просто полагают*, что он определен на бесконечном отрезке.

2. Отметим, что *экспериментальное* определение *функциональной зависимости* (при любом законе распределения) *ограничено* областью, в которой сосредоточена *основная «масса» вероятностей*<sup>22</sup>. Приведем примеры. 1. Распределение Пуассона. Данные при значении  $\lambda_0 = 3$  в точках  $n=0,1,\dots,12$  взяты из работы [12,107] (таблица 3.1.8): 0,0498; 0,1494; 0,2240; 0,2240; 0,1680; 0,1008; 0,0504; 0,0216; 0,0081; 0,0027; 0,0008; 0,0002; 0,0001. Сумма вероятностей, определенная по 9 точкам, равна  $P_1 = 0,996$ . Это означает, что при достаточно большом числе  $N$  *экспериментов* приблизительно 99,6% результатов будут находиться в точках  $n=0,1,\dots,8$  и только 0,4% – придется на бесконечное число  $9 \leq n < \infty$  точек. 2. При *нормальном законе* распределения 99,73% результатов будут находиться в точках на интервале, ограниченном значениями  $M(X) \pm 3\sigma$  и только 0,27% – вне этого интервала; по половине слева и справа от интервала.

При вероятности  $P_0 < 0,001$  (иногда и при значении  $P_0 < 0,01$ ) событие обычно считается «практически невозможным»<sup>23</sup>, а, например, для высоконадежных систем – в расчетах не учитываются элементы с вероятностью отказа  $P_{от} < 0,0001$  (иногда применяются и более жесткие требования, например, при оценке безопасности). В этом случае противоположное событие (т.е. при вероятности  $P_1 > 0,999$ ) называют «практически достоверным».

<sup>21</sup> Условно, ибо реально определить распределения вероятностей можно только на осях координат: в прямоугольниках существуют только отрезки кривой  $y = f(x)$  (причина I стр.10)

<sup>22</sup> Т.е. область, содержащую математическое ожидание

<sup>23</sup> Практически «невозможные» события, как это ни странно, иногда тоже случаются: часто – «совсем некстати» (может потому, что эти случаи лучше запоминаются)

{А.8.1} По сути – при *неограниченных законах* распределения, являющихся *основными* в существующей теории, *экспериментальные исследования возможны в ограниченной области*.

Цель принятых *предположений* и последующих рассуждений в данном пункте *показать именно это*, ибо *ограниченность* области необходимо *учитывать* при проведении *экспериментальных исследований* – иначе можно «сильно промахнуться».

### п.3. К построению *функциональной зависимости*.

1. На основе анализа [30,6-28] показано (выводы W.1-W.3 стр.4): функциональная зависимость между случайными величинами такая же «жесткая», как и между 2-мя *действительными* функциями *действительных* аргументов  $x$  и  $y$ , но только *связывающая вероятности* событий, определяемых 2-мя случайными величинами. Отличие, конечно же, *существенное*, но, к нашему счастью, оно *не оказывает никакого влияния* на *функциональную зависимость* между случайными величинами. Действительно: при функциональной зависимости между случайными параметрами  $Y$  и  $X$  можно задать в эксперименте некоторое значение параметра  $X$  и получить соответствующее значение (отклик) параметра  $Y$ . После долгих рассуждений мы «*неизбежно*» пришли к задаче, о которой говорилось в п.3.2 примера 2 (стр.12). Отсюда следует:

{А.8.2} *Определение «жесткой» функциональной зависимости*  $y = f(x)$  между 2-мя *физическими* параметрами (когда по значению  $X$  определяется *точное значение*  $Y$ ) на основе *экспериментальных данных* – это и есть *основная цель* построения: оно *не зависит от случайности* параметров  $X$  и  $Y$ .

2. Зная плотность  $p(x)$  распределения случайной величины  $X$  на основе экспериментов можно сразу построить закон распределения случайной величины  $Y$ . Для этого *до проведения экспериментов* следует определить (например, методом Монте-Карло) множество случайных значений  $x_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) в соответствии с плотностью  $p(x)$  распределения величины  $X$ . В экспериментах, при полученных значениях  $x_m$  определить значения (отклик)  $y_m$  параметра  $Y$ . Затем по множеству точек  $y_m$  построить (например, применяя метод наименьших квадратов) плотность  $p(y)$  распределения случайной величины  $Y$ , а по множеству точек  $(x_m, y_m)$  – зависимость  $y = f(x)$  между параметрами.

{А.8.3} Однако такое построение «обойдется дороже» определения функции  $y = f(x)$ . В погрешность определения функций  $p(y)$  и  $y = f(x)$  будет входить как погрешность измерений так и характеристики случайности обоих параметров.

При знании функции  $y = f(x)$  закон распределения случайной величины  $Y$  определяется *математически* (преобразованием распределения величины  $X$ , раздел 1 [30,6], и никаких экспериментов). Очевидно, что лучше всего определять зависимость  $y = f(x)$ , когда параметр  $X$  неслучаен. Жаль, что это не всегда возможно.

3. В результате анализа мы пришли к задаче, от которой так «долго отрещивались» в существующей теории, вводя «некую таинственную стохастическую (вероятностную)» зависимость: более подробно она будет рассмотрена в разделе 2 (стр.74). Если честно, то, кроме примеров ее существования, сказать там особо о чем-либо нечего (все же в ней есть «некая

таинственность»: но совсем не та, о которой пишут в работах). Но именно *независимость* решения задачи от *случайности* параметров  $X$  и  $Y$  и позволяет, *задав* на отрезке  $a \leq x \leq b$  конкретные значения (воздействие)  $x_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) параметра  $X$ , определять в *экспериментах* изменение (отклик) параметра  $Y$ . Снова имеем почти «идеальную картинку», рассмотренную в начале примера, осуществлению которой мешают «мелочи»: неизбежные погрешности измерения параметров  $X$  и  $Y$ , которые «портят идеал». Функция  $y = f(x)$  неизвестна, что определяет применение *аппроксимации экспериментальных* результатов некоторой *известной*  $y = v(x; c_1, c_2, \dots, c_K)$  кривой<sup>24</sup> с неизвестными коэффициентам  $c_k$  ( $k=1,2,\dots,K$ ), которые подлежат определению. Для этого чаще всего применяется *метод наименьших квадратов*: наиболее надежный и простой в реализации из имеющихся методов приближения функций. По факту, мы пришли к задаче, которая решается в существующей теории (п.3.2 примера 2 стр.12) и вообще-то решается правильно (это не относится к теории корреляции, п.2-3 примера 3, положения {A.7.1}-{A.7.3} стр.16): мы рассмотрим моменты, на которые следует обращать внимание при обработке экспериментальных данных.

{A.9} «Жесткая» функциональная зависимость  $y = f(x)$  между 2-мя *физическими* параметрами является *линией регрессии* и *подлежит* определению в первую очередь. Именно она позволяет определить влияние *случайности* параметра  $X$  на *распределение* вероятностей параметра  $Y$ .

4. На применении метода наименьших квадратов к решению задачи определения коэффициентов  $c_k$  кривой  $y = v(x; c_1, c_2, \dots, c_K)$  останавливаться не будем: описание метода и его применение приводится во многих работах<sup>25</sup> – и не только в математической статистике. *Законы* распределения погрешностей измерения параметров  $X$  и  $Y$  в подавляющем большинстве случаев известны. Они не связаны с функциональной зависимостью параметров и, по постановке задачи, следует считать, что они проводятся *одновременно*: эти обстоятельства существенно упрощают решение. На рис.3 (стр.17) узкими прямоугольниками с утолщенными (сплошными, штриховыми и пунктирными) линиями условно изображены области<sup>26</sup>, в которых будут расположены экспериментальные точки на плоскости, как следствие погрешностей параметров  $X$  и  $Y$ . Математические ожидания  $m_X$  и  $m_Y$ , вычисленные в собственных координатах  $X'OY'$  двумерного распределения погрешностей, соответствуют точкам  $x_v$  и  $y_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) измерений на осях  $X$  и  $Y$ , около которых группируются погрешности измерений.

{A.10.1} Следовательно, точка  $(m_X, m_Y)$  на плоскости, *определяемая математическими ожиданиями* распределений *погрешностей*, принадлежит кривой  $y = f(x)$  в любой из точек измерения.

Подробнее этот вопрос обсуждается в разделе 1.3.2 (п.2 примера 5 стр.25).

**Замечания 2.** Утверждение справедливо: 1. Распределение *погрешностей измерений* – *всегда!* 2. При *линейной формуле преобразования* произвольных случайных величин. 3. *Приближенно*, если *формула преобразования* на всем отрезке  $a \leq x \leq b$  почти *линейная* [13,254]: требуется оценка погрешности линейного приближения. 4. В общем случае *нелинейной зависимости* между величинами ошибка будет

<sup>24</sup>Этот процесс иногда называют сглаживанием экспериментальной зависимости

<sup>25</sup>Можем порекомендовать работу [13, 351-361], в которой он дается просто, понятно и не «отягощен» оценкой погрешности определения коэффициентов и решением задачи прогноза (как, например, в [12, 335-345])

<sup>26</sup>Область (утрировано – для отличия на рисунках и понимания последующих преобразований: это не влияет на них) изображена для случая, принятого в существующей теории (п.3.2 примера 2 стр.12): погрешность измерения  $Y$ , много больше погрешности измерения  $X$ . Реально, они могут быть не только сравнимы, но и 1-я много меньше 2-й. Например, при зависимости пути от скорости или, что еще хуже, ускорения

значительной. На рис.3 (стр.17) отмечено тонкой окружностью положение математического ожидания  $M_X$  исходной величины  $X$ . В существующей теории приближенное значение  $M_Y = f(M_X)$  вычисляется в точке пересечения линии  $y = mx$  с кривой  $y = f(x)$  и естественно принадлежит кривой. Отклонения же определяются расстояниями между точками кривой и касательной к кривой (штрих пунктирная стрелка) в этой точке: максимальное отклонение сравнимо с размером области определения величины  $Y$ . Ошибка определения дисперсии, вычисляемой по формуле  $\hat{D}_Y = |f'(M_X)|^2 D(X)$  (где  $f'(M_X)$  – производная от функции  $y = f(x)$  в точке  $x = M_X$ ) намного хуже. Более точно значение  $M_Y$  определяется пересечением линии  $y = M_X$  и штрих пунктирной линии (рис.3 стр.17), проходящей через вершины прямоугольника, принадлежащие кривой: точное значение  $M_Y$  – выше или ниже этой точки; несколько повысится и точность вычисления дисперсии. Для применения линейного приближения все же лучше разделить этот участок, по крайней мере, на два, а лучше – на 3 участка.

Пусть  $x_{v,n}$  и  $y_{v,n}$  координаты точек, полученные по ( $n=1,2,...,N$ ) испытаниям в точках измерений  $x_v$  ( $v=1,2,...,V$ ). Из предыдущего анализа и положения {А.10.1} следует:

**{А.10.2}** Экспериментальные точки  $(x_{v,n}, y_{v,n})$ , определенные по  $n=1,2,...,N$  испытаниям будут располагаться в областях совместного распределения погрешностей измерений: их центры группирования  $(m_X^{(v)}, m_Y^{(v)})$  расположены на кривой в точках, соответствующих точкам измерений  $x_v$  ( $v=1,2,...,V$ ).

Жесткая связь центра группирования совместного распределения погрешностей с зависимостью  $y = f(x)$  позволяет:

**{А.10.3}** Определить погрешность ее определения по результатам экспериментов.

**{А.10.4}** Учесть влияние погрешности определения зависимости  $y = f(x)$  на распределение случайной величины  $Y$ , которое связано функцией  $y = f(x)$  с распределением случайной величины  $X$ .

Кроме того, из анализа, данного в замечании 2.4 (стр.20), следует:

**{А.10.5}** При нелинейной зависимости  $y = f(x)$  между случайными величинами  $X$  и  $Y$  точка  $(M_X, M_Y)$ , определяемая математическими ожиданиями их распределений, не принадлежит кривой  $y = f(x)$ .

Пусть распределение случайной величины  $X$  определено на отрезке  $x_H \leq x \leq x_K$ , а функция  $y = f(x)$  определяет связь между случайными величинами  $X$  и  $Y$ , тогда:

**{А.10.6}** Точка  $\{x_H, y_H = f(x_H)\}$  (или  $\{x_K, y_K = f(x_K)\}$ ), определяемая пересечением прямых линий  $y = x_H$  и  $x = y_H = f(x_H)$  (или линий  $y = x_K$  и  $x = y_K = f(x_K)$ ), принадлежит кривой  $y = f(x)$ .

Задачи, определенные в положениях {А.8.2}-{А.9} и {А.10.3}-{А.10.4} (стр.19-21) будут рассмотрены в последующих разделах.

{А.10.7} Таким образом, *основной целью анализа экспериментальных исследований связи между двумя случайными величинами X и Y является построение жесткой функциональной зависимости  $y = f(x)$  между 2-мя физическими параметрами X и Y и оценка погрешности ее построения.*

### 1.3. Влияние погрешностей измерений на построение линии регрессии и решение задачи прогноза

Мы не даем анализа того, как это делается в принятой теории.

Во-первых, методика достаточно сложна и требует «детального разбирательства»: мы этого не делали, ибо не видим в этом большого смысла, а некоторые моменты будут отмечаться в процессе построения *на основе новой исходной системы* теории случайных величин [29-31].

Во-вторых, методика, предложенная для *линейной зависимости и нормального* распределения, *применима* (хотя и с некоторыми оговорками). Однако ее пригодность при *нелинейной зависимости (или/и произвольном законе* распределения) вызывает сомнения (об этом в разделе 1.3.4 стр.40).

#### 1.3.1. Об условии наилучшего приближения метода наименьших квадратов

Прежде чем начать разговор о *построении функциональной зависимости и оценке погрешности* ее определения, рассмотрим одну особенность применения условия наилучшего приближения *метода наименьших квадратов*, который, по нашему мнению, является наиболее *надежным и простым* в реализации методом *приближения функций*.

{А.11.1} В *методе наименьших квадратов условие наилучшего приближения* формулируется в виде: *сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от аппроксимирующей функции должна быть минимальной.*

Приведем математическую расшифровку (назовем ее 2-й формулировкой) словесной формулировки, которая обычно дается в теории вероятностей (вообще говоря, не только): требуется определить параметры  $c_k$  заданной функции  $y = f(x; c_1, c_2, \dots, c_K)$  так, чтобы выполнялось условие  $\sum_1^N \{y_n - f(x_n; c_1, c_2, \dots, c_K)\}^2 = \min$ , где:  $y_n$  – экспериментальные значения искомой функции, измеренные в  $n=1, 2, \dots, N$  точках  $x_n$ ;  $f(x_n; c_1, c_2, \dots, c_K)$  – значения заданной функции в тех же точках.

Обе формулировки приведены для того, чтобы показать: математическая расшифровка *поставленной задачи отличается от ее словесной формулировки.*

Нам неизвестно, когда появилась словесная постановка задачи, а когда ее математическая расшифровка. Уверенность есть только в двух моментах: 1. Метод создал К. Гаусс, однако постановка задачи, на примере которой разъяснялась суть метода, несколько отличается от приведенных выше, по крайней мере, это следует из работы [23,438-439]. 2. В теории об этом ничего не говорится, но если говорить по сути, то правильной является словесная формулировка метода, что следует из определения расстояния между точкой и кривой в геометрии.

**{А.11.2}** *Расстояние (т.е. отклонение) от точки до кривой — это минимальное расстояние между двумя точками, одна из которых лежит на кривой. Геометрически расстояние равно отрезку нормали к кривой, проходящей через точку, до которой оно вычисляется.*

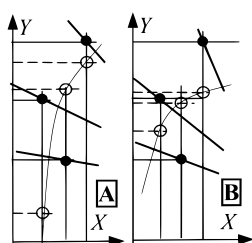


Рис. 4

Это видно из рисунка 4, на котором изображены: 1. Зависимости  $y = f(x)$  (считаем их известными), в которых заключается отличие рис.4А от рис.4В. 2. Три из некоторого числа  $n=1,2,\dots,N$  экспериментальных точек  $(y_n, x_n)$ : отмечены черными кружками. 3. Точки пересечения прямых линий  $y = x_n$  с кривой  $y = f(x)$ : отмечены окружностями. 4. Нормали к кривой  $y = f(x)$ , проходящие через экспериментальные точки.

Расстояния между точками, отмеченными на линиях  $y = x_n$ , подлежат минимизации согласно математической расшифровке метода.

А расстояния между экспериментальными точками и кривой, определенные по нормальям к кривой, минимизируются согласно словесной формулировке метода.

Различие в приведенном примере очевидно: 1) рис.4А — при словесной формулировке положение кривой почти не изменится, а при существующей расшифровке — изменение положения существенно; 2) рис.4В — наоборот, при словесной формулировке изменение положения кривой существенно, а при существующей расшифровке — почти не изменится.

Это просто иллюстрация зависимости решений от вида кривой, расположения экспериментальных точек: более важным является другое обстоятельство:

**{А.11.3}** Будет ли уменьшаться отличие в решениях, основанных на разных формулировках, при увеличении числа  $N$  заданных точек  $x_n$  измерения, сказать сложно, да мы этим и не занимались, а в просмотренной литературе ответа не нашлось.

1. Когда-то где-то (точно только то, что не в теории вероятностей — тогда мы ею просто не занимались) «повстречалось» доказательство единственности решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов с применением 2-й формулировки при использовании степенных (и тригонометрических) полиномов. Кажется, там доказывалась и сходимость к точному решению. По крайней мере, на этой основе, возможно, удастся построить доказательство сходимости решений по обоим формулировкам. Подробнее об этом — в разделе 1.3.4 (стр.40). 2. Единственность решения задачи аппроксимации не означает сходимости решения к реальной функциональной связи между параметрами. Например, реальную кубическую зависимость можно аппроксимировать линейной или квадратичной функцией: в обоих случаях решение задачи аппроксимации — единственное, но ни то, ни другое никогда не сойдется к кубической функции.

На плоскости  $XOY$  расстояние  $S_n$  от точки  $(x_n, y_n)$  до кривой  $y = f(x)$  вычисляется из

условия минимума выражения  $S_n^2 = \{(x_n - x)^2 + [y_n - f(x)]^2\}$ , т.е. обращения производной  $S'_n = -\{(x_n - x) + [y_n - f(x)]f'(x)\}/S_n$  в ноль (определение координаты  $x_{\min}$  из уравнения  $(x_n - x_{\min}) + [y_n - f(x_{\min})]f'(x_{\min}) = 0$ ).

Отсюда очевидно, что *применение словесной формулировки значительно усложняет применение метода наименьших квадратов при нелинейной зависимости между параметрами.*

Мы вернемся к обсуждению этого вопроса при рассмотрении аппроксимации нелинейной зависимости (раздел 1.3.4 стр.40).

Пусть  $\delta y_n = y_n - y'_n$  – расстояние, определяемое разностью координат экспериментальной точки  $(x_n, y_n)$  и прямой линии (ось  $\tau$  на рисунке 4b)  $y'_n = c_0 + c_1 x_n$  при значении  $x = x_n$ . Тогда расстояние  $s_n$  от точки  $(x_n, y_n)$  до линии  $y = c_0 + c_1 x$  равно  $s_n = \delta y_n \cos \alpha$  (где  $\alpha$  – угол между прямой и осью  $X$ ). Соответственно, суммы квадратов  $\Delta^2 = \sum_1^N \delta y_n^2$  разностей  $\delta y_n$  и квадратов  $\Delta_1^2 = \sum_1^N s_n^2$  расстояний до прямой  $y = c_0 + c_1 x$ , связаны равенством  $\Delta_1^2 = \Delta^2 \cos^2 \alpha$ . Отсюда следует:

**{А.11.4}** Если зависимость между параметрами  $X$  и  $Y$  линейная, то результаты минимизации методом наименьших квадратов не зависят от его формулировки. Тем не менее, *правильной* является словесная формулировка метода.

Обратимся непосредственно к построению функциональной зависимости по результатам испытаний и оценке погрешности построения.

### 1.3.2. Линейная связь между 2-мя параметрами

Рассмотрим вопросы, связанные с построением функциональной связи между двумя физическими параметрами и оценкой погрешности построения на примере линейной функции  $y = c_0 + c_1 x$ : пример более нагляден и дает лучшее понимание затрагиваемых вопросов.

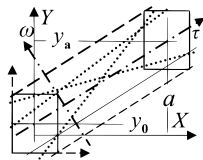


Рис. 5

**Пример 5. Теория.** п.1. Для упрощения изложения, положим  $c_0, c_1 > 0$ .

Будем считать, что расположение (стр.26 рис.6а слева) точек  $(x_v, y_v)$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) подобно схеме, изображенной на рис.2В (пример 2 стр.11). Введем систему координат  $\tau\omega$  (рис.5 штрихпунктирные стрелки), в которой осью  $T$  является теоретическая линия  $y = c_0 + c_1 x$ . На рисунке изображены: 1) двумерное совместное распределение погрешностей параметров в точках  $(0, y_0 = c_0)$  и  $(b, y_b = c_0 + c_1 b)$  с математическими ожиданиями  $m_X$  и  $m_Y$ , определенных в собственных координатах  $x'0y'$  двумерного распределения (штриховые стрелки); 2) три определенных методом наименьших квадратов положения прямой  $\hat{y} = \eta_0 + \eta_1 x$  (линии регрессии, пунктирные линии) по результатам экспериментов, из бесконечного числа возможных; 3) нижняя граница (сплошная тонкая линия, параллельная оси  $\tau$ ) доверительного интервала, соответствующего некоторой заданной доверительной вероятности.

**Замечания 3.** 1. Полагаем: распределения погрешностей параметров сим-



метричны (чаще всего это оправдано). Погрешность – характеристика прибора или методики измерений (они обязательно аттестуются). В основном применяются *относительная погрешность*  $\delta = \Delta/x_D$  в процентах, где  $\Delta = x_n - x_D$  – абсолютная погрешность,  $x_n, x_D$  – измеренное и истинное значение параметра. Так как истинное значение неизвестно и при приближении  $x_D$  к нулю  $\delta \rightarrow \infty$ , то чаще применяется *приведенная относительная погрешность*  $\delta_1 = \Delta/x_N$ , где  $x_N$  – некоторый нормирующий множитель. Часто за нормирующее значение принимают *верхний предел измерений* прибора. **2.** Относительная погрешность может зависеть (линейно или нелинейно) от величины измеряемого параметра. **3.** Далее будем использовать *приведенную относительную погрешность* и считать, что она не зависит от величины измеряемого параметра.

**п.2.** Задача состоит в оценке возможных отклонений положения линии регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$  от истинной (теоретической) прямой  $y = c_0 + c_1 x$  линии (оси  $\tau$ ). В математической статистике постановка<sup>27</sup> отличается: *относительно линии регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$  определяется интервал, в котором с заданной вероятностью будет находиться истинная линия  $y = c_0 + c_1 x$ .*

Возможные отклонения можно условно разделить на два вида: связанные со смещением ( $\eta_0 \neq c_0$ ) и направлением ( $\eta_1 \neq c_1$ ) линии регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$  относительно истинной прямой  $y = c_0 + c_1 x$ .

Максимально возможные теоретические отклонения определяются расстоянием от линии  $y = c_0 + c_1 x$  до линий  $y_{\min}$  и  $y_{\max}$  (стр.24 рис.5 штриховые линии), проходящих через вершины прямоугольников, которые противоположны относительно прямой. Очевидно, что они *одновременно ограничивают оба вида отклонений*. Соответственно, это справедливо для *границ доверительного интервала*, которые можно определить (есть другие варианты) прямыми линиями  $y' = c'_0 + c_1 x$  и  $y'' = c''_0 + c_1 x$  ( $c'_0 < c_0$ ) ( $c''_0 > c_0$ ): при *симметричном* распределении имеем  $m_X = l_X^{(v)}/2$  и  $m_Y = l_Y/2$  и  $c'_0 = c''_0$  (где  $m_X^{(v)}, m_Y^{(v)}$  – математические ожидания, определяемые в собственных координатах  $X'OY'$  двумерного распределения (рис.5 штриховые стрелки);  $l_X, l_Y$  – длины областей определения погрешности параметров).

В пределах отрезка  $0 \leq x \leq b$ , вообще говоря, эти границы не должны пересекать и экспериментальная прямая. Тем не менее, это возможно при малом числе испытаний и удаленности точек  $x_1$  и  $x_V$  измерения от границ  $x_1 > a$  и  $x_V < b$  отрезка. В принципе, при построении функциональной зависимости необходима некоторая проверка ее поведения за пределами отрезка: об этом – при рассмотрении построения нелинейной функции (стр.47 пример 12).

**{A.12.1}** Максимально возможные теоретические отклонения определяются *расстоянием* от линии  $y = c_0 + c_1 x$  до линий, проходящих через вершины прямоугольников, которые противоположны относительно прямой  $y = c_0 + c_1 x$ . *Положение* линий, определяющих *допустимые отклонения*, вычисляется *по двумерному* распределению погрешностей в любом из прямоугольников.

**Замечание 4.** Более наглядно (в общем-то, и более правильно) отклонения и границы доверительного интервала определяются в координатах  $\tau_0\omega$ , в которых они параллельны оси  $\tau$  (п.5 примера 3 [31,22] и положения {A.23.3}-{A.23.6} [31,23]). Именно этот подход соответствует сути метода (положения {A.11.1}-{A.11.4} стр.22-24) на-

<sup>27</sup> Пока анализ теоретический, эта постановка не используется

меньших квадратов. По распределению погрешности  $p_{\Omega}(\omega)$  можно определить значения  $\omega'_0$  и  $\omega''_0$  для заданной доверительной вероятности  $P_d$ , по которым, исходя из геометрии, определяются значения коэффициентов  $c'_0$  и  $c''_0$  соответственно. Однако такой подход усложняет решение задачи (п.5 примера 4 [31,24]). Например, если исходная плотность  $p(x, y)$  является произведением плотностей  $p(x)$  и  $p(y)$ , то в результате преобразования она таковой не будет. Кроме преобразования исходного распределения  $p(x, y)$  к координатам  $\tau_0\omega$ , для вычисления вероятностей необходимо преобразовать к ним и границы области определения функции плотности. Учитывая, что при повороте координат, распределение и его границы не изменяются, намного проще вычислять вероятности непосредственно по исходному распределению.

**Замечания 5.** 1. При задании точек измерения, лучше располагать их на отрезке равномерно, но особого смысла в этом нет. 2. Экспериментальные точки, полученные в испытании с номером  $n=1,2,\dots,N$ , будем обозначать координатой с двойным нижним индексом  $x_{v,n} = x_v + \delta_{v,n}^X$  и  $y_{v,n} = y_v + \delta_{v,n}^Y$ , где  $v$  – номер заданной точки измерений,  $n$  – номер испытания,  $\delta_{v,n}^X$  и  $\delta_{v,n}^Y$  – изменение заданных координат  $x_v^d$  и  $y_v^d$ , обусловленные погрешностью измерений. На рисунке  $V=7, N=5$ .

**п.2. Практика.** Пусть в заданных точках  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_V < b$  определены значения  $y_v$  ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) параметра  $Y$  (рис.6а слева). Положим  $c_0 = 0$ , т.е. теоретическая функция равна  $y = c_1x$ . Соответственно, (положение {A.10.1} стр.20) точки  $(m_X^{(v)}, m_Y^{(v)})$ , определяемые математическими ожиданиями распределения погрешностей, лежат на линии  $y = c_1x$  (оси  $T$ ).

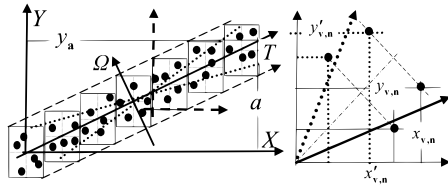


Рис. 6а

ные значения координат  $x_{v,n}$  отличаются от значений  $x_v^d$ , которые мы задали, а значение  $y_{v,n}$  связаны с значениями  $x_{v,n}$  и будут лежать именно на линиях  $y = x_{v,n}$ , а не  $y = x_v^d$ . Для каждой из заданных координат  $x_v^d$  можно только сказать, что значение  $x_{v,n}$  находится в области определения распределения погрешности параметра  $X$ . Т.е. точно так же как мы говорим о том, что каждое измеренное значение  $y_{v,n}$  параметра  $Y$  находится в области определения распределения его погрешности измерений<sup>28</sup>.

{A.12.2} Следовательно: значения  $x_v^d$  параметра  $X$  (хотя его значения заданы) известны в эксперименте с точностью до погрешности его измерений.

2. Во-вторых. Из теории вероятностей следует. Математическим ожиданием  $m_X^{(v)}$  (т.е. центром группирования) распределения погрешностей параметра  $X$  является заданная точка  $x_v^d$  измерения. Соответственно, математическим ожиданием  $m_Y^{(v)}$  распределения погрешностей параметра  $Y$  является точка  $m_Y^{(v)} = f(x_v^d)$ : при линейной зависимости – точка (положение {A.10.1} стр.20)  $m_Y^{(v)} = y_v^d = c_0 + c_1 \cdot x_v^d$ .

<sup>28</sup>В техническом задании следует также задать точность измерения обоих параметров. Естественно, следует учитывать возможность осуществления требуемой точности измерения в эксперименте

**{А.12.3}** Подчеркнем: значения  $y_v^d$  неизвестны, ибо неизвестна зависимость  $y = c_0 + c_1x$  между параметрами.

При измерениях заданное (на чертеже) значение  $x_v^d$  не изменяется, но, как следствие погрешности прибора, реальное значение  $x_{v,n}$  отличается от заданного. Очевидно, что на отличие значений  $y_{v,n}$  и  $y_v^d$  влияет не только погрешность измерения параметра  $Y$ , но и параметра  $X$ . Отметим, что только оценки  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$  математических ожиданий  $m_X$  и  $m_Y$  будут приближаться к ним при увеличении числа измерений.

Чтобы следующее утверждение было более понятным, рассмотрим пример: пусть требуется от стержня отрезать  $N$  частей равной длины  $L$ . **1.** Линейкой отмерим на стержне от какого-либо конца расстояние  $L$  иотрежем 1-ю часть, затем таким же способом часть с номером  $2, 3, \dots, N$ . **2.** Теперь измерим полученные части: получим  $N$  отличающихся значений  $L_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ). Этот результат связан с погрешностью измерений на 1-м этапе: мы отмеряли заданное значение  $L$ . Однако ее влияние обнаруживается только на 2-м – при проведении измерений отрезанных частей. На результат, конечно же, влияет и погрешность измерений на 2-м этапе.

В рассматриваемой задаче: **1-й этап** – *измерение заданных значений*  $x_v^d$  параметра  $X$ ; **2-й** – *измерение значений*  $y_{v,n}$  (отклика) параметра  $Y$  на *изменение* параметра  $X$ . Функциональная связь параметра  $Y$  с параметром  $X$  и наличие собственной погрешности измерений сути не меняет. Таким образом:

**{А.12.4}** *Измерения параметров  $X$  и  $Y$  включают в себя и погрешность, но содержится она только в измерениях отклика (т.е. значений  $y_{v,n}$ ) параметра  $Y$  на изменение параметра  $X$ .*

**Замечания 6.** **1.** То, что измерение параметра  $X$  включает в себя и ее погрешность определяется *повторным измерением*, например, прибором, *точность* которого существенно *выше точности* прибора, использованного при 1-м измерении. *Но есть ли в этом смысл?* Если такой прибор существует, то его следует применять при измерениях. Если его по каким-либо причинам использовать нельзя, то от того, что мы убедились в существовании погрешности, ничего не изменится. **2.** Далее, до определения *погрешности построения линейной зависимости* (раздел 1.3.3 стр.33), при анализе будем полагать значения  $x_{v,n}$  и  $y_v^d$  известными.

**3. В-третьих.** В принятой теории, делением *сумм*, входящих в уравнения для определения коэффициентов, на число точек  $K = V \cdot N$ , вычисляют: оценки математических ожиданий<sup>29</sup>  $\tilde{M}_0(X) = \sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N x_{v,n} / (V \cdot N)$ ,  $\tilde{M}(Y) = \sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N y_{v,n} / (V \cdot N)$  **{1}**, оценки дисперсии  $\tilde{D}_0(X)$  и ковариации<sup>30</sup>  $\tilde{K}_0(X, Y)$  в *начальных* координатах (согласно новой исходной системе понятий случайных величин [29; 31]). Дисперсия  $\tilde{D}_0(Y)$  не входит в уравнения. В некоторых работах [12,338] она считается неизвестной (почему – не понятно<sup>31</sup>, но в других работах

<sup>29</sup> Характеристики обозначены заглавными буквами, ибо не относятся к погрешностям измерений. Согласно принятой теории значение  $\tilde{M}_X$  не является оценкой математического ожидания, ибо это среднее значение заданных (неслучайных) координат  $x_v$ : впрочем, величина  $\tilde{D}_0(X)$  тоже не является дисперсией. Вычислять их значения можно, но они не имеют отношения к какой-либо случайной величине

<sup>30</sup> Ковариация – характеристика связи между случайными величинами, но параметр  $X$  неслучаен. Как быть с пониманием ковариации, принятым в существующей теории?

<sup>31</sup> В механике, физике, химии, технике измерения проводятся приборами (или методиками) с известной погрешностью (замечания 3 стр.24). Во времена П. Лапласа, К. Гаусса, А. Лежандра этого конечно не было: теория ошибок только становилась наукой. Впрочем, если погрешность неизвестна, то она определяется согласно подходу, изложенному в п.4 данного примера

о дисперсии  $\tilde{D}_0(Y)$  вообще ничего не говорят), определяется по результатам испытаний и используется для оценки погрешности определения коэффициентов  $\eta_0$  и  $\eta_1$  аппроксимирующей функции.

Затем их приводят к центральным координатам (т.е. к центрированным случайным величинам  $\overset{o}{X}$  и  $\overset{o}{Y}$ , для которых  $\overset{o}{M}(X)=0$  и  $\overset{o}{M}(Y)=0$ ), но это не имеет значения. По поводу характеристик  $\overset{o}{M}(X)$ ,  $\overset{o}{D}_0(X)$ ,  $\overset{o}{K}_0(X, Y)$  и  $\overset{o}{D}_0(Y)$  некоторые замечания даны в сносках 30-33, но поставим вопрос кардинально:

*Какое отношение имеют полученные характеристики к погрешностям измерений?*

Представим значения  $x_{v,n}$  в виде  $x_{v,n} = x_v^d + (\delta_{v,n}^X - m_X)$  (замечание 5.2, стр.26). Тогда (так как при больших значениях  $V$  и/или  $N$  имеем  $\tilde{m}_X \cong m_X$ ) математическое ожидание равно  $\tilde{M}_X = \sum_{v=1}^V x_v^d / V + \sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N (\delta_{v,n}^X - m_X) / (V \cdot N) \cong \bar{x}$ . Оценка дисперсии  $D_X$  вычисляется по значению суммы  $\sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N \{(x_v^d - \bar{x}) + (\delta_{v,n}^X - m_X)\}^2$ , которая определяется двумя слагаемыми, но только второе из них относится к дисперсии распределения погрешностей. К чему можно отнести всю сумму, сказать сложно<sup>32</sup>. Рассуждая таким же образом, для распределения по оси  $Y$  получим аналогичный результат: оценка дисперсии  $D_Y$  вычисляется по значению суммы  $\sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N \{(y_v^d - \bar{y}) + (\delta_{v,n}^Y - m_Y)\}^2$ .

Положим  $\delta_{v,n}^X = \delta_{v,n}^Y = 0$ , а, следовательно, и  $m_X = m_Y = 0$ , т.е. случайность отсутствует. Тогда все точки  $(x_{v,n} = x_v^d, y_{v,n} = c_1 \cdot x_v^d)$  принадлежат прямой линии<sup>33</sup>  $y = c_1 \cdot x$ . Тем не менее, в этом случае получим  $\tilde{M}_X = \bar{x}$ ,  $\tilde{M}_Y = \bar{y}$  и соответствующие суммы  $\sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N (x_v^d - \bar{x})^2$ ,  $\sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N (y_v^d - \bar{y})^2$ : т.е. некоторые характеристики, не имеющие отношения к случайным величинам.

Отсюда однозначно следует:

**{А.12.5}** *Полученные характеристики никакого отношения к погрешностям измерений параметров не имеют! Они относятся к двумерному распределению, связанному с положением экспериментальных точек на плоскости во всех точках измерений и следуют из метода наименьших квадратов.*

1. В некоторых работах – это просто коэффициенты в уравнениях при неизвестных, а названия из теории вероятностей не применяются. Хотя эти работы не связаны с теорией вероятностей, но, по нашему мнению, это правильно отражает суть того, что определяется в методе наименьших квадратов. 2. В работе [12,338] для определения выборочной дисперсии применяется более правильный подход (об этом в замечании 18 стр.56), рассмотренный в п.4 данного примера для линейной и замечании 13 (стр.46) для нелинейной зависимости.

**{А.12.6}** *Полагаем: заданные точки расположены равномерно на отрезке (замечание 5.1 стр.26): их координаты равны  $x_v = x_0 + \Delta \cdot v$ , (где  $\Delta = (x_K - x_H) / V$ ,  $x_H = x_0$ ). Тогда: 1. Их среднее арифметическое равно  $\bar{x} = x_0 + V \cdot \Delta / 2$  (лежит посередине отрезка). 2. При линейной зависимости  $y = c_0 + c_1 x$  между параметрами имеем  $\bar{y} = c_0 + c_1 (\bar{x} = x_0 + V \cdot \Delta / 2)$ .*

С точкой  $(\bar{x}, \bar{y})$  можно совместить центр группирования (т.е. точку  $(m_X, m_Y)$ ) совместного распределения погрешностей.

<sup>32</sup>Разности  $x_v^d - \bar{x}$  между неслучайными числами не имеют никакого отношения к случайной величине

<sup>33</sup>В этом случае аппроксимация сводится к интерполяции точек линейной функцией

**П.3.** *Возможные* отклонения определяются расстоянием от каждой точки, определяемой парой  $(x_{v,n}, y_{v,n})$  координат, до линии  $y = c_1 x$  (стр.26 рис.6а слева ось  $T$  – сплошная стрелка). По сути, это отклонения по оси  $\Omega$ , которые равны расстоянию от начала собственных координат распределения погрешности до проекции точки  $(x_{v,n}, y_{v,n})$  в координатах  $XOY$  на ось  $\Omega$  и вычисляется по формуле  $\omega_{v,n} = -x_{v,n} \sin \alpha + y_{v,n} \cos \alpha$  {3},  $tg \alpha = f'(x) = c_1$ , где  $f'(x)$  – производная от функции  $y = f(x)$  (стр.26 рис.6а слева, изображена ось  $T$  – утолщенная стрелка). В результате получим значения координат  $\omega_{v,n}$ , по которым вычисляется оценка  $\tilde{m}_\Omega = \sum_{v=1}^V \sum_{n=1}^N \omega_{v,n} / K$  {4} (где  $K = V \cdot N$ ) математического ожидания  $m_\Omega$  случайной величины  $\Omega$  (распределения погрешности измерений по оси  $\Omega$ ).

{A.13.1} *Именно отклонения экспериментальных точек*  $\omega_{v,n}$  по оси  $\Omega$  от *искомой прямой* соответствуют *сумме* метода *наименьших квадратов* (положения {A.11.1}-{A.11.4} стр.22-24).

В общем-то, наглядно и, по идее, даже более правильно, но сложно, о чем говорилось в замечании 4 (стр.25). Кроме преобразований, отмеченных в замечании, придется воспользоваться обратным преобразованием при повороте координат: это связано с решением задачи прогноза (пример 9 стр.38).

Проще вычислять характеристики распределений погрешностей измерений параметра  $Y$  непосредственно в координатах  $XOY$ . Например, отклонения  $\delta_{v,n}^Y = y_{v,n} - c_1 x_{v,n}$  по оси  $Y$  вычисляются по формуле  $\delta_{v,n}^Y = y_{v,n} - c_1 x_{v,n}$  {3}. Соответственно, оценки математических ожиданий в точках измерений равны  $\tilde{m}_Y^{(v)} = \sum_{n=1}^N \{y_{v,n} - \tilde{y}(x_{v,n})\} / N$  и обобщенная оценка –  $\tilde{m}_Y = \sum_{v=1}^V \tilde{m}_Y^{(v)} / V$ , где  $\tilde{y}(x_{v,n}) = c_1 x_{v,n}$ . Этот подход применяется в работе [12,338] для вычисления выборочной дисперсии (замечание 18 стр.56) при линейной зависимости параметров.

Фактически, с точки зрения геометрии операция мало отличается от определения числовых характеристик в осях  $T\Omega$ : как и в первом случае, через точку  $(x_{v,n}, y_{v,n})$  проводится прямая линия параллельная оси  $T$ , но ищется ее пересечение с осью  $Y$ , а не осью  $\Omega$ .

Чуть сложнее оценка математического ожидания  $m_X$  случайной величины  $X$ . Отклонения  $\delta(x_{v,n})$  точек определяются по разности значений функции  $x = y/c_1$  обратной к функции  $y = c_1 x$ . Обратная функция определяется зеркальным отображением исходной (рис.6а справа, утолщенная сплошная стрелка) функции (положение A.12.2 [30,27]) относительно биссектрисы первого координатного угла (штрихпунктирная линия). Можно по-другому: повернуть плоскость рисунка  $XOY$  на угол  $180^\circ$  относительно биссектрисы первого координатного угла [21,108; 30,27]. Обозначение  $X'OY'$  (отмечены штрихами, чтобы отличать их от координат  $XOY$ ) рис.6а справа – это переименование координат после выполнения зеркального отображения. В результате преобразования (учитывая, что при значении  $x = a$  значение  $y_a = c_1 \cdot a$ ) получим прямую линию  $y' = a \cdot x' / y_a$  ( $0 \leq x' \leq y_a$ ) (рис.6а стр.26 пунктирная стрелка) в координатах  $X'OY'$ , которая проходит через точку  $(0,0)$  под углом  $\alpha' = \pi/2 - \alpha$  к оси  $X'$ . Каждая точка, определяемая парой  $(x_{v,n}, y_{v,n})$ , преобразуется в точку, соответствующую паре  $(x'_{v,n} = y_{v,n}/c_1, y'_{v,n} = x_{v,n})$ . Для наглядности на рисунке 6а справа дополнительно изображены две точки, соответствующие указанным парам, а их координаты, обозначены сплошными и пунктирными линиями соответственно.

В результате получим точки, определяемые парами  $(x'_{v,n} = y_{v,n}/c_1, y'_{v,n} = x_{v,n})$ , в координатах  $X'OY'$ . Соответственно, отклонения точек  $(x'_{v,n} = y_{v,n}/c_1, y'_{v,n} = x_{v,n})$  от прямой линии  $y' = a x' / y_a$  по оси  $X'$  равны  $\delta(x_{v,n}) = \delta(x'_{v,n}) = x'_{v,n} -$

$a \cdot x'_{v,n}/y_a$ . Оценки математического ожидания  $m_Y$  случайной величины  $X$  в точках измерений равна  $\tilde{m}_X^{(v)} = \sum_1^N \{x'_{v,n} - a \cdot x'_{v,n}/y_a\}/N$ , а обобщенная оценка  $\tilde{m}_X = \sum_1^V \tilde{m}_X^{(v)}/V$ .

**{А.13.2}** При  $N$  испытаниях с  $V$  точками измерений определяются оценки математических ожиданий погрешностей:

1) в точках измерений:

$$\tilde{m}_X^{(v)} = \sum_1^N \{x'_{v,n} - a \cdot x'_{v,n}/y_a\}/N, \quad \tilde{m}_Y^{(v)} = \sum_{n=1}^N \{y_{v,n} - \tilde{y}(x_{v,n})\}/N; \quad \{5\}$$

2) обобщенные:  $\tilde{m}_X = \sum_1^V \tilde{m}_X^{(v)}/V$ ,  $\tilde{m}_Y = \sum_{v=1}^V \tilde{m}_Y^{(v)}/V$ . {5\*}

**{А.13.3}** По данным экспериментов оценки математических ожиданий  $\tilde{m}_X^{(v)}$ ,  $\tilde{m}_Y^{(v)}$  и  $\tilde{m}_X$ ,  $\tilde{m}_Y$ , вычисляются в собственной системе координат  $XOY$  относительно линии регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 x$ .

1. Точки  $(\tilde{m}_X^{(v)}, \tilde{m}_Y^{(v)})$ , определяемые оценками математических ожиданий, относятся к двумерной области определения совместного распределения погрешностей в данной точке измерения  $v=1,2,\dots,V$ . Точку  $(\tilde{m}_X, \tilde{m}_Y)$ , определяемую обобщенными значениями, можно отнести к двумерной области определения совместного распределения погрешностей в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ . 2. Значения  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$  вычисляются по всем точкам изображенным на рисунке 6а (стр.26), а значения  $\tilde{m}_X^{(v)}$  и  $\tilde{m}_Y^{(v)}$  – по точкам в прямоугольнике, ограничивающего область совместного распределения погрешностей (образован штриховыми границами: штриховые стрелки показывают собственную систему начальных координат распределения). Таких областей на рисунке семь.

По всем канонам, определение значений  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$  (или  $\tilde{m}_X^{(v)}$  и  $\tilde{m}_Y^{(v)}$ ) соответствует вычислению выборочных характеристик распределения случайной величины (в данном случае – погрешностей измерений параметров) по результатам  $K = V \cdot N$  (или  $N$ ) экспериментов.

**{А.13.4}** Подход, изложенный в п.3 примера 5 (стр.28), определяет по результатам испытаний координаты точек  $(x'_{v,n} = x_{v,n} - x_v^d, y'_{v,n} = y_{v,n} - y_v^d)$  и оценки математических ожиданий  $\tilde{m}_X^{(v)}$ ,  $\tilde{m}_Y^{(v)}$  и  $\tilde{m}_X$ ,  $\tilde{m}_Y$  именно в собственных координатах двумерного распределения погрешности измерений (положение {А.13.3}).

**Замечания 7.** 1. Оценки математических ожиданий  $\tilde{m}_X^{(v)}$  и  $\tilde{m}_Y^{(v)}$ , предельные в точках измерений отличаются друг от друга, а точность их определения естественно хуже, чем обобщенных оценок  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$ . 2. Линия регрессии  $\tilde{y}_1 = \tilde{M}_Y^1 + \eta_1(x - \tilde{M}_X^1)$  проходит через точку  $(\tilde{M}_X^1, \tilde{M}_Y^1)$  и некоторым образом (в соответствии с условием наилучшего приближения метода) располагается между точками  $(\tilde{m}_X^v, \tilde{m}_Y^v)$ . 3. При применении метода наименьших квадратов для определения коэффициентов  $\eta_0$  и  $\eta_1$  линии регрессии лучше использовать точки  $(\tilde{M}_X^{(v)}, \tilde{M}_Y^{(v)})$ , где  $\tilde{M}_X^{(v)} = \sum_1^N x_{v,n}/N = x_v^d + (\tilde{m}_X^{(v)} - m_X)$ ,  $\tilde{M}_Y^{(v)} = \sum_1^N y_{v,n}/N = y_v^d + (\tilde{m}_Y^{(v)} - m_Y)$  {6}, – математические ожидания, определенные по точкам, принадлежащим области определения совместного распределения погрешностей в данной точке  $x_v^d$  измерений.

Из анализа, по крайней мере, стало понятно, что и как определяется по системе экспериментальных точек в принятой теории: что следует

оставить, что отбросить и какие результаты, полученные на основе новой исходной системы случайных величин, можно будет использовать в дальнейшем.

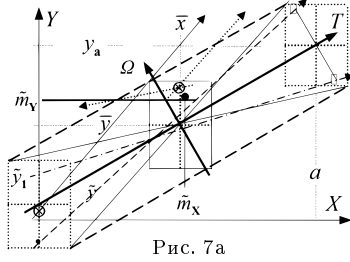


Рис. 7а

$\tilde{y}_1 = \tilde{M}_Y^1 + (x - \tilde{M}_X^1) \operatorname{tg}(\tilde{\alpha}_1)$  (штрихпунктирная стрелка), полученная зеркальным отображением линии  $\tilde{y}$  относительно оси  $T$ . Возможность существования линии  $\tilde{y}_1$  ни теория вероятностей, ни математическая статистика не определяет, ибо для этого никаких объективных предпосылок нет. 6. Расстояния от линий  $\tilde{y}$  и  $\tilde{y}_1$  (точки пересечения линий с линией, параллельной оси  $\Omega$ , отмечены окружностями) до оси  $T$  одинаковы.

Две сплошные тонкие линии, проходящие через противоположные вершины крайних прямоугольников, определяют границы максимально возможных отклонений направления  $|\tilde{\alpha}_{\max} - \alpha_0|$  экспериментальных линий  $\tilde{y}_k$  от теоретической линии  $y = c_0 + c_1x$ . Из геометрии легко следует, что они проходят через точку  $\{\tilde{x} = b/2, \tilde{y} = (y_b - y_0)/2\}$  {10}.

п.2. В принятой теории, во-первых, не существует границ максимально возможных отклонений, а во-вторых, предварительно вычисляются доверительные границы для коэффициентов  $\eta_0$  и  $\eta_1$  [12,342-346]: это вносит большую неопределенность в решение задачи прогноза. Для наглядного представления, какова реальная «стоимость прогноза», предлагаемого существующей теорией, маленьким кружком отмечена точка пересечения линии  $\tilde{y}$  с линией  $y = 0$ , т.е. значение коэффициента  $\eta_0$ , погрешность которого оценивается.

Точка на линии  $y = 0$  (отмечена крестиком в окружности) показывает условно верхнюю границу допустимого интервала для коэффициента  $\eta_0$ . Тонкая сплошная стрелка (угол  $\tilde{\alpha}'$  больше, чем угол  $\tilde{\alpha}_1$  ( $\operatorname{tg} \tilde{\alpha}_1 = \eta_1$ )) условно показывает верхнюю границу допустимого интервала, с учетом погрешности коэффициента  $\eta_1$ . Чтобы показать нижнюю границу, необходимо: точку, отмеченную крестиком, переместить ниже точки  $\eta_0$ , а затем провести через нее прямую линию под углом  $\tilde{\alpha}''$ , меньшего, чем угол  $\tilde{\alpha}_2$ .

Есть работы, например [12], в которых допустимые интервалы определяются в центральной системе координат. В этом случае минимальное отклонение границы допустимого интервала от линии  $\tilde{y}$  определяется точкой на линии  $y = \tilde{x}$  и увеличивается при удалении от начала отсчета (пунктирные стрелки).

Чем «круче» линия, тем хуже прогноз: И какова «цена» прогноза?

**Замечания 8.** На величину максимально возможных отклонений  $|\tilde{\alpha}_{\max} - \alpha_0|$  направления влияют: 1. Положение центра группирования  $\{\tilde{m}_X, \tilde{m}_Y\}$  погрешностей, вычисленного по результатам экспериментов. 2. Среднее арифметическое  $\tilde{x}$ , определяемое заданием точек измерения  $x_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ). При неравномерном расположении оно будет отличаться от значения  $\tilde{x} = a/2$ , что приведет к уменьшению разности  $|\tilde{\alpha}_{\max} - \alpha_0|$ . Если первая причина естественная – случайность присуща природе, то вторая – искусственная, созданная только нашим выбором точек измерения.

Обобщим то, что стало известно в результате анализа:

1. Связь между параметрами линейная, по крайней мере, у нас есть серьезные основания считать ее таковой. 2. Распределение *погрешностей измерения* параметров. 3. Семейство экспериментальных точек  $(x_{v,n}, y_{v,n})$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) ( $n=1,2,\dots,N$ ). 4. Оценки математических ожиданий  $\tilde{m}_X^{(v)}$ ,  $\tilde{m}_Y^{(v)}$  и  $\tilde{m}_X$ ,  $\tilde{m}_Y$  распределений погрешностей. 5. Экспериментальная прямая  $\tilde{y}_1 = \tilde{M}_Y^1 + \eta_1(x - \tilde{M}_X^1)$ , проходящая через точку  $(\tilde{M}_X^1, \tilde{M}_Y^1)$  под углом  $\tilde{\alpha}_1$  к оси  $X$ , который определяется значением  $\tilde{\alpha}_1 = \arctg(\eta_1)$ , и принадлежность точки  $(\tilde{m}_X, \tilde{m}_Y)$  этой прямой. 6. Принадлежность точки  $(m_X, m_Y)$ , т.е. центра группирования совместного распределения погрешностей, теоретической прямой  $y = c_0 + c_1x$ . 7. Точки  $(x'_{v,n}, y'_{v,n})$  и оценки математических ожиданий  $\tilde{m}_X^{(v)}$ ,  $\tilde{m}_Y^{(v)}$  и  $\tilde{m}_X$ ,  $\tilde{m}_Y$  определены в собственных координатах двумерного распределения погрешности измерений (положение {А.13.3} стр.30).

Не так уж мало. Дополним анализ некоторыми подробностями, которые, возможно, пригодятся при дальнейших исследованиях.

**Замечание 9.** Отметим, что угол  $\alpha_0 = \beta_1$  определяет точное значение (пример 5 своство VII [31,26]) коэффициента  $c_1 = \text{tg}(2\beta_1) = 2K_0(X, Y)/\{D_0(X) - D_0(Y)\}$  теоретической прямой  $y = c_0 + c_1x$ . Очевидно: если положить  $\eta_1 = c_1$ , то значения углов  $\alpha_0$  и  $\tilde{\alpha}_1$  будут одинаковы. Т.е., рассматривая совокупность экспериментальных точек, как некоторое двумерное распределение, можно утверждать, что название *ковариация экспериментального* коэффициента  $\tilde{K}_0(X, Y) = \sum_1^V x_v y_v / V$  можно применять, однако не следует забывать, что *трактовка ковариации неверна*. Важно только последнее утверждение в фразе.

Из анализа, данного в примере 6, также следует:

{А.14.1} Проведение  $N$  испытаний определяет (п.3 примера 5 стр.28)  $V$  точек  $\{\tilde{m}_X^v, \tilde{m}_Y^v\}$ , находящихся в прямоугольниках, определяющих область определения совместного распределения погрешностей в точках измерений  $v=1,2,\dots,V$ , по которым вычисляются обобщенные оценки  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$  математических ожиданий.

{А.14.2} Для каждой  $\tilde{y} = \tilde{M}_Y + (x - \tilde{M}_X)\text{tg}(\tilde{\alpha})$  из возможных линий {8}, существует множество линий  $\tilde{y}_j = \tilde{M}_Y^j + (x - \tilde{M}_X^j)\text{tg}(\tilde{\alpha}_1)$  {8\*}, направление которых определяется условием  $\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1$ . {9}

Из геометрии следует, что положение {А.14.2} означает: *зеркальное отображение*, например, линии регрессии  $\tilde{y} = \tilde{M}_Y + (x - \tilde{M}_X)\text{tg}(\tilde{\alpha})$ , относительно теоретической прямой линии  $y = c_0 + c_1x$  (рис.7а сплошная стрелка ось  $T$ ). Угол  $\tilde{\alpha}_0 = (\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}_1)/2$  определяет коэффициент  $c_1 = \text{tg}\alpha_0$  теоретической линии, т.е. *точное направление* оси  $T$  (остальные линии параллельны ей). Множество линий, определенных формулой {8}, бесконечно. Из него отбирается множество (тоже бесконечное) только тех линий {8\*}, которые отвечают условию {9}.

Теперь приступим к основной цели нашего исследования: определению погрешности построения аппроксимирующей функции и решению задачи прогноза.



### 1.3.3. Погрешность построения линейной функции

Ранее для проведения анализа нами было принято предположение о том (замечание 6.2 стр.27), что значения  $x_{v,n}$  и  $y_v^d$  известны. Рассмотрим, к чему приводит это предположение.

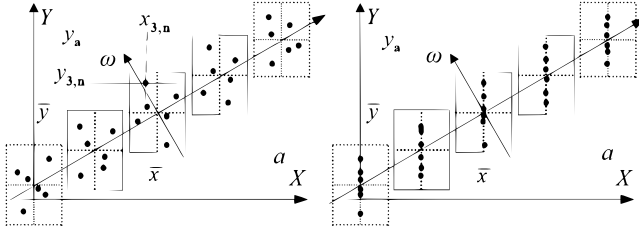


Рис. 7b

динахах  $X'OY'$  двумерного распределения (стр.24 рис.5 штриховые стрелки).

Рассмотрим точку  $(x_{4,n}, y_{4,n})$ , координаты которой показаны на рисунке. По значениям  $x_{4,n}$ ,  $y_{4,n}$ ,  $x_4$  и  $y_4$  определяются координаты  $x'_{4,n} = x_{4,n} - x_4$  и  $y'_{4,n} = y_{4,n} - y_4$ . Совместим точку  $(x'_{v,n}, y'_{v,n})$  в области совместного распределения погрешностей с точкой  $(x_{v,n}, y_{v,n})$ . Тогда точка  $(m_X^{(4)}, m_Y^{(4)})$  (верхний индекс обозначает принадлежность точки  $(m_X^{(4)}, m_Y^{(4)})$  области, связанной с данной точкой измерений) принадлежит теоретической линии  $y = c_0 + c_1x$ . Утверждение легко распространяется на все точки в каждом из прямоугольников. Таким образом, при известных значениях  $x_{v,n}$  и  $y_v^d$ , легко построить искомую прямую линию  $y = c_0 + c_1x$ : она проходит через полученные точки.

**п.2. Практика.** Однако реально неизвестны ни значения  $x_{v,n}$ , ни значения  $y_v^d$  (положения {A.12.2}-{A.12.3} стр.26). Рассмотрим, какое влияние оказывает это незнание на погрешность построения линейной зависимости.

**1. Неопределенность значений  $x_{v,n}$**  координат определяет необходимость значения координат  $y_{v,n}$  приписывать точкам  $(x_v^d, y_{v,n})$  на линиях  $y = x_v^d$  (рис. 7b справа).

Т.е. по факту мы считаем, что измерение параметра  $Y$  в эксперименте производится при значении  $x_v^d$ . Значение  $y_{v,n} = c_0 + c_1x_v^d + y'_{v,n} + c_1x'_{v,n}$ , полученное в эксперименте, отличается от значения  $\hat{y}_{v,n} = c_0 + c_1x_v^d + y'_{v,n}$ , которое должно было бы быть при измерении в точке  $x_v^d$ , на величину  $\delta'_{v,n} = y_{v,n} - \hat{y}_{v,n} = c_1x'_{v,n}$ , что приводит к некоторому искажению оценки погрешности построения линейной функции при малом числе испытаний. Но в эксперименте появилось именно это значение  $y_{v,n}$ , которое не зависит от того какое появилось значение  $x_{v,n}$ , поэтому мы не можем изменять значение  $y_{v,n}$ , ибо не имеем для этого никаких оснований.

**{A.14.3}** Таким образом, неизвестность значений  $x_{v,n}$  не приводит к изменению ординат точек  $(x_v^d, m_Y^{(v)})$ , следовательно, они определяют искомую прямую линию.

Эта неизвестность определяет неточное вычисление допустимого интервала изменения параметра  $Y$ , что будет видно из последующего анализа (п.1 примера 8 стр.34).

**2. Неопределенность значений  $y_v^d$**  приводит к гораздо худшим последствиям. В результате неизвестно значение координаты  $y'_{v,n}$  в собственных координатах

#### Пример 7. п.1.

**Теория.** Пусть для известной зависимости  $y = c_0 + c_1x$  (ось  $\tau$  рис.7b слева), в испытаниях получены значения координат  $x_{v,n} = x_v + x'_{v,n}$  и  $y_{v,n} = y_v + y'_{v,n}$ , где  $v = 1, 2, \dots, 5$  – номер заданной точки измерений,  $n = 1, 2, \dots, 6$  – номер испытания,  $x'_{v,n}$  и  $y'_{v,n}$  – значения координат в собственных координатах

так  $\tau'_{0\omega'}$  совместного распределения погрешностей. А это значит, что с точкой  $x_v^d, y_{v,n}$  можно совместить любую точку в области, в которой определено распределение погрешности измерения параметра  $Y$ . Если проведено несколько испытаний, то результат улучшается: расстояния между точками (рис.7б справа) сохраняются, что уменьшает неопределенность положения точек.

п.3. Из анализа в п.2 следует: по системе экспериментальных точек *проще вычислять числовые характеристики* распределений погрешностей измерений *непосредственно в координатах*  $XOY$ . Это было продемонстрировано в п.3 примера 5 (стр.28). Подобный подход применен в работе [12,338] для вычисления выборочной дисперсии  $\hat{D}(Y)$  (замечание 18 стр.56) при линейной зависимости параметров.

Найти точное решение задачи, определенной в п.2.2 примера, не представляется возможным (**а жаль – красиво было бы**).

Подход к определению *погрешности построения* прямой линии, по сути, *подобен подходу, принятому в математической статистике*. На основе метода наименьших квадратов, определена *линия*  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$  *регрессии*, параметры которой равны значениям  $\eta_0 = \tilde{M}_{\mathbf{Y}} - \eta_1 \cdot$  и  $\eta_1 = \sum_1^K x_k y_k / \tilde{D}(\mathbf{X}) = \mathbf{tg} \tilde{\alpha}$ . По *данным экспериментов дополнительно* вычислены *оценки*  $\tilde{m}_{\mathbf{X}}^{(v)}$  и  $\tilde{m}_{\mathbf{Y}}^{(v)}$  *математических ожиданий*  $m_{\mathbf{X}}^{(v)}$ ,  $m_{\mathbf{Y}}^{(v)}$  ( $v=1, 2, \dots, V$ ) в точках измерений и их *обобщенные оценки*  $\tilde{m}_{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{m}_{\mathbf{Y}}$ , определенные по *всем точкам*.

Далее применяется постановка задачи, принятая в математической статистике: относительно линии регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$ , определить интервал, в котором с заданной вероятностью будет находиться истинная линия  $y = c_0 + c_1 x$ .

Дополнительные данные, вычисленные в разделе, и составили основу, на которой проведена разработка уточненного подхода к оценке погрешности построения прямой линии.

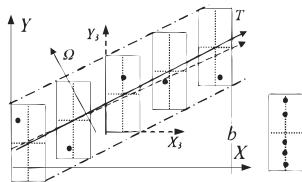


Рис. 8а

оценки математических ожиданий вычисляются *относительно собственной системы* координат  $x'0y'$  (положение  $\{A.13.3\}$  стр.30), которые обозначены пунктирными стрелками, то ее центр группирования (замечание 7.2 стр.30) расположен на прямой линии  $\tilde{y}_{v,1} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x_v^d$  (оси  $\tau'$ ). Можно сказать по-другому. Если в точках  $x_v^d$  измерений ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) данного эксперимента реализовались значения  $\tilde{y}_{v,n} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x_v^d$ , то применение метода наименьших квадратов к системе точек  $(x_v^d, \tilde{y}_{v,n})$  дало бы прямую линию  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$ .

3. В области определения, расположенной на

**Пример 8.** На рисунке 8а даны изображения: 1. Линия регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$  (координаты  $\tau^0 0\omega'$ , штриховые стрелки) и исходная прямая линия  $y = c_0 + c_1 x$  (сплошная стрелка)), определенная по  $K = V \cdot N$  экспериментальным точкам  $(x_v^d, \tilde{y}_{v,1})$  ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). 2. Область определения распределения погрешности (прямоугольник с пунктирными сторонами). Так как координаты точек и оценки математических ожиданий вычисляются *относительно* координат  $x^0 0\omega'$  (положение  $\{A.13.3\}$  стр.30), которые гребками, то ее центр группирования (замечание 7.2 стр.30)  $\tilde{y}_{v,1} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x_v^d$  (оси  $\tau'$ ). Можно сказать по-другому. Если  $v = 1, 2, \dots, V$  данного эксперимента реализовались значения  $y_v$  и метода наименьших квадратов к системе точек  $(x_v^d, \tilde{y}_{v,1})$   $\eta_0 + \eta_1 \cdot x$ . 3. В области определения, расположенной на

конце исследуемого отрезка (линия  $y = a$ ), изображены все экспериментальные точки  $(x_v^d, y_{v,n}')$  ( $v = 1, 2, \dots, 7$ ), определенные в пяти ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) испытаниях.

п.1. Обратим внимание на то, что точки *одновременно* принадлежат *области определения* распределения погрешностей, *центр группирования* ( $m_X, m_Y$ ) которой *принадлежит* *искомой* линии  $y = c_0 + c_1x$  (положение {A.12.1} стр.25). Известно, что расстояния между точками, определенными в данных экспериментах, сохраняются (п.2 примера 6 стр.31), но расположение группы точек в этой области неизвестно.

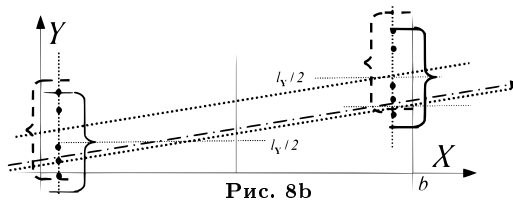


Рис. 8b

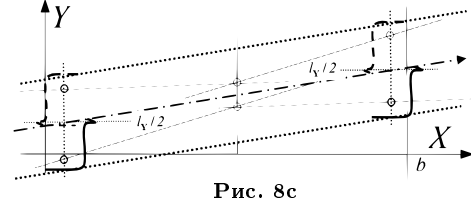


Рис. 8c

Очевидно, что можно исходить из крайнего случая: положить, что *крайняя верхняя* точка принадлежит *верхней границе* *искомого положения* распределения: область определения обозначена сплошной двусторонней стрелкой и ограничивающими линиями. Если провести линию, проходящую через точки  $(x_1^d, m_Y)$  и  $(x_5^d, m_Y)$ , то получим штрихпунктирную линию, которая *ограничивает снизу* *возможные положения* *искомой* линии  $y = c_0 + c_1x$  для *расположения* точек, полученного в *данной серии экспериментов*. Второй крайний случай: полагаем, что *самая нижняя* точка принадлежит *нижней границе* *положения* *искомого* распределения. Ее область определения обозначена штриховой двусторонней стрелкой и ограничивающими линиями. На этой основе получим линию, которая *ограничивает сверху* *возможные положения* *искомой* линии  $y = c_0 + c_1x$  для *расположения* точек, полученного в *данной серии экспериментов*.

Отметим: нами принято, что крайние нижние и верхние точки имеют максимальные отклонения, полученные в эксперименте, поэтому они параллельны оси  $\tau'$ , но это принято только для упрощения изображения и не влияет на ход дальнейших рассуждений.

В другой серии экспериментов получим другое расположение точек, другую линию регрессии и другое расположение линий, ограничивающих возможные положения *искомой* линии. Пусть крайние экспериментальные точки приближаются к верхней и нижней границам распределения, которое связано с линией регрессии. Тогда линии, ограничивающие возможные положения *искомой* линии, будут сближаться друг с другом. Если крайние экспериментальные точки приближаются к линии регрессии, то линии, ограничивающие возможные положения *искомой* линии, будут отдаляться друг с друга.

Может не очень точно, но геометрическая картинка в целом правильно отражает существо решаемой задачи. Мало того, на основе геометрической модели легко показать, что границы максимально возможных отклонений *искомой* линии от линии регрессии не могут превышать значений  $m_Y$  и  $l_Y - m_Y$ . При симметричных распределениях (замечание 3.1 стр.24) —  $m_Y = l_Y/2$ : т.е. нижняя и верхняя границы максимально возможных отклонений проходят через точки  $\{x_v^d, \hat{y}(x_v^d) - m_Y\}$  и  $\{x_v^d, \hat{y}(x_v^d) + m_Y\}$  (рис.8b-8c пунктирные прямые линии).

{A.14.4} Это значит: *искомая* линия может находиться только в пределах области, в которой определено распределение погрешностей измерения параметра  $Y$ , центр группирования которого принадлежит линии регрессии.

Следовательно, для определения допустимых отклонений с заданной вероятностью

можно применять теоретическое распределение погрешности (или распределения, связанные с ним) измерений параметра  $Y$ .

**{А.14.5}** Экспериментальные точки  $x_v^d, y_{v,n}$  «служат одной цели», – определению линии регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$  из условия наилучшего приближения функции (в данном случае – условия метода наименьших квадратов).

А вот оценки  $\tilde{m}_Y, \tilde{m}_Y^{(v)}$  ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) математических ожиданий, определению которых посвящена большая часть этого раздела, не играют в этом никакой особой роли. Возможно несколько странно, но с этим фактом приходится мириться.

**{А.14.6}** Значение имеет только число экспериментальных точек  $K = V \cdot N$ , определяемых числами точек измерения  $V$  и испытаний  $N$ . Именно оно определяет распределения выборочных характеристик [10,86].

Ранее сказано (п.2.1 примера 5 стр.26): экспериментальные значения  $x_{v,n} = x_v^d + x'_{v,n}$  неизвестны. Однако мы, знаем, что отклонения от заданных значений  $x_v^d$  (положение А.12.2 стр.26) существуют и проведен анализ их влияния на погрешность построения линейной зависимости между двумя параметрами. Это позволяет, с учетом отмеченных выше особенностей, определить влияние распределения погрешностей измерения параметра  $X$  на погрешность определения линии регрессии. Отсюда следует:

**{А.14.7}** Максимально возможные отклонения искомой прямой линии от линии регрессии определяются линиями, проходящими через вершины прямоугольников (ограничивающих область определения совместного распределения погрешностей измерения параметров), которые расположены выше или ниже линии регрессии.

Если учесть погрешность измерений параметра  $X$ , то максимально возможную неточность вычисления допустимого интервала определяет отличие в расстояниях между 2-мя пунктирными и 2-мя штриховыми линиями (замечание к положению {А.14.3} стр.33). Далее показано (при анализе построения нелинейной связи между параметрами, раздел 1.3.4 стр.40), что неточность вычисления зависит от отношения  $l_X/l_Y$  (где  $l_X$  и  $l_Y$  – области определения распределения параметров  $X$  и  $Y$ ).

Таким образом, границы максимально возможных отклонений, изображенных на рис.8с стали подобны, изображенным на рис.5, 6а, 7а (стр. 24, 26, 34). Это подобие вполне понятно: на рис.5, 6а, 7а возможные отклонения определялись относительно теоретической линии  $y = c_0 + c_1 x$ . А на рис.8с – относительно линии регрессии, полученной по совместному распределению погрешностей, которое связано с линией  $y = c_0 + c_1 x$ .

**{А.14.8}** Следовательно, имеем одни и те же точки, определенные одним и тем же распределением погрешностей измерений, но только в смещенных системах координат.

п.2. Теперь о погрешности определения зависимости и допустимых пределах изменения параметра  $Y$  (решение задачи прогноза).

Линия регрессии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$  определяется по  $K = V \cdot N$  экспериментальным точкам, соответственно, распределения обобщенных оценок  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$  (выборочные характеристики) математических ожиданий  $m_X$  и  $m_Y$  характеризуются плотностями  $p^{(K)}(x)$  и  $p^{(K)}(y)$  (индекс означает число испытаний, по кото-

рым определена характеристика) [10,86]. Совместное распределение обобщенных оценок  $\tilde{m}_X$  и  $\tilde{m}_Y$  определяется выражением  $p^{(K)}(x, y) = p^{(K)}(x) \cdot p^{(K)}(y)$ .

**1-й вариант.** Проведя прямую линию, параллельную линии  $\tilde{y} = \eta_0 + \eta_1 \cdot x$ , по распределению  $p^{(K)}(x, y)$  для требуемого значения доверительной вероятности  $P_{\text{дор}}$  вычисляется величина допустимого интервала возможных отклонений истинной линии  $y = c_0 + c_1 x$  от линии регрессии.

Можно показать, что при одной и той же доверительной вероятности допустимый интервал возможных отклонений истинной линии  $y = c_0 + c_1 x$  от линии регрессии уменьшается при увеличении общего числа точек.

**2-й вариант.** **1-й шаг.** По плотности  $p^{(K)}(y)$  распределения выборочного математического ожидания  $\tilde{m}_Y$  с центром группирования в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$  для доверительной вероятности  $P'_{\text{дор}}$  определяем некоторое значение  $\delta_0(m_Y)$  доверительного интервала для математического ожидания  $m_Y$  в этой точке измерений. **2-й шаг.** Используя ту же плотность  $p^{(K)}(y)$  распределения, но с центром группирования в точках  $(0, \eta_0)$  и  $(b, \eta_0 + \eta_1 \cdot b)$  для значения вероятности  $P''_{\text{дор}}$  определяем некоторое значение  $\delta_j(m_Y)$  ( $j=1,2$ ) доверительного интервала для математического ожидания  $m_Y$  в точках  $(0, \eta_0)$  и  $(b, \eta_0 + \eta_1 \cdot b)$ . **3-й шаг.** Три полученные точки отмечены на соответствующих линиях увеличенной окружностью. Соединив прямыми линиями две точки на краях отрезка с точкой посередине его, получим границы допустимых значений параметра  $Y$  (стр.35 рис.8с тонкие штриховые и штрихпунктирные линии). Значения  $P'_{\text{дор}}$  и  $P''_{\text{дор}}$ , учитывая одновременность появления событий соответствующих этим вероятностям, должны отвечать условию  $P'_{\text{дор}} \cdot P''_{\text{дор}} = P_{\text{дор}}$ , где  $P_{\text{дор}}$  – требуемое значение доверительной вероятности. Очевидно, что должно быть  $P'_{\text{дор}} > P_{\text{дор}}$  и  $P''_{\text{дор}} > P_{\text{дор}}$ . Если  $P''_{\text{дор}} = P'_{\text{дор}}$ , то получим прямую линию, т.е. разновидность 1-го варианта, не учитывающего погрешность измерения параметра  $X$ . При значении  $P''_{\text{дор}} > P'_{\text{дор}}$  получим картину, изображенную на рис.8с, а при значении  $P''_{\text{дор}} < P'_{\text{дор}}$  – наклон прямых линий к оси  $0\tau'$  (рис.8с стр.35) будет противоположным наклону, изображенному на рисунке.

Аналогичным образом определяются нижние границы доверительных интервалов: соответствующие точки обозначены прямым крестиком в окружности.

**3-й вариант.** Если по существу, то это 2-й вариант, в котором вместо распределения  $p^{(K)}(y)$  параметра  $Y$ , применяются плотность  $p^{(K)}(x, y)$  совместного распределения выборочных характеристик  $\delta(m_X)$  и  $\delta(m_Y)$ . Это попытка учесть и погрешность измерения параметра  $X$ .

Однако небольшое изменение исходных данных существенно усложняет решение задачи. Для определения, например, правой верхней границы (рис.8с стр.35) допустимых отклонений нам не удастся (как во 2-м варианте) вычислить 2-е точки, через которые проходит ограничивающая прямая линия  $y_{\text{дор}}^{1,B}(x) = a_{\text{дор}}^{1,B} + b_{\text{дор}}^{1,B} x$ .

Коэффициенты  $a_{\text{дор}}^{1,B}$  и  $b_{\text{дор}}^{1,B}$  находятся из системы уравнений, определяемых условиями равенства интегралов по части среднего и правого прямоугольников, которые лежат ниже прямой линии  $y_{\text{дор}}^{1,B}(x)$ , заданным значениям  $P'_{\text{дор}}$  и  $P''_{\text{дор}}$  доверительной вероятности.

Решение можно упростить (за счет небольшой потери точности), если в среднем прямоугольнике вместо распределения  $p^{(K)}(x, y)$  использовать распределение  $p^{(K)}(y)$ .

**Замечания 10.** **1.** Выбор варианта зависит от конкретных условий, в том числе от возможности проведения экспериментов в той или иной редакции. Например, допускаемый диапазон изменений параметра  $Y$ , шире диапазона, определяемого границами максимально возможных отклонений: ни какой из вариантов не требуется. Поэтому предпочтения какому-либо из вариантов не отдается. **2.** Есть «соблазн» ограничиться двумя точками измерений. Однако можно «не заметить», что реальная связь нелинейная: это легко видно из схемы на рис.3 (штрихпунктирная кривая стр.17).

Не поможет и многократное повторение эксперимента: необходимо проведение дополнительных измерений еще в каких-либо промежуточных точках. Мы вернемся к этому вопросу при рассмотрении нелинейной зависимости (раздел 1.3.4 пример 12 стр.47) между параметрами.

Следовательно, подход к построению *доверительного интервала*, в котором будет *находиться истинная прямая* линия, данный в примере 7, *подобен* подходу, *принятому* в математической статистике.

По сути, он *уточняет* (вообще говоря, достаточно существенно) *область возможных положений* искомой прямой линии. К сожалению, решение задачи прогноза на этом не заканчивается.

Дело в том, что параметр  $X$  во многих случаях является *случайной* величиной, *не связанной с погрешностью измерений*, и, как следствие связи  $y = c_0 + c_1x$ , параметр  $Y$  *также случаен*. В примере 4 (стр.16) показано, что *функциональная зависимость*  $y = f(x)$  между параметрами  $X$  и  $Y$  является *жесткой* (положения {A.8.2}-{A.9} стр.19), и *не зависит от случайного* характера параметров. Теперь необходимо разобраться *какое влияние* оказывает *погрешность измерений* построения зависимости на распределение параметра  $Y$ , если он *имеет случайный* характер.

**Пример 9. п.1.** Если бы была известна теоретическая прямая линия  $y = c_0 + c_1x$  (рис.9 тонкая сплошная стрелка ось  $\tau$ ), то по плотности распределения  $p_X^0(x)$  ( $0 \leq x \leq b$ ) (верхний индекс 0 означает, что распределение не является погрешностью измерений), применяя преобразование закона распределения (формулы (1) [30,9]) одномерной случайной величины  $X$ , легко определяется плотность  $p_Y^0(y)$  и закон  $P_Y^0(y_0 \leq y < y_{dan})$  (где  $y_0 = c_0$ ,  $c_0 \leq y_{dan} < y_b = c_0 + c_1b$ ) распределения величины  $Y$ . Значения  $y$  определяются линией  $y = c_0 + c_1x$  и не зависят от распределения вероятностей. Наибольшее и наименьшее значения находятся на границах отрезка ( $0 \leq x \leq b$ ). Вероятность того, что на интервале ( $0 \leq x' < x'_{max}$ ) значения  $y$  будут не больше некоторого значения  $y_m$  (точка на оси  $\tau$  справа) равна  $P_Y^0(y_0 \leq y < y_m) = P_X^0(0 \leq x' < x'_{max})$ , где  $x' = (y - c_0)/c_1$  – функция обратная функции  $y = c_0 + c_1x$ .

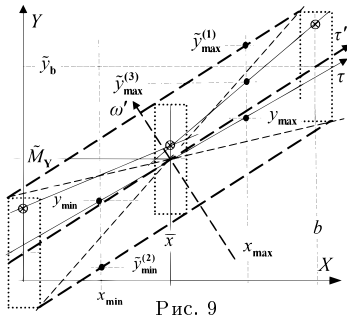


Рис. 9

Соответственно, вероятность того, что на интервале ( $x'_{min} \leq x' < b$ ) значения  $y$  будут не меньше некоторого значения  $y_{min}$  (точка на оси  $\tau$  слева) равна  $P_Y^0(y_{min} \leq y < y_a) = P_X^0(x'_{min} \leq x' < b)$ .

Причина анализа этого случая простая: если параметр  $Y$  определяется *функциональной зависимостью*  $y = f(x)$  от параметра  $X$ , то *появление в эксперименте конкретного значения* (воздействия)  $x'$  параметра  $X$  *неизбежно приводит* к появлению *конкретного значения* (отклика)  $y' = f(x')$  (в нашем случае  $y' = c_0 + c_1x'$ ) параметра  $Y$ .

Случайный характер параметра  $X$  определяет только то, что мы *не можем до проведения эксперимента* сказать какое *конкретное значение*  $x'$  параметра  $X$  (и соответствующее ему значение  $y' = f(x')$ ) *появится в эксперименте*. Мы можем только *утверждать*, что на интервале ( $0 \leq x_1 \leq x' < x_2 \leq b$ ) значение  $x'$  (и  $y' = f(x')$ ) появится

с вероятностью  $P_X^0(x_1 \leq x' < x_2)$ , определяемой *законом* распределения случайного параметра  $X$ . Это просто напоминание анализа, данного в разделе 1.2 стр.16 и разделе 1 работы [30,6-31].

Отметим три момента, косвенно следующих из анализа в [30,6-31].

{А.15} При *линейной зависимости*  $y = c_0 + c_1x$  случайной величины  $Y$  от случайной величины  $X$ , величина *отклонений* параметра  $Y$  определяется: 1. *Значением* коэффициента  $c_0$ , определяющим *положение* функции  $y = c_0 + c_1x$  *относительно начала* координат. 2. *Углом наклона* прямой линии  $y = c_0 + c_1x$  к оси  $X$  (т.е. значением коэффициента  $c_1$ ). 3. *Областью определения*  $l_X = |x_K - x_H|$  и *законом* распределения параметра  $X$ .

Обратим внимание на свойство *преобразования одномерных законов* распределения, следующее из анализа в пунктах 1-2, на котором мы не «заостряли» внимания в работе [30,6-31]: да там и повода для этого не было, но, в принципе, оно следует из выводов W.5-W.6 и W.11-W.12 [30,11,28].

{А.16} Пусть на отрезке  $a \leq x < b$  определены *плотность* распределения  $p_X(x)$  величины  $X$  и *формулы преобразования*  $y^{(n)} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Тогда *вероятность* того, что на *заданном* интервале  $a \leq x < x_{\text{дан}}$  значения  $y^{(n)}$  *будут не больше некоторого значения*  $y_{\text{дан}}^{(n)} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x_{\text{дан}}$  *одинакова для любой функции*  $y^{(n)} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x$  и равна  $P_Y^0(y_a^{(n)} \leq y^{(n)} < y_{\text{дан}}^{(n)}) = P_X^0(0 \leq x' < x'_{\text{дан}})$  (2).

1. В формулах:  $y_a^{(n)} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}a$  и  $x' = (y^{(n)} - c_0^{(n)})/c_1^{(n)}$  – функция, обратная функции  $y^{(n)} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}x$ . 2. Из анализа, данного в работе [30,6-31] следует, что утверждение справедливо для любых непрерывных однозначных функций  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ , ограниченных на отрезке  $(a \leq x < b)$ .

п.2. Теперь рассмотрим случай, когда *допускаемый диапазон изменений* параметра  $Y$ , по крайней мере, *не уже диапазона*, определяемого *границами максимально возможных отклонений*. Рис.9 (стр.38) – видоизмененный рис.7а дополненный границами (тонкие штриховые линии) *максимально возможных отклонений* угла наклона  $\tilde{\alpha} = \arctg \eta_1$  (направления) *искомой* линии  $y = c_0 + c_1x$  от линии регрессии (сравни с рис.7а стр.32). Границы *максимально возможных отклонений* *искомой* линии от линии *регрессии* определяются прямыми линиями  $\tilde{y}_{\text{max}} = \eta_0 + l_Y/2 + \eta_1(x + l_X/2)$  и  $\tilde{y}_{\text{min}} = \eta_0 - l_Y/2 + \eta_1(x - l_X/2)$ , проходящими через точки  $(-l_X/2, \eta_0 + l_Y/2)$ ,  $(b - l_X/2, y_b + l_Y/2)$  и  $(l_X/2, \eta_0 - l_Y/2)$ ,  $(b + l_X/2, y_b - l_Y/2)$  (рис.9 тонкие штриховые линии). Здесь, по существу, мы исходим из предположения: *границы максимально возможных отклонений* являются *максимально возможными отклонениями* *искомой* линии  $y = c_0 + c_1x$  от линии регрессии. Вероятность того, что на интервале  $(0 \leq x < x_{\text{max}})$  значения  $\tilde{y}^{(1)}$  будут не больше некоторого значения  $\tilde{y}_{\text{max}}^{(1)}$  (рис.9 точка на верхней границе) определяется формулами (2) и равна  $P_Y^0(\tilde{y}_0 \leq \tilde{y}^{(1)} < \tilde{y}_{\text{max}}^{(1)}) = P_X^0(0 \leq x' < x'_{\text{max}})$ , где  $x' = (\tilde{y}^{(1)} - \eta'_0)/\eta'_1$ ,  $\eta'_0$  и  $\eta'_1$  – коэффициенты прямой линии  $\tilde{y}^{(1)} = \eta'_0 + \eta'_1 \cdot x$ , определяющей верхнюю границу. Таким же образом, но только по *нижней границе максимально возможных отклонений*, определяется вероятность того, что на интервале  $(x_{\text{min}} \leq x < a)$  значения  $\tilde{y}^{(2)}$  будут не меньше некоторого значения  $\tilde{y}_{\text{min}}^{(2)}$  (стр.38 рис.9 точка на нижней границе).

Т.е. в этом случае, как и при известной зависимости  $y = c_0 + c_1x$ , для вычисления допустимого интервала определять погрешность построения линейной зависимости не требуется.

**п.3.** Очевидно, что *вычисление погрешности построения зависимости необходимо* тогда, когда *допускаемый диапазон изменений параметра Y уже диапазона, определяемого границами максимально возможных отклонений.*

*Верхняя граница допустимого интервала для некоторой промежуточной доверительной вероятности*<sup>34</sup>  $P_{\text{дор}}^{(pr)}$ , определенная по 2-му варианту, изображена 2-мя сплошными тонкими прямыми линиями, проходящими через точки, отмеченные крестиком в окружности. В этом случае для определения *верхней границы допустимого интервала* используется *предположение: искомая линия  $y = c_0 + c_1 x$  совпадает с верхней границей промежуточного допустимого интервала.* Вероятность того, что на интервале  $(0 \leq x < x_{\text{max}})$  значения  $\tilde{y}^{(3)}$  (точка на правой сплошной тонкой линии рис.8) будут не больше некоторого значения  $\tilde{y}_{\text{max}}^{(3)}$  вычисляется, как и предыдущем случае, по формулам (2) и равна  $P_Y^0(\tilde{y}_0 \leq \tilde{y}^{(3)} < \tilde{y}_{\text{max}}^{(3)}) = P_X^0(0 \leq x'' < x''_{\text{max}})$ , где  $x'' = (\tilde{y}^{(3)} - \eta_0'')/\eta_1''$ ,  $\eta_0''$  и  $\eta_1''$  – коэффициенты прямой линии  $\tilde{y}^{(3)} = \eta_0'' + \eta_1'' \cdot x$ , определяющей *верхнюю границу промежуточного допустимого интервала.* Примем для вероятности  $P_X^0(0 \leq x'' < x''_{\text{max}})$  обозначение  $P_{\text{дор}}'''$ .

Значения  $P_{\text{дор}}^{(pr)}$  и  $P_{\text{дор}}'''$ , учитывая *одновременность появления событий соответствующих этим вероятностям, отвечают условию*  $P_{\text{дор}}^{(pr)} \cdot P_{\text{дор}}''' = P'_{\text{дор}} \cdot P''_{\text{дор}} \cdot P'''_{\text{дор}} = P_{\text{дор}}$ , где  $P_{\text{дор}}$  – *требуемое значение доверительной вероятности.* Очевидно, что должно быть  $P'_{\text{дор}} > P_{\text{дор}}$ ,  $P''_{\text{дор}} > P_{\text{дор}}$  и  $P'''_{\text{дор}} > P_{\text{дор}}$ .

В заключение анализа отметим: при *линейной зависимости* между случайными параметрами  $Y$  и  $X$  решение задачи *прогноза* (т.е. «... указания пределов, в которых с наперед заданной надежностью<sup>35</sup> будет сохраняться интересующая нас величина, если другие связанные с ней величины получают определенные значения» [12,314]) определяется:

**I. Оценкой погрешности построения прямой линии  $y = c_0 + c_1 x$ :**

1. Значения коэффициента  $c_0$  (определяет положение функции).
2. Значения коэффициента  $c_1$  (определяет угол наклона  $\alpha$   $\text{tg} \alpha = c_1$  прямой линии к оси  $Ox$ ).

**II. Законом распределения параметра  $X$ , его областью определения и ее положением на отрезке  $(a \leq x < b)$**  (если она меньше отрезка).

Это позволяет влиять на отклонения параметра  $Y$ , во-первых, *уменьшением погрешности построения, повышая точность измерений и/или увеличивая число точек измерения и/или число испытаний.* Во-вторых, *изменяя (по возможности) область определения закона распределения параметра  $X$  и/или ее положение.*

Изменение области определения закона распределения возможно, например, если параметр  $X$  зависит от нескольких факторов, ограниченных допусками.

<sup>34</sup> Во 2-м варианте (п.2 примера 8 стр.36) она полагалась требуемой, но обстоятельства изменились: появилась еще одна случайная величина

<sup>35</sup> Т.е. с заданной доверительной вероятностью



### 1.3.4. Нелинейная связь между 2-мя параметрами

Теперь о влиянии погрешностей измерений на определение нелинейной зависимости между параметрами. Искомую функцию обычно представляют в виде  $y = \sum_1^K c_k \phi_k(x)$  (3) (где  $c_k$  – неизвестные коэффициенты,  $\phi_k(x)$  – система некоторых базисных функций, например, степенных, тригонометрических и т.п.). При таком представлении метод наименьших квадратов, при использовании принятой математической расшивки (положение {А.11.1} и замечание к нему, стр.22), дает систему линейных уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов.

Построение нелинейной регрессии  $y = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$  с применением метода наименьших квадратов рассматривается достаточно подробно, однако в просмотренной литературе мы нашли один частный случай (дан в работе [12, 347]) определения погрешности построения нелинейной линии регрессии, но рассматривать его не будем (методика основана на применении подхода, который предложен для линейной зависимости, раздел 1.3 стр.22).

**Пример 10.** На рис.10 даны изображения: 1а. Одной из кривых (утолщенная сплошная линия), приведенных на рис.3. (стр.17) с продолжением ее за пределы отрезка  $(0, a)$  до значения  $x = a1$ , где она положена убывающей. Цель такого продолжения кривой будет пояснена далее. 1б. Области определения совместного распределения погрешностей: прямоугольники с тонкими сплошными границами. Горизонтальная и вертикальная сплошная линия в прямоугольниках – центральные координаты, на которых определены погрешности измерений случайных величин  $X$  и  $Y$ . 1с. Штриховая тонкая стрелка  $\tau_1$  – касательная к кривой в точке  $\{x = 0, y(x = 0) = 0\}$ ; касательные  $\tau_2$ – $\tau_5$  (штриховые тонкие стрелки) к точкам перегиба на отрезках функции  $y = f(x)$ , на которых она почти линейна. Одна из точек изображена кружком в центре (положение {А.10.1} стр.20) двумерного распределения погрешностей. 1д. Для наглядности обозначено направление оси  $\omega_3$ , а окружностями – точки пересечения касательных.

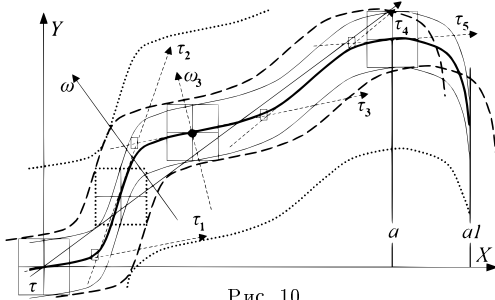


Рис. 10

п.1. **Во-первых:** тонкие сплошные кривые, полученные *смещением* кривой  $y = f(x)$  *параллельно* оси  $X$  *вдоль* оси  $Y$  до точек, определяющих *границы* распределения величины  $Y$ , являются, при отсутствии погрешности измерения параметра  $X$ , *границами максимально возможных теоретически отклонений* на отрезке  $(0, a)$ . Расстояния между границами зависят от угла наклона к оси  $X$  касательной к кривой в данной точке. *При учете* погрешности изме-

**Теория.** В принятой теории случайными считаются только смещения по оси  $Y$  (вертикальные штриховые линии в прямоугольниках). Число точек  $x_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) измерений полагается (например [12,335]) не меньше числа  $V \geq K$  коэффициентов  $c_v$  ( $k=1,2,\dots,K$ ), что естественно<sup>36</sup>. Из рисунка видно:

<sup>36</sup> Из опыта применения метода следует, что число точек измерения должно быть приблизительно в  $1,5 \div 2$  раза больше числа коэффициентов

рения параметра  $X$ , эти линии будут определять *границы некоторого доверительного интервала*. Его величина изменяется от точки к точке. Вероятность *нахождения внутри интервала* определяется по области в прямоугольниках, которая *ограничена отрезками кривых*: очевидно, что вероятности будут *зависеть от* расположения прямоугольников на кривой (точек измерения на оси  $X$ ). Это видно при сравнении области в прямоугольнике, контур которого выделен пунктирными линиями, с областями в других прямоугольниках на отрезке  $(0, a)$ .

**п.2. Во-вторых:** что будет, если *при учете* случайности *обоих* параметров, попытаться определить *границы максимально возможных теоретических отклонений* от кривой, ее *смещением вверх или вниз*, демонстрируют пунктирные кривые (верхняя кривая обрезана сверху, а нижняя – снизу). Точка касания пунктирной и штриховой кривой совпадает с вершиной одного из прямоугольников на отрезке  $(0, a)$ .

Построение *границ максимально возможных отклонений* на рис.10 самое простое: *одна кривая смещена параллельно оси  $X$  вверх* (вдоль оси  $Y$ ) и *влево* (вдоль оси  $X$ ); *вторая – вниз* (вдоль оси  $Y$ ) и *вправо* (вдоль оси  $X$ ) так, чтобы верхняя проходила через верхние вершины, а нижняя – через нижние вершины прямоугольников, расположенных на возрастающей ветви кривой (отрезок  $(0, a)$ ). Это достигается тогда, когда точку  $\{x = 0, y(x = 0) = 0\}$  пересечения кривой с осью  $Y$  совместить с *левой верхней* или *правой нижней* вершиной левого прямоугольника при плоскопараллельном перемещении кривой.

Вообще-то *реальные границы максимально возможных теоретических отклонений* проходят через *верхнюю левую и нижнюю правую* вершины прямоугольников, определяющих область *совместного распределения погрешностей измерений*. Можно по-другому: они *образуются отмеченными* вершинами при *плоскопараллельном перемещении* прямоугольника при *движении центра группирования* распределения (точки  $\{m_X, m_Y\}$ ) по кривой  $y = f(x)$ .

**п.3. В-третьих:** *границы доверительного интервала*, определяемого тонкими сплошными линиями, не соответствуют *границам максимально возможных отклонений*. Если, например, определять доверительную вероятность по прямоугольнику, выделенному утолщенными сплошными границами, то, при некотором значении вероятности, *границы доверительного интервала* окажутся в некоторых частях отрезка  $(0, a)$  *выше и/или ниже границ возможных теоретических отклонений*.

**п.4. В-четвертых:** рассмотрим продолжение кривой за пределами отрезка  $(0, a)$ . Если *учитывается только* случайность параметра  $Y$  (принятая теория), то тонкие сплошные кривые по-прежнему определяют *границы максимально возможных отклонений от теоретической кривой*. При *учете* случайности *обоих* параметров, построение *границ максимально возможных теоретических отклонений*, выполненное выше, приводит к несуразностям: при переходе на *убывающий* участок они *пересекаются и верхняя граница становится нижней*, а при последующем переходе на *возрастающий* участок – *опять пересекаются и меняются местами*.

**п.5.** Из результатов анализа следует: 1. Не очень понятно, как на основе принятого подхода оценить погрешность построения нелинейной зависимости (а, следовательно, и определить границы доверительного интервала). 2. Предложенная «методика смещений кривой – вверх влево, вниз вправо» от исходной кривой – определения *границ максимальных отклонений*, вроде

бы, не очень подходит для кривых общего вида.

**{А.17}** Далее будем рассматривать *монотонно возрастающую* (или убывающую) функцию.

Замечания к определению погрешности построению кривых более общего вида даны в конце раздела (пример 15 стр.52).

Чем ближе отношение  $l_X/l_Y < 1$  к нулю (рис.11 слева,  $l_X, l_Y$  – области определения погрешностей измерения параметров), тем ближе границы максимально возможных отклонений к приближению, принятому в действующей теории (рис.11 слева штрихпунктирные линии). Это понятно и, конечно же, замечательно.

Но существует и второе приближение, которое не рассматривается в принятой теории: если отношение  $l_Y/l_X < 1$  приближается к нулю, то можно не учитывать погрешность параметра  $Y$  (рис.11 справа). Чем ближе отношение к нулю, тем ближе приближенное положение границ максимальных отклонений к точному значению (тонкие сплошные кривые на рис.11 справа). Однако если и в этом случае пренебречь погрешностью параметра  $X$ , то получим (рис.11 справа) штрихпунктирные кривые: это, конечно же, сильно «сужает» интервал, в котором реально могут появляться экспериментальные точки. Отметим следующее:

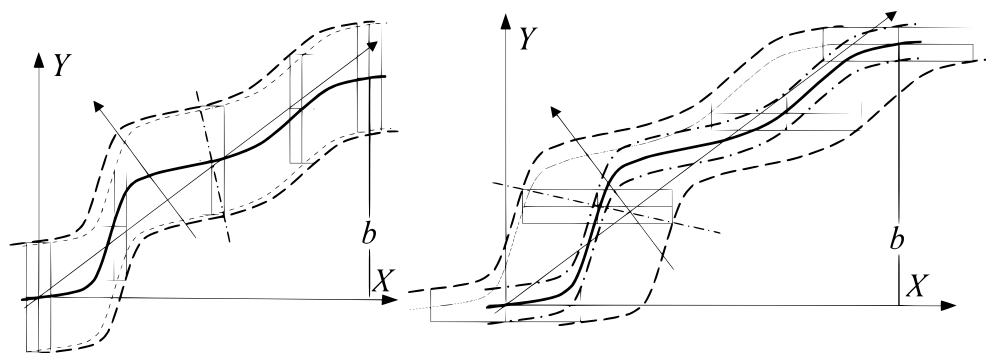


Рис. 11

**{А.18}** Если отношение  $l_Y/l_X = 1$ , то границы максимально возможных отклонений будут эквидистантными (равноотстоящими) по отношению к исходной кривой (т.е. будут иметь общие нормали и равные между собой отрезки нормалей между 2-мя кривыми).

Вообще-то, нас интересует подход, который, по крайней мере, обеспечивал бы приемлемое решение задачи при любом отношении  $l_X/l_Y$  и

заданной системе аппроксимирующих функций.

**Замечания 11.** 1. Можно попытаться доказать, что отличие в решениях, основанных на разных формулировках (положение {А.11.3} стр.23), будут уменьшаться и сходиться к точному решению при увеличении числа  $N$  заданных точек  $x_n$  ( $n=1,2,...,N$ ) измерения: после доказательства можно применять существующую математическую трактовку метода. В принципе, достаточно доказать, что при увеличении числа  $N$  заданных точек  $x_n$  измерения принятая формулировка обеспечивает сходимость к точному решению. 2. Можно воспользоваться методами математического анализа: *вычислить расстояние*  $s_n^2 = (x_n - x)^2 + [y_n - \sum_1^K c_k \phi_k(x_n)]^2$  *между каждой экспериментальной точкой и аппроксимирующей функцией из условия минимума*, т.е. обращение производной  $s'_n = -\{(x_n - x) + [y_n - \sum_1^K c_k \phi_k(x_n)] \sum_1^K c_k \phi'_k(x_n)\} / s_n$  в ноль (определение  $x_{\min}^n$  из уравнений  $(x_n - x_{\min}^n) + [y_n - \sum_1^K c_k \phi_k(x_{\min}^n)] \sum_1^K c_k \phi'_k(x_{\min}^n) = 0$ , в которое входят неизвестные коэффициенты  $c_k$ ), а затем, согласно *методу наименьших квадратов, минимизировать сумму квадратов* этих расстояний.

Есть определенная уверенность, что 1-я задача будет решена (может найдётся имеющееся решение: мы не искали). Она основана на практическом решении задачи аппроксимации зависимостей, которые определяются конечным числом степенных функций  $\phi_u(x) = a_u x^u$  ( $u=0,1,...,U$ ), а также некоторыми трансцендентными функциями.

**Замечания 12.** 1. Использовались одночлены данной степени  $2 \leq n \leq U$  и полиномы, определенные суммой функций  $\phi_u(x)$  максимальной степени  $u = m$ , например: 1)  $y^{(3)}(x) = a_0 + a_3 x^3$ ; 2)  $y^{(6)}(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_6 x^6$ ; 3)  $y^{(9)}(x) = a_1 x + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_9 x^9$ ; 4)  $y^{(10)}(x) = a_0 + a_3 x^3 + a_{10} x^{10}$  и т.п. 2. На отрезке ( $a \leq x \leq b$ ) задавались равномерно расположенные точки  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_V = b$  измерений. Для определенности положено  $a > 0$ . С точками  $\{x_v, y_v^{(u)}(x_v)\}$  связывались математические ожидания  $m_X$  и  $m_Y$  распрелений  $p_X(x)$  и  $p_Y(y)$  погрешностей измерений. Размеры их областей определения принимались равными  $l_X^{(m)} = 0, 2|b - a|$  и  $l_Y^{(u)} = 0, 2|y_{naib}^{(u)} - y_{naim}^{(u)}|$  соответственно, где  $y_{naib}^{(u)}$  и  $y_{naim}^{(u)}$  – наибольшее и наименьшее значения функции  $y^{(u)}(x)$  на отрезке ( $a \leq x \leq b$ ).

3. Для заданной функции  $y^{(m)}(x)$  в каждой точке измерений  $\{x_v^d, y_v^d = y_v^{(m)}(x_v)\}$  методом Монте-Карло разыгрывались, согласно распределениям вероятностей, значения  $\delta_{vn}^X$  и  $\delta_{vn}^Y$ , по которым вычислялись случайные значения координат  $x_{vn} = x_v^d + \delta_{vn}^X$  и  $y_{vn} = y_v^d + \delta_{vn}^Y$ . В результате моделирования определялась система точек  $\{x_{vn}, y_{vn}\}$ , где  $v=1,2,...,V$  и  $n=1,2,...,N$  – числа точек измерения и испытаний соответственно.

4. По системе точек  $\{x_{vn}, y_{vn}\}$  для каждой из рассмотренных функций  $y^{(u)}(x)$  методом наименьших квадратов определялись коэффициенты  $c_w$  аппроксимирующих функций  $y = \sum_{w=0}^W c_w x^w$ . Максимальная степень  $W$  аппроксимирующего полинома равна  $W = u - 2$ ,  $W = u$ ,  $W = u + 2$  и  $W = u + 5$ , где  $u$  – максимальная степень заданного полинома. Число точек измерения  $V$  первоначально принималось равным значениям  $V = W + 5$ , затем число точек удваивалось, т.е.  $V' = 2V, 4V, 8V, \dots$ . 5. Анализ полученных результатов показал: увеличение числа  $V$  (при числе испытаний  $N = 1$  и  $N = 10$ ) измерений параметров при значениях максимальной степени  $W \geq u$  аппроксимирующего полинома  $\Phi(x) = \sum_0^W c_w x^w$  определяет приближение аппроксимирующего полинома к заданному полиному  $y_{(u)}(x) = \sum_0^u c_w x^w$ . Например, для полинома 4) значения  $c_0, c_3$  и  $c_{10}$  приближаются к заданным коэффициентам  $a_0, a_3$  и  $a_{10}$ , а остальные значения  $c_1, c_2, c_4, \dots, c_9$  и  $c_{11}, c_{12}$  приближаются к 0. 6. Дополнительно проведены исследования с трансцендентными функциями (логарифмической функцией  $\ln(x)$ , синусом  $\sin(x)$ )

и гиперболическим синусом  $\text{sh}(x)$ ), а также некоторые комбинации из них. Для аппроксимации использовался степенной ряд  $\Phi(x) = \sum_0^W c_w x^w$  при увеличении максимальной степени  $W$  и числе точек измерения  $V = 1,5 \cdot W$ . Они показали, что и в этом случае аппроксимирующий полином приближается к заданной функции.

Это не доказательство, но на основе анализа можно предположить: если *искомая* зависимость  $y = f(x)$  *разложима* в ряд Тейлора, то можно доказать, что *принятая* формулировка *условия наилучшего приближения* метода наименьших квадратов *обеспечивает сходимость аппроксимирующей* функции  $\Phi(x) = \sum_0^W c_w x^w$  к *искомой зависимости* при неограниченном увеличении числа  $W$  слагаемых. По-видимому, это можно доказать и при разложимости функции  $y = f(x)$  в ряд Фурье.

Вторая задача решается, но в такой постановке оно сильно усложняется: задача *нелинейная*, даже если коэффициенты  $c_k$  входят в *аппроксимирующую функцию линейно*. Вообще говоря, задачи *подобного рода* решаются весьма сложно: достаточно посмотреть решение задачи определения *минимального* расстояния между 2-мя *кривыми* на плоскости (в общем-то, чем-то похожей на нашу).

Отметим, что проблемы, связанные с оценкой погрешности определения зависимости, остаются в любом варианте.

Какой из этих задач отдать предпочтение сказать сложно. Нам кажется, что 1-я задача решается проще, но, вообще говоря, их решение – «на любителя»: мы же, для начала, рассмотрим, что дает применение подхода, изложенного в разделах 1.3.2-1.3.3 (стр.24, 33).

**Пример 11. Теория.** Приведем функцию  $y = f(x)$  к системе координат, в которой некоторые пояснения к решению задачи будут более простыми и наглядными.

**П.1.** Применяя метод наименьших квадратов, аппроксимируем функцию<sup>37</sup>  $y = f(x)$  прямой линией  $\tilde{y} = \eta_1 x$  (исходя из предположения  $y_0 = f(x=0) = 0$  – для упрощения изложения) и положим, что она определяет ось  $T$  системы координат  $T0\Omega$  (стр.41 рис.10 штриховые стрелки). Ось  $T$  определяет некоторое усредненное направление  $y' = \lambda_1$  кривой  $y = f(x)$  на плоскости  $XOY$ .

**П.2.** Используя формулы *преобразования при повороте* координат<sup>38</sup>  $\tau' = x' \cdot \cos \beta + y' \cdot \sin \beta$  и  $\omega' = -x' \cdot \sin \beta + y' \cdot \cos \beta$  (пример 4 [31,24]), определим функцию  $y = f(x)$  в новой системе координат<sup>39</sup>. Свойства двумерного распределения погрешностей в системе координат  $T0\Omega$  отличаются от свойств двумерного распределения в исходной системе

<sup>37</sup> Определив, например, значения  $y_n = f(x_n)$  в достаточно большом числе ( $n=1,2,\dots,N$ ) точек  $x_n$

<sup>38</sup> Параметр со штрихом в индексе означает: преобразование проводится в начальной системе координат

<sup>39</sup> Чтобы получить изображение границ максимально возможных и допустимых отклонений, одного поворота координат недостаточно: необходимы дополнительные преобразования, но об этом в примере 14 (стр.49)

координат  $XOY$  (п.5 примера 4 [31,24]). Отметим, что на рис.12 (сплошная утолщенная кривая) мы расположили ось  $T$  горизонтально только для экономии места: реально кривая на плоскости не меняет ни своего положения, ни своего направления, ни формы (рис.10-11 сплошные утолщенные кривые). Просто функция  $y = f(x)$ , определяющая кривую, выражается в новой системе координат  $T0\Omega$  и будет иметь в этих координатах более громоздкий вид: в общем случае она является неявной функцией переменных  $\tau$  и  $\omega$ .

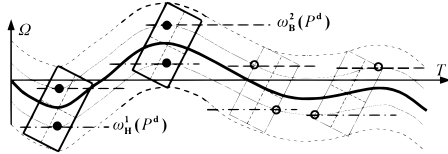


Рис. 12

пределения погрешностей, которые выделены утолщенными сторонами, расположены так, чтобы точки  $\{m_T, m_\Omega\}$  были совмещены с экстремумами функции  $\omega = \phi(\tau)$ .

**П.3.** Границы максимально возможных отклонений в координатах  $T0\Omega$  определяются с *смещением* кривой  $\omega = f(\tau)$  *параллельно оси  $T$  вдоль оси  $\Omega$*  так, чтобы кривая проходила через верхние или нижние вершины прямоугольников соответственно. Распределения погрешностей и границы *двумерных* областей *совместного* распределения погрешностей тоже необходимо выразить в координатах  $T0\Omega$ .

**П.4.** Аналогичным *перемещением* кривой  $\omega = \phi(\tau)$  определяются *границы интервалов* (части тонких сплошных кривых в прямоугольниках) для некоторой *заданной доверительной* вероятности  $P_d$ . Значение  $P_d$  вычисляется, например, в прямоугольниках с утолщенными сторонами, по областям, ограниченным сплошными тонкими кривыми, которые проводятся так, чтобы линии  $\tau^j = \omega_B^j(P_d)$  и  $\tau^j = \omega_H^j(P_d)$  ( $j=1,2$ ) определяли касательные в точках максимума и минимума функции  $\omega = \phi(\tau)$  соответственно.

Теперь рассмотрим, как вычисляется доверительная вероятность  $P_d$  в областях двумерных распределений погрешностей, центр группирования  $\{m_T, m_\Omega\}$  которых не совпадают с экстремумами функции  $\omega = \phi(\tau)$ , (прямоугольники с тонкими сторонами). Для этого необходимо определить точки пересечения тонких сплошных кривых со сторонами прямоугольников (обозначены окружностями рис.12). Штриховыми и штрихпунктирными прямыми линиями  $\tau^j = \omega_B^j(P_d)$  и  $\tau^j = \omega_H^j(P_d)$  ( $j=3,4$ ) обозначают верхние и нижние границы допустимого интервала, соответствующие доверительной вероятности, которая вычисляется по областям в данных прямоугольниках, ограниченным сплошными тонкими кривыми, проходящими через указанные точки.

Из рисунка легко видно, что в координатах  $T0\Omega$  для *одной и той же* кривой *доверительная* вероятность, как и в координатах  $XOY$ , *зависит* от *положения математического* ожидания погрешностей измерений параметра  $X$ , т.е. от положения точек измерения. Это свойство *неразрывно связано с функциональной зависимостью* между параметрами. Подход вроде бы позволил привести *в согласие границы максимальных и допустимых* отклонений с *исходной* кривой. Но что делать, если кривая имеет максимумы и минимумы (т.е. кривой общего вида), как и в «методике смещений кривой – вверх влево, вниз вправо» от исходной кривой (пункты 4-5 примера 10 стр.42), тоже что-то не очень понятно.

Есть и более серьезные вопросы. Во-первых, не понятно, зачем преобразование к координатам  $T0\Omega$  необходимо, а во-вторых, не хватает обоснования *определения кривых параллельным смещением вдоль оси  $\Omega$*  (об этом в примере 14 стр.49).

На первый взгляд переход от координат  $XOY$  к координатам  $T0\Omega$  мо-

жет применяться для определения закона распределения погрешностей измерений параметра  $Y$  и вычисления его числовых характеристик по результатам экспериментов, если они неизвестны.

Однако существенно проще определять закон распределения и вычислять его числовые характеристики непосредственно в координатах  $XOY$ . Мы этот подход рассматривали при анализе линейной зависимости (п.4 примера 5 стр.28) между параметрами.

**Замечание 13.** Например, оценка математических ожиданий распределения параметра  $Y$  в точках измерений определяются формулами<sup>40</sup>  $\tilde{m}_Y^{(v)} = \sum_{n=1}^N \{y_{v,n} - \tilde{y}(x_{v,n}^d)\} / N$ , где  $\tilde{y}(x_{v,n}^d) = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(x_{v,n}^d)$  значения аппроксимирующей функции, коэффициенты которой определяются методом наименьших квадратов. Т.е. отличается только тем, что значения линейной функции заменяются значениями нелинейной. Для оценки обобщенного математического ожидания необходимо определить проекции точек  $(x_{v,n}^d, y_{v,n})$  на ось  $Y$ , принадлежащие разным областям определения погрешностей. Отличие от линейного случая определяется расстоянием  $s'_{v,n} = y_{v,n} - \tilde{y}(x_{v,n}^d)$  от точки до кривой  $\tilde{y}x$  по линии  $y = x_{v,n}^d$ . Точка пересечения кривой с осью  $Y$  полагается нулевой. От нее и следует откладывать расстояния  $s'_{v,n}$  до точек на оси  $Y$ . По совокупности этих точек определяется, например, закон распределения погрешности измерения параметра  $Y$  или обобщенная оценка  $\tilde{m}_Y$  математического ожидания. Как и в линейном случае никаких преобразований выполнять не надобно.

Больше усложняется вычисление распределения (и его характеристик) параметра  $X$ , что связано с необходимостью использования функции  $x = \phi(y)$ , обратной к исходной функции  $y = f(x)$ , но этот вопрос рассматривать не будем.

Дело в том, что при *нелинейной* (как и при *линейной*) *зависимости значения имеет только число экспериментальных точек* (положения {А.14.5}-{А.14.6} стр.35), ибо оно *определяет распределения выборочных* характеристик.

Т.е. при нелинейной зависимости между параметрами применять переход от координат  $XOY$  к координатам  $T0\Omega$  можно, но не очень понятно, а нужен ли он вообще.

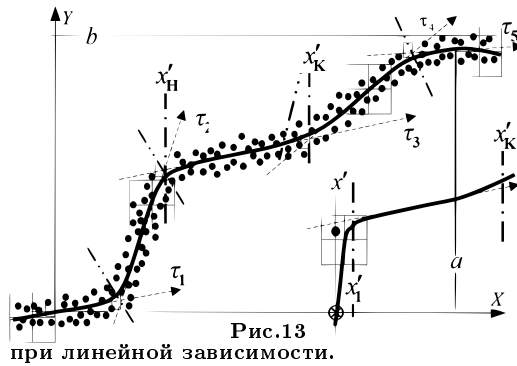
**Замечание 14.** Вообще говоря, на основе перехода к координатам  $T0\Omega$  возможно осуществление словесной формулировки (положение А.11.1 стр.22) условия наилучшего приближения метода наименьших квадратов: минимизировать сумму квадратов реальных расстояний от экспериментальных точек до кривой (положение А.11.2 стр.23). Есть идея (немножко «мутноватая») и некоторая ее разработка: она позволяет обойти решение нелинейной системы уравнений, следующей из постановки задачи в замечании 11.2 (стр.43), но требуется создание программы (хотя бы для первичной проверки), а времени на это не хватает – и так уже все изрядно затянулось.

Считаем: коэффициенты  $c_k$  заданной функции  $y = f(x; c_1, c_2, \dots, c_K)$  определяются из условия  $\sum_{n=1}^N \{y_n - f(x_n; c_1, c_2, \dots, c_K)\}^2 = \min$ , где:  $y_n$  – экспериментальные значения искомой зависимости между параметрами  $X$  и  $Y$ , измеренные в  $n=1,2,\dots,N$  точках  $x_n$ ;  $f(x_n; c_1, c_2, \dots, c_K)$  – значения аппроксимирующей функции в тех же точках. Т.е., учитывая анализ, изложенный в замечаниях 12 (стр.44),

<sup>40</sup>В предположении, что значения  $x_{v,n}^d$  известны

используем принятую формулировку условия наилучшего приближения метода наименьших квадратов. Полагаем: заданная аппроксимирующая функция представляется в виде  $y = \sum_1^K c_k \phi_k(x)$  (формула (3) стр.41), что приводит к линейной системе уравнений относительно коэффициентов  $c_k$ .

При рассмотрении методов аппроксимации иногда говорится: «Поэтому найденную прямую возможно использовать для экстраполирования за пределами того промежутка, внутри которого помещаются наблюдаемые данные, лишь соблюдая большую осторожность» [12,344]. Об этом упоминается не только в теории вероятностей, но наглядных пояснений, почему это можно делать «лишь соблюдая большую осторожность», и каким образом ее соблюдать, нам как-то не попало. Восполним этот пробел.



**Пример 12.** Положим, что связь параметров  $X$  и  $Y$  определяется кривой, изображенной на рис.9-11. Пусть по заданным на отрезке  $0 \leq x \leq a$  значениям  $x_v^d$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) параметра  $X$ , в  $N$  экспериментах на отрезке  $0 \leq y \leq b$  определены значения  $y_{v,n} = f(x_v^d)$  параметра  $Y$  при изменении параметра  $X$ . Т.е. имеем множество экспериментальных точек  $\{x_v^d, y_{v,n}\}$  ( $n=1,2,\dots,N$ ) на плоскости  $XOY$  (рис.13). Отметим, что для правильного представления о кривой число  $V$  точек измерения должно быть значительно больше, чем

**Замечание 15.** На рисунке 13 показаны точки  $\{x_{v,n}, y_{v,n}\}$  (т.е. в предположении, что значения координат  $x_{v,n}$  известны). Однако неопределенность значений  $x_{v,n}$  определяет необходимость значения координат  $y_{v,n}$  приписывать точкам  $x_v^d, y_{v,n}$  на линиях  $y = x_v^d$  (п.2.1 примера 8 стр.36). Поэтому реальная картинка будет выглядеть по-другому: по  $N$  точек на каждой линии  $y = x_v^d$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) измерений.

п.1. Поговорим о точках, изображенных за пределами исследуемого отрезка. Пусть по экспериментальным данным определена зависимость на почти линейном пологом отрезке  $x'_H < x < x'_K$  кривой. Он дополнительно изображен в нижнем углу рис.13 вместе с ниспадающей ветвью (для наглядности она сделана круче, а кривизна в переходной части – больше исходной) кривой. Границы отрезка  $x'_H$  и  $x'_K$  обозначены штрихпунктирными линиями. Первая и последняя точки измерений обычно задаются вблизи границ исследуемого отрезка  $x'_1 < x'_H$  и  $x'_N < x'_K$ : редко – непосредственно на границах<sup>41</sup>, т.е.  $x'_1 = x'_H$  и  $x'_N = x'_K$ . Даже если перед каждым повторением эксперимента, проводятся замеры для определения значений  $x'_1$  и  $x'_N$ , при обработке их считают равными значениям на чертеже. В результате исследований определено: на отрезке параметр  $Y$  линейно зависит от параметра  $X$  (рис.13 штриховая стрелка на дополнительном изображении). На этой основе утверждается, что значения параметра  $Y$  при изменении параметра  $X$  на отрезке  $x'_H < x < x'_K$  будут не менее некоторого гарантированного значения  $y > y_{\min}$ .

<sup>41</sup>Это из практики, но почему так принято, мы не знаем



Однако, например, при исследованиях значение  $x'_1$  было чуть больше  $x'_H$ , а при производстве значение  $x'$  оказалось несколько меньше математического ожидания погрешности измерения параметра  $X$  (рис.13 сплошная тонкая линия  $y = x'$  на дополнительном изображении). Это не зависит от нашего желания, а определяется только погрешностью измерения и изготовления. Соответственно, вместо значения  $y|_{x'} > y_{\min}$  (точка на линии  $y = x'$ ) получим значение, обозначенное крестиком в кружке: если использовать исходный наклон и крутизну, то расстояние между точкой и крестиком было бы минимум на  $2/3$  меньше (а это менее наглядно и выглядит не так убедительно).

Если, например, кривая, изображенная в углу рис.13 определяет зависимость каких-то характеристик прочности материала от изменения некоторого параметра технологического процесса изготовления детали. Такое изменение характеристик прочности может оказаться катастрофичным для детали: она просто развалится при действующей нагрузке. Чтобы избежать «подобных сюрпризов» необходимо:

**{А.19}** При экспериментальных исследованиях поведения функции  $y = f(x)$  на отрезке  $x'_H = x'_1 < x'_2 < \dots < x'_V = x'_K$  следует исходить из условия  $x_H = x'_H + l_X$  и  $x_K = x'_K - l_X$ : тогда можно уверенно утверждать, что на отрезке  $x_H < x < x_K$  значения параметра  $Y$  будут не менее некоторого гарантированного значения  $y > y_{\min}$ .

1. Т.е. экстраполировать за пределы исследованного отрезка, с точки зрения математики, нельзя как линейную, так и нелинейную зависимость. 2. Условие в положении может быть ослаблено, но это решается в каждом конкретном случае. Например, учитывая число точек и поведение функции  $y = f(x)$  за пределами отрезка  $(0, a)$  можно положить  $x_H = -l_X/2$  и  $x_K = b + l_X/2$ .

Вопрос однако в том, что прогноз во многих случаях необходим именно при отсутствии экспериментальных данных за пределами исследованной области значений того или иного параметра. В этом случае привлекается имеющаяся разнообразная косвенная информация, на основе которой и строится математическая модель, позволяющая прогнозировать дальнейшее поведение объекта<sup>42</sup>, но это не является целью проводимых исследований.

Далее рассмотрим два момента, связанные с определением погрешности построения нелинейной зависимости. Первый момент – определение границ доверительных интервалов.

**Пример 14.** На рисунках 14 даны изображения. 1. Одной и той же зависимости  $y = f(x)$  (сплошная утолщенная кривая), изображенные на рис.10-13. 2. Прямой линии  $\tilde{y} = \eta_1 x$  (ось  $T$ , штриховая утолщенная стрелка), определенной с применением метода наименьших квадратов. 3. Границ максимально возможных отклонений (штриховые кривые), построенных по «методике смещений кривой – вверх влево, вниз вправо» от исходной кривой (п.п.1-2 примера 10 стр.41). 4. Двумерных областей совместного распределения погрешностей для отношений  $l_X/l_Y$  явно меньших 1, приблизительно равных 1 и явно больших 1.

п.1. В п.2 примера 10 (стр.41) сказано, что границы максимально возможных отклонений образуют верхняя левая и нижняя правая вершины (отмечены окружно-

<sup>42</sup> Отметим, что немалую роль играет опыт, интуиция, убежденность и авторитет исследователя, определяющего прогноз (например, в том, что тенденция поведения, выявленная на исследуемом отрезке, сохранится и при выходе за его пределы)

стями на левом прямоугольнике) при *плоскопараллельном смещении* прямоугольника при движении центра группирования (точки  $\{m_X, m_Y\}$ ) по кривой  $y = f(x)$ .

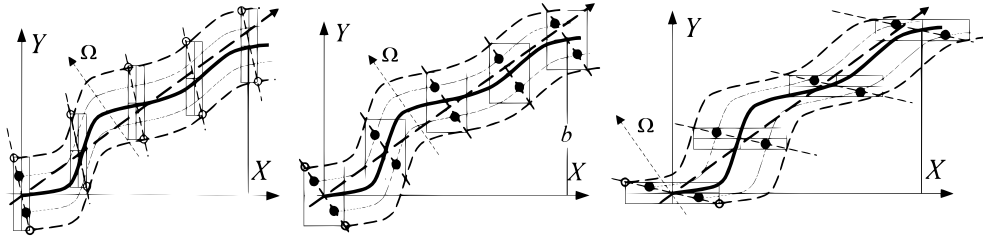


Рис. 14

Движение прямоугольника можно заменить *плоскопараллельным перемещением* диагонали (на рис.14 – тонкие штриховые прямые линии). Для этого необходимо связать *перемещение* диагонали с *движением* точки  $\{m_X, m_Y\}$  по кривой  $y = f(x)$ , что выполняется средствами аналитической геометрии. Точки на диагонали, отмеченные окружностями, образуют при движении *границы максимально возможных отклонений*.

Длина диагонали при движении не изменяется: следовательно, по диагоналям сохраняются как расстояния между границами, так и расстояния между кривой  $y = f(x)$  и границами (точки отмечены на всех прямоугольниках окружностями, рис.14 слева). Очевидно, что это свойство не зависит от соотношения  $l_X/l_Y$ .

**П.2.** Если точку пересечения  $\{x = 0, y(0) = 0\}$  кривой  $y = f(x)$  с осью  $Y$  совместить с точками на диагоналях, отмеченные кружками в первом прямоугольнике (тонкие сплошные кривые), то по диагоналям *сохраняются расстояния*, как между этими кривыми, так и расстояния между ними и кривой  $y = f(x)$ , а также *границы максимально возможных отклонений*. Для наглядности точки пересечения проведенных кривых с диагоналями отмечены кружками во всех прямоугольниках на среднем и правом рисунках.

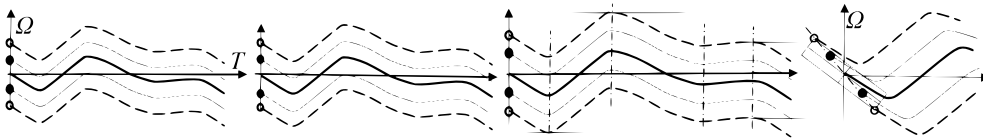


Рис. 14а

Используя *формулы преобразования при повороте* координат (пример 4 [31,25]), определим функцию  $y = f(x)$  в новой системе координат  $T\Omega$ . Однако после поворота *положение* кривых будет подобно изображению, данному на рис. 14.а справа. Оно получено поворотом изображения на рис.14 справа (изображена только начальная часть кривых): для наглядности изображена ось  $\Omega$ , проходящая через точку  $\{l_X/2, l_Y/2\}$  пересечения диагоналей (при принятых симметричных распределениях погрешностей – точку  $\{m_X, m_Y\}$ ) в 1-м прямоугольнике.

**П.3.** Повернем диагональ вместе с точками ее пересечения с кривыми относительно точки  $\{l_X/2, l_Y/2\}$  по кривой  $y = f(x)$  (и с прямоугольником тоже) до совмещения с осью  $\Omega$  так, чтобы движение кривых было плоскопараллельным. Осуществляется двумя смещениями кривых параллельно оси  $T$ : 1-е. Вдоль оси  $T$  до совмещения точек пересечения с осью  $\Omega$ . 2-е. Вдоль оси  $\Omega$ , до установления расстояний между кривыми,

определяемых по диагоналям. При этом все диагонали становятся параллельными оси  $\Omega$ , а в точках экстремумов кривой – перпендикулярны касательным к кривым в этих точках (штрихпунктирные и сплошные тонкие прямые линии на третьем рис. 14.а). При построении кривых на рис.12 (стр.45) этот способ не применялся: просто интуиция «подсказывала, что так должно быть». Следовательно, все что было сказано в примере 11 (стр.45) становится справедливым.

Результат 2-х преобразований кривых, изображенных на рис.14 – три первых изображения на рис.14.а. На третьем рисунке горизонтальными линиями отмечены некоторые характерные точки кривых, полученных преобразованиями, которые рассмотрены ранее (т.е. после описанных выше смещений).

П.4. Если распределения погрешностей не симметричны, то функция  $y = f(x)$  в системе координат  $T0\Omega$  будет иметь вид, изображенный на рис.14.б слева. Двумерная область совместного распределения погрешностей изображена для отношения  $l_X/l_Y \ll 1$  (рис.14 слева). Точка  $\{m_X, m_Y\}$  (отмечена кружком на рис.14.б, через которую проходит функция  $y = f(x)$ ) определяется пересечением пунктирных линий (их хорошо видно на рис.14.б справа) и не принадлежит диагонали. Границы максимально возможных отклонений обозначены, как и ранее, штриховыми кривыми, а границы допустимого интервала – сплошными тонкими кривыми. Точки пересечения границ с диагональю обозначены окружностями (рис.14.б слева).

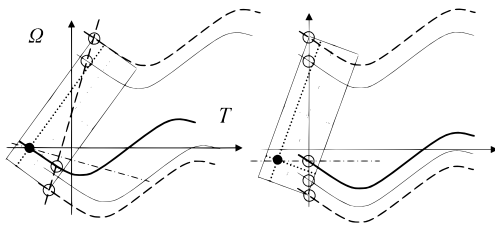


Рис. 14б

мая линия рис.14.б слева), проходящим через точку  $\{m_X, m_Y\}$ . При совмещении диагонали с осью  $\Omega$  перпендикуляр становится параллельным оси  $T$  (рис.14.б справа). Т.е. получаем картинку, подобную картинке на рис. 14.а, полученную для симметричных распределений погрешностей измерений.

После поворота диагонали, определенного в п.3, получим изображение на рис.14.б справа. При этом точка  $\{x = 0, y(0) = 0\}$  кривой  $y = f(x)$  совмещена с точкой  $\{m_X, m_Y\}$  (отмечена кружком). Точку  $\{x = 0, y(0) = 0\}$  кривой  $y = f(x)$  необходимо связать с точкой на диагонали, сохраняя расстояние между точками по диагонали. Оно определяется точкой пересечения диагонали с перпендикуляром диагонали (штрихпунктирная прямая рис.14.б слева), проходящим через точку  $\{m_X, m_Y\}$ . При совмещении диагонали с осью  $\Omega$  перпендикуляр становится параллельным оси  $T$  (рис.14.б справа). Т.е. получаем картинку, подобную картинке на рис. 14.а, полученную для симметричных распределений погрешностей измерений.

**{А.20}** Таким образом, в результате перехода от координат  $X0Y$  к координатам  $T0\Omega$  определяется семейство кривых, расстояния  $\omega_n$  ( $n=0,1,\dots$ ) от каждой из кривых  $\omega^{(n)} = \omega_n + \phi(\tau)$  до исходной кривой  $\omega^{(0)} = \phi(\tau)$  (где  $\phi(\tau)$  – кривая  $y = f(x)$ , определенная в координатах  $T0\Omega$ ) постоянно (не зависит от координаты  $\tau$ ).

Т.е. показано, что границы максимально возможных (и допустимых, пункты 3-4 примера 11 стр.45) отклонений в координатах  $T0\Omega$  определяются смещением кривой  $\omega^{(0)} = \phi(\tau)$  параллельно оси  $T$  вдоль оси  $\Omega$ .

Определение погрешности построения нелинейной зависимости, по сути, не отличается от подхода, примененного при линейной зависимости. Практически все рассуждения, проведенные при рассмотрении погрешности построения линейной зависимости (начиная с примера 6 стр.25) и решения задачи прогноза, можно применить и к нелинейной зависимости. Поэтому ограничимся небольшими замечаниями.

**Замечания 16.** 1. Методом наименьших квадратов определяется линия ре-

грессии  $\tilde{y} = f(x; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K)$ . Далее для определения погрешности построения аппроксимирующей кривой, применяется постановка задачи, принятая в математической статистике: относительно линии регрессии  $\tilde{y} = f(x; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K)$ , определяется интервал, в котором с заданной вероятностью будет находиться истинная кривая  $y = f(x)$ .

Если в теории возможные отклонения, обусловленные погрешностью измерений, рассматриваются относительно теоретической кривой  $y = f(x)$ , то при практическом применении они рассматриваются относительно линии регрессии  $\tilde{y} = f(x; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K)$ . Как и при линейной зависимости, исходим из того, что экспериментальные точки одновременно принадлежат двумерной области определения распределения погрешностей в точке измерения, центр группирования которой  $\{m_X, m_Y\}$  лежит на кривой  $y = f(x)$ .

По существу, рассматриваются одни и те же точки, определенные одним и тем же распределением погрешностей измерений, но только в смещенных системах координат.

Считаем: расстояния между точками  $(x_v^d, y_{v,n})$ , определенными в экспериментах  $n = 1, 2, \dots, N$ , и кривой  $\tilde{y} = f(x; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_K)$ , сохраняются (п.2 примера 8, замечания 13 стр.36, 46) как в данной точке измерений, так и при перемещении всех точек  $K = V \cdot N$  в одну из областей определения распределения погрешностей, но расположение группы точек относительно границ конкретной области неизвестно.

В замечании 2 к положению {А.16} (стр.39) отмечено, что утверждение справедливо для любых непрерывных однозначных функций  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ , ограниченных на отрезке  $(a \leq x \leq b)$ . Сформулируем его в более общем виде:

**{А.21}** Пусть на отрезке  $(a \leq x \leq b)$  определены плотность распределения  $p_X^0$  (индекс 0 означает, что величина не относится к погрешности измерений) случайной величины  $X$  и непрерывные однозначные формулы преобразования  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ . Тогда вероятность того, что на заданном интервале  $(a \leq x_i < x_{\text{дан}})$  значения  $y_{\text{дан}}^{(n)} = f^{(n)}(x_{\text{дан}})$  будут не больше некоторого значения  $y_i^{(n)}$  одинакова для любой функции  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$  и равна 
$$P_Y^0(y_a^{(n)} \leq y_i^{(n)} < y_{\text{дан}}^{(n)}) = P_X^0(a \leq x_i' < x_{\text{дан}}') \quad (4).$$

В формулах приняты обозначения:  $y_a^{(n)} = f^{(n)}(a)$ ,  $y_i^{(n)} = f^{(n)}(x_i)$  и  $x' = \phi(y)$  – функция, обратная к функции  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ .

**2.** Если допускаемый диапазон изменений параметра  $Y$ , по крайней мере, не уже диапазона, определяемого границами максимально возможных отклонений  $\tilde{y}_{\text{max}}$  и  $\tilde{y}_{\text{min}}$ , то для определения допустимого интервала вычислять погрешность построения зависимости  $y = f(x)$ , как и в линейном случае, не требуется.

Как и при линейной зависимости используется предположение: границы максимально возможных отклонений являются максимально возможным отклонениями искомой линии  $y = f(x)$  от линии регрессии  $\tilde{y} = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$ . Границы максимально возможных отклонений искомой линии от линии регрессии определяются кривыми  $\tilde{y}_{\text{max}}(x)$  и  $\tilde{y}_{\text{min}}(x)$ , проходящими через точки  $\{x_v^d - l_X/2, \tilde{y}(x_v^d) + l_Y/2\}$  и  $\{x_v^d + l_X/2, \tilde{y}(x_v^d) - l_Y/2\}$  (где  $-y(x_v^d) = \sum_1^K c_k \phi_k(x_v^d)$ ;  $x_v^d$  ( $v=1, 2, \dots, V$ ) – координаты точек измерения). Эти точки определяют верхние левые и нижние правые вершины прямоугольников, ограничивающих области определения погрешностей. Вероятность того, что на некотором интервале значения  $\tilde{y}^1$  будут не больше значения  $\tilde{y}_{\text{max}}^1$  (или не меньше значения  $\tilde{y}_{\text{min}}^1$ ) определяется с применением того же подхода, что и при линейной зависимости (п.2 примера 8 стр.36), но для вычисления используются формулы (4) (стр.51), а не формулы (2) (стр.39).

**3.** Оценка погрешности построения зависимости необходима тогда, когда допускаемый диапазон изменений параметра  $Y$  уже диапазона, определяемого границами максимально возможных отклонений (т.е. также как

и при линейной зависимости, п.3 примера 8 стр.36).

Из анализа в примере 11 (п.4 стр.45) следует: если на отрезке  $a \leq x \leq b$  в координатах  $T0\Omega$  положить интервал допустимых отклонений одинаковым (т.е. кривые в координатах  $T0\Omega$ , находятся на одинаковом расстоянии от линии регрессии  $\tilde{y} = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$ , то вероятность зависит от положения точки измерения  $x_v^d$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) параметра  $X$ . При переходе к координатам  $X0Y$ , изменение положения точки измерения будет приводить и к изменению величины интервала. Это приводит к усложнению вычисления допустимого диапазона отклонений параметра  $Y$ .

Например. Нас обычно интересует величина допустимого интервала при заданном уровне доверительной вероятности  $P_d = \text{const}$ . Но, при постоянном значении  $P_d$  расстояние от исходной кривой  $\tilde{\omega}^0 = \tilde{\phi}(\tau)$  (где  $\tilde{\phi}(\tau)$  – линия регрессии  $\tilde{y} = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$ ), определенная в координатах  $T0\Omega$  до кривой  $\tilde{\omega}^{(\text{дор})} = \tilde{\phi}^{(\text{дор})}(\tau)$ , по которой определяется значение  $P_d$  в данной точке измерений, будет зависеть от координаты  $\tau$ .

Т.е. кривая допустимых отклонений  $\omega^{(\text{дор})} = \phi^{(\text{дор})}(\tau)$  будет отличаться от линии регрессии  $\tilde{\omega}^0 = \tilde{\phi}(\tau)$ . Вообще-то, ее тоже надо бы построить: отметим, что проще всего решение задачи находится в координатах  $T0\Omega$ . Так как аналитическое решение этой задачи в общем случае невозможно, то опять придется применять методы приближения функций. Но чаще всего интервал допустимых отклонений требуется вычислять в отдельных точках исследуемого отрезка  $a \leq x \leq b$ , или малых его частях: это значительно упрощает решение задачи.

4. Ранее отмечено (перед примером 9 стр.37-38): случайный характер параметра  $X$ , определяет, как следствие функциональной связи  $y = f(x)$ , случайность параметра  $Y$ . В этом случае, учет случайного характера параметра  $Y$  при решении задачи определения поведения параметра  $Y$  в зависимости от изменения параметра  $X$  производится также как и при линейной зависимости, только вместо линейной регрессии используется кривая регрессии  $\tilde{y} = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$  и положение {A.21} (стр.50).

До сих пор мы говорили об определении погрешности построения нелинейной зависимости между физическими параметрами  $X$  и  $Y$  только для случая монотонно возрастающей (убывающей) функции (на отрезке  $(0, a)$ ). Если функция  $y = f(x)$  имеет участки возрастания и убывания (стр.41 рис.10 продолжение функции за пределы отрезка  $(0, a)$ ), то решение задачи несколько усложняется.

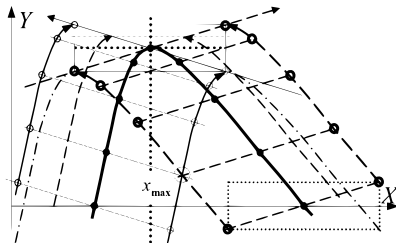


Рис. 15

регрессии  $\tilde{y} = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$ .

Сплошная и штриховая стрелки обозначают диагонали прямоугольника. Дополнительно, кружками на кривой обозначены еще 8-мь точек измерения, через которые проходят диагонали прямоугольников. Концы отрезков, определяющие длину диагоналей, обозначены тонкими (возрастающая ветвь) и утолщенными (убывающая ветвь) маленькими окружностями.

**Пример 15.** На рис.15 изображена часть кривой  $y = f(x)$  (сплошная утолщенная линия), имеющая максимум в точке  $x = x_{\text{max}}$ : точка пересечения кривой с линией  $y = x_{\text{max}}$  обозначена кружком. С этой точкой совмещен центр прямоугольника, определяющего область определения распределения погрешностей измерений. Верхняя сторона прямоугольника ограничивает сверху область максимально возможных отклонений экспериментальных точек. Часто она же ограничивает максимально возможное значение линии ре-

При *возрастающей* функции  $y = f(x)$  (левая ветвь), *границы максимально возможных отклонений* (сплошные тонкие кривые, которые заканчиваются стрелками определяющими *направление движения* диагонали<sup>43</sup>) определяются *плоскопараллельным перемещением* диагонали при *движении точки*  $\{l_X/2, l_Y/2\}$ , *принадлежащей* диагонали, по *возрастающей* ветви кривой. Если имеется *только убывающая* функция  $y = f(x)$  (правая ветвь), то *границы максимально возможных отклонений* (штриховые утолщенные кривые, которые заканчиваются стрелками определяющими *направление движения* диагонали, сноска 43 стр.52) определяются *плоскопараллельным перемещением* другой диагонали при *движении точки*  $\{l_X/2, l_Y/2\}$ , *принадлежащей* диагонали, по *убывающей* ветви кривой. Для большей наглядности, в конечной точке измерений на убывающей ветви изображена область определения распределения погрешностей измерений (прямоугольник, обозначенный пунктиром).

Границы максимально возможных отклонений можно определить другим способом: плоскопараллельным движением переместить исходную кривую  $y = f(x)$  так, чтобы что ее максимум совпал с одной из вершин верхнего прямоугольника. Для наглядности, нижние границы максимально возможных отклонений дополнены до исходной кривой штрихпунктирными линиями.

Увеличенной тонкой окружностью отмечена точка пересечения нижних границ максимально возможных отклонений: в этой точке находятся нижние вершины прямоугольников, определяющих области определения распределения погрешностей измерений, центры  $\{l_X/2, l_Y/2\}$  которых принадлежат возрастающей и убывающей ветвям кривой, с соприкасающимися границами. Выше этой точки, два прямоугольника, центры  $\{l_X/2, l_Y/2\}$  которых принадлежат возрастающей и убывающей ветвям кривой и лежат на одной линии  $x = y_j$  имеют область пересечения. Это означает, что если бы мы знали реальное значение координат  $x_{v,n} = x_{v,n}^d + \delta_{v,n}$  в каждой заданной точке  $x_{v,n}^d$  измерений, то в область пересечения прямоугольников могли бы попадать значения координат, полученные в разных точках измерений. Однако неопределенность значений  $x_{v,n}$  определяет необходимость значения координат  $y_{v,n}$  приписывать точкам  $(x_{v,n}^d, y_{v,n})$  на линиях  $y = x_{v,n}^d$  (п.2 примера 8 стр.36), что позволяет искусственно избежать этого пересечения данных.

Плоскопараллельным перемещением исходной кривой  $y = f(x)$  таким образом, чтобы ее максимум совпадал с диагоналями верхнего прямоугольника можно определить кривые (штриховые тонкие кривые, которые заканчиваются стрелками определяющими *направление движения* диагонали, сноска 43 стр.52) расстояния от которых по диагоналям до границ максимально возможных отклонений одинаковы (пункты 1-2 примера 14 стр.49). Кривая допустимых отклонений  $y^{(доп)} = v^{(доп)}(x)$  при заданном уровне доверительной вероятности  $P_d$ , как и в координатах  $T0\Omega$ , будет отличаться от линии регрессии  $\tilde{y} = \sum_1^K \eta_k \phi_k(x)$ , т.е. кривая  $y^{(доп)} = v^{(доп)}(x)$  также подлежит определению. Что проще, проводить вычисления непосредственно в координатах  $X0Y$ , или перейти к координатам  $T0\Omega$ , сказать сложно: выбор за исследователем.

Мы не разрабатывали и даже не пытались разработать какую-либо методику, а остановились только на тех моментах, которые определяют основу для оценки погрешности построения линии регрессии по экспериментальным данным и решение задачи прогноза, что, возможно, позволит в будущем создать соответствующие методики.

## 1.4. Влияние нескольких случайных величин на од-

<sup>43</sup>Они показывают и точки, в которых заканчивается движение диагонали по соответствующей ветви

## ну случайную величину

В разделе 1.3 рассмотрена *суть* построения *функциональной зависимости* между 2-мя физическими параметрами по результатам *экспериментов* с учетом погрешностей *задания* параметра  $X$  и *измерения* параметра  $Y$ . Но во множестве случаев целью исследований является решение задачи определения поведения случайной величины  $Y$  в зависимости от значений, принимаемых случайными величинами  $X_j$  ( $j=1,2,\dots,N$ ).

**{А.22}** В этих случаях, *основная постановка* задачи состоит в определении *влияния случайности* некоторых физических параметров  $X_j$  (случайных величин  $X_j$ ) на *функционально связанный* с ними, физический параметр  $Y$  (случайную величину  $Y$ ).

Решение этой задачи определяет возможность *обоснованного прогноза* изменений параметра  $Y$  при случайных отклонениях параметров  $X_j$ . Далее рассмотрим один из множества примеров на эту тему. Вообще-то, именно этот пример стал причиной появления данного раздела.

### 1.4.1. Случайность параметров технологического процесса и прочность сплавов

Пример из механики выбран по трем причинам. 1. Эту область науки мы знаем лучше других (о чем говорилось ранее). 2. Он существенно отличается от того, что было рассмотрено в предыдущих разделах. 3. Немалую роль (скорее всего – основную) сыграло наличие «картинки» с изображением более 4-х десятков диаграмм деформирования в одной системе координат  $\varepsilon\theta\sigma$  (где  $\varepsilon$  и  $\sigma$  – деформация и напряжение в образце) для конкретного сплава.

**Замечание 17.** Построение выполнено давно и было связано с *утверждением* (сначала услышанном, а потом прочитанном в статье<sup>44</sup>, любезно показанной одним из коллег) о некоррелированности распределений  $p(\sigma_B)$  и  $p(\varepsilon_B)$ , т.е. *отсутствии какой-либо связи*<sup>45</sup> между значениями  $\sigma_B$  и  $\varepsilon_B$ . Во-первых, было любопытно посмотреть, что представляет собой совокупность большого числа реальных диаграмм одного сплава: в литературе такая картинка как-то «не попадалась». Во-вторых, понять странную вещь: как так получается, что связь между напряжениями  $\sigma^n$  и деформациями  $\varepsilon^n$  (в том числе –  $\sigma_B^n$  и  $\varepsilon_B^n$ ) определяется некоторой функцией при испытании каждого образца, а

<sup>44</sup>Основа доказательства – теории корреляции: по крайней мере из записи следовало, что речь шла именно о случайных величинах. Ссылки не было: статью найти не удалось. Но удивило другое: в интернете нашлось много статей о корреляции между пределом прочности и другими характеристиками прочности (например, пределом упругости, твердостью и т.п.), а вот о «некоррелированности»  $\sigma_B$  и  $\varepsilon_B$  как-то ничего «не повстречалось»

<sup>45</sup>Если честно, то о чем реально шла речь, автор тогда совсем не понял, да и сейчас толком не понимает (об этом говорилось в разделе 1.1 стр.10)

по совокупности испытаний связи между ними не существует<sup>46</sup>.

Диаграмм было больше 3-сотен случайно сохранившихся в архиве, но уже для построенных (47 диаграмм) картина была достаточно «запутанной»: пришлось остановиться<sup>47</sup>. Как ни странно, рисунок чудом сохранился. Хотя он изрядно выцвел, удалось разобраться как в диаграммах, так и в нескольких комментариях к ним. Среди них была цитата<sup>48</sup>: «Например, характеристики прочности неоднородного стержня, могут рассматриваться как случайные функции абсциссы сечения  $x$ » (т.е. деформации  $\varepsilon$ ). Стало еще менее понятно (сноска 45), о чем идет речь, но это не имеет никакого значения. Упоминание о случайных процессах надолго «охладило любопытство», ибо в то далекое время даже теория вероятностей не интересовала, а уж о случайных процессах вообще говорить не приходится.

Т.е. вопрос о *функциональной связи между напряжениями и деформациями*, возник у автора давно. Но *появился он снова* только при написании работы [10], затем мы *не единожды* обращались к нему по мере *углубленного анализа* существующей теории вероятностей и *разработки положений* теории, развитой в предыдущих работах [19; 26; 29-31]. Ответ же *был получен только* в результате анализа *построения случайных процессов на основе новых положений* теории вероятностей (часть VII исследований). Сначала цитата, имеющая связь с нашим примером:

«Рассмотрим следующую задачу, различные варианты которой часто встречаются в практике. Пусть мы имеем  $k$  аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и зависящую от них величину  $Y$ . Переменные  $x_j$ , вообще говоря, не случайные величины и принимают в каждом наблюдении данной серии вполне определенные значения. Наоборот, величина  $Y$  предполагается случайной величиной, имеющей нормальное распределение с центром в точке  $M(Y) = \tilde{y} = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$  (9.3.1) и постоянной дисперсией  $\sigma^2$ , независимой от  $x_j$ » [12,333]. «Предположим, что проведена серия из  $n$  независимых наблюдений, дающих  $n$  систем значений:  $y_i, x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) (9.3.2). По этим значениям требуется оценить неизвестные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta_j$  ( $j=1,2,\dots,k$ ). Так поставленная задача, по аналогии с рассмотренной в п.9.1.3 задачей теории корреляции, носит название задачи «регрессии». Пусть величина  $Y$  представляет какое-либо интересующее нас свойство металлического сплава, например, ударную вязкость образцов, вырезаемых из стальных отливок, а  $x_1, x_2, \dots, x_k$  выражают определенные факторы, от которых зависят свойства ударной вязкости (содержание различных химических элементов, условия термической обработки и т.д.). В качестве другого примера величины  $Y$  можно привести количество угля, потребляемой доменной печью на тонну выплавленного железа, в то время как роль переменных  $x_j$  опять-таки играет химическое содержание руды, температура печи

<sup>46</sup>Обращение к коллегам не внесли ясности: те, кто занимался прочностью, отправляли за пояснениями к тем, кто занимался вероятностью. Вторые «брались за дело с энтузиазмом», но после нескольких вопросов, на которые они не смогли ответить, отправляли к первым. «Круг замкнулся»: пришлось бросить это занятие, чтобы не рассориться с коллегами

<sup>47</sup>Зато стало понятно, почему совместных изображений большого числа диаграмм «не попадалось» в литературе. Наш рисунок (благодаря квалификации и ответственности сотрудницы, работавшей над ним) был выполнен тушью на листе миллиметровки 800 × 1200: если его уменьшить до журнальной страницы, то получится «серое фигурное пятно»

<sup>48</sup>Тот же без ссылки: она «нашлась» в [13,373] при чтении литературы о случайных процессах (но больше о прочности в работе ни слова), но это было позже написания этой статьи. Отсутствие ссылок говорит о том, что любопытство «было праздным», т.е. автор тогда даже не предполагал заниматься этим более серьезно



и другие факторы. Эти последние в рассматриваемых экспериментах могут принимать определенные значения, предписываемые постановкой экспериментов в определенных пределах их изменения. В то же время перечисленные и поддающиеся нашему контролю факторы не исчерпывают всей совокупности факторов, определяющих значения величины  $Y$ . В числе этих последних, как правило, находятся также случайные переменные, в результате чего и величина  $Y$  будет испытывать, помимо функционально обусловленных, также и случайные воздействия. Таким образом, при некоторых допущениях приходим к задаче определения коэффициентов в уравнении «регрессии» [12,334]. «Если задача оценки параметров будет решена, то мы сможем с некоторой надежностью производить прогноз поведения величины  $Y$  в зависимости от аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Другими словами, мы можем с определенной надежностью производить прогноз относительного возможного значения  $M(Y) = \bar{y}$  при данной комбинации  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , указывая, например, доверительные границы для  $M(Y) = \bar{y}$ , гарантируемые с заданным уровнем доверительной вероятности» [12,335]. «Пусть, например, нас интересует жесткость задней бабки токарного станка при нагружении ее вертикальной составляющей усилия резания. Для этой цели мы повторно нагружаем и разгружаем ее, измеряя с помощью динамометра при каждом значении отжатия  $x_1, x_2, \dots, x_k$  соответствующие им нагружения  $y$ . Благодаря рассеиванию показаний динамометра мы получим для одних и тех же значений отжатия различные величины нагружений» [12,335].

Второй пример, данный в цитате, намного проще первого, ибо имеем всего два параметра, связь между которыми была подробно рассмотрена в разделе 1.3 (стр.21): усилие  $y_n$ , соответствующее данному значению отжатия  $x_n$  ( $n=1,2,\dots,N$ ). О неизбежной погрешности задания значений параметра  $x_n$  в эксперименте говорилось неоднократно (наиболее подробно в пунктах 1-2 примера 5 стр.24). Отметим, что величины отжатия определяются в долях миллиметра и обычно измеряются индикаторами часового типа<sup>49</sup> (можно попытаться задавать по-другому, но это будет сложнее). Построение функциональной зависимости между 2-мя параметрами и определение погрешности ее построения даны в разделе 1.3 (стр.21): здесь остановимся на предположениях, принятых в работе при оценке погрешности.

**Замечание 18.** «Считая, что отклонения от линейности лежат в ошибках  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , сопровождающих последовательные измерения, мы можем положить  $y_j = M(Y/x_j) = \alpha + \beta \cdot x_j + \delta_j$ . Предполагается также, что погрешности  $\delta_j = y_j - \alpha - \beta \cdot x_j$  отвечают условиям: А)  $M(\delta_j) = 0$ ,  $D(\delta_j) = \sigma^2$  (не зависит от  $x$ ); В) для различных  $x_j$  погрешности независимы друг от друга; С)  $\delta_j$  при каждом  $j$  подчиняются одному и тому же нормальному закону распределения» [12,336]. Есть только одно маленькое замечание. Могут быть и другие законы распределения: например, известно, что при некоторых методах обработки, размеры в пределах допусков могут определяться  $\beta$ -распределением. Использовать нормальный закон и в этом случае, конечно, можно, только следует оценить масштаб неточности.

Опять же, выборочная дисперсия вычисляется по формуле  $s_2 = \sum_1^K (y_j - \eta_0 - \eta_1 x_j)^2 / K$  [12,338], где (согласно нашим обозначениям)  $K = VN$ . Оно согласуется с выражением, следующим из рассуждений в п.2 примера 8 (стр.36), согласно которым обобщенная оценка математического ожидания равна  $\tilde{m}_Y = \sum_1^V \sum_1^N \{y_{v,n} - \tilde{y}(x_v^d)\}$ , где  $\tilde{y}(x) = \eta_0 + \eta_1 x$

<sup>49</sup> Погрешность индикатора известна, но есть причины, приводящие к дополнительным погрешностям: для определения закона распределения погрешностей необходимо разработать методику для оценки погрешности, либо определять ее по результатам опытов (сноска 31 стр.27)

– прямая линия, определенная методом наименьших квадратов. Учитывая, что точка  $(\hat{m}_X, \hat{m}_Y)$  принадлежит прямой линии  $\hat{y}(x) = \eta_0 + \eta_1 x$  в любой из точек измерения  $x_v^d$  ( $v=1, 2, \dots, V$ ), для оценки дисперсии получим  $\hat{D}_Y = \sum_1^V \sum_1^N \{y_{v,n} - y(x_v^d)\}^2 / K$ . Таким образом, выражения для вычисления оценки дисперсии распределения погрешностей измерения параметра  $Y$  (в предположении, что значения параметра  $X$  неслучайны) совпадают.

Мы начали цитирование (стр.55) с того, о чем уже был небольшой разговор ранее (п.3.2 примера 2 и п.3 примера 5 стр.12,28): «Переменные  $x_j$ , вообще говоря, не случайные величины и принимают в каждом наблюдении данной серии вполне определенные значения». Только дополнили сказанное примерами и некоторыми рассуждениями из цитируемой работы.

Мы не можем пояснить, как, например, задаются конкретные («не случайные») значения содержания разных химических элементов в отливках.

**Замечания 19. 1.** Для данной марки стали, независимо от того, в какой плавке (да и на каком предприятии тоже) получены отливки, содержание разных химических элементов в сплаве задается в определенных пределах, ограниченных допусками (в соответствии с ГОСТ на сплав). Наибольшие отличия химического состава имеются в отливках, полученных в разных плавках. В отливках, полученных из одной плавки они меньше. Для образцов, вырезанных из одной отливки, отличия также имеют место, но они, по идее, минимальны. В пределах допуска содержание каждого из элементов является случайным и распределено по некоторому закону. Конечно же, их содержание можно определить для каждой отливки, но только с точностью до погрешности измерения – она неизбежна. При измерениях необходимо выполнение условия: распределение погрешностей измерений должно быть существенно уже поля допуска<sup>50</sup>. В результате получим (замечание к положению {A.8.2} и положение {A.8.3} стр.19) распределение ударной вязкости при случайном характере химического состава сплава, «сдобренное» погрешностью измерений. Отсюда следует, что содержание компонент необходимо задавать. При реальном производстве такие эксперименты – дорогое удовольствие: необходима постановка специальных опытов, что тоже не дешево. При этом не следует забывать, что при изменении содержания одной из компонент химического состава, изменяется (возможно, и незначительно) содержание всех других компонент сплава. Лучше, по возможности, одновременно изменять содержание той компоненты, для которой ранее показано, что ее влияние мало (по крайней мере, хорошо известно). **2.** Вообще говоря, интерес представляют характеристики прочности (в том числе ударная вязкость) детали, изготовленной из данной марки стали, а не отливки (образцы, вырезанные из отливки, тоже подвергаются механической обработке). При изготовлении детали они окончательно формируются при термической и механической обработке. Параметры термической обработки: температуры, времени нагрева, выдержки и охлаждения. Методы механической обработки, применяемые при изготовлении – это то, что понимается под другими факторами. Они разнообразны и часто также оказывают существенное влияние на прочность. Параметры термической и механической обработки являются случайными и тоже ограничиваются допусками. Однако характеристики обычно определяются не на деталях, а на стандартных образцах, но об этом поговорим несколько позже.

Обратим внимание на момент, следующий из замечаний 19 к первому примеру, данному в цитате (стр.55):

<sup>50</sup> В противном случае нельзя подтвердить требования к химическому составу сплава

**{А.23.1}** На величину *прочностных характеристик* сплава влияет как *случайность параметров* технологического процесса изготовления детали в пределах допусков, так и *погрешность измерения* параметров.

Влияние случайности параметров  $x_1, x_2, \dots, x_k$  технологического процесса на характеристики прочности детали, во-первых, отличает рассматриваемый пример от предыдущих примеров. Во-вторых, что более важно, это обстоятельство существенно усложняет определение оценки погрешности построения зависимости прочностных характеристик от параметров технологического процесса изготовления.

Даже для образца число параметров, определяющих технологический процесс его изготовления, хотя и намного меньше число параметров, определяющих технологический процесс изготовления детали, но все же достаточно велико. Есть немало параметров, влияние которых на прочность можно изучать и, по возможности, как-то изменять. Конечно же, такие исследования, несмотря на их сложность и трудоемкость, проводятся. Наши знания о том, какое влияние оказывает случайность тех или иных параметров  $X_v$  ( $v=1,2,\dots,V$ ) технологического процесса производства деталей, на интересующие нас свойства сплава, несомненно важны для получения требуемых характеристик прочности. Однако мы обратим внимание на другое обстоятельство:

**{А.23.2}** Любой параметр, независимо от того, контролируется он или нет, знаем ли мы зависимость характеристик прочности от изменения данного параметра или нет, является случайным.

Это определяется возможностями технологии производства сплава и изготовлением деталей (и образцов) из него.

**{А.23.3}** В испытаниях определяется совокупное влияние всех случайных параметров  $X_v$  (случайных величин  $X_v$ ) технологического процесса на поведение прочности сплава (металла) – параметра  $Y$  (случайной величины  $Y$ ). Т.е. совокупность всех параметров  $X_v$  можно рассматривать как одну случайную величину  $X$ .

Если по сути, то для определения функциональной зависимости, ни распределения случайных величин  $X_v$ , ни их числовые характеристики нам не очень-то и нужны (т.е. «желательны, но не обязательны»). Распределение конкретного параметра  $X_v$  технологического процесса возникает в том случае, когда необходимо изучить его влияние на прочность: как следует из замечаний 19 (стр.56), решение этой задачи совсем не просто.

## 1.4.2. Диаграммы деформирования и характери-

## ки прочности

Для примера рассмотрим определение характеристик прочности сплавов, определяемых при испытании образцов на растяжение. Именно результаты этих испытаний и были изображены на диаграммах.

**Пример 16.** Прежде всего, отметим: анализ проводится только на примере характеристик прочности, которые в механике называют статическими. Хорошо иметь и динамические характеристики, но их определение связано со сложностью (и дороговизной) постановки экспериментов, за исключением простых экспериментов для определения ударной вязкости<sup>51</sup>. Есть еще испытания на усталостную прочность, ползучесть и т.п., но, хотя их анализ с этих позиций тоже необходим, они не являются темой данного анализа. Впрочем, как и влияние температуры или скорости деформирования на поведение и характеристики сплава.

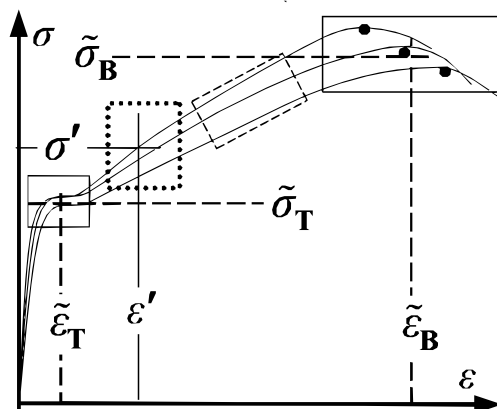


Рис. 16

сле него – в какой-то *малой* (как следствие случайности свойств по объему образца (п.3 стр.59) – наиболее слабой) части образца *поперечное сужение происходит чуть быстрее, чем в остальной* его части: начинается *образование шейки*.

Напряжения  $\bar{\sigma}_B^{(n)}$  или деформации  $\bar{\varepsilon}_B^{(n)}$  (верхний индекс – номер опыта), соответствующие точкам *максимума* (отмечены на диаграммах), определяют *предел прочности* образца. После прохождения точки *максимума*, происходит интенсивное образование шейки: сила, необходимая для деформации образца уменьшается и довольно быстро наступает разрушение. Учет поперечного сужения, в том числе, местного сужения поперечного сечения при интенсивном образовании шейки, показывает, что истинные напряжения  $\sigma = F/S(L)$  растут вплоть до разрушения образца.

2. Из характеристик, вычисляемых по результатам испытаний<sup>53</sup>, рассмотрим

<sup>51</sup> Ударная вязкость, ее значение и применение – очевидно и понятно: она учитывается при конструировании, исходя из общих рассуждений, основанных на опыте применения данного сплава в других конструкциях при схожих условиях. Осталось определить как ее применять в расчетах конструкций, но с решением этого вопроса «как-то туговато»

<sup>52</sup> Измеряемая или рабочая часть образца, отмечается метками (рисками) на образце

<sup>53</sup> Пояснения сути характеристик намного подробнее и лучше, чем данные выше, приводятся в учебниках по сопротивлению материалов, например [27]: из известных нам учебников по сопромату наиболее подробные пояснения даны в работе С.П. Тимошенко «Сопротивление материалов» часть 2-я

характеристики *предела текучести*  $\bar{\varepsilon}_T$ ,  $\bar{\sigma}_T$  и *предела прочности*<sup>54</sup>  $\bar{\varepsilon}_B$ ,  $\bar{\sigma}_B$ . Число испытанных образцов за время производства конкретного сплава достаточно большое (диаграмм деформирования, по разным причинам, много меньше): в справочниках приводятся данные по всем характеристикам, полученные по результатам обработки до 2-5 и более тысяч испытаний. Точками  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)}\}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), отмеченными на диаграммах, показаны пределы прочности конкретных образцов.

**П.2.** Методы *обработки диаграмм* существуют давно: старые совершенствуются, разрабатываются новые. Но все они (по крайней мере те, которые известны автору сего труда) *относятся к обработке диаграмм*, которые получены на конкретном образце. Иногда приводятся так называемые «типичные» диаграммы деформирования конкретного сплава, но что это такое – не совсем понятно: пояснений, как они определяются, не приводится<sup>55</sup>. Во-первых, следуя теории вероятностей, данные по какой-либо характеристике прочности образца, полученные по всем испытанным образцам, объединяются в одну совокупность и определяются, во-первых, выборочные характеристики: среднее значение и дисперсия. Например,  $\bar{\varepsilon}_B$ ,  $\bar{\sigma}_B$  и  $\bar{D}(\varepsilon_B)$ ,  $\bar{D}(\sigma_B)$ . Области, в которых находятся точки  $(\varepsilon_T^{(n)}, \sigma_T^{(n)})$  и  $(\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)})$ , условно определяются прямоугольниками, границы которых обозначены штриховыми и штрихпунктирными линиями (рис.16 стр.59).

Во-вторых, они используются для построения законов распределения характеристик прочности. Чаще всего полученные данные почти симметричны относительно математического ожидания, поэтому обычно полагается, что они распределены нормально, и решается задача аппроксимации нормальной кривой: определяются оценки математического ожидания и дисперсии. «Дань» пониманию того, что характеристики являются случайными величинами  $E$  и  $\Sigma$ . Однако эти данные применяются в основном при оценках надежности: в расчетах прочности для определения коэффициентов запаса чаще используют минимальные значения, гарантируемые производителем сплава.

**П.3.** Рассмотрим диаграммы деформирования с другой точки зрения. Каждая из диаграмм характеризует *отличие прочностных свойств данного образца от свойств множества других* испытанных образцов, определяемых набором конкретных реализаций случайных параметров технологического процесса их изготовления, в том числе, неоднородность свойств по объему образца<sup>56</sup>: по длине значительно больше, чем по диаметру (или толщине и ширине плоских образцов), учитывая их соотношение. Случайная неоднородность свойств по объему, в первую очередь по длине образца, предопределяет случайное отличие деформаций по объему образца и образование шейки в наиболее слабом случайном месте.

**Комментарий.** Наличием случайной неоднородности свойств по объему объясняется явление уменьшения прочности подобных деталей при увеличении их размеров: чем больше объем, тем больше неоднородность свойств и ее влияние на прочность.

Подчеркнем: в опыте регистрируется только суммарное удлинение измеряемой части образца и усилие, действующее на него. «Картина» изображенная на рис.16 (стр.59), это только некоторая тенденция: реально она сложнее. Дальнейшее описание основано на построении кривых в одной системе координат (замечание 17, стр.54). На основе это-

<sup>54</sup>Его также называют временным сопротивлением растяжению

<sup>55</sup>Как-то в журналах появились (как минимум – лет 15 назад) статьи с «типичными» диаграммами каких-то сплавов, которые, по утверждению авторов, получены по некоторому числу диаграмм. Но о способе обработки совокупности диаграмм – ни слова. Возможно, методом наименьших квадратов, но это «догадки»: по крайней мере, мы его применили для определения усредненной кривой, после долгих раздумий над совокупностью построенных диаграмм. Что делать дальше было абсолютно непонятно: если честно – тогда и желания не было, – ну никакого (замечание 17, стр.54)

<sup>56</sup>Явление уменьшения прочности подобных деталей при увеличении размеров давно известно: в деталях машин для его учета используются так называемые масштабные коэффициенты, определяемые на опыте применения данного материала

го рисунка<sup>57</sup> удалось выделить некоторые отличия реальной картины от «нарисованной тенденции».

**Во-первых.** Если выделить какую-либо прямоугольную область (условно обозначена прямоугольником с пунктирными границами, (рис.16 стр.59) так, чтобы *левая нижняя* вершина *совпала* с точкой на *нижней* кривой, а *правая верхняя* – с точкой на верхней кривой, то можно увидеть, что отрезки кривых, определяемые прямоугольником, также группируются около некоторой кривой и не заполняют весь прямоугольник. Т.е., по сути, они ограничены криволинейным четырехугольником, который приближенно можно заменить прямоугольником (обозначен на рис.16 сплошными линиями) расположенным под углом к осям  $\varepsilon_0\sigma$ . Кривая, полученная на одном образце, может пересекать 1-2-е кривые, полученные на других образцах и не только в одной, но и в двух точках. Может ли она пересекать больше 2-х или все кривые, или какие-то кривые более, чем в 2-х точках, не знаем: по крайней мере, для изображенных диаграмм, таких пересечений не было. В принципе, важен другой момент. В результате экспериментов определяется семейство кривых, похожее на изображение случайного процесса: п.3 примера 1 (стр.8) с которого мы и начали раздел 1. Возможно это сходство определило то, что «... характеристики прочности неоднородного стержня, могут рассматриваться как случайные функции абсциссы сечения  $x$ » (цитата из работы [13,373] на стр.55)

**Во-вторых.** Если провести прямую линию  $\sigma' = \varepsilon'$ , то точки ее пересечения с кривыми  $\sigma^n(\varepsilon^n)$  (рис.16 стр.59), т.е. значения напряжений  $\sigma^{(n)}|_{\sigma'=\varepsilon'}$  на кривой образца с номером  $n = 1, 2, \dots, N$  являются случайными, образуют некоторое распределение  $p(\sigma^{(n)}|_{\sigma'=\varepsilon'})$  и группируются около некоторой точки, расположенной приблизительно посередине между нижней и верхней кривой. Проведя прямую линию  $\varepsilon' = \sigma'$ , получим значения деформаций  $\varepsilon^{(n)}|_{\varepsilon'=\sigma'}$  на кривой образца с номером  $n = 1, 2, \dots, N$ , которые образуют некоторое распределение  $p(\varepsilon^{(n)}|_{\varepsilon'=\sigma'})$  и группируются около точки, расположенной приблизительно посередине между нижней и верхней кривой.

На основе проведенных *исследований* в статье [30], настоящего раздела и анализа построения случайных процессов, завершаемых в части VII исследований, можно *утверждать*:

{А.24.1} Любая *диаграмма деформирования* определяет *однозначную взаимосвязь*  $\sigma^{(n)} = g(\varepsilon^{(n)})$  между *напряжениями*  $\sigma^{(n)}$  и *деформациями*  $\varepsilon^{(n)}$  в образце с *данным номером «п»*.

**Подчеркнем:** в том числе, *однозначную функциональную взаимосвязь между напряжениями*  $\sigma_T^{(n)}$  и *деформациями*  $\varepsilon_T^{(n)}$  (или  $\sigma_B^{(n)}$  и  $\varepsilon_B^{(n)}$ ), характеризующие *пределы текучести и прочности* данного образца.

{А.24.2} Каждая из *диаграмм деформирования* характеризует *одно и то же свойство* твердого *деформируемого* тела, которое называется *прочностью: способность сопротивляться изменению формы, размеров и взаимного расположения его частей при действии на тело внешней нагрузки F*.

Эта способность твердого тела определяется взаимодействием между частицами (атомами, молекулами), из которых оно состоит. Технология изготовления металлов (сплавов) и деталей из них оказывает существенное влияние на это взаимодействие. Этими вопросами занимается ветвь науки о прочности материалов, которая называется *физикой прочности*: мы на этом не останавливаемся, ибо цель анализа другая. Случайность *диаграмм деформирования* каждого образца, определяется *случайным откло-*

<sup>57</sup>Мы его не приводим: для наглядности требуется изображение в большом масштабе (сноска 47 стр.55)

нением каждого из параметров данного технологического процесса изготовления, как для разных образцов, так и по объему конкретного образца. Отсюда следует:

**{А.25.1}** *Диаграммы деформирования* каждого образца случайно отклоняются от некоторой *гипотетической*, по-видимому, *можно сказать – теоретической*, функции  $\sigma = g(\varepsilon)$  (или от функции  $\varepsilon = h(\sigma)$ , обратной функции  $\sigma = g(\varepsilon)$ ), которая присуща именно данному технологическому процессу изготовления образца.

**Замечания.** 1. Вот только теоретически построить зависимость  $\sigma = g(\varepsilon)$  на данном этапе развития науки о прочности невозможно. 2. Технологический процесс изготовления образцов стремятся приблизить к процессу изготовления деталей, однако идентичными их сделать почти невозможно, поэтому он всегда имеет отличия от последнего. 3. Фактически, положение подводит итог предыдущих утверждений: значения напряжений  $\sigma_T^{(n)}$  или  $\sigma_B^{(n)}$  связаны с значениями деформаций  $\varepsilon_T^{(n)}$  или  $\varepsilon_B^{(n)}$  теоретической функциональной зависимостью  $\sigma = g(\varepsilon)$ .

**{А.25.2}** *Распределение вероятностей напряжений или деформаций* существуют в любой выделенной части (например, в прямоугольнике со сплошными или пунктирными границами на рис.16 стр.59) *диаграмм деформирования образцов* (не только пределов текучести и прочности; п.3 примера 16 стр.59).

**{А.26}** Отклонения определяют зависимость вероятностей от изменения внутренних условий опыта от образца к образцу при постоянстве внешних условий: при любом данном значении  $F_d$  нагрузки имеем отличающиеся значения напряжений  $\sigma^{(n)}$  и деформаций  $\varepsilon^{(n)}$  в разных образцах, определяемых различием исходных характеристик прочности образцов с номером  $n=1,2,...,N$ .

Утверждения в положениях не совсем согласуются с принятой трактовкой совокупности диаграмм деформирования при испытаниях образцов на статическую прочность как случайного процесса. Для того чтобы понять, что является *правильным*, – наш анализ или предположение существующей теории, – необходимо было дополнительно провести анализ построения случайных процессов с позиций теории, развитой в настоящей работе. Отметим, что анализа построения случайных процессов в принятой теории просто не существует: исключением являются два частных случая (определение распределения скоростей в покоящемся газе<sup>58</sup>; случайные блуждания частицы [1,103-110; 6,80-82]), в которых имеются некоторые предпосылки для проведения такого анализа. Вот только самого анализа нет.

**В-третьих.** Приблизительно при равном значении напряжений  $\sigma_B^{(k)} \cong \sigma_B^{(j)}$ , значения деформаций  $\varepsilon_B^{(k)}$  и  $\varepsilon_B^{(j)}$  могут отличаться значительно, например: одна точка может находиться вблизи левой, а другая точка – вблизи правой границы прямоугольника. Подобным образом могут отличаться напряжения  $\sigma_B^{(k)}$  и  $\sigma_B^{(j)}$  при приблизительно равных деформациях  $\varepsilon_B^{(k)} \cong \varepsilon_B^{(j)}$ .

Результаты анализа, проведенного в статье, посвященной случайным процессам (часть VII исследований), подтверждают правильность утверждений {А.20}-{А.23}: совокупность *диаграмм деформирования* определяет

<sup>58</sup>Мы не увидели, чтобы этот случай подробно рассматривался в литературе (по крайней мере, просмотренной) по теории вероятностей

функциональную зависимость  $\sigma = g(\varepsilon)$  между напряжениями  $\sigma$  и деформациями  $\varepsilon$  от изменения внутренних условий эксперимента – отличие прочностных свойств одного образца от другого образца.

Однако зависимость  $\sigma = g(\varepsilon)$  является «только прелюдией» к построению случайного процесса, который связан непосредственно с проведением испытаний. Это определяется тем, что машины, применяющиеся при испытаниях образцов на растяжение (сжатие, кручение), устроены так, чтобы обеспечить движение подвижного захвата с постоянной скоростью<sup>59</sup> (по крайней мере, к этому стремятся при проведении экспериментов).

**{А.27.1}** Следовательно, экспериментальный способ определения статических характеристик прочности является случайным процессом с постоянной скоростью изменения удлинения рабочей части образца: увеличение внешнего усилия необходимо для преодоления внутренних сил сопротивления образца изменению его размеров.

Постоянство скорости может привести к мысли, что случайный процесс определения статических характеристик прочности имеет некоторое сходство с процессом случайных блужданий частицы, в котором скорость постоянна по величине. Однако в отличие от рассматриваемого процесса, при случайных блужданиях частицы через равные промежутки времени, движение частицы с некоторой вероятностью может изменяться на направление противоположное данному.

Обратим внимание на более существенное отличие. В результате испытания образца, вообще говоря, определяются две величины, зависящие от времени  $t$ : 1. Путь  $S^{(n)} = s^{(n)}(t)$ , пройденный меткой на образце, ближайшей к подвижному захвату, относительно метки, ближайшей к неподвижному захвату, т.е. фиксируемое удлинение образца. 2. Усилие  $F^{(n)} = f^{(n)}(t)$ , действующее на образец (верхний индекс – номер опыта).

Отсюда следует, что экспериментальный способ определения прочностных характеристик подобен случайному процессу, например, описывающего движение неуправляемого артиллерийского снаряда. Это движение определяется исходными данными, соответствующие началу движения (начальной скоростью  $v_0$ , углами наклона ствола к горизонту и направлением на цель, баллистическими характеристиками снаряда и т.п.), состоянием атмосферы (температура, давление, скорость и направление ветра и т.п.) и действием земного притяжения.

При отсутствии атмосферы скорость снаряда  $v = v_0 = \text{const}$  постоянна, а траектория  $z_0 = \phi_0(x)$  (движение по траектории определяет путь, пройденный снарядом) в координатах  $XOZ$  ( $x$  и  $z$  – дальность и высота полета снаряда) представляет собой часть эллипса [28,250-254], содержащую одну из его осей, которая перпендикулярна поверхности земли. Траекторию

<sup>59</sup>Для определения статических характеристик скорость обычно не превышает нескольких миллиметров в минуту



получают исключением времени  $t$  из уравнений движения.

Сопротивление воздуха приводит к уменьшению скорости  $v_0 = v_0(t)$  с увеличением времени, что, конечно же, портит эллипс. Применяя методы внешней баллистики (науки о движении снаряда в воздухе), можно найти теоретическую траекторию  $z = \phi(x)$  снаряда и в этом случае. Случайные отклонения исходных данных и состояния атмосферы (в том числе, учитывая ее отличие на разных участках полета снаряда), определяют отклонение конкретной траектории  $z^{(n)} = \phi^{(n)}(x)$  при данном выстреле от теоретической траектории  $z = \phi(x)$ .

Замечания 20. Отметим отличия случайного процесса, связанного с определением прочностных характеристик, от случайного процесса, определяющего свободный полет неуправляемого снаряда.

1. Рассматриваемый процесс зависит только от начальных исходных данных<sup>60</sup>: распределения характеристик прочности по объему образца, определяемое технологическим процессом его изготовления. 2. Постоянство скорости изменения удлинения (рабочей части) образца, определяет линейную зависимость удлинения (деформации) от времени. 3. Диаграммы деформирования образца находятся в одной плоскости, а траектории движения снаряда – в трехмерном пространстве.

Третье отличие не влияет на последующее изложение: гипотетически всегда можно положить, что отклонения направления ствола на цель отсутствуют (равны нулю), что мы и будем делать далее<sup>61</sup>.

Второе отличие позволяет легко исключить время из выражений пути и усилия, и определить связь усилия с удлинением (т.е. связь напряжений с деформациями) на стадии проведения эксперимента, что реально делается при проектировании испытательных машин: они снабжаются устройствами, которые непосредственно записывают эту связь.

**{А.27.2}** Таким образом, любая диаграмма деформирования является одной из множества возможных реальных траекторий (а не зависимостью какого-либо параметра от времени, которую мы назвали абстрактной траекторией: более подробно в следующей статье) случайного процесса, который определяется экспериментальным способом проведения испытаний.

Из первого отличия и положения **{А.27.2}** следует:

---

<sup>60</sup>Это не совсем точно: имеются случайные отличия, определяемые свойствами испытательной машины, но мы на них не останавливаемся

<sup>61</sup>Эти отклонения важны для стрельбы, но в этой статье мы ею заниматься не будем

**{А.27.3}** *Зависимость процесса только от случайности начальных данных, определяет только случайность появления одной из возможных реальных траекторий, т.е. только одной из возможных диаграмм деформирования.*

Теперь рассмотрим причины, которые, возможно, в существующей теории привели к появлению утверждения (замечание 17 стр.54):

**{А.28.1}** *Случайные величины  $\Sigma_B$  и  $E_B$  (или  $\Sigma_T$  и  $E_T$ ) «некоррелированные».*

В замечании 17 уже говорилось о том, что с точки зрения механики, картинка какая-то несуразная:

**{А.28.2}** *В испытаниях для каждого образца между напряжениями и деформациями определяется жесткая функциональная зависимость  $\sigma^{(n)} = g(\varepsilon^{(n)})$  (в том числе  $\sigma_B^{(n)} = g(\varepsilon_B^{(n)})$  и  $\sigma_T^{(n)} = g(\varepsilon_T^{(n)})$ ), а по совокупности испытаний – никакой зависимости не существует.*

Возможные рассуждения на которых строится утверждение. Пусть событием  $A_j$  является появление конкретного значения предела прочности  $\sigma_B^{(j)} = g(\varepsilon_B^{(j)})$  в образце с номером «j», которому соответствует появление события  $B_j$  – конкретное значения деформации  $\varepsilon_B^{(j)}$ . По значениям  $\sigma_B^{(j)}$  и  $\varepsilon_B^{(j)}$ , полученным по результатам  $N$  испытаний, определяются оценки  $\bar{\sigma}_B$ ,  $\bar{D}(\sigma_B)$  и  $\bar{\varepsilon}_B$ ,  $\bar{D}(\varepsilon_B)$  характеристик предела прочности сплава. Обычно данные аппроксимируются нормальными законами распределения  $p\{\sigma_B; M(\sigma_B), D(\sigma_B)\}$  и  $p\{\varepsilon_B; M(\varepsilon_B), D(\varepsilon_B)\}$ , при этом полагается, что параметры законов  $M(\sigma_B)$ ,  $D(\sigma_B)$  и  $M(\varepsilon_B)$ ,  $D(\varepsilon_B)$  приближенно равны  $M(\sigma_B) \cong \bar{\sigma}_B$ ,  $D(\sigma_B) \cong \bar{D}(\sigma_B)$  и  $M(\varepsilon_B) \cong \bar{\varepsilon}_B$ ,  $D(\varepsilon_B) \cong \bar{D}(\varepsilon_B)$ . Отметим: вид закона на распределения не влияет на последующие рассуждения.

Из анализа преобразования распределений одномерных случайных величин, проведенного в разделе 1.3 [30,30-33] следует:

**{А.28.3}** *Распределение случайной величины  $\Sigma_B$  (или  $\Sigma_T$ ) зависит только от независимой переменной  $\sigma$ , а случайной величины  $E_B$  (или  $E_T$ ) – только от независимой переменной  $\varepsilon$ .*

Именно из положения **{А.28.3}** следует: совместная плотность распределения случайных величин  $\Sigma_B$  и  $E_B$  (или  $\Sigma_T$  и  $E_T$ ) равна произведению плотностей исходных величин. В соответствии с определением, принятым в существующей теории, случайные величины  $\Sigma_B$  и  $E_B$  (или  $\Sigma_T$  и  $E_T$ ) независимы, откуда следует из некоррелированности [13,177].

Все очень просто: в принятой теории анализа преобразования распределений случайных величин никогда не было, естественно, что положений {А.28.2}-{А.28.3} тоже не существует. Однако положения определяются математикой, а не чьими-то мнениями.

Замечание 21. Впрочем, положение **{А.28.2}** (следовательно, и положение

{А.28.3}) можно получить и на основе принятой теории. Например, в работе [13,265-266] определение плотности распределения, полученного в результате преобразования (в работе оно рассматривается в разделе под названием «Законы распределения функций случайных аргументов»), производится на основе равенства  $G(y) = P(Y < y) = P(a < X < x) = \int_a^x f(x)dx$ , где  $f(x)$  – плотность распределения величины  $X$ , зависящая только от переменной  $x$ . С применением функции  $x = \psi(y)$  обратной к функции  $y = \phi(x)$  (которая, согласно трактовке принятой в существующей теории, определяет связь случайной величины  $Y$  со случайной величиной  $X$ ) но это, по сути, не верно: функция  $y = \phi(x)$  определяет связь координат, не связана со случайными величинами и не зависит от них, выводы W.1-W.6 [30,11]), верхний предел интеграла  $x$  выражается через  $y$ . Дифференцируя полученное выражение, получают плотность  $g(y) = f\{\psi(y)\}\psi'(y)$  (где  $\psi'(y)$  – производная от функции  $x = \psi(y)$  по переменной  $y$ ) распределения величины  $Y$ , зависящую только от переменной  $y$ . Дело осталось за малым: записать совместную плотность распределения величин  $X$  и  $Y$ : не случилось, но почему – у нас ответа нет, а строить догадки дело очень неблагоприятное.

Таким образом, утверждение существующей теории противоречит реальности: «*независимые и некоррелированные*» случайные величины связаны «*жесткой*» *функциональной зависимостью* (выводы W.14-W.18 [30,32] и их обобщение в настоящей работе, выводы W.1-W.3 стр.4).

Отметим, что рассуждения, связанные с понятиями *случайных процессов* (как и п.3 примера 1, стр.7), появились тогда, когда эта часть была уже почти написана: после *построения случайного процесса* на основе *функциональной зависимости* распределений вероятностей (часть VII исследований) от *условий проведения* испытания и рассмотрения *случайного процесса*, определяющего *движение* артиллерийского снаряда.

### 1.4.3. Определение законов распределения характеристик прочности и зависимость между напряжениями и деформациями

До сих пор мы занимались, в общем-то, изучением свойств диаграмм деформирования сплавов.

В разделе 1.4.1 проведен анализ совокупности *диаграмм деформирования*, которые получены *по испытаниям на прочность* образцов. При рассмотрении *свойств диаграмм*, мы говорили о *функциональной зависимости между напряжениями и деформациями, распределениях их вероятностей* и даже показали, что *совокупность диаграмм является слу-*

чайным процессом<sup>62</sup>, но не сказали ни слова о построении зависимости  $\sigma = g(\varepsilon)$  и распределений вероятностей напряжений и деформаций.

Перейдем к непосредственному построению функциональной зависимости между напряжениями и деформациями по совокупности диаграмм, полученных по результатам экспериментов с образцами.

**Замечание 22.** На рис.16 (стр.59) области, ограничивающие экспериментальные точки, определяются прямоугольниками, границы которых обозначены штриховыми и штрихпунктирными линиями. Обозначение достаточно условно, ибо реальная область, вообще говоря, несколько отличается от прямоугольной.

Зависимость  $\sigma = g(\varepsilon)$  определяется в тех же координатах  $\varepsilon\sigma$ , в которых даны диаграммы. Для упрощения применения метода наименьших квадратов, каждая из диаграмм  $\sigma^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon)$  ( $n=1,2,\dots,N$ ) представляется в виде точек  $\{\varepsilon_v^{(n)}, \sigma_v^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon_v^{(n)})\}$  ( $v=1,2,\dots,v$ ). Затем, с применением метода наименьших квадратов, вычисляются коэффициенты  $c_w$  ( $w=1,2,\dots,W$ ) заданной аппроксимирующей кривой  $\sigma(\varepsilon) = \sum_1^W c_w f_w(\varepsilon)$ .

**Замечания 23.** 1. Для построения лучше применять истинные диаграммы, при этом следует опираться на часть каждой из диаграмм, ограниченной точкой максимума  $\{\varepsilon_B^n, \sigma_B^n = g^n(\varepsilon_B^n)\}$ , определяющей характеристики предела прочности: использование ниспадающей ветви диаграмм искажает поведение функции  $\sigma = g(\varepsilon)$  при приближении к ее максимуму, т.е. к пределу прочности образца. По нашему мнению следует признать, что после максимума истинной диаграммы в природе не существует: ниспадающая ветвь – следствие постоянства скорости движения подвижного захвата. 2. Подобрать для аппроксимации какую-либо одну функцию весьма сложно, кроме того, могут появляться нежелательные эффекты. Лучше разбить на участки и на каждом из участков, использовать свою функцию. Для сопряжения функций на общих границах участков принять равенства значений функций и первых производных.

Процедуры хорошо известны и широко применяются в практике: поэтому более подробно на этом останавливаться не будем.

Рассмотрим основной вопрос: построение распределений характеристик предела прочности  $\sigma_B$  и  $\varepsilon_B$  (или текучести  $\sigma_T$  и  $\varepsilon_T$ ) сплава, с учетом связи  $\sigma_B = g(\varepsilon_B)$  (или  $\sigma_T = g(\varepsilon_T)$ ) между напряжениями и деформациями: существующая теория эту связь «напрочь» отрицала.

Определение функциональной связи распределений характеристик предела прочности тесно связано с основной задачей, которая определила возникновение и развитие науки о прочности материалов.

Дело в том, что характеристики прочности определяют на образцах, в которых при испытаниях реализуются наиболее простые виды напряженно-деформированного состояния (НДС): одномерное растяжение или сжатие, сдвиг (кручение) и т.п. К сожалению, характеристики

<sup>62</sup>С привлечением анализа построения случайных процессов (следующая статья)

прочности существенно зависят от вида НДС, а НДС детали существенно отличаются от НДС образца. Можно конечно, определять характеристики прочности детали при реализованном в детали НДС, однако:

**Замечания 24.** 1. Для определения закона требуется большое число опытов. 2. НДС зависит от геометрии детали и направления действия нагрузки на деталь. Если как-то изменилась геометрия детали или направление нагрузки, то требуется повторение опытов. 3. Деталь находится в составе конструкции. Создание в испытаниях реальных условий нагружения детали при ее работе в составе конструкции, является плохо решаемой проблемой. Т.е. необходимо испытывать конструкцию, но это далеко не всегда возможно.

Такой путь не только громоздкий и дорогостоящий, но и тупиковый. Естественно, что мысли и усилия ученых были направлены на «... создании такой теории, которая позволила бы на основе минимального числа испытаний образцов из данного материала спроектировать любую часть машины (сооружения) из этого материала так, чтобы можно было уверенно судить о ее прочности [27,449]. Математическая связь прочности детали при данном НДС, с характеристиками прочности, полученными на образцах, называется теорией прочности.

В настоящее время существует около 2-х десятков теорий прочности (их число продолжает расти и когда закончится процесс создания новых теорий предсказать невозможно). Не будем их рассматривать, как и касаться вопросов о применимости той или иной теории: пусть этим занимаются специалисты по прочности. Отметим только то, что математические модели теории прочности далеки от совершенства. Отличие формы и размеров детали и образца определяет различное влияние параметров технологических процессов на прочностные характеристики материала. Различие технологии изготовления детали и образца увеличивает это отличие. Отметим, что последнее отличие не может быть учтено теорией прочности: для этого необходимо определить связь прочности детали с технологией ее производства.

Однако закончим этот «экскурс» в теорию прочности и вернемся к задаче определения распределений напряжений и деформаций, определяющих характеристики предела прочности, с учетом функциональной связи распределений. Напомним, что конечной целью решения задачи является вычисление некоторых значений вероятностей, связанных с этими распределениями, например: определение коэффициентов запаса, отвечающих требуемой надежности; экспериментальное подтверждение достаточности запасов и т.п..

**Пример 17.** На рис.17 условно изображены 6 диаграмм деформирования (рис.17А) для хрупкого и 4 – для пластичного (рис.16С) поведения сплава. Утолщенная кривая – аппроксимирующая функция, определенная методом наименьших квадратов. Кружками обозначены точки  $(\varepsilon_B^{(j)}, \sigma_B^{(j)})$ , определяющие предел прочности при испытании образца с номером «j». Отметим, что для сравнения диаграмм на рисунках 17А и рис.176С необходимо, по крайней мере, либо на порядок уменьшить масштаб представления деформаций на рис.17А (тогда на нем ничего нельзя будет понять), либо увели-

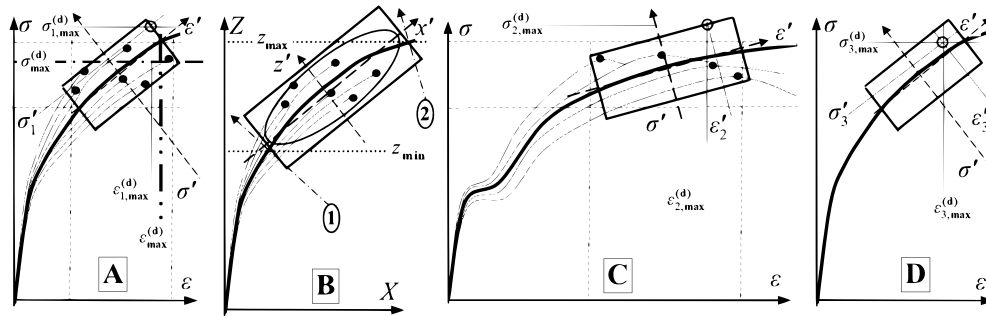


Рис. 17

чить его на порядок на рис.17С (тогда он не поместится на странице). Изображение диаграмм деформирования в разных масштабах не влияет на последующие рассуждения, связанные с построениями.

Об изображении на рис.17В разговор пойдет в п.1, о прямоугольниках и других деталях на рис.17А и рис.17С, а также о рис.Д – в п.2 (стр.71).

п.1. 1. А сейчас еще раз обратимся к свободному полету неуправляемого снаряда<sup>63</sup>, учитывая его подобие с рассматриваемым процессом. Пусть по воздушной цели производится стрельба дистанционными осколочно-фугасными снарядами: например, подрыв снаряда осуществляется на заданной высоте  $z^d$ , которая меньше максимального подъема снаряда. Полагаем, что движение определяется только исходными данными, соответствующими началу движения.

При этих условиях картина возможных траекторий снаряда (рис.17В) будет подобна рис.17А, т.е. диаграммам испытания образцов при хрупком поведении сплава (координату  $Z$  можно совместить с координатой  $\sigma$ , координату  $X$  – с координатой  $\epsilon$ , а координату  $Y$  – направить перпендикулярно плоскости рисунка). Напомним: нами уже положено (абзац после замечания 20, сноски 61 стр.64), что возможные траектории полета снаряда находятся в одной плоскости. В этом случае, точки, отмеченные на кривых, соответствуют подрыву снаряда на траектории. Горизонтальные пунктирные прямые линии (для максимального значения  $z_{\max}$  на рис.17В обозначение не приведено) ограничивают максимально возможные отклонения (отрезок  $\{z^d - z_{\min} \leq z \leq z_{\max} - z^d\}$ ) высоты (рис.17В) подрыва от заданной высоты  $z^d$ . Эти отклонения связаны с погрешностью срабатывания датчика высоты и не имеют отношения к отклонениям возможных траекторий снаряда.

Рассмотренные выше отклонения являются дополнительными к отклонениям конкретной траектории  $z^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)})$  от теоретической траектории  $z = f(x)$  при выстреле с данным номером  $n$ . Отклонения конкретной траектории  $\delta^{(n)}(x'_j)$  от теоретической траектории  $z = f(x)$  в точке  $x_j$  определяются отрезком от точки  $\{x_j, z_j = f(x_j)\}$  по нормали к кривой в этой точке, до точки  $\{x'_j, z_j = f(x'_j)\}$  пересечения нормали с конкретной траекторией  $z^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)})$ . Точка  $x'_j \neq x_j$  подлежит определению при данном значении  $x_j$  для каждой конкретной траектории  $z^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)})$ .

Границы максимально возможных отклонений  $\delta_{\max}^{(n)}(x)$  конкретных траекторий от теоретической траектории, определяются, в первую очередь, максимальными отклонениями  $\pm\delta(v)$  и  $\pm\delta(\alpha)$  начальной скорости  $v$  и угла  $\alpha$  наклона ствола к горизонту от номинальных (теоретических) значений  $v_0$  и  $\alpha_0$ .

<sup>63</sup>Мы считаем: его анализ делает понятнее анализ рассматриваемого процесса. Возможно – ошибаемся

Отклонения баллистических характеристик снаряда и состояния атмосферы от номинальных значений, также оказывают влияние на границы максимально возможные отклонений  $\delta_{\max}^{(n)}(x)$ , но в меньшей степени.

**{А.29.1}** Вычислив *точки пересечения данной нормали со всеми возможными траекториями*  $z^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)})$ , полученными в  $N$  испытаниях, можно определить *числовые характеристики и закон распределения отклонений возможных траекторий от теоретической траектории на данной нормали*.

**Замечание 25.** Очевидно, что область определения распределения, принадлежащего нормали, проходящей через точку  $\{x_j, z_j = f(x_j)\}$ , увеличивается при увеличении координаты  $x_j$ . Теперь определим отклонения длин возможных реальных траекторий  $z^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)})$  от начала координат до точки их пересечения  $\{x'_j, z_j = f(x'_j)\}$  с нормалью, проходящей через точку  $\{x_j, z_j = f(x_j)\}$ , а также числовые характеристики и закон распределения отклонения длин возможных реальных траекторий. Отметим, что этот закон распределения определен на теоретической кривой  $z = f(x)$ .

**{А.29.2}** Таким образом, имеем *двумерное распределение*, которое определено в координатах: *криволинейная координата, определяемая теоретической траекторией и прямолинейная координата, определяемая нормалью к теоретической кривой  $z = f(x)$  в данной точке  $\{x_j, z_j = f(x_j)\}$* .

2. Однако все изложенное в п.1.1 – это теоретические рассуждения. Практика же намного сложнее. *Во-первых*, в *экспериментах* можно определить *координаты точек подрыва*  $x_B^{(n)}, y_B^{(n)}$ , что обычно и выполняется. А вот *экспериментальное определение возможных траекторий движения снаряда* – это задача, которая обычно не решается ввиду большой сложности ее решения. Вообще говоря, в принятой теории такой задачи не ставилось, ибо *возможные реальные траектории движения* к расчетам *не привлекались*. *Во-вторых*, практически все *экспериментальные точки* находятся в области, *ограниченной* некоторой фигурой, близкой к *эллипсу* (он условно изображен на рис.17В). *Эллипс отделяет «практически достоверное» событие* (появляющееся с вероятностью  $P_1 > 0,999$  внутри эллипса) от *«практически невозможного»* (п.2.2 примера 4 стр.18). Т.е. *точки вне эллипса могут вообще не появиться в экспериментах*.

В этом случае аппроксимация функцией  $\psi(z) = \sum_1^W c_w \cdot f_w(x)$  проводится по системе точек  $\{x_B^{(n)}, y_B^{(n)}\}$ , расположение которых ограничено снизу и сверху прямыми линиями  $x = z_{\min}$  и  $x = z_{\max}$  (границы отрезка  $\{z^d - z_{\min} \leq z \leq z_{\max} - z^d\}$ ), а слева и справа – кривыми  $z^{(\min)} = \phi_{\min}(x)$  и  $z^{(\max)} = \phi_{\max}(x)$  соответственно. Аппроксимация по методу наименьших квадратов, в общем-то, к затруднениям не приводит, но есть сложности с определением оценки погрешности аппроксимации. Это определяется несовпадением нижней и верхней границ области определения с нормальными (они обозначены штрихпунктирными стрелками с номерами 1 и 2 рис.17В стр.69) к кривой в точках ее пересечения с линиями  $x = z_{\min}$  и  $x = z_{\max}$ , и определением левой  $z^{(\min)} = \phi_{\min}(x)$  и правой  $z^{(\max)} = \phi_{\max}(x)$  границ максимально возможных отклонений реальных траекторий.

Есть некоторая сложность определения распределения отклонений возможных траекторий. Область определения распределения точек достаточно сложная. Дополним их

отклонениями возможных траекторий, определяемых отклонениями  $\pm\delta(\beta)$  угла  $\beta$  направления на цель (т.е. повороты плоскости траекторий относительно оси  $Z$ ) от номинального значения  $\beta$ . В результате получим область определения в виде расширяющейся (в сечениях, определяемых плоскостями, перпендикулярными оси  $X$ ) прямоугольной кривой (в сечениях, определяемых плоскостями, перпендикулярными оси  $Y$ ) «трубы».

Таким образом, полученная картина области определения *трехмерного* распределения, *отличающаяся* от картины, *используемой в существующей* теории, в которой *экспериментальные точки* рассматриваются в системе координат с осями, *параллельными главным осям рассеивания*<sup>64</sup> [13,350-351]. При этом область, в которой располагаются точки, *считается*, по сути, *прямоугольным параллелепипедом* (пояснения по этому поводу в п.2.2 примера 4 стр.17-18).

Остался один нерешенный вопрос, о котором мы «стыдливо умолчали»:

*Как определить кривые  $z^{(\min)} = \phi_{\min}(x)$  и  $z^{(\max)} = \phi_{\max}(x)$ , определяющие левую и правую границы максимально возможных отклонений траекторий?*

**Замечание 26.** В данном случае задача может быть решена теоретически на основе применения методов внешней баллистики. Ее методы позволяют определить не только теоретическую траекторию (т.е. при принятых номинальных значениях исходных данных и состояния атмосферы) движения снаряда, но и кривые при максимальных отклонениях исходных данных и состояния атмосферы от номинала. Но мы не можем вычислить ни одной из случайных траекторий, определенных в экспериментах, ибо не знаем конкретных значений параметров, реализовавшихся в каждом эксперименте.

3. Конечной целью рассматриваемой задачи является *оценка вероятности поражения* воздушной цели осколочно-фугасным воздействием при подрыве заряда. Реальная область определения *трехмерного* распределения *усложняет решение* этой задачи, а при сравнении с решением, *принятым* в существующей теории – достаточно существенно.

Введем *предположения*, позволяющие *привести область определения* распределения к области, *принятой* в существующей теории.

**Замечания 27.** На рис.17В (стр.69) в координатах  $XOZ$  приведены возможные траектории, точки подрыва снаряда, пунктирные прямые (границы области срабатывания датчика высоты) и штрихпунктирная стрелка с номером 1 изображенные на рис.17А. На рисунке также даны изображения: I. Системы координат  $x'0z'$ , ось  $x'$  которой является прямой линией, полученной аппроксимацией экспериментальных точек  $\{x_B^{(n)}, y_B^{(n)}\}$  ( $n=1,2,\dots,N$ ). II. Нормали к кривой (штрихпунктирные стрелки с номерами 1 и 2), проходящей через точку пересечения прямой линии  $x = z_{\max}$  с кривой<sup>65</sup>  $\psi(z) = \sum_1^W c_w \cdot f_w(x)$ . III. Прямоугольной области определения распределения точек подрыва, которая соответствует области принятой в существующей теории. Короткие стороны прямоугольника проходят через точки пересечения прямых линий  $x = z_{\min}$  и  $x = z_{\max}$  с кривой  $\psi(z) = \sum_1^W c_w \cdot f_w(x)$  перпендикулярно оси  $x'$ . Длинные стороны находятся на расстояниях от оси  $x'$ , определяемые точками пересечения кри-

<sup>64</sup> Главные оси рассеивания – оси  $T0\Omega$ , в которых ковариация двумерного распределения равна нулю  $K(T, \Omega) = 0$  (положение {А.23.3} [31,22]). В работе [13,194] эти положения применены для двумерного нормального закона. Для трехмерного нормального закона показано только вычисление числовых характеристик  $m_X, m_Y, m_Z$  и  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_Z^2$

<sup>65</sup> Может быть лучше использовать (замечание 26) теоретическую кривую  $z = f(x)$



вых  $z^{(\min)} = \phi_{\min}(x)$  и  $z^{(\max)} = \phi_{\max}(x)$  с нормалью (обозначенной штрихпунктирной стрелкой с номером 2 на рисунке) к кривой: т.е. наибольшие отклонения из возможных (замечание 25 стр.69).

*Предположения*, принятые в пунктах I-III замечаний 27, *приводят решение* задачи к решению, данному в существующей теории.

Можно оценить погрешность принятого упрощения, но мы этого делать не будем: решение этой задачи, хотя и возможно, но достаточно сложно и грубо (так получилось при попытке построения). К тому же, оценка эффективности поражения не является целью данного исследования: это, в общем случае, очень непростое занятие. Тем не менее, отметим: упрощение завышает допустимый интервал возможных отклонений.

**п.2.** Вернемся к *основной задаче исследований: определению распределений характеристик предела прочности* (напряжений  $\sigma_B$  и деформаций  $\varepsilon_B$ ) сплава: она имеет некоторые отличия от задачи, рассмотренной в п.1.

*Во-первых*, результат  $N$  экспериментов –  $N$  диаграмм деформирования сплава, т.е. возможных реальных траекторий (положения {A.27.2}-{A.27.3} стр.64). *Во-вторых*, положение экспериментальных точек  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon_B^{(n)})\}$  определяется только длиной кривой  $\sigma^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon)$  ( $n=1,2,\dots,N$ ) от начала координат до экспериментальной точки  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)}\}$ . *В-третьих*, никаких других (дополнительных) ограничений на расположение точек не накладывается.

Аппроксимирующая кривая  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$  определяется методом наименьших квадратов так, как это описано в начале этого раздела с учетом замечаний 23 (стр.66).

Отклонение конкретной точки  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon_B^{(n)})\}$  от аппроксимирующей функции  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$  определяется (положение {A.11.2} стр.22) минимальным расстоянием между двумя точками, одна из которых лежит на кривой. Геометрически расстояние равно отрезку нормали к кривой  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$ , проходящей через точку  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)}\}$ , до которой оно вычисляется. Точка пересечения  $\{\varepsilon_j \neq \varepsilon_B^{(n)}, \tilde{\sigma}_j = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon_j)\}$  нормали с функцией  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$  подлежит определению для каждой экспериментальной точки  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)}\}$ . Далее, так же как и в п.1 (положения {A.29.1}-{A.29.2} стр.69), определяется распределение отклонений возможных траекторий от аппроксимирующей кривой  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$  на нормали, проходящей через точку  $\{\varepsilon_j, \tilde{\sigma}_j\}$ . Вычисляя отклонения длин возможных реальных траекторий  $\sigma^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon)$  от начала координат до точки  $\{\varepsilon_B^{(n)}, \sigma_B^{(n)} = g^{(n)}(\varepsilon_B^{(n)})\}$ , определяются числовые характеристики и закон распределения отклонения длин возможных реальных траекторий. Отметим, что этот закон распределения определен на аппроксимирующей функции  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$ .

**{A.29.3}** Таким образом (как и при свободном движении артиллерийского снаряда, положение {A.29.2} стр.69), определяется *двумерное* распределение в *координатах* (положение {A.29.2} стр.69), одна из которых является *криволинейной* (кривая  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$ ), а *вторая* определяется *нормалью* к кривой в *данной* точке.

Но *имеются отличия* области определения *совместного* распределения параметров от области распределения, рассмотренной в п.1.

*Во-первых*, она реально двумерная. *Во-вторых*, нижняя и верхняя границы области определения распределения являются координатными прямыми линиями, определяемые нормалью к криволинейной координате. *В-третьих*, границы  $\sigma^{(\min)} =$

$g_{\min}(\varepsilon)$  и  $\sigma^{(\max)} = g_{\max}(\varepsilon)$  максимально возможных отклонений траекторий не определяются: ни экспериментально, ни теоретически (как, например, в предыдущей задаче, п.1.2 замечание 26 стр.69,70).

Два первых отличия упрощают решение, а третье усложняет его.

На данном этапе это значительное усложнение: требуется разработка методики, которая позволит определять границы областей определения на основе экспериментальных результатов. Дело в том, что в принятой теории вероятностей применяются в основном законы распределения с неограниченными областями определения. Однако, в работе [29,52] показано (вывод W.18 и положение {A.16.2}), что область определения законов распределения в общем случае является ограниченной отрезком прямой (кривой). Отметим, что распределение с неограниченной областью определения может быть получено (вывод W.8 [30,14]) на основе ограниченного (например, равновероятного) распределения с применением нелинейного преобразования. Однако применение распределения с неограниченной областью определения должно быть обосновано.

Будем считать, что границы области определения вычислены (т.е. задача, заданная в предыдущем абзаце, решена). Можно, конечно, вычислять необходимые вероятности в криволинейных координатах, но проще применить предположения, принятые в пунктах I-III замечания 27 стр.71, и привести ее к декартовым координатах  $\varepsilon'0\sigma'$  (штриховые стрелки на рисунках 17.A и 17.C) с распределением, определенным в прямоугольной области (стороны прямоугольников параллельны координатам  $\varepsilon'$  и  $\sigma'$  соответственно).

2. Для сравнения на рисунках 17.A и 17.C штриховыми горизонтальными и вертикальными линиями выделены прямоугольники, которые определяют области определения двумерных распределений, вычисляемые в соответствии с принятой теорией вероятностей. Отличие областей очевидно: в принципе, более важным является отличие в направлениях координат  $\varepsilon'0\sigma'$  распределений, чем отличие размеров областей определения.

*Двумерное распределение в теории, развитой в работах [10; 19; 29-31], получено исходя из правильного понимания совокупности диаграмм деформирования сплава, как возможных реальных траекторий процесса, определяемого экспериментальным способом определения статических характеристик прочности. Это наглядно показано в разделе 1.4.2 стр.58 (положения {A.24.1}-{A.27.3} стр.61-64).*

Мы затрудняемся сказать, что послужило основой построения распределения в принятой теории. Скорей всего это связано с историей развития науки о прочности: сначала измеряли только внешнее усилие, при котором происходило разрушение, затем начали определять связь перемещения с усилием (например, прогиб балки), позже ввели понятия напряжений, с которыми начали связывать разрушение, а за ним и понятие деформаций (и попробовали с ней связать разрушение) ...

Но, в конце концов, это не имеет какого-либо особого значения. Важно, что они есть и следует разобраться, к чему приводят эти отличия.

Начнем с того, что делается в принятой теории.

Для заданного значения доверительной вероятности  $P_1^{(d)}$  вычисляется максимально допустимое напряжение  $\sigma_{\max}^{(d)}$  (скобки в верхнем индексе означают, что он не является степенью). Вероятность вычисляется по области в штриховом прямоугольнике, которая лежит ниже (рис.17A) горизонтальной утолщенной штрихпунктирной линии  $\varepsilon = \sigma_{\max}^{(d)}$ . При этом деформация может принять любое значение на отрезке ( $\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ ), ограниченном правой и левой сторонами штрихового прямоугольника. Аналогично можно вычислить максимально допустимую деформацию  $\varepsilon_{\max}^{(d)}$ . В этом случае доверительная вероятность  $P_2^{(d)}$  вычисляется по области в штриховом прямоугольнике, которая лежит слева (рис.17A) от вертикальной утолщенной штриховой линии с двойным пунк-

тиром  $\sigma = \varepsilon_{\max}^{(d)}$ . При этом напряжение может принять любое значение на отрезке  $(\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max})$ , ограниченном нижней и верхней сторонами штрихового прямоугольника.

**{А.30}** По сути, то, что раньше *доказывалось алгебраически* (раздел 1.3 [30,28] и положения {А.28.1}-{А.28.3} стр.64), сейчас *наглядно* показано на *основе геометрических* представлений: *никакой связи между напряжениями и деформациями* в принятой теории вероятности *не существует*.

Так как напряжения и деформации независимы, то в первом случае вероятность того, что значение  $\sigma$  будет не больше значения  $\sigma_{\max}^{(d)}$ , учетом того что  $P(\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}) = 1$ , равна  $P_1^{(d)} = P(\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}^{(d)})$ . Во втором случае вероятность того, что значение  $\varepsilon$  будет не больше значения  $\varepsilon_{\max}^{(d)}$ , учетом того что  $P(\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}) = 1$ , равна  $P_2^{(d)} = P(\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}^{(d)})$ .

Теперь посмотрим, что дает построение области определения распределения на основе проведенного анализа.

**1-й случай.** Пусть прямая линия (стр.69 рис.17.А тонкая сплошная линия)  $\varepsilon' = \sigma'_1$ , которая проходит параллельно оси  $\varepsilon'$  на расстоянии  $\sigma'_1$ , ограничивает область в нижней части прямоугольника, по которой *вычисляется* некоторое значение *доверительной* вероятности  $P_3^{(d)}$ . По точке пересечения этой прямой с *правой* стороной прямоугольника (точка обозначена тонкой окружностью) определяется *максимально допустимое* значение *напряжения*  $\sigma_{1,\max}^{(d)}$  в *исходных* координатах  $\varepsilon_0\sigma$  и соответствующее ему *максимально допустимое* значение деформации  $\varepsilon_{1,\max}^{(d)}$ .

**2-й случай.** Теперь проведем прямую линию (стр.69 рис.17.С тонкая сплошная линия)  $\sigma' = \varepsilon'_2$ , которая проходит параллельно оси  $\sigma'$  на расстоянии  $\varepsilon'_2$ . Она ограничивает область в левой части прямоугольника, по которой *вычисляется* значение *доверительной* вероятности  $P_4^{(d)}$ . По точке пересечения этой прямой с *верхней* стороной прямоугольника (точка обозначена тонкой окружностью) определяется *максимально допустимое* значение *напряжения*  $\sigma_{2,\max}^{(d)}$  в *исходных* координатах  $\varepsilon_0\sigma$  и соответствующее ему *максимально допустимое* значение деформации  $\varepsilon_{1,\max}^{(d)}$ .

**3-й случай.** По сути, он является общим. Кривая, координаты  $\varepsilon'_0\sigma'$  и область распределения на рис.17D являются копиями с рис.17.А. В этом случае область, по которой *вычисляется* значение *доверительной* вероятности  $P_5^{(d)}$ , ограничиваем двумя прямыми линиями: сверху –  $\varepsilon' = \sigma'_3$  и справа –  $\sigma' = \varepsilon'_3$ . По точке пересечения прямых линий  $\varepsilon' = \sigma'_3$  и  $\sigma' = \varepsilon'_3$  (точка обозначена тонкой окружностью) определяется *максимально допустимое* значение *напряжения*  $\sigma_{3,\max}^{(d)}$  в *исходных* координатах  $\varepsilon_0\sigma$  и соответствующее ему *максимально допустимое* значение деформации  $\varepsilon_{3,\max}^{(d)}$ .

В каждом из рассмотренных случаев принято свое значение *доверительной* вероятности  $P_3^{(d)}$ ,  $\sigma' = \varepsilon'_2$  и  $P_5^{(d)}$  при определении точки  $\varepsilon_{\max}^{(d)}$ ,  $\sigma_{\max}^{(d)}$ . Принимая их равными  $P_3^{(d)} = P_4^{(d)} = P_5^{(d)}$ , можно для данного сплава определить, в каком из случаев значение  $\sigma_{\max}^{(d)}$  (или  $\varepsilon_{\max}^{(d)}$ ) будет *максимальным*. Или вычислить, что при данном значении  $\sigma_{\max}^{(d)}$  (или  $\varepsilon_{\max}^{(d)}$ ) какое из значений  $P_3^{(d)}$ ,  $\sigma' = \varepsilon'_2$  или  $P_5^{(d)}$  *доверительной* вероятности будет *максимальным*.

Цель столь подробного анализа в том, чтобы наглядно показать:

{А.31} Значения максимально допустимых значений деформаций  $\varepsilon_{\max}^{(d)}$  и напряжений  $\sigma_{\max}^{(d)}$  в исходных координатах  $\varepsilon\sigma$  связаны функциональной зависимостью  $\tilde{\sigma}(\varepsilon) = \sum_1^W \eta_w f_w(\varepsilon)$ , ибо точка  $\varepsilon_{\max}^{(d)}, \sigma_{\max}^{(d)}$  определяется в координатах «жестко» связанных с этой кривой (это принципиально, ибо, вообще говоря, именно эта кривая и является криволинейной координатой, положение {А.29.3} стр.72).

Рассмотрение процесса, определяемого свободным полетом неуправляемого артиллерийского снаряда при стрельбе дистанционными снарядами, позволило правильно интерпретировать процесс экспериментального способа определения статических характеристик прочности, разработать подход к построению законов распределений характеристик прочности и показать, что допустимые напряжения и деформации функционально зависимы.

## 2. Вероятностная зависимость

В предыдущих разделах мы долго и подробно анализировали функциональную зависимость между случайными величинами (и зависимость от изменения условия  $x$  опыта). Теперь положим, что на проведение опыта влияет не только функциональная зависимость  $y = f(x)$ , но и некоторое другое условие, которое является случайным.

**Пример 18.** Рассмотрим линейное преобразование  $y = cx + d$  (сплошная прямая линия на рис.18) величины  $X$  с функцией плотности  $p(x)$ , определенной на отрезке  $a \leq x \leq b$ .

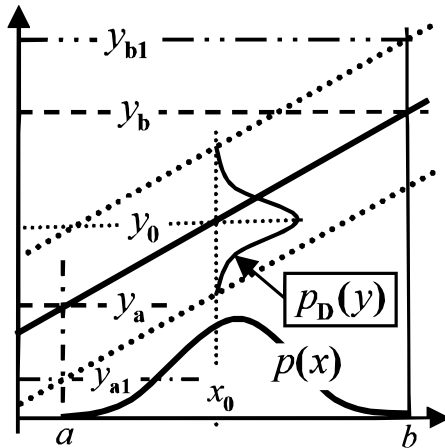


Рис.18

**П.1.** В результате преобразования получим величину  $Y$ , распределение  $p_0(y)$  которой определено на отрезке  $y_a \leq y \leq y_b$ , где  $y_a = ca + d$ ,  $y_b = cb + d$ .

**П.2.** Положим, что положение прямой изменяется случайно параллельно самой себе вдоль оси  $Y$  в пределах, которые ограничены прямыми  $y_1 = cx - d_1$  и  $y_2 = cx + d_1$  (пунктирные линии). Например, коэффициент  $d$  в уравнении является случайной величиной  $D$ , плотность распределения которой симметрична. В этом случае, распределение  $p_1(y)$  величины  $Y_1$  будет определяться распределениями 2-х величин  $X$  и  $D$ . Оно будет отличаться от распределения  $p_0(y)$  при чисто функциональной зависимости величин. В частности область его определения увеличивается  $y_{a1} \leq y \leq y_{b1}$ , где  $y_{a1} = y_a - d_1$ ,  $y_{b1} = y_b + d_1$ . Имеем влияние распределения случайной величины  $D$  на распределение

случайной величины  $Y$ , которое *функционально зависит* от распределения величины  $X$ .

**п.3.** Изменять случайным образом положение функции  $y = cx + d$  можно другими способами. Например:

2) перемещать ее параллельно оси  $X$ , а не  $Y$ ; 3) поворачивать линию  $y = cx + d$  относительно некоторой точки  $(x_A, y_A)$ ; 4) перемещать вдоль некоторой кривой или прямой линии; 5) совмещать отмеченные способы и т.д. Очевидно, что случайным образом можно изменять положение произвольной функции (формулы преобразования)  $y = f(x)$ .

Во всех случаях имеем *влияние распределения* некоторой случайной величины  $D$  на *распределение* случайной величины  $Y$ , которая *функционально зависит* от величины  $X$ .

**{А.32.1}** Таким образом, *распределение* случайной величины  $Y$  зависит от *распределения* случайной величины  $D$ , которая функционально не связана ни с величиной  $Y$ , ни с величиной  $X$ . Это и есть *вероятностная зависимость*, о которой так много говорится в существующей теории.

Если определить в области  $(a \leq x \leq b, y_{a1} \leq y \leq y_{b1})$  *двумерное* распределение системы, образованной *совмещением* величин  $X$  и  $Y$  (или  $X$  и  $Y_1$ ), то, в силу того, что распределение величины  $X$  зависит только от переменной  $x$ , а величины  $Y$  (или  $Y_1$ ) – только от переменной  $y$ , его *ковариация* равна нулю (раздел 1.4 [30,28] положение {А.28.3} и текст после него стр.65).

Изменять случайным образом можно не только положение функции  $y = cx + d$ , но также положение случайной величины  $X$ : в этом случае изменится как распределение величины  $X$ , так и функционально связанной с ней величины  $Y$ .

Можно вообще не использовать *функциональной зависимости* величин, а просто изменять случайным образом положение функции  $p(x)$  вдоль оси  $X$  или положение оси  $X$  в направлении оси  $Y$ . В 1-м случае получим *одномерный закон* распределения, который определяется *системой*, образованной *объединением*, а во 2-м – *двумерный закон* распределения, который определяется *системой*, образованной *совмещением* двух случайных величин. Отметим следующее:

**{А.32.2}** При *объединении* величин *ковариация вообще не существует* (как следствие одномерности закона распределения, положение {А.7.1} стр.16), а при *совмещении* – она *равна нулю* (плотность распределения совмещенной величины определяется произведением плотностей исходных величин, п.5 примера 20 [29,75]).

Таким образом, с точки зрения, определенной в положениях {А.32.1}-{А.32.2}, распределения *систем*, образованных *объединением* или *сов-*

мещением случайных величин можно рассматривать (раздел 4 [29,68]) как вероятностную зависимость распределения объединенной или совмещенной величин от распределения исходных величин. Сейчас можно сказать, что совокупность точек, изображенная на рис.2Е (пример 2, стр.10), может относиться к двумерному распределению, одномерные величины  $X$  и  $Y$  которого связаны вероятностной зависимостью.

В примере 18 вероятностная зависимость «размывает» функциональную: она становится не такой явной. Чем больше область определения случайной величины  $D$ , тем больше это будет заметно. Дополним картину еще несколькими случаями взаимодействия случайных величин.

**Пример 19. п.1.** Рассмотрим двумерную случайную величину  $\Phi(x, y)$  с плотностью распределения  $p(x, y)$ , определенной в эллипсе и симметричной относительно центральных осей (рис.18.А, оси  $X, Y$  и  $X', Y'$  – параллельны), т.е. ковариация в центральных  $K\{\Phi(x, y)\}$  координатах равна нулю. Пусть его положение изменяется случайно параллельно оси  $Y'$ . При симметричном распределении  $p_D(y)$  получим распределение (рис.18.А1, правая и левая границы – прямые линии, верхняя и нижняя – смещенные половинки эллипса), которое также симметрично. При несимметричном распределении  $p_D(y)$  получим распределение симметричное относительно центральной оси  $Y$ . Если положение распределения изменяется случайным поворотом относительно точки  $(m_X, m_Y)$ , то при симметричном распределении  $p_{D1}(\theta)$  получим распределение, (рис.18.А2, правая и левая границы – дуги окружности с центром в точке  $(m_X, m_Y)$ , верхняя и нижняя – пересечение половинок эллипса в крайних положениях угла поворота  $\theta$ ), которое тоже симметрично. Во всех случаях ковариация равна нулю.

**п.2.** Повернем распределение  $p(x, y)$  на угол  $\alpha$  относительно точки  $(m_X, m_Y)$  (рис.18.В): ковариация примет некоторое значение  $K\{\Phi(x, y)\} = k_1$  отличное от нуля<sup>66</sup>. Точка (О) – пересечение осей  $X_1$  и  $Y_1$ . Пусть положение распределения изменяется случайно параллельно центральной оси  $Y_1$ . Если распределение  $p_D(y)$  симметрично, то получим симметричное распределение (рис.18.В1). Оно определяется поворотом распределения, изображенного на рис.18.А1 на угол  $\alpha$ . При несимметричном распределении  $p_D(y)$  получим распределение симметричное относительно центральной оси  $Y_1$ . Будем изменять положение распределения случайным поворотом относительно точки (О). При симметричном распределении  $p_{D1}(\theta)$  получим распределение, симметричное относительно оси  $X_1$  (рис.18.В2, правая и левая границы – дуги окружности с центром в точке (О), а верхняя и нижняя – половинки эллипса в крайних положениях угла поворота). Во всех случаях значение  $k_1$  ковариации не изменится.

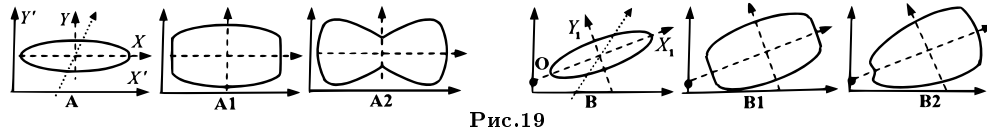


Рис.19

Легко показать, что при смещении положений распределения  $p(x, y)$ , изображенных на рисунках А и В, параллельно произвольному направлению (например, в направлении пунктирных стрелок) ковариации тоже не изменяется: в 1-м случае она остается равной нулю, а во 2-м – значению  $k_1$ .

<sup>66</sup>Мы не полагаем, что поворот происходит случайным образом: что-либо новое не прибавится, а изложение усложнится

Если величины  $D$  и  $\Phi(x, y)$  не связаны функциональной зависимостью, то ковариация изменяется в одном случае: когда влияние случайной величины  $D$  на величину  $\Phi(x, y)$  приводит к повороту центральных координат распределения  $p(x, y)$  относительно исходного положения.

Интерпретация ковариации как «характеристики системы величин, описывающих, помимо рассеивания, еще и связь между ними» не имеет под собой основы и не отражает ее сущности:

**{А.32} Ковариация двумерного распределения является характеристикой поворота главных осей относительно центральных или начальных координат. Она не определяет ни функциональной, ни вероятностной зависимости между случайными величинами.**

Зависимость случайной величины от условий проведения опытов и характер влияния одной величины на другую случайную величину (т.е. зависимость между величинами) имеют очень разнообразный характер.

Функциональная зависимость может быть определена на основании законов, определяющих связь между физическими величинами или специально проведенных экспериментов.

Гораздо хуже обстоят дела с вероятностной зависимостью – определить ее наличие, по-видимому, возможно в некоторых частных случаях. Например, в случае, данном в примере 18. После экспериментального определения линейной зависимости, вычислить теоретическую область определения распределения случайной величины  $Y$  и сравнить с экспериментальной.

Однако в общем случае способ ее определения неизвестен (по крайней мере, автору сего трактата) – необходим тщательный анализ взаимодействия величин и условий проведения опытов.

## Список литературы

1. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник – Изд. 6-е. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. – 448с
2. Л.Е Майстров. Теория вероятностей. Исторический очерк.– М: Наука, 1967. – 321с
3. О.Б. Шейнин. Теория вероятностей до П. Л. Чебышёва // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. – № 23. – с. 284-306
4. Я. Бернулли. О законе больших чисел. – М: Наука, 1986. – 176с
5. Википедия: История теории вероятностей.
6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер.

- с англ. – М. «Мир» 1984. 528с.
7. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 738с.
  8. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с
  9. А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. – Изд.2-е – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 120с.
  10. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. “East-West” Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с
  11. С.Н. Берштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.-Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с
  12. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Изд. 3-е – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 511с
  13. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей.- Изд. 7-е – М. Издательский центр «Академия», 2003. – 576с
  14. А.А. Марков. Исчисление вероятностей. – Изд.4-е – М.-Л.: – Госиздат, – 1924. – 589с.
  15. В.И. Гливенко. Курс теории вероятностей. – М.-Л. Государственное объединенное научно-техническое издательство, 1939г. ? 220с.
  16. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с
  17. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. “Наука”, 1980г. – 976с
  18. А.А. Боровков. Теория вероятностей: учебное пособие для вузов. – Изд.2-е – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 432с.
  19. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 1: *«совершенство» или видимость?* ч.І. Теория событий: критика исходных понятий и создание новой исходной системы. – <https://iibondarchuk.github.io/>. 2018/ –31с
  20. В.И. Лотов. Теория вероятностей. Конспект лекций для студентов механико-математического факультета Новосибирского Государственного Университета
  21. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – Изд. 6-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1966г. – 607с
  22. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 – Изд. 7-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 800с
  23. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 – Изд. 5-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 656с
  24. Р. Дедекин. Непрерывность и иррациональные числа. – Изд. 4-е.– Одесса. Mathesis, 1923. – 44с
  25. М. А. Ельяшевич, Т. С. Протьюко. Вклад Максвелла в развитие молекулярной физики и статистических методов. – Успехи физических наук. т.135, вып.3. – 1981. стр.381-423
  26. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 2: идеал или иллюзия? ч.ІІ. Замечания к распределениям скоростей (импульсов, энергий) Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака – <https://iibondarchuk.github.io/>. 2018/ –31с



27. М.М. Филоненко-Бородич, С.М. Изюмов, В.А. Олисов, Л.И. Мальгинов. Курс сопротивления материалов. Часть первая. – Изд. 5-е – М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961г. – 656с
28. С.М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. – Изд.5-е – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1967г. – 480с
29. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 3: видимость совершенства! ч.III. Теория случайных величин: критика существующих исходных понятий и создание новой исходной системы – <https://iibondarchuk.github.io/>. 2018/ –31с
30. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 4: подобие идеала! ч.IV. Преобразование законов распределения случайных величин – <https://iibondarchuk.github.io/>. 2018/ –31с
31. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей 5: *имитация совершенства!* ч.V. Числовые характеристики случайных величин – <https://iibondarchuk.github.io/>. 2018/ –31с