

«То все ошибки, все накладки  
И заблуждения веков»  
Автор неизвестен.

УДК 519.211; ББК 22.171

## Теория вероятностей 7: призрак совершенства!

### ч.VII. Случайные процессы<sup>1</sup> и зависимость распределения от условий проведения испытания

Бондарчук Игорь Иванович, кандидат физико-математических наук

28 мая 2021 г.

Теория случайных процессов является наиболее молодым и быстро развивающимся разделом теории вероятностей. Ее создание стало важным этапом развития теории вероятностей и определило ее обобщение на более сложные случайные явления (по отношению к случайным величинам). Вообще говоря, первоначально она появилась как результат изучения реальных физических задач и построения моделей: идеального газа, находящегося в равновесном состоянии; загрузки телефонных линий; броуновского движения; теории диффузии. Однако в теории вероятностей на основе аксиоматической теории определен формальный путь: это привело к немалому числу ошибок (есть и серьезные).

{А.1} Главная цель остается прежней [19,1] – показать, *какая есть и какой должна быть* теория вероятностей случайных явлений, которые называют *массовыми*<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Об истории развития учения о случайных процессах можно почитать в работе [1,436-440]

<sup>2</sup>Теории, занимающейся изучением только тех случайных событий, которые в принципе могут быть осуществлены неограниченное число раз при неизменных условиях проведения опыта. обладают статистической устойчивостью и в отношении которых имеет смысл не только утверждение об их случайности, но и возможна объективная оценка доли случаев их появления. Подробнее об этом можно почитать в [1,16]

## Содержание

Предисловие .....	3
Введение .....	4
1. Механика и построение случайных процессов .....	7
2. Случайные процессы и теория событий .....	17
3. Механика, теория событий и случайные процессы .....	32
4. Случайные блуждания частицы: существующая теория и результаты проведенных исследований .....	44
4.1. О реальной траектории, пути пройденной частицей и некоторых других понятиях механики .....	45
4.2. О постановке вероятностных задач в теории событий .....	48
4.2.1. Первая основная задача теории событий (49). 4.2.2. Вторая основная задача теории событий (51). 4.2.3. О решении первой задачи теории событий (53). 4.1.3. О решении второй задачи теории событий (54)	
4.3. Случайные блуждания частицы и биномиальное распределение, определенное в теории событий. О распределении Пуассона .....	57
5. Замечания к теории случайных флуктуаций. ....	60
6. Приближение к реальным процессам: общие сведения .....	67
Список литературы .....	73

**Примечания.** 1. Ссылки на цитируемые работы даются в виде [№ в списке, № стр.]. При ссылке на не несколько работ, они разделяются знаком «;» и пробелом. При ссылках внутри работы указывается положение, на которое дается ссылка, и № страницы, на которой оно находится. 2. Выводы, следующие из анализа, обозначаются номерами W.1, W.2, .... Чтобы обратить внимание Читателя на некоторые важные моменты, следующие из анализа, они выделены как положения и обозначены номерами {A.1}, {A.2}, .... 3. Понятия, используемые в принятой теории вероятностей, нумеруются заглавными буквами латинского алфавита. Уточненные предположения – римскими цифрами, а уточненные и вновь введенные определения понятий – словом «определение» с арабскими цифрами. 4. Нумерация формул: в круглых скобках – сквозная; в фигурных скобках – в пределах рассматриваемого примера.

## Предисловие

Поговорим о разделе теории вероятностей, который называется *теорией случайных (стохастических) процессов*. В работах [10; 19] о процессах даже не упоминалось: их рассмотрение вообще не планировалось. Вполне естественно, что при просмотре литературы в разделы, посвященные теории случайных процессов, мы не заглядывали. Пример 10 (раздел 1.3 [30,29]) рассматривался с «разных ракурсов» в [10,53,70. 97-99], в том числе, приводились рисунки, которые были похожи на процессы, однако «никаких эмоций они не вызвали». Впервые мысль о том, что надо бы немножко разобраться в этой теории, мелькнула при анализе, вообще говоря, хотя и стационарного, но все же процесса, данном в работе [26]: «мелькнула», но «затем куда-то быстренько улетучилась».

Возможно, эта тема так бы и осталась не затронутой, если бы не задача, связанная с *экспериментальными исследованиями прочностных свойств* материалов (разделы 1.4.1 пример 27 [32,22,25]), которая не то что «вернула эту мысль», а *определила обязательность* их рассмотрения. По нашему мнению (а оно возникло после проведения некоторой части исследований) некоторые *случайные процессы следует* рассматривать уже в *теории событий*: это будет видно из исследований, изложенных ниже. По крайней мере, это дает возможность пояснить ошибки, допущенные (в том числе и автором сего труда) при решении некоторых задач теории событий.

Мы писали о том, что для механической интерпретации следует «задействовать» *полярный и центробежный моменты инерции*, а также их *связь с поворотом координат* (раздел 2.2 [31,16]). При рассмотрении случайных процессов стало понятно, что применение «механической»<sup>3</sup> интерпретации не только наглядно и полезно: она *просто необходима для понимания сути и правильного построения процессов*.

---

<sup>3</sup>В кавычках, ибо так часто говорят в теории вероятностей: наше понимание несколько отличается от этого мнения

## Введение

*Создание общей теории случайных процессов стало важным этапом развития теории вероятностей и определило ее обобщение на более сложные случайные явления. Приведем некоторые цитаты и определения случайного процесса, которые даны в работах [1; 18]:*

1. «Совершенствование физической статистики, а также ряд отраслей техники, поставило перед теорией вероятностей большое число новых, не укладывающихся в рамки классической теории, задач. В то время как физика и техника интересовало изучение процесса, т.е. явления, протекающего во времени, теория вероятностей не имела ни общих приемов, ни разработанных частных схем для решения задач, возникающих при изучении таких явлений» [1,290]. 2. «Общее понятие случайного процесса, базирующегося на изложенной ранее аксиоматике теории вероятностей, может быть введено следующим образом. Пусть  $\Omega$  – множество элементарных событий и  $t$  – непрерывный параметр. Случайным процессом называется функция двух аргументов  $\xi(t) = (\omega, t)$ . Для каждого значения параметра  $t$  функция  $(\omega, t)$  является функцией только  $\omega$  и, следовательно, представляет собой случайную величину. Для каждого фиксированного значения  $\omega$  (т.е. для каждого элементарного события)  $\varphi(\omega, t)$  зависит только от  $t$  и является, таким образом, обычной функцией одного вещественного аргумента. Каждая такая функция называется реализацией случайного процесса  $\xi(t)$ . На случайный процесс можно смотреть либо как совокупность случайных величин  $\xi(t)$ , зависящих от параметра  $t$ , либо как на совокупность реализаций процесса  $\xi(t)$ . Естественно, что при этом для определения случайного процесса необходимо задать вероятностную меру в пространстве реализаций процесса» [1,294]. 3. В работе [18] дается несколько примеров случайных величин, затем следует: «Читатель, наверное, заметил, что в этих примерах придумать неизмеримую функцию от  $\omega$ , которая отвечала бы какой-нибудь реальной задаче, очень трудно. Такое явление имеет место часто, но не всегда. В гл. 15, посвященной случайным процессам, нас будут интересовать множества, которые, вообще говоря, событиями не являются и требуют специальных модификаций для того, чтобы их можно было считать событиями» [18,43]. 4. «Случайным процессом называется семейство случайных величин  $\xi(t) = \varphi(\omega, t)$ , заданных на одном вероятностном пространстве  $\{\omega, F, P\}$  и зависящих от параметра  $t$ , принимающего значения из некоторого множества  $T$ » [18,321]. 5. «Если фиксировать  $\omega \in \Omega$ , то мы получим функцию  $\xi(t)$  ( $t \in T$ ) которую часто называют выборочной функцией или траекторией процесса. Таким образом, в роли случайных величин здесь выступают функции. ... В этом пространстве элементарный исход “ $\omega$ ” отождествляется с траекторией процесса. ... Если же, рассматривая процесс  $\xi(t)$ , фиксировать значения времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  из  $T$ , то получим многомерную случайную величину  $\xi(t)(t_1, \omega), \xi(t)(t_2, \omega), \dots, \xi(t)(t_n, \omega)$ » [18,322].

Снова речь об *ограниченности* (цитата 1) применения *классического* подхода (замечание 1.1 [29,8]) и *элементарных* событиях (2-я цитата). И опять не совсем просто понять, что же является *элементарным* событием (цитата 3 – о множествах, не являющихся событиями). Подробнее, проще и более понятно говорится об этом в работе [13]:

6. «Ограничиваясь рассмотрением подобных отдельных случайных величин, мы изучали случайные явления как бы “в статике”, в каких-то фиксированных постоянных условиях отдельного опыта. Однако такой элементарный подход к изучению случайных явлений в ряде практических задач является явно недостаточным. На практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, непрерывно изменяющимися в процессе опыта» [13,370]. 7. «Случайной величиной называется величина, ко-

торая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее – какое именно. ... *Случайной функцией* называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее – какой именно. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией* случайной функции» [13,371].

Отметим *два важных* (с нашей точки зрения) момента, которые следуют из пояснений в работе [13]:

***Связь случайного процесса с изменением (внутренних и/или внешних) условий проведения испытания*** (цитата 6).

Но об этой связи практически даже не упоминается в других работах. Нам же остается только дополнить цитату:

***Изменение условий проведения испытания влияет на вероятности элементарных (и сложных) событий, что показано при анализе существующих исходных понятий.***

Об этом хотя и говорится в [13], но, к сожалению, далее эта *связь с условиями проведения испытания* «куда-то бесследно исчезла».

Первое определение – это *одна из модификаций* определения ‘А’ [29,9], а второе дано по аналогии с 1-м, из которого следует:

***Событием является конкретная реализация случайного процесса, определяемая по результатам физических измерений при проведении эксперимента.***

Это вроде бы подтверждается экспериментами, но желательно иметь бы и некоторое теоретическое обоснование.

В общем-то, это же следует из определения в работе [1] («совокупность реализаций процесса») и к этому же сводится (с применением «специальных модификаций») понимание события в работе [18]. Поэтому сначала лучше изучить работу [13], затем – [1] (а уж потом можно смотреть и другие – будет более понятно, о чем в них пишется «высоким математическим штилем»).

Чуть понятнее в работах «вторая трактовка» случайного процесса, который можно рассматривать как «совокупность случайных величин, зависящих от параметра» [1] или «систему случайных величин» [13,375], или «многомерную случайную величину» [18].

«Вторая трактовка» *определяет связь* случайного процесса с случайными величинами, а к чему приводят существующие определения случайных величин подробно показано при их анализе, как в статье [29,6-38]

(вывод Q.I [29,35]), так и последующих работах [30 - 32]. Но здесь мы как раз видим «разнобой» в названиях, о котором говорилось ранее [29,16].

«Совокупность» – понятие «растяжимое» и что оно означает в существующей теории случайных величин, сказать сложно (подробно об этом в [29,9-23]). Что касается понятий *многомерной* случайной величины и *системы* (разделы 3.2, 4.1 [29,51,66]) случайных величин, то они (согласно теории, развитой в [19; 29]: в принятой теории вероятностей – эти понятия неразличимы) *существенно отличаются*.

«— Но ведь в природе так не бывает!  
— Природа тут не причем.  
Мое уравнение. Что хочу, то и пишу!»  
Диалог («Физики шутят»)

## 1. Механика и построение случайных процессов

Здесь нет ни подробного анализа всех существующих случайных процессов, ни попыток дать новые определения, ибо *цель* данного изложения одна: *показать их связь с условиями проведения испытания и элементарными событиями*. В уточненном понимании, определение 1 [19,29].

Прежде всего, конечно же, будем *говорить о том, о чем не говорится* в существующей теории: т.е. *о связи случайных процессов с функциональной зависимостью распределения случайной величины  $\Psi$  от изменения условия  $X$ , определяющего проведение эксперимента с величиной  $\Phi$* . При этом неизбежно будет показана и *связь* случайных процессов с *элементарными событиями*.

И, в первую очередь, рассмотрим пример из механики: если говорить «на языке существующей теории вероятностей» — то с «механической интерпретации» случайного процесса. Только вовсе не потому, что автор механик: на самом деле, это связано с другими вопросами. *Основная часть механики, как и физики в целом, — это динамика, т.е. наука о движении*.

Зачинателем современной динамики был Г. Галилей, работы которого были продолжены и развиты Х. Гюйгенсом, а построение основ современной механики завершено И. Ньютоном. Вспомним имена многих знаменитых ученых Г. Лейбница, Н. Бернулли, Л. Эйлера, М. В. Ломоносова, Ж. Даламбера, Ж. Лагранжа, К. Гаусса, П. Лапласа, М.В. Остроградского, Дж. Максвелла, которые внесли огромный вклад в развитие этих идей. Дополним их именами Б. Паскаля и П. Ферма — основателями науки о вероятности, и Я. Бернулли — создателя ее теоретических основ. Можно привести множество других имен выдающихся ученых XVII–XIX веков, но даже просто перечислить всех сложно.

Просматривая историю математики, Вы увидите большую часть из перечисленных имен выдающихся ученых. В истории теории вероятностей — опять те же имена, разве что несколько поменьше, а в истории механики и физики в целом есть почти все. Так кто же эти великие ученые: математики или механики, или физики, или астрономы и т.д.? Ответ прост: они и механики, и физики, и астрономы, и математики тоже.

В этих науках применение математики — жизненная необходимость, ибо даже правильные рассуждения, не облеченные в математическую форму, применить на практике, мягко говоря, сложно. Ими совершены великие открытия, которые привели к рождению новых взглядов на движение физических тел и представлений о строении солнечной системы, материи и вселенной. Математики, сложившейся к тому времени (арифметики, алгебры, геометрии) было явно недостаточно для описания сложных физических явлений. Талантливые от Бога, они создавали и развивали новые математические модели (базой создания которых были имеющиеся модели), пригодные для описания этих явлений и, конечно же, в первую очередь — сложного движения твердого

тела. Не будем продолжать, ибо в какой-то промежуток времени произошел «отрыв» математики от этих наук и появление «чистой» математики, а это не является предметом нашего исследования.

Применение геометрических построений, вообще говоря, характерно при рассмотрении многих положений механики. Мы не говорим о некоторых современных работах, авторы которых, по-видимому, считают его ненужным.

Наглядный геометрический метод изложения механики использован Л. Пуансо: именно он, исходя из геометрических построений, находит все основные свойства рассматриваемых механических движений. Оригинальное геометрическое построение выполнено Дж. Максвеллом<sup>4</sup> при решении задачи о столкновении упругих шаров, которое в механике стало общепринятым и привычным. В принципе, решение этой задачи предопределило и построение статистической модели – некоторые рассуждения по этому поводу даны в конце статьи (раздел 6, стр.59). Сошлемся также на мнение выдающегося механика Н. Е. Жуковского, который в своих работах и статьях неоднократно говорит о том, что «механика должна в одинаковой мере опираться на анализ и геометрию, заимствуя у них то, что более подходит к существу задачи. Представители аналитического метода, стремясь возможно шире ставить рассматриваемые вопросы, часто игнорируют геометрическую и механическую трактовку реальных задач природы, вызывая этим непреодолимые аналитические трудности, часто не оправдываемые физической сущностью проблемы». Автор, как механик, естественно опирается и на геометрические построения.

*Движение тел* – это, по сути, и есть процесс, независимо от того, какое движение рассматривается: *твердого* или *деформируемого* тела, *жидкости* или *газа*, *системы* материальных точек или тел. В механике движение материальных тел определяется по ясным и понятным законам, облеченных в математическую форму (возможно, поэтому математики часто называют теоретическую механику математической наукой, но это все же физика, а не математика). Очень хочется сказать «очевидным законам», но это невозможно, ибо «мешает мелочь», называемая *случайностью*. Ничего не поделаешь – *случайность* тоже реальное свойство природы и от этого «не спрятаться, не скрыться».

Гениальность великих умов прошлого как раз и состояла в том, что среди великого множества случайностей, сопровождающих то или иное явление природы, они сумели увидеть и выделить закономерности (сделать законы «очевидными»), управляющие этими явлениями, а также создать математику, описывающую их.

Поэтому вполне справедливо сказать, что *случайные процессы* – это

---

<sup>4</sup>Широкое применение наглядных геометрических построений вообще характерно для работ Максвелла



«вероятностная интерпретация» *реальных процессов движения*. Но не только механического: движение существует во всех явлениях природы и деятельности человека. Однако покажем наглядно эту связь на конкретном примере из механики.

**Пример 1.** На рис.1 условно изображена зависимость  $v(q)$  (утолщенная кривая) на отрезке  $a \leq q \leq b$  скорости *движения* материальной точки от некоторого условия  $Q$  проведения испытания<sup>5</sup>.

**Замечание 2.** *Движение* материальной точки определяется ее массой и действующими на нее силами: более правильно считать кривую, изображенную на рис.1, *зависимостью силы*  $f(q)$  от условия  $Q$ , т.е. *изменения внешних условий*, движения точки. Тогда следует рассматривать *процессы изменения* <sup>Рис. 1</sup> *силы*  $f$ , *ускорения*  $w$ , *скорости*  $v$  и *пути*  $s$  от времени.

Учитывая, что величины (параметры), характеризующие *движение* материальной точки, *взаимосвязаны между собой* (это определяется их зависимостью от времени  $t$ ), далее будем говорить об *изменениях параметров движения* (материальной) точки, если речь будет идти о двух и более из этих величин.

Пока ограничимся изменением скорости на отрезке  $a \leq q \leq b$ . Скорость – производная  $s'(t)$  по времени  $t$  от функции пути, следовательно, при известной зависимости  $v(q)$  можно определить функцию  $q = q(t)$  связи между условием  $Q$  и временем, а затем вычислить путь, пройденный точкой за время  $t_a = \phi(a) \leq t \leq t_b = \phi(b)$  (где  $\phi(a)$  функция, обратная к функции  $g(t)$ ) прохождения отрезка  $a \leq q \leq b$ .

Пусть условие является  $Q$  случайной величиной  $Q$ , плотность  $p_Q(q)$  которой определена на отрезке  $q' \leq q \leq q''$ . По зависимости  $v(q)$  и плотности определяется (п.1.3 [30,28]) распределение скорости  $p_v(q)$  при любом положении отрезка  $q' \leq q \leq q''$  на оси  $Q$  (например, положения 1, 2 и 3 на рис.1, обозначенные на рис.1 пунктирными линиями). Это позволяет, учитывая зависимость  $q = g(t)$  условия  $Q$  от времени  $t$ , определить распределение изменения скорости  $p_V(q)$  и пути  $p_S(q)$  в любой момент времени  $t$ .

**п.1.** Рассмотрим процесс, который называют *случайным процессом с дискретным* временем. Пусть в какие-то моменты времени<sup>6</sup>  $t_0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n \leq t_b$  ( $n=1,2, \dots$ ) скорость может принять на отрезках  $q_1^n \leq q \leq q_K^n$  ( $n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, K$ ) значения  $v(q_k^n) = v_k^n$  с вероятностями  $p_Q(q_k^n)$ , соответствующих вероятностям элементар-

<sup>5</sup>Когда стало понятно, как от связи распределения вероятностей с условиями проведения испытания перейти к случайному процессу, он был построен. После этого началось чтение литературы (сначала [13], затем [6; 1; 12], а после и другие), Подобного примера не нашли, но зато узнали много интересного

<sup>6</sup>Они определяются по функции  $q = g(t)$

ных событий  $a_k^n$  некоторых опытов<sup>7</sup> (или вероятностным функциям случайных величин  $Q_n$ ). На рисунке принято  $n = K = 3$  (моменты времени соответствуют пунктирным вертикальным линиям с цифрами).

**{А.1.1}** *Проекции скоростей, определенных по расположению элементарных событий на оси  $Q$ , на линии  $v = t_n$  определяют возможные значения скорости в моменты времени  $t_n$ . Т.е. распределение вероятностей скоростей существует только на этих линиях.*

Вертикальные (сплошные, штриховые и штрихпунктирные) линии  $v = q_j^n$  ( $j=1,3$ ), ограничивают область определения (они приняты одинаковыми) вероятностной функции  $p_Q(q_j^n)$ . Соответствующие горизонтальные линии  $q = v_j^n$  ( $j=1,3$ ) определяют область изменения случайных значений скорости.

**Замечания 3.** При построении полагаем: **1.** Скорость  $v(q)$  при значении  $t = 0$  равна нулю  $v(t = 0) = v(q = 0) = 0$ . **2.** Промежутки времени  $t_j - t_{j-1} = \delta_T$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ) *одинаковы* (т.е.  $t_n = \delta_T \cdot n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )). **3.** Значения вероятностной функции  $p_Q(q_k^n)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) расположены *равномерно в области определения*. Элементарные события непрерывной величины всегда расположены *равномерно* (положение {А.3} [30,10]), но и для дискретной величины их *равномерное* расположение является *основным* (вывод W.9 [30,13]).

Будем определять *изменение скорости  $v(t)$  и пути  $s(t)$* , пройденного точкой за промежутки времени  $t_n - t_0$ , соответствующие временам движения по отрезку<sup>8</sup>  $a \leq q \leq b$ .

**п.2.** В соответствии с рис.1, скорость *непрерывно зависит* от времени, однако мы рассматриваем ее значения *в отдельные моменты* времени  $t_n$ , поэтому полагаем, что *скорость в промежутки времени  $\delta_T = t_j - t_{j-1}$  изменяется линейно*. За время  $t = t_1$  (рис.1) скорость точки увеличилась от значения  $v = 0$  до *одного из трех возможных значений*  $v_1^1 = q_1^1 \cdot \delta_T$  или  $v_2^1 = q_2^1 \cdot \delta_T$ , или  $v_3^1 = q_3^1 \cdot \delta_T$ , соответствующих появлению *элементарным* событиям  $a_1^1$  или  $a_2^1$ , или  $a_3^1$  соответственно. Сплошные, штрихпунктирные и штриховые стрелки на рис.2 схематично изображают *возможные реализации*. За время  $\delta_T$  точка пройдет *один из трех возможных путей*  $s_1^1 = v_1^1 \cdot \delta'_T$  или  $s_2^1 = v_2^1 \cdot \delta'_T$ , или  $s_3^1 = v_3^1 \cdot \delta'_T$  (где  $\delta'_T = \delta_T^2/2$ ), т.е. имеем *3 возможных изменения параметров движения*.

Более подробно *движение* материальной точки в координатах  $T, 0, V$  (или  $T, 0, S$  и др.) будет рассмотрено для частных случаев (примеры 6 и 7, стр.32, 36). В этих координатах *вероятностные функции  $p_Q(q_j^n)$  будут принадлежать прямым линиям  $v = t_n$  или  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )*, а точки на этих ли-

<sup>7</sup> Например, опытов соответствующих виртуальному (мысленному) выниманию наугад одного шара из урны, в которой находятся одинаковые шары с номерами  $k = 1, 2, \dots, K$  по числу  $m_k^n$  шаров каждого номера,  $M^n = \sum_{j=1}^{K^n} m_j^n$

<sup>8</sup> В задачах чаще рассматривается ограниченный отрезок пути материальной точки: в этом случае случайным будет время, за которое точка проходит этот отрезок пути

ниях, изображающие элементарные события, – соответствовать возможным значениям скоростей  $v_k^n$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) (рис.1.а, стр.13) или путей. Т.е. распределение вероятностей параметров движения материальной точки определяется на этих линиях.

Замечание 4. Так как время дискретно, то в общем случае (замечание 3) изменение силы и ускорения будут линейными  $f = c_0 \cdot t \{1\}$  и  $w = c \cdot t \{1^*\}$ , скорости  $v = c \cdot t^2/2 \{2\}$  – квадратичной и пути  $s = c \cdot t^3/6 \{3\}$  – кубической функциями на любом промежутке времени  $0 \leq t \leq \delta_T$  (где  $c_0, c$  – некоторые постоянные). Значения изменений за время  $\delta_T$  определяют конечные приращения рассматриваемых параметров. В принятом случае (рис.1) изменение скорости является линейной  $v = c \cdot t \{2^*\}$ , пути  $s = c \cdot t^2/2$  – квадратичной  $\{3^*\}$  функцией времени, а значения  $v_k^j$  и  $s_k^j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) – их конечные приращения за время  $\delta_T$ .

**{А.1.2}** Подчеркнем, ибо это важно: в координатах  $T, 0, F$ ,  $T, 0, W$ ,  $T, 0, V$  и  $T, 0, S$  сила, ускорение, скорость и путь определяются проекциями зависимостей  $f(t)$ ,  $w(t)$ ,  $v(t)$  и  $s(t)$  от времени на оси  $F, W, V$  и  $S$ .

**{А.1.3}** Для упрощения изложения и понимания построения процесса будем рассматривать движение материальной точки по прямой линии, т.е. по прямолинейной траектории.

О понятии траектории движения в механике (вообще-то, не только), а также о возможных реальных траекториях материальной точки поговорим (чтобы «не засорять» изложение) в разделах 4.1 (стр.45) и 6 (стр.67). А сейчас введем понятие возможных абстрактных траекторий:

Определение 1. Под возможными абстрактными траекториями движения материальной точки будем называть функции вида  $\{1\}$ – $\{3\}$ , значения которых зависят от времени  $t_{j-1}$  и  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), а конечные приращения (т.е. проекцию возможной траектории движения точки на этом отрезке на соответствующую ось  $F, W, V$  или  $S$ ) – возможным изменением соответствующего параметра за время  $t = t_n$ .

Хотя она и имеет определенное отношение к реальной траектории, однако является абстрактной математической линией, изображающей в координатах «параметр движения – время» зависимость параметра движения от времени. Это позволяет определить реальные возможные изменения параметров во времени при движении материальной точки по реальной траектории, а при прямолинейной траектории – дать лучшее понимание сути построения случайного процесса. Подробнее о возможных реальных траекториях в разделах 4.1 и 6 (стр.45,67).

Таким образом, возможные реальные траектории движения точки, необходимо отличать от реального возможных абстрактных траекторий, т.е. от возможного изменения силы  $f$ , ускорения  $w$ , скорости  $v$  или пути  $s$  во времени (подробнее – разделе 4.1 стр.45).

**{А.1.4}** Предупреждение! Далее, до анализа *плоского* (пространственного) движения материальной точки, мы будем говорить о *зависимости параметров движения от времени* или просто о *возможных траекториях*, без термина «абстрактный». Но время от времени будем напоминать об этом.

**П.3.** Если точка имела скорость  $v_1^1$ , то за время  $t_2$  она она увеличится до *одного* из *трех* *возможных* значений  $v_1^2 = v_1^1 + q_1^2 \cdot \delta_T$  или  $v_2^2 = v_1^1 + q_2^2 \cdot \delta_T$ , или  $v_3^2 = v_1^1 + q_3^2 \cdot \delta_T$  скорости (соответствующих появлению *элементарным* событиям  $a_1^1$  или  $a_2^1$ , или  $a_3^1$ ) и пройдет *один* из *трех* *возможных* путей  $s_1^2 = s_1^1 + v_1^1 \cdot \delta'_T$  или  $s_2^2 = s_1^1 + v_2^1 \cdot \delta'_T$ , или  $s_3^2 = s_1^1 + v_3^1 \cdot \delta'_T$  ( $\delta'_T = \delta_T^2/2$ ), т.е. в момент времени  $t_1$  число *возможных траекторий* изменения скорости и расстояния равно 3. Аналогично, при значениях скоростей  $v_1^2$  и  $v_1^3$  за время  $t_2$  она увеличится до *одного* из *трех* *возможных* значений  $v_{k+3}^2 = v_2^1 + q_k^2 \cdot \delta_T$  или  $v_{k+6}^2 = v_3^1 + q_k^2 \cdot \delta_T$  и пройдет *один* из *трех* *возможных* путей  $s_{k+3}^2 = s_1^1 + v_k^2 \cdot \delta'_T$  или  $s_{k+6}^2 = s_3^1 + v_k^2 \cdot \delta'_T$ , соответственно. Таким образом, в момент времени  $t_1$  число *возможных траекторий* увеличивается в 3 раза, и до момента времени  $t_2$  будем иметь 9 *возможных траекторий* движения материальной точки.

**п.4.** Чтобы *увеличить* число значений времени  $t_n$  на отрезке  $a \leq q \leq b$ , необходимо:

**Замечания 5.** **1** Уменьшить область определения вероятностной функции, т.е. *расстояние* между значениями  $\Delta = q_K^j - q_1^j$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) *вероятностной* функции (и значениями  $q_k^j$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) или между точками, соответствующими элементарным событиям  $a_k^n$  соответственно). **2.** Для областей определения двух любых соседних вероятностных функций соблюдать неравенство  $\delta = q_1^{j+1} - a = q_K^j - q_K^j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ). **3** Очевидно, что сумма  $\Delta + \delta$  *расстояний* по всем  $n$  равна  $n \cdot (\Delta + \delta) = b$  *длине* отрезка  $0 \leq q \leq b$ .

Рассуждая также как и в п.3, до момента времени  $t_3$  будем иметь 27 *возможных траекторий* изменения скорости и пути. Если число моментов времени  $t_n$ , при которых изменяются значения *возможных* скоростей  $v_k^n$ , равно  $n$ , то до момента времени  $t = t_n$ , будем иметь  $3^n$  *возможных траекторий*. Если число *элементарных* событий (значений *вероятностной* функции) равно  $K$ , то число *возможных траекторий* до момента времени  $t_n$  равно  $K^n$ . В моменты времени  $t_n$  число *возможных траекторий* увеличивается в  $K$  раз. Отличие состоит в том (замечание 4 стр.10), что на промежутках времени  $0 \leq t \leq \delta_T$  *возможная траектория* изменения скорости является линейной  $v(t) = ct$ , а пути – квадратичной  $v(t) = ct^2/2$  ( $c$  – некоторая постоянная) функцией времени.

**{А.1.5}** На *любом* из промежутков времени  $0 \leq t \leq \delta_T$  материальная точка может иметь *только одно значение ускорения, скорости или пути*, соответствующее зависимости  $f(q)$  (замечание 2, стр.9): *именно это* определяет применение *логического* отношения «или ..., или», если *сила случайна*. По-другому: *материальная точка не может находиться в двух точках одновременно*.

В случае, изображенном на рис.1, это обеспечивается (даже при большом числе  $K$  элементарных событий  $a_k^n$ ). Однако при увеличении  $n$  разность  $t_{j+1} - t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) между моментами времени становится малой: это приводит к тому, что в моменты времени  $t_j$  и  $t_{j+1}$  (например, при положениях функции  $p_Q(q_k)$ , изображенных на рис.1 ниже оси  $Q$ ) скорости определяются одними точками на зависимости  $v(q)$ . Если не

выполняется условие  $\delta = q_1^1 - a = q_1^{j+1} - q_K^j > 0$ , то будут совпадать точки  $q_K^j$  и  $q_1^{j+1}$ . При числе элементарных событий  $K > 3$ , одно значение скорости на зависимости  $v(q)$  будет принадлежать нескольким моментам времени.

Условия, данные в замечании 5, обеспечивают однозначную связь между ускорением, скоростью и путем материальной точки, ременем движения и зависимостью  $f(q)$ .

Если случайная величина  $Q$  является непрерывной (плотность распределения и моменты времени  $t_n$  обозначены на рис.1 сплошной, штриховой и штрихпунктирной кривыми), то на каждом промежутке времени  $\delta_T$  будем иметь бесконечное (несчетное) множество возможных траекторий движения точки. Все возможные траектории будут иметь разрывы (скачки) производных на линиях  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

**п.5.** Рассмотрим изменения (т.е. приращения) скорости и пути за промежутки времени  $\delta_T$ .

Из п.2 очевидно, что изменения скорости  $v_k^1$  и пути  $s_k^1$  ( $k = 1, 2, 3$ ) разные, а из п.3 имеем равенства:

- 1)  $v_7^2 - v_3^1 = v_4^2 - v_2^1 = v_1^2 - v_1^1 = q_1^2 \cdot \delta_T$  и  $s_7^2 - s_3^1 = s_4^2 - s_2^1 = s_1^2 - s_1^1 = v_1^2 \cdot \delta_T$ ;
- 2)  $v_8^2 - v_3^1 = v_5^2 - v_2^1 = v_2^2 - v_1^1 = q_2^2 \cdot \delta_T$  и  $s_8^2 - s_3^1 = s_5^2 - s_2^1 = s_2^2 - s_1^1 = v_2^2 \cdot \delta_T$ ;
- 3)  $v_9^2 - v_3^1 = v_6^2 - v_2^1 = v_3^2 - v_1^1 = q_3^2 \cdot \delta_T$  и  $s_9^2 - s_3^1 = s_6^2 - s_2^1 = s_3^2 - s_1^1 = v_3^2 \cdot \delta_T$ .

При увеличении моментов времени  $t_n$  число подобных равенств увеличивается.

Забегая вперед, отметим основное: равенства типа 1)-3) определяют равенство изменения скоростей и путей за промежуток времени  $t_n - t_0$  по некоторым из возможных траекторий движения точки. Это приводит к сходимости и пересечению возможных траекторий движения между собой в точках на линиях  $s = t_n$ , а также возможным наложениям друг на друга 2-х и более возможных траекторий. Эти последствия будут показаны при рассмотрении частных случаев зависимости (примеры 6-7, стр.32,36).

На основе анализа, данного в п.п.2-5, можно утверждать следующее:

**{А.2}** Случайность процесса определяется свойствами изучаемого (исследуемого) объекта: результат эксперимента – появление всех элементарных событий определяющих одну из возможных реализаций (положения А.19-А.20, стр.28). Число возможных траекторий зависит от числа  $K$  элементарных событий и числа  $n$  моментов времени  $t_n$ : оно не связано с их вероятностями.

Понятие элементарного события в уточненном понимании: совокупность возможных неотличимых друг от друга исходов испытания называется элементарным событием (определение 1 [19,28]). Напомним: вероятность – это числовая мера случайности. В момент времени  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) происходит переход от числа  $K^{n-1}$  к числу возможных траекторий  $K^n$ .

**{А.3}** Следует отличать *возможные* (напоминание: абстрактные) *траектории движения* материальной точки, которые закончились на линии  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), от *реального изменения параметров движения за промежуток времени*  $t_n - t_0$ : *силы, ускорения, скорости и пути*.

Подробнее об этом поговорим позже (замечание к положению А.1.3, стр.9), а сейчас только отметим, что их отождествление приводит к ошибкам и весьма серьезным.

**{А.4}** *Возможные траектории*, определяемые только *элементарными* событиями  $a_1^n$  или  $a_K^n$ , являются *нижней и верхней* (соответственно, минимальные и максимальные скорости, минимальное и максимальное расстояние, пройденное точкой) *границей процесса*.

На рис.2 они обозначены сплошными и штриховыми утолщенными стрелками соответственно. Остальные возможные траектории (в том числе, начинающиеся в точках, принадлежащих граничным траекториям) находится внутри этих границ.

**{А.5}** *Уменьшение области определения*  $\Delta = q_K^n - q_1^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) *вероятностной функции*  $q_k^n$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) и *введение расстояний*  $\delta = q_1^1 - a = q_1^{j+1} - q_K^j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) *между двумя любыми соседними вероятностными функциями* при выполнении равенства  $n \cdot (\Delta + \delta) = b - a$  являются *условиями*, обеспечивающими *правильное построение процесса на отрезке*  $a \leq q \leq b$ .

**п.6.** В рассмотренном случае *возможные траектории* движения материальной точки определяются в принципе на основе уравнений механики и представляют собой ломаные линии. Вообще говоря, при больших значениях  $N$  и  $K$  их определение является сложной вычислительной задачей.

Таким образом, на основе простых рассуждений показана возможность построения некоторого *случайного процесса*<sup>9</sup>, *возможные реализации* которого *реально* являются *действительными* функциями *действительно* го переменного: в *данном* случае – *времени*  $t$ .

Из построения легко видно, что *возможные траектории* зависят только от *расположения области определения вероятностной функции*  $p_Q(q_k)$  на оси  $Q$  и *расположения ее значений в области определения*. В примере точки, соответствующие значениям *вероятностной функции*, *расположены равномерно в области определения*, ибо это распределение мы полагаем *основным* (вывод W.9 [30,14], а элементарные события непрерывной величины всегда расположены равномерно, положение А.3 [30,11]). Вообще говоря, если случайная величина *дискретна*, то *расположение* может быть *неравномерным*.

**п.7.** *Что же нам «говорит» о траекториях существующая теория?* «Если фиксировать  $\omega \in \Omega$ , то мы получим функцию  $\phi(t)$ , которую часто называют выборочной функцией или траекторией процесса. Таким образом, в роли случайных вели-

<sup>9</sup>Его называют ветвящимся процессом

чин здесь выступают функции» (цитата 5, стр.4). Об этом же более понятно говорится и в работе [1,294] (цитата 2, стр.4). В первую очередь отметим, что существующая теория случайных процессов не отличает траекторию, по которой происходит движение, от зависимостей параметров движения от времени (т.е. от возможных абстрактных траекторий в нашем понимании, определение 1 стр.11), а из теории случайных блужданий следует, что это одно и то же: рассматриваются только зависимость параметра (пути) от времени. Из данного понимания следует, что при значении  $N = K = 3$  будет только 3 возможных траектории, соответствующие «фиксированию» элементарных событий  $a_1^n$ ,  $a_2^n$  или  $a_3^n$ . На рис.1.а они выделены утолщенными сплошной, штриховой и штрихпунктирной стрелками. При числе  $K$  элементарных событий будем иметь только  $K$  возможных траекторий движения материальной точки.

Рис. 1.а

Рассмотрим процесс, полагая, что скорости  $v_k^n$ , определенные в точках  $q_k^n$ , не зависят от времени, тогда получим совпадение числа траекторий с числом элементарных событий. Для примера, на рис.1.а изображен процесс изменения скоростей во времени, условно соответствующий зависимости  $v(q)$ , изображенной на рис.1. Скорость принимает одно из возможных значений  $v_k^n$  ( $k=1,2,...,K$ ) в момент времени  $t_n$  и сохраняет постоянное значение (горизонтальные стрелки) до момента времени  $t_{n+1}$ .

Глядя на рисунок легко сделать вывод: «торжество празднует» существующая теория. Можно было бы согласиться, однако: переход к элементарным событиям  $a_k^{n+1}$  с вероятностями  $p_V(q_k^n)$  происходит от элементарных событий «или  $a_1^n$ , или  $a_2^n$ , или  $a_3^n$ », которые имеют вероятности  $p_V(q_1^n)$ ,  $p_V(q_2^n)$  и  $p_V(q_3^n)$  соответственно. Для значений времени  $t_1$  и  $t_2$  переход обозначен на рис.1.а вертикальными стрелками. Т.е. элементарному событию  $a_1^1$  будут соответствовать 3 возможные скорости  $v_{k,1}^2$  на линии  $v = t_2$ . Элементарным событиям  $a_2^1$  и  $a_3^1$  – возможные траектории  $v_{k,2}^2$  и  $v_{k,3}^2$  на линии  $v = t_2$  соответственно. Траектории, например,  $v_{1,1}^2$ ,  $v_{1,2}^2$  и  $v_{1,3}^2$  накрывают друг друга, но эти траектории разные, ибо приращение скоростей  $v_{1,j}^2 - v_1^1$  разное, что видно по длине стрелок на рисунке. Как и на рис.2 на участке времени  $t_3 - t_2$  имеем не 3, а 9 возможных траекторий скорости. Если этого не учитывать, то на основе рис.1.а мы построим процесс, определяющий путь точки, состоящий только из 3-х траекторий, что совершенно не верно. Для правильного представления о случайном процессе, лучше строить процесс изменения скорости. На рис. 1.а наклонными стрелками изображена возможная траектория изменения скорости, определяющая верхнюю границу процесса, которая учитывает увеличение скорости  $v(q)$  при ее зависимости от условия  $Q$ .

п.8. Остановимся еще на одном моменте. Положим: 1. После перехода через точку  $b$ , зависимость скорости  $v(q)$  от условия  $Q$  на отрезке  $b \leq q \leq b_1$  колеблется в некоторых пределах, ограниченных значениями  $V^1 \leq v(q) \leq V^2$  и  $V^2 - V^1 \ll v(b)$  (рис.1, тонкие сплошные горизонтальные прямые). 2. После перехода через точку  $b_1$ , на отрез-

ке  $b_1 \leq q \leq b_2$  зависимость скорости  $v(q)$  от условия  $Q$  изменяется по кривой от значения  $v(b)$  до нуля.

Характер случайного процесса, определяющего скорость точки на отрезках  $a \leq q \leq b$ ,  $b \leq q \leq b_1$  и  $b_1 \leq q \leq b_2$  существенно отличается: ее среднее значение *увеличивается на 1-м, практически постоянно на 2-м и уменьшается на 3-м отрезке*. Естественно, что *изменится и характер пути точки*.

На основе анализа, проведенного в примере, можно утверждать:

**{А.6}** При *дискретных* значениях  $t = t_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) на *любом конечном* отрезке  $t_a = t_0 \leq t \leq t_n = t_b$  времени *возможные* (напоминание: абстрактные) *траектории* движения материальной точки являются *кусочно-непрерывными* функциями (разрывы в точках  $t = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )), как при *дискретной*, так и при *непрерывной* случайной величине (связывающей процесс с условиями испытания).

**{А.7}** В принципе, правильно рассматривать кривую, изображенную на рис.1, как зависимость силы  $f(q)$ , действующей на точку, от условия  $Q$ , тогда получим 4-е *случайных процесса, связанных* между собой и имеющих *одинаковое число возможных траекторий* (при данных значениях  $K$  и  $n$ ).

**{А.8}** *Возможные траектории случайных процессов* (положение {А.6}) определены в координатах  $(t, f)$ ,  $(t, w)$ ,  $(t, v)$   $(t, s)$ , в которых *вероятностные функции*  $p_Q(q_k^n)$ , определяемые по зависимости силы  $f(q)$  от условия  $Q$  проведения испытания, принадлежат *прямым линиям*  $f = t_n$ ,  $w = t_n$ ,  $v = t_n$   $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) соответственно.

**{А.9}** Понимание траекторий, получаемых «фиксированием» того или иного *элементарного события*, не *согласуется с реальным числом возможных реализаций* (п.6) и не *правильно отражает суть случайного процесса*.

1. Возможно, мы трактуем «процесс фиксирования» элементарных событий не так как это «подразумевается» в теории, но эта трактовка следует непосредственного из цитат: другой мы не нашли. 2. Если исходить только из аксиоматической теории, то понятие траектории (реализации) случайного процесса является неопределенным понятием, что связано с неопределенностью понятий элементарного и сложного событий [19,57]. Впрочем, это утверждение относится к определению понятия случайного процесса не в меньшей мере, чем к определению случайной величины (пример 1, комментарии П, [29,7,8]). 3. Из рассмотрения некоторых процессов, приведенных в работах, следует: «фиксируются» не элементарные (в понимании аксиоматической теории), а сложные (которые являются элементарными – в нашем понимании) события, что будет показано при последующем анализе.



**{А.10}** С точки зрения механики (вообще-то, не только) *случайный процесс на интервале  $(a \leq q \leq b)$  является развивающимся, на интервале  $(b \leq q \leq b_1)$  – стационарным и на интервале  $(b_1 \leq q \leq b_2)$  – затухающим.*

Отличие случайных процессов и изменение характера возможных траекторий движения точки приведет и к отличию вероятностных моделей на этих участках.

Осталось выяснить, какое *влияние* оказывают вероятности *элементарных* событий, определяющих *возможные траектории* случайного процесса, но об этом поговорим после построения *случайных процессов*, исходя *непосредственно из теории событий*.

## 2. Случайные процессы и теория событий

Появлению понятия *случайного процесса* и общей *теории случайных процессов*, основанием построения которой послужила разработка *аксиоматической* теории вероятностей, предшествовало решение целого ряда вероятностных задач, которые относятся к случайным процессам (мы не будем «пересказывать» историю их развития, изложенную в [1] (сноска 2, стр.3): лучше почитать саму работу). Большая часть из них решалась на основе *классической* теории событий, но в некоторых применялась и теория случайных величин (на основе методов анализа действительных функций, примененных Лапласом в теории вероятностей, например Максвелл<sup>10</sup>, Больцман, Гиббс и др.), хотя самого понятия случайной величины тогда еще не было.

Мы подошли к построению процесса, исходя из механических представлений и, в принципе, показали *связь случайного процесса с элементарными событиями* в предыдущем примере. Однако при построении следует исходить из *теории вероятностей*, в *первую очередь*, из *теории событий*, поэтому остановимся на одной задаче, *связанной с теорией событий*, ибо она *имеет непосредственное отношение* к задачам, рассмотренным в примерах 1, 6 (стр.9,32), и позволяет показать, на что влияют и что определяют вероятности *элементарных событий*.

**Пример 2.** «Урновая модель. Урна содержит  $b$  черных и  $r$  красных шаров. Случайно извлекается шар. Он возвращается обратно, и, кроме того, добавляется  $c$  шаров одного с ним цвета и  $d$  шаров другого цвета. Производится новое случайное вынимание из урны (теперь содержащей  $b + r + c + d$  шаров), и описанная процедура повторяется. Здесь  $c$  и  $d$  – произвольные целые числа. ... Чтобы придать нашему образному описа-

---

<sup>10</sup>В [1,436-440] об этом почему-то не сказано, но именно Дж. К. Максвелл впервые рассмотрел случайный процесс и решил задачу о распределении скоростей молекул газа, находящегося в стационарном состоянии: почти на полвека раньше, чем это выполнено Эрлангом, Эйнштейном, Планком и др.

ниютотный математический смысл, заметим, что оно определяет условные вероятности, из которых могут быть вычислены некоторые основные вероятности. . . . Точные выражения для вероятностей получить нелегко, за исключением следующего, самого важного и лучше всего изученного частного случая. Урновая схема Пойа. Характеризуется значениями  $c > 0$  и  $d = 0$ . В этом случае после каждого извлечения число шаров цвета выбранного шара увеличивается, тогда, как число шаров другого цвета не изменяется» [6,137-138].

Три замечания. 1. В [6] приведены еще некоторые частные случаи решения задач, связанных с урновой моделью. 2. Из формул, приведенных в цитате, очевидно, что вычисляются вероятности сложных событий, которые соответствуют отношению исла благоприятных  $b, b+c, (b+2c)$  . . . к числу всех случаев в классической теории. 3. Вообще говоря, урновая модель является универсальной моделью теории событий, что достаточно хорошо показано в работе [19].

Обратим внимание на некоторые не совсем ясные моменты.

Во-первых, случайный отбор (вынимание наугад) шара из урны означает, что может появиться *или черный, или красный* шар. Т.е. *появление, как черного, так и красного* шара является только предположением (об этом много сказано в приложении III [19,53]; здесь просто напоминание). Вопрос:

*На каком основании считается, что при каждом случайном отборе будет появляться только черный шар?* Например, как в существующей теории выполнить условие появление черного шара при случайном отборе шара из урны, если в урне имеется  $b = 3$  черных и  $r = 99997$  красных шаров.

Ответ понятен: *на основе определения условной вероятности*.

«Если  $P(A) > 0$ , то частное  $P(B|A) = P(BA)/P(A)$  называют условной вероятностью события  $B$  при условии  $A$ » [9,16] («или при заданном  $A$ » [6,133]). Чаше используются слова «при условии (или если известно), что событие  $A$  произошло<sup>11</sup>» [1,54; 6,133], пример в [14,11-12].

Прежде всего, отметим, что предъявление каких-либо *условий* определяет *обязательность их выполнения*.

В математике, например, в теории действительных функций действительных аргументов, доказательство какой-либо теоремы предваряется постановкой условий, которым подчиняются функции (функция), а затем доказываются свойства (свойство), которые следует при выполнении указанных условий. Если какое либо из условий не выполняется, то функции (функция) этими свойствами (свойством) обладать не будет. Постановка условий и обязательность их выполнения справедлива при решении любой задачи и не только в математике, но и в физике, химии, биологии и т.д.

Таким образом, *условие* – это *требование* из которого следует:

<sup>11</sup>Встречается также формулировка: «в предположении, что произошло событие  $A$ » (теорема умножения вероятностей в редакции Т. Байеса [1,411])

{A.11.1} В определении условной вероятности фраза «*при условии, что событие А произошло*», означает, что событие А является *достоверным*. Следовательно, *понятие может применяться тогда, когда условие выполняется*.

Казалось бы, это возможно, например, когда кроме вероятностей  $p_A, p_B = 1 - p_A$  событий А и В заданы некоторые дополнительные вероятности  $p_V, p_W = 1 - p_V$  событий V и W, определяющие условия появления событий А или В:

{A.11.2} Событие А *осуществляется* (т.е. событие В не происходит), *если появилось событие V и не происходит* (т.е. осуществляется событие В), *если появилось событие W*.

1. Говоря «языком урн», имеем две урны: одна с числом  $b$  черных и  $r$  красных шаров ( $M_1 = b + r$ ), а вторая –  $v$  фиолетовых и  $w$  белых шаров ( $M_2 = v + w$ ). Вторая «дает команду первой, какой шар ( $b$  или  $r$ ) должен из нее появиться». Такой «способ управления» применялся нами (но с множествами элементарных событий 2-х опытов, замечание 10 [19.35]) для расширения понятия 1-го типа объединения опытов.

2. Условие в таком виде применяется и в теории вероятностей, например: 1) формула полной вероятности (об этом в работе [19.36]), в которой события V и W называют гипотезами; 2) при построении некоторых случайных процессов – об этом чуть позже.

Но о том, что *условие обеспечивает достоверность* появления событий из 1-й урны, в существующей теории не говорится.

{A.11.3} Дело, однако в том, что 2-й опыт *обеспечивает достоверность* появления события А или В 1-го опыта, однако *достоверность* появления событий V и W 2-го опыта *ничем не обеспечена*, т.е. появление события V или W – это *только предположение*. Следовательно, и появление события А или В *остается только предположением*.

«Круг замкнулся»: условие {A.11.2} применять можно, но при построении процессов (и не только!) забывать, что оно не определяет достоверности, все же не стоит.

Говорить о том, каким *способом достигается достоверность* события в существующей теории вероятностей, по-видимому, не принято: опять – «само собой разумеющееся». При *построении процесса* в примере 1 *упоминаний об условной вероятности не было*, а, вообще говоря, и вероятности элементарных событий «какой-либо роли не играли».

*Во-вторых*, когда говорится о *сумме всех элементарных событий* (в понимании, определяемой аксиоматической теорией), то речь идет только об *общем числе M шаров* в урне, получаемых после *каждого случайного отбора*. После каждого отбора можно выполнить *одну из операций*:

- 1) *возвращать или не возвращать шар* в урну;
- 2) *дополнять* (или не дополнять) *некоторым числом шаров черного с и/или красного d цвета*;
- 3) *дополнять урну некоторыми числами шаров других цветов* (или шаров

с какими-то номерами), т.е. использовать *опыты с другими числами элементарных событий*<sup>12</sup>.

Операции 1)-3) не связаны между собой и могут применяться в различных комбинациях: это зависит от «нашей воли» (правильно – от условий решаемой задачи).

**{А.12}** Очевидно, что выполнение *операций в любой комбинации* определяет общее число шаров (элементарных событий в аксиоматической и всех случаев в классической теории) в урне, следовательно, появление *одного шара* из урны при последующем отборе – *достоверное* событие, вероятность которого равна 1 по определению.

Т.е. проверять «по индукции» вовсе не обязательно: это очевидно. Если же под элементарными событиями понимать *сложные* события (замечание 2 к примеру 2, стр.15), которым «приписываются» вероятности этих сложных событий, как это делается в аксиоматической теории, то *сумма их вероятностей не равна единице*. Это легко проверяется, например, при 2-3-х извлечениях. «Идиллия» нарушена, и что делать? Риторический вопрос. Это не проверялось, ни в классической, ни в аксиоматической теории. К сожалению – мы тоже не удосужились проверить, ни в работе [10], ни в [19]. Правда, ответить на него мы все равно бы не смогли: он связан со случайными процессами.

В-третьих. Из решения урновой задачи следует: вычисляются вероятности (как с позиции классической, так и аксиоматической теории) последовательности *сложных*<sup>13</sup> событий  $A^n$  – появление *черного шара при каждом отборе* с номером  $n = 1, 2, \dots$ . Однако кроме них имеются другие события: непосредственно об этом в литературе обычно не говорится, но косвенно они следуют из решения для схемы Пойа, данного в работе Феллера:

**Пример 2.а.** «Вероятность того, что при  $n = n_1 + n_2$  извлечениях в первых  $n_1$  были черные шары, в остальных  $n_2$  красные, равна  $\left\{ \prod_{k=0}^{n_1} (b+ck) \cdot \prod_{k=0}^{n_2} (r+ck) \right\} / \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} (b+r+ck) \right\}$  (2.3). Рассмотрим далее любой другой порядок выбора  $n_1$  черных и  $n_2$  красных шаров. Вычисляя вероятность того, что  $n$  извлечений приведут к такому порядку цветов, мы получим те же множители, что и в (2.3), но расположенные в другом порядке. Отсюда следует, что все возможные последовательности черных  $n_1$  и  $n_2$  красных шаров имеют одинаковые вероятности» [6, 138].

Все сказанное верно, но обратим внимание на то, что следует из данного примера:

**Замечания 6.** 1. Положим в формуле (2.3) значения  $n_1 = n$ ,  $n_2 = 0$  или  $n_1 = 0$ ,

---

<sup>12</sup>Вообще-то, оно применимо в практических задачах: об этом в конце статьи

<sup>13</sup>В новой исходной системе – элементарного события

$n_2 = n$  получим две последовательности вероятностей:  $\{b + (n - 1)c\}/\{M + (n - 1)c\}$   $\{a\}$ ,  $\{r + (n - 1)c\}/\{M + (n - 1)c\}$   $\{b\}$ , где  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $M = b + r$ . Т.е. имеем две последовательности событий  $A^n$  или  $B^n$  (появление в опытах только черного или только красного шара), вероятности которых при данном значении  $n$  разные. Очевидно, что вероятности произведения событий  $A^n$  или  $B^n$  также будут разными. **2.** Последовательно полагая  $n_1 = n - 1, n - 2, \dots, 1$   $\{1^*\}$  и  $n_2 = 1, 2, \dots, n - 1$   $\{2^*\}$ , получим еще  $n - 1$  отличающихся последовательностей вероятностей некоторых событий. **3.** Кроме последовательностей, определяемых формулой (2.3), возможны и другие, например, при каком-то отборе с номером  $1 < j < N$  в последовательности появился красный шар, а далее — снова только черные: получим последовательности, отличающиеся от последовательностей, определяемых формулой (2.3). **4.** Достоверность появления одного шара из урны определяет существование последовательностей событий, противоположных событиям  $A^n$  или  $B^n$ , вероятности которых равны:  $r/\{M + (n - 1)c\}$  и  $b/\{M + (n - 1)c\}$ . Соответственно, последовательности противоположных событий определяются и для последовательностей, определенных в пунктах 2-3.

Почему об этом не говорится в работе [6] сказать сложно, но в других просмотренных работах и этого примера нет: обычно приводятся только последовательность вероятностей событий  $A^n$ . О существовании даже событий  $B^n$  в теории событий упоминается редко — в основном «иллюстрируется» понятие условной вероятности событий  $A^n$ .

В-четвертых, существующая теория связывает условную вероятность с понятием зависимости (независимости) событий.

В работах [10,90-96; 19,55-62] проведен анализ понятий условной вероятности, зависимости (зависимости) событий и показано: **никакой связи условной вероятности с существующим понятием зависимости (независимости) событий не существует.** Изменение вероятностей событий данного испытания (вывод W.2 [19,62]) определяется изменением условий (внутренних или внешних) его проведения. **При неизменности условий испытания вероятности его событий не изменяются.**

Кроме того, мы непосредственно занимались решением задачи, подобной рассмотренной выше.

Рассмотрена урновая модель в усложненном варианте (пример 2 [19,57]): урна содержит полые непрозрачные сферы с номерами  $j=1,2,\dots,K$  внутри сферы по числу  $m_j$  сфер каждого номера,  $M = \sum_{j=1}^K m_j$ . После случайного отбора сфера не возвращается в урну, т.е. имеем выборку без возвращения. Требуется определить вероятность того, что при  $n$  виртуальных (мысленных) отборах элементарное событие появится «и при 1-м, и при 2-м, ..., и при отборе с номером  $n$ , что соответствует, подчеркиваем это, логической связке, определяющей произведение событий.

Ее решение проведено на основе *новой исходной системы теории событий*, которое не связано ни с *условной* вероятностью, ни с понятием *зависимости событий*: исходя из того, что, во-первых, при каждом отборе *изменяются внутренние условия опыта* (числа возможных исходов  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) какого-то из элементарных событий и число возможных исходов опыта). В результате этого получаем *другой опыт* с измененными вероятностями элементарных событий. Во-вторых, *каждый опыт*, полученный после отбора, проводится *при неизменных условиях* (при данных числах возможных исходов элементарных событий и опыта). Новая исходная система позволяет просто получить решение рассмотренной частной задачи (решение 3 [19,59]) исходя из предположения:

**{I}** В результате случайного отбора может появиться *только одна сфера с номером: «или 1, или 2, ..., или  $j=k, \dots$ , или  $K$ », т.е. одно из множества элементарных событий опыта: «или  $a_1^n$ , или  $a_2^n, \dots$ , или  $a_j^n, \dots$ , или  $a_K^n$ ».*

Нумерация отборов  $n = 0, 1, 2, \dots$  чуть-чуть отличается от нумерации, принятой в теории событий: она подчеркивает, что вероятность при каждом отборе вычисляется до его осуществления.

Очевидно, что использовать понятие *условной* вероятности для решения даже этой частной задачи «весьма накладно» (сама запись условных вероятностей уже трудоемкая процедура) и, вообще говоря, оно будет неточным. Решение рассмотренной задачи с применением *условной* вероятности значительно усложнится (учитывая, что «Точные выражения для вероятностей получить нелегко ...» в задаче с двумя элементарными событиями, пример 2, стр.17), если ввести *предположение*<sup>14</sup>:

**{II}** *Извлекаемая сфера возвращается обратно и добавляется  $c_j$  сфер одного с ней номера ( $j = k$ ), и/или  $d_j$  ( $j \neq k$ ) ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) сфер других номеров.*

Числа  $c_j$  и  $d_j$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

При решении задачи показаны два способа *обеспечения условия достоверности* появления события *при реальном отборе* шара из урны:

- 1) заглянув в урну, *целенаправленно изъять* черный (или красный) шар;
- 2) если событие (черный или красный шар) появилось в результате *случайно-*

<sup>14</sup>Предположение не учитывает всех возможностей построения случайных процессов, например, условия в положении {A.11.2} (стр.19), использования 3-й операции изменения шаров в урне, а также других возможностей, которые будут рассмотрены в последующем анализе

го, (подчеркиваем) *но реального, отбора шара, то оно уже произошло.*

1-й способ – очень уж искусственный: естественно, что в теории *об этом не говорится* и в практике он *не применяется*, однако результат теоретического решения, полученного на его основе, иногда *используется* для «предсказания» вероятности появления события. Решение этой задачи (решение 1 [19,57]) с его применением при «скрытом» признаке появления *элементарного* события невозможно: номера должны быть на поверхности шаров (чтобы отбирать шар с нужным номером).

*Естественным* является 2-й способ (сферу надо «вскрывать» после отбора, решение 2 [19,58]): он и *применяется*, например, при контроле качества продукции, но он *не применим* для «предсказания» вероятности появления события в  $N$  испытаниях.

Введение *предположения {II}* не усложняет решение задачи при применении *новой исходной системы теории событий*: оно приводит к более громоздким выражениям для вероятностей. Учитывая *предположения {I} и {II}*, рассмотрим решение задачи с урновой моделью (пример 2, стр.17), приведенной в [6], на основе *новой исходной системы теории событий*.

**Пример 3.** Имеем *опыт* с двумя *элементарными событиями*:  $b_1^0$ ,  $P(b_1^0) = b/M$  и  $r_1^0$ ,  $P(r_1^0) = r/M$  ( $M = b + r$ ) (верхний индекс – номер отбора). Требуется определить вероятность появления черного (или красного) шара при  $n = 1, 2, \dots$  случайных (*виртуальных, мысленных*) отборах. Подчеркиваем *опять*: это *соответствует* появлению *черного* (или красного) шара «и при 1-м, и при 2-м, ... и при отборе с номером  $n$ », т.е. *логической связке, определяющей произведение событий*.

*Возвращение шара в урну и виртуальное добавление с шаров одного цвета с появившимся шаром и  $d$  шаров другого цвета приводит к изменению внутренних условий опыта: изменяются числа черных, красных (возможных исходов обоих элементарных событий) и общее число шаров в урне (возможных исходов опыта). Следующий виртуальный (случайный) отбор производится из виртуальной урны с измененным составом шаров.*

п.1. При 1-м отборе может появиться *черный или красный шар*. В результате отбора получим *два виртуальных опыта*: или 1-й с элементарными событиями  $b_1^1$ ,  $r_1^1$  или 2-й –  $b_2^1$ ,  $r_2^1$ . Их вероятности равны:  $P(b_1^1) = (b + c)/M_1^1$ ,  $P(r_1^1) = (r + d)/M_1^1$  или  $P(b_2^1) = (b + d)/M_2^1$ ,  $P(r_2^1) = (r + c)/M_2^1$ , где  $M_2^1 = M_1^1 = M + c + d$  – возможных исходов 1-го и 2-го опытов соответственно. Число в нижнем индексе обозначает номера *виртуальных опытов* (урн), полученных в результате *виртуального (случайного) отбора шара с номером  $n = 1, 2, \dots$  и операции добавления шаров*. Таким образом:

**{А.13}** В подобных задачах вероятности *элементарных событий зависят от изменения внутренних условий опыта.*

В результате имеем два *виртуальные урны (опыта)*, следовательно, 2-й отбор следует проводить *или из 1-й, или из 2-й урны*. В результате получим 4-е *виртуальных урны (опыта)* с элементарными событиями  $b_1^2$  и  $r_1^2$  или  $b_2^2$  и  $r_2^2$ , или  $b_3^2$  и  $r_3^2$ , или  $b_4^2$  и  $r_4^2$ . Соответственно, 3-й отбор должен проводиться из 4-х *виртуальных урн*, 4-й отбор из 8-ми *виртуальных урн* и т.д.

Т.е. имеем *ветвящийся случайный процесс*, подобный тому, который получен в примере 1, но только с 2-мя элементарными событиями. Соответственно, число *виртуальных опытов (урн)* равно  $v = 1, 2, 2^2, \dots, 2^n$ , а число *возможных реализаций* процесса –  $w = 2^1, 2^2, \dots, 2^{n+1}$ . Число *возможных реализаций*  $w$  определяется числом элементарных событий и не зависит от их вероятностей. *Возможные реализации*, в которых появляются *только элементарные*  $b_1^n$  или  $r_w^n$  (где  $w = 2^n$ ) определяют *границы процесса* (положение {А.4}, стр.14). В примере 1 – вероятности элементарных событий не *изменяются*, а в данном – *изменяются при каждом отборе*.

**п.2.** Однако вычисление требуемых вероятностей осуществляется *на-много проще*. Применив *2-й тип объединения* (определение 6, замечания 12 и 14 [19,34,40,43]), получим *виртуальный объединенный опыт* с вероятностями элементарных событий  $P(b^1) = \{b + (c + d)/2\}/M_o^1$ ,  $P(r^1) = \{r + (c + d)/2\}/M_o^1$ , где  $M_o^1 = M + c + d$  – число возможных исходов объединенного опыта. 2-й отбор проводим из этой урны: снова получим два *виртуальных опыта*, которые опять объединяем и т.д. После отбора с номером  $n$  получим *виртуальный объединенный опыт* с вероятностями элементарных событий  $P(b^n) = \{b + n(c + d)/2\}/M_o^n$ ,  $P(r^n) = \{r + n(c + d)/2\}/M_o^n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) (1), где  $M_o^n = M + n(c + d)$ .

Вероятность появления *черного или красного шара «и при 1-м, и при 2-м, ..., и при отборе с номером n»* равна *произведению* вероятностей  $\prod_{j=0}^n P(b^j)$  и  $\prod_{j=0}^n P(r^j)$  (2), что следует из *совмещения опытов*.

Формулы (1)-(2) получены *только на основе теории событий* («по образу и подобию» решения 3 задачи примера 2 [19,59]). Однако *что означают вероятности, определяемые этими формулами (и (2.3) в примере 2.а, стр.20) в процессе, построение которого начато в примере 3?* Попытка ответить на вопрос *на основе теории событий* (тем более, вообще говоря, на основе теории случайных величин), не приведет к успеху, ибо с *позиции теории событий* *кажется*, что *все выполнено верно*. Поэтому продолжим *построение процесса*, начатое в примере 3, но чуть изменим условия задачи.

**Пример 4.** Будем полагать: если появляется *черный шар*, то в урну добавляется *с черных шаров*, а если *красный* – то *d красных шаров* (отобраный шар возвращается в урну). Причины выбора данной задачи: 1. Если  $d = c$  имеем схему Пойа, а если  $c = d$  – частный случай, который «был предложен Фридриманом в качестве модели службы безопасности» [6, 139]. 2. Она нагляднее показывает отличие ветвей (да и формулы не громоздкие, и проще видны закономерности построения формул). 3. Ее решение отличается от решения задачи, полученное выше и имеет



определенные особенности: в настоящей работе мы их не рассматриваем.

П.1. На рис.3 условно изображены начальные ветви процесса: штриховая линия отделяет ветви, образованные появлением при 1-м отборе черного, от ветвей, образованных появлением красного шара.

Рис. 3

Отметим, что это разделение – просто некоторая условная схема, необходимая для упрощения анализа: к реальным процессам она имеет косвенное отношение. «Незыблемы» только границы случайного процесса.

Виртуальные урны, получаемые после каждого отбора, обозначены прямоугольниками, в которых вписаны числа шаров черного и красного цветов<sup>15</sup>.

Примем обозначение  $A_v^n$  для опытов при отборе с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $b_v^n, r_v^n$  для входящих в него элементарных событий<sup>16</sup>. Номера  $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$  опытов для каждого  $n$  начинаются с верхнего прямоугольника каждой колонки на рисунке.

Сплошные стрелки выделяют виртуальные опыты, в которых реализуются ветви, соответствующие появлению только черного (элементарных событий  $b_w^n$  ( $w = 2^n$ )), или только красного шара (элементарных событий  $r_w^n$  ( $w = 2^n$ )), которые определяют границы процесса (примеры 1, 3). Стрелки с длинными штрихами обозначают виртуальные опыты, соответствующие первому, с короткими штрихами – второму, штрихпунктирные – третьему ответвлению виртуальных опытов. Стрелками 2-го типа обозначены разветвления от опытов, ответвление которых обозначены штриховыми стрелками 1-го типа. Пунктирными стрелками обозначены ответвления, для которых продолжения не изображены.

Подчеркнем важные моменты::

{А.14.1} После каждого виртуального отбора с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  черного или красного шара из виртуальной урны (опыта)  $A_v^n$  мы получаем два виртуальных опыта: или опыт  $A_{2v+1}^{n+1}$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) с увеличенным числом черных, или опыт  $A_{2v+2}^{n+1}$  с увеличенным числом красных шаров.

По числам возможных исходов каждого виртуального опыта (т.е. суммам возможных исходов его элементарных событий) вычисляются вероятности элементарных событий.

{А.14.2} В новой исходной системе логическое отношение «или ..., или ...» соответствует объединению опытов (определение 5 [19,32]) или объединению систем случайных величин (определение 5 [29,67]).

<sup>15</sup>Т.е. числа возможных исходов элементарных событий в каждом опыте

<sup>16</sup>Если число элементарных событий в исходном опыте равно  $K$ , то лучше применять обозначения  $a_{k,v}^n$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots, K$  – номер элементарного события в виртуальном опыте с номером  $v = 1, 2, 3, \dots, K^n$

{А.15} В общем случае *каждая из ветвей*, содержит, по крайней мере, хотя бы одно *элементарное* событие, вероятность которого *отличает* эту ветвь от *всех других ветвей*.

Это утверждение следует из анализа вероятностей *элементарных* событий *виртуальных* опытов, полученных их *разветвлением* после каждого отбора. Например, *все ветви выше линии раздела* содержат событие  $b^0$ , а ниже – событие  $r^0$ , которые имеют разные вероятности. После 1-го разветвления имеем *опыты*  $A_1^1$  и  $A_2^1$ , вероятности *элементарных* событий которых также отличаются. Далее достаточно рассматривать ветви выше (или ниже) линии раздела, например, сравнивая вероятности *элементарных* событий *опытов*  $A_1^2$  и  $A_2^2$ , образованных 2-м разветвлением, *опытов*  $A_1^3$  и  $A_2^3$ , образованных 3-м разветвлением и т.д. Таким образом, анализ показал:

{А.16} С *позиции теории* событий мы можем располагать вероятности *элементарных* событий в формуле (2.3) (пример 2.а, стр.18) в *любом другом* порядке, однако их *порядок предопределен процессом и изменению «не подлежит»*.

Хотя процесс, построенный в примере, не является общим, но уже на этом примере легко показать, что все произведения, образованные возможными последовательности  $n_1$  черных и  $n_2$  красных шаров имеют разные вероятности. В частном случае при значении (пример 2.а, схема Пойа) можно показать, что вероятности только некоторых из произведений будут равными.

п.2. Выше линии раздела, появление *красного* шара является *элементарным* событием, *противоположным* появлению *черного* шара, а ниже – появление *черного* шара является *элементарным* событием, *противоположным* появлению *красного* шара. В *опытах*, образующие две *ветви*, числа *возможных* исходов *противоположных* событий, начиная с некоторого значения  $n$ , остаются *постоянными*, например,  $A_1^0, A_1^1, A_1^2, A_1^3, A_1^4$  и  $A_1^0, A_1^1, A_1^2, A_1^3, A_1^4$  или  $A_1^0, A_1^1, A_1^2, A_1^3, A_1^4$  и  $A_1^0, A_1^1, A_1^2, A_1^3, A_1^4$ . Т.е. их вероятности *уменьшаются*.

С *позиции теории* событий, для *любой возможной реализации процесса* можно определить *произведение элементарных событий*<sup>17</sup>, образующих эту *реализацию при данном* отборе с номером  $n = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим *суммы произведений элементарных событий возможных реализаций*, образованных *последовательностями опытов выше или ниже линии* раздела. Для последовательностей  $A_1^0, A_1^1$  или  $A_1^0, A_1^2$  ( $n = 1$ ), с учетом принятых обозначений, получим:  $b_1^0(b_1^1 + r_1^1)$  или  $r_1^0(b_1^1 + r_1^1)$ . Аналогично, для последовательностей опытов  $A_1^0, A_1^1, A_1^2$ ,  $A_1^0, A_1^1, A_1^3$  или  $A_1^0, A_1^1, A_1^4$  ( $n = 2$ ) имеем:  $b_1^0\{b_1^1(b_1^2 + r_1^2) + r_1^1(b_2^2 + r_2^2)\}$  или  $r_1^0\{b_1^1(b_2^3 + r_2^3) + r_1^2(b_4^2 + r_4^2)\}$ . Можно продолжить и получить более громоздкие формулы, например, при значении  $n = 3$  имеем выше линии раздела  $b_1^0\{b_1^1[b_1^2(b_1^3) + r_1^3] + r_1^2[(b_2^3) + r_2^3]\} + r_1^1[(b_2^2(b_3^3) + r_3^3) + r_2^2(b_4^3) + r_4^3]\}$ .

Уже сами формулы, полученные *на основе процесса*, вызывают некоторое сомнение в том, что мы *правильно применяем теорию* событий. Определенную «сумятицу» вносит следующий момент: в круглых скобках находятся *суммы элементарных событий одного опыта*: их *сумма* явля-

<sup>17</sup>Эта операция используется в существующей теории: ее применяли и мы при решении задач

ется *достоверным* событием, вероятность которого равна 1. Также легко получить: в *квадратных*, а затем в *фигурных* скобках *суммы элементарных* событий одного опыта. В результате анализа можно утверждать следующее:

{А.17} Вероятность появления *всех ветвей*, находящихся *выше линии* раздела равна вероятности  $P(b_1^0)$ , а *ниже линии* раздела –  $P(r_1^0)$  *элементарных событий исходного опыта*. Это *абсолютно не зависит ни от числа отборов, ни от вероятностей* событий в *каждом из опытов* той или иной последовательности.

Конечно же, это утверждение не дало нам повода для оптимизма, ибо оно только ухудшило ситуацию. Однако, продолжим.

п.3. *Элементарные события опытов*  $A_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) при отборе с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  имеют *разные метки*:  $b_v^n$  и  $r_v^n$  соответственно. Т.е. *опыты* при данном значении *не пересекаются* (определение 8 [19,42]), следовательно, при отборе с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  числа *возможных исходов элементарных событий в объединенном опыте* не изменяются, а числа  $M_o^n$  *возможных исходов объединенного опыта равно сумме возможных исходов всех объединяемых опытов* (смещение опытов, определение 6, замечания 12, 14 [19,34,40,43]). Числа  $M_o^n$  *возможных исходов объединенного опыта* легко вычисляются по схеме процесса (рис.3.) и равны  $M = b + r$ ,  $M_o^1 = 2\{M + (c + d)/2\}$ ,  $M_o^2 = 2^2\{M + (c + d)\}$ ,  $\dots$ ,  $M_o^n = 2^n\{M + n(c + d)/2\}$  (3). Пусть  $M_v^n$  - число возможных исходов опыта  $A_v^n$  с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$ , тогда вероятности элементарных событий  $P(b_v^n)$  и  $P(r_v^n)$  каждого из опытов  $A_v^n$  уменьшаются пропорционально отношению  $M_v^n / M_o^n$ . Таким образом, из данного анализа следует:

{А.18.1} Вычисление вероятностей *элементарных событий объединенного опыта* соответствует *объединению опытов 2-го типа* (смещение опытов, определение 6, замечания 12, 14 [19,34,40,43]).

{А.18.2} Вероятности  $P(b_v^n) \cdot M_v^n / M_o^n$  и  $P(r_v^n) \cdot M_v^n / M_o^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) (4) определяют вероятности *элементарных событий объединенного опыта* при данном отборе с номером  $n$ , а, следовательно, *и вероятность их появления в процессе*.

Частный случай: если  $c = d = 0$ , то  $P(b_v^n) = P(b_1^0) \cdot 2^{-n}$ ,  $P(r_v^n) = P(r_1^0) \cdot 2^{-n}$  (5). Напомним, что нумерация отборов  $n = 0, 1, 2, \dots$  в наших формулах отличается от нумерации, принятой индексации в существующей теории событий (замечание к предположению {I}, стр.19).

*Сложив вероятности появления черного или красного шара при случайном отборе* с номером  $n=0,1,2,\dots$ , получим формулы  $P(b^n) = \{2b + nc\} / \{2M + n(c + d)\}$ ,  $P(r^n) = \{2r + nd\} / \{2M + n(c + d)\}$ , а также *вероятность одновременного появления черного или красного шара при  $n$  отборах* (т.е. вероятность про-

изведения элементарных событий), которые подобны формулам (1)-(2) (стр.21).

Из утверждений А.18.1-А.18.2 «выползла еще одна неприятная вещь»: *суммы вероятностей произведений возможных реализаций, образованные последовательностями выше или ниже линии раздела (п.2), равны  $P(b_1^0) \cdot 2^{-1} \cdot \dots \cdot 2^{-n}$  и  $P(r_1^0) \cdot 2^{-1} \cdot \dots \cdot 2^{-n}$  соответственно. Поэтому, хотя анализ формул и интересен, мы проводить не будем, ибо он, как будет показано далее, бесполезен. Для тех, у кого есть такое желание, отметим, что для этого полученные вероятности  $P(b^n)$  и  $P(r^n)$  лучше представить через разности  $P(b^n) - P(b_1^0)$  и  $P(r^n) - P(r_1^0)$  соответственно.*

Мы, по крайней мере, показали, что *все возможные реализации* следуют из решения для урновой схемы Пойа (пример 2 стр.17), а также то, что определяют вероятности, определяемые формулами (1)-(2)(п.2 примера 3 стр.24), и подтвердили правильность решения задачи в примере 3 (и решение 3 задачи в примере 2 [19,59]).

Все замечательно и лучшего можно бы не желать: да, возможно, но только «если бы можно было обойтись без “бы”».

п.4. Из анализа в пунктах 1-2 следует, что при *каждом конечном значении*  $n = 0, 1, 2, \dots$  появление *одной из возможных реализаций* является *достоверным событием*. Отсюда следует:

{А.19} Появление *одной из возможных реализаций, исключает появление любой другой возможной реализации случайного процесса, следовательно, исключается и одновременное появление элементарных событий, которые принадлежат любой другой возможной реализации.*

{А.20} Учитывая {А.19}, можно полагать, что *возможная реализация случайного процесса может, вообще говоря, быть его элементарным событием.*

Остается только выяснить, чему равны вероятности появления возможных реализаций случайного процесса и как они связаны с вероятностями элементарных событий  $b_v^n$  и  $r_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ). Тогда можно будет считать их элементарными событиями.

Однако, следуя теории событий, одна из *возможных реализаций* может появиться только тогда, когда все *определяющие ее элементарные события* появятся *вместе*. Например, для последовательности опытов  $A_1^0, A_1^1, \dots, A_1^n$  имеем две ветви  $b_1^0, b_1^1, \dots, b_1^n$  и  $r_1^0, r_1^1, \dots, r_1^n$ . Появление *этих элементарных событий* и определяет появление *только одной из возможных реализаций случайного процесса в каждом из проведенных экспериментов*. Отсюда возникает вполне естественный вопрос: *появляются ли они одновременно?*

Решение задачи с позиции *теории* событий в работах [10; 19], как и в примере 3, выполнено вроде бы *правильно*, однако о *теории случайных*

процессов мы «слыхать-то слыхивали», но, вообще говоря, «слышать не желали», ибо никакого «подвоха» совсем не ждали. Утверждения {A.19}-{A.20} «свели на нет» наше красивое решение задачи примера<sup>18</sup> 3 (стр.23). Формулы (1) определяют вероятности появления *черного или красного шара во всех опытах*  $A_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) при отборе с номером  $n$ , что, по крайней мере, не приводит к противоречиям (положения {A.18.1}-{A.18.2}); но формулы (2) – вероятность *одновременного* появления *черного (или красного)* шара *во всех ветвях процесса*, что абсолютно неверно (положение {A.19}).

«Неприятности» на этом не закончились, ибо из рассмотрения процессов (примеры 1 и 4 стр.9, 24) следует: *элементарные события, образующие любую из возможных реализаций* появляются *только при переходе* от отбора (момента времени  $t_n$ ) с номером  $n$  к отбору с номером  $n + 1$ , т.е. *последовательно*. Покажем это более «выпукло» на следующем примере.

**Пример 5.** Пусть имеется 7 урн с шарами: 1) черного и красного; 2) белого и желтого; 3) синего и оранжевого; 4) зеленого и синего; 5) вишневого и розового; 6) фиолетового и серого; 7) коричневого и серебряного цветов. Состав шаров в урнах разный.

Рис. 3.а

П.1. В урне 1 цвета шаров как в примере 2, поэтому считаем ее первой, вынимаем из нее наугад один шар и вернем его в урну. Пусть это будет красный. Проведем от нее стрелку вниз, поставим в ее конце (схема на рис.3.а), например, урну 6 и проведем с ней такую же операцию, как и с 1-й урной. Пусть шар оказался фиолетовым: соединим стрелкой вниз урну 6, например, с урной 2. «Вспомнив», что из урны 1 мог появиться черный шар, соединим ее стрелкой вверх с урной 5 и повторим операцию. Пусть шар оказался фиолетовым: соединим его с урной 3. Опять же, «вспомнив», что из урны 6 мог появиться серый шар, соединим ее стрелкой вверх с урной 4. И, наконец, из урны 5 мог появиться розовый шар: соединим ее стрелку вниз с урной 7. В результате такого построения получим начало процесса, изображенного на схеме рис.3).

**Во-первых**, число шаров *разного цвета* и *общее число шаров* в урнах 5 или 6 (или 3, 7, или 4, 2) *не зависит* от того, *какой шар появился при отборе* из урны 1 (или из урны 5 или урны 6). Отсюда следует: стрелки по большому счету показывают, *из какой урны* будет производиться *следующий случайный отбор* шара: 1) или из урны 5, или из урны 6; 2) из урны 3, или из урны 7, или из урны 4, или из урны 2 и т.д.

**Во-вторых**, *опыты с урнами* проводятся *последовательно* и соответствуют логической связке «или ..., или» (об одновременности никакой «речи быть не может»), о чем и говорилось выше (положение {A.14.2}).

П.2. «Сэкономим» на числе урн: высыпая шары из урн 5 и 6 в одну урну, а шары из урн 3, 7, 4 и 2 в другую и присвоим им номера 2' и 3' (даны ниже схемы). Соответственно, число шаров в урне 2', будет равно сумме шаров в урнах 5 и 6, а в урне 3'

<sup>18</sup>Естественно, это относится и к решениям в работах [19; 10]

– сумме шаров в урнах 3,7,4 и 2, но числа шаров разных цветов не изменится. В урне 2' будут находиться шары вишневого, розового, фиолетового и серого цветов, а в урне 3' – синего, оранжевого, коричневого, серебряного, зеленого, синего, белого и желтого цветов. В урне с номером 2' имеем 4-е, а с номером 3' – 8 элементарных событий. Это и есть объединение опытов 1-го типа. Естественно, что вероятности элементарных событий уменьшаться. Теперь урну 1 следует соединить с урной 2' – 4-мя, а урну с номером 3' с урной 2' – 8-мью стрелками, т.е. в соответствии с числом ветвей. Построение упростилось: «главное не перепутать» элементарные события, для чего сразу следует использовать обозначения, связывающие их с порядком расстановки в процессе до объединения опытов. Например, для схем на рисунках 3-3.а. принять обозначения для опытов (урн)  $A_v^n$  ( $v=1, 2, 3, \dots, 2^{2(n+1)}$ ) и  $b_v^n$ ,  $r_v^n$  элементарных событий принятые в примере 4: номера начинаются (как и на рис.3 стр.25) сверху.

Если в исходный опыт состоит из  $K$  элементарных событий, то на линии с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  (рис.3) будет  $K^n$  опытов (урн), в каждом из которых необходимо обозначить  $K$  элементарных событий. Применяя объединение опытов, получим на линиях по одному опыту, который состоит из  $K^{2(n+1)}$  элементарных событий  $a_w^n$  ( $w = 1, 2, 3, \dots, K^{2(n+1)}$ ): «экономия» гораздо существеннее.

Дело, конечно же, не в «экономии числа урн»: в результате *объединения опытов* получаем *один объединенный опыт* с числом  $K^{2(n+1)}$  *элементарных событий*, вероятность которых определяется формулами типа (4) (положение {А.18.2}, стр.27), что *существенно упрощает построение процесса* при числе *элементарных событий* больше 2.

**п.3.** Еще один момент. Опыт 1 образует 2-е ветви. Очевидно, что для перехода необходимо иметь 2 опыта, однако вовсе не обязательно, чтобы они состояли, как опыты 5-6, из 2-х элементарных событий: например, можно положить, что опыт 5 состоит из 3-х и более элементарных событий. Тогда этот опыт будет определять 3 и более ветвей, которым должны соответствовать 3 и более опытов. Туже операцию можно проделать с другими опытами. Т.е. мы можем увеличить число ветвей процесса не только за счет числа отборов, но и за счет увеличения числа элементарных событий в опытах при следующих отборах (или уменьшать, если число событий больше 2-х).

Об этом говорилось ранее (положение {А.12}, стр.20): здесь мы показали возможность реализации такого процесса.

Отметим: *все свойства процесса*, отмеченные в положениях {А.14.1}-{А.20} (стр.25-28) остаются *в силе и для процесса*, рассмотренного в примере 5. Таким образом, из данного анализа следует:

{А.21} *Переход от одного случайного отбора к другому осуществляется только последовательно с применением логического отношения «или ... , или»*: в *новой исходной системе* оно соответствует *объединению опытов* (определение 5 [19,32]) или *объединению систем случайных величин* (определение 5 [29,66]).

{A.22.1} Появление элементарных событий «или  $b_v^n$ , или  $r_v^n$ » одного из опытов  $A_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) при случайном отборе с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяет из какого опыта  $A_{2v+1}^{n+1}$  или опыта  $A_{2v+2}^{n+1}$  будет производиться отбор с номером  $n + 1$ .

{A.22.2} Следовательно, появление элементарных событий «или  $b_v^n$ , или  $r_v^n$ » одного из опытов  $A_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) при случайном отборе с номером  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяет появление элементарных событий «или  $b_{2v+1}^{n+1}$ , или  $r_{2v+1}^{n+1}$ » опыта  $A_{2v+1}^{n+1}$  либо элементарных событий «или  $b_{2v+2}^{n+1}$ , или  $r_{2v+2}^{n+1}$ » опыта  $A_{2v+2}^{n+1}$  при случайном отборе с номером  $n + 1$ .

Положения {A.21}-{A.22.2} следуют из рассмотрения построения случайных процессов и, на самом деле, уточняют применение теории событий при случайных отборах. Более подробно эти положения, а также то, когда появляются произведения последовательностей элементарных событий, будет пояснено позже (замечания 11 и примеры 9-12, стр.48-51). А сейчас переформулируем положения применительно к случайным процессам.

{A.23} В случайных процессах рассматриваемого вида, переход от ветвей, определяемых элементарными событиями  $b_v^n$  или  $r_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) к продолжению ветвей, определяемых элементарными событиями  $b_{2v+1}^{n+1}$ ,  $r_{2v+1}^{n+1}$  или  $b_{2v+2}^{n+1}$ ,  $r_{2v+2}^{n+1}$  соответственно, также соответствует логической связке «или ... , или».

{A.24} Вероятность появления данной ветви случайного процесса рассматриваемого вида не определяется вероятностью произведения элементарных событий, которые ее образуют.

{A.25} Для построения случайного процесса можно использовать опыты с разным числом возможных исходов элементарных событий, а также с разным числом элементарных событий.

Т.е. не только изменяя число шаров в исходной урне (предположение II, стр.22). Этот прием применяется в существующей теории: перекладывание шаров из урны в урну, о нем поговорим позже.

{A.26} Объединения опытов приводит к существенному упрощению построения случайного процесса.

### 3. Механика, теория событий и случайные процессы

. Хотя мы и говорили о построении *случайного процесса*, но, фактически, в примерах 4-5 показаны *только схемы* (в общем-то – достаточно условные) *процесса* (рис.3-3.а, стр.25,29, которые, по сути, соответствуют схеме на рис.2, стр.10). Чтобы *построить процесс*, продолжим «механическую интерпретацию», для чего рассмотрим в упрощенном варианте *случайный процесс*, о построении которого говорилось в примере 1.

**Пример 6.** Положим: 1. Материальная точка движется по прямой линии под действием *постоянного усилия*  $f = \text{const}$ , т.е. *скорость*  $v$  точки на отрезке  $0 \leq f \leq b$  *изменяется линейно*  $v = v^0 + c \cdot f$ , где  $v_0$  – скорость при значении  $f = 0$  (в нашем случае  $v_0 = 0$ , замечание 3.1, стр.9),  $c$  – некоторая постоянная. 2. Усилие в моменты времени  $t_n = \delta_T \cdot n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) является *дискретной* случайной величиной  $F$  с *вероятностной функцией*  $p_F(f_k^n) = p_k^n$  ( $k = 1, 2$ ) на *любом из промежутков*  $\Delta = \Delta_F + \delta_F = b/n$  (положение А.8, стр.14) отрезка  $0 \leq f \leq b$  (где  $\Delta_F = f_2^n - f_1^n$  и  $(\delta_F = f_2^{n+1} - f_1^n \ll \Delta_F)$ ). Считаем, что значения  $p_k^n$  определяются вероятностями *элементарных событий*  $b_v^n$ ,  $r_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) (примеры 4 и 5). Если исходить из числа  $K$  элементарных событий, то их можно обозначить в виде  $b_v^n = a_{1,v}^n$  и  $r_v^n = a_{2,v}^n$  (сноска 7, стр.10).

**П.1.** В моменты времени  $t_n = \delta_T \cdot n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) скорости  $v(f_k^n) = v_k^n$  ( $k = 1, 2$ ) в точках  $f_k^n$  равны значениям  $v_1^j = j\delta_V + (j-1)(\Delta_V)$  и  $v_2^j = j\delta_V + j\Delta_V$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) **{7}** (где  $\Delta_V = c \cdot \Delta_F \cdot \delta_T$  и  $\delta_V = c \cdot \delta_F \cdot \delta_T$ ), которые появляются с вероятностями  $p_V(v_k^n) = p_k^n$ , соответствующими вероятностям появления значений усилий  $f_k^n$ .

На рис.4 изображена условная схема возможных траекторий материальной точки для значения  $n = 3$ . Имеем на линии 1 две, на линии 2 три, а на линии 3 четыре точки. При этом число точек на линиях 2, 3 не соответствует числу *возможных траекторий*: 4 и 8 соответственно.

Рис. 4

**п.2.** Покажем, что это определяется *равенством скоростей и путей* (п.5 примера 1, стр.13) движения материальной точки по некоторым из участков *возможных* (напоминание: абстрактных) *траекторий*.

Определим *возможные траектории* при значениях  $n = 1, 2, 3$ . Нумерация изменения скоростей и путей одинакова  $n, k$  (где  $n = 1, 2, \dots$  – номер линии и  $k$  – номер траектории, обозначенные в круглых, квадратных и фигурных скобках), и точек  $n, j$  (где  $j = 1, 2, \dots, k'$  – номер точки, обозначенные в таких же двойных скобках), через которые они приходят, начинается от оси  $T$  (схема на рис.4).

Начнем с *траекторий путей*: на линии “1” в точках  $((1.1))$  или  $((1.2))$  заканчиваются две траектории  $s_1^1 = \delta_V \delta_T'$  ( $\delta_T' = \delta_T/2$ ) (1.1) или  $s_2^1 = (\delta_V + \Delta_V) \delta_T'$  (1.2) с разными путями. На линии “2” в точках  $[[2.1]]$  или  $[[2.3]]$  заканчиваются две траектории



$s_1^2 = (3\delta_V + \Delta_V)\delta'_T$  [2.1] и  $s_4^2 = (3\delta_V + 3\Delta_V)\delta'_T$  [2.4] с разными путями, а в точке [[2.2]] – две траектории  $s_2^2 = (3\delta_V + 2\Delta_V)\delta'_T$  [2.2] и  $s_3^2 = (3\delta_V + 2\Delta_V)\delta'_T$  [2.3] с равными путями. На линии “3” в точках {{3.1}} или {{3.4}} заканчиваются две траектории  $s_1^3 = (6\delta_V + 3\Delta_V)\delta'_T$  { 3.1} и  $s_8^3 = (6\delta_V + 6\Delta_V)\delta'_T$  {3.8} с разными путями: в точке {{3.2}} – три траектории  $s_2^3 = (6\delta_V + 4\Delta_V)\delta'_T$  { 3.2},  $s_3^3 = (6\delta_V + 4\Delta_V)\delta'_T$  {3.3} и  $s_5^3 = (6\delta_V + 5\Delta_V)\delta'_T$  {3.5}, с одними равными путями и в точке {{3.3}} еще три траектории  $s_4^3 = (6\delta_V + 4\Delta_V)\delta'_T$  {3.4},  $s_6^3 = (6\delta_V + 5\Delta_V)\delta'_T$  {3.6} и  $s_7^3 = (6\delta_V + 5\Delta_V)\delta'_T$  { 3.7} с другими равными путями.

*Возможные траектории (1.1), [2.1] и {3.1} заканчиваются в точках ((1.1)), [[2.1]] и {{3.1}}}, а траектории (1.2), [2.4] и {3.8} – в точках ((1.2)), [[2.3]] и {{3.4}}: они определяют нижнюю и верхнюю границы процесса и на схеме рис.3 лежат ниже и выше линии раздела. Это же можно сказать о траекториях (1.1), [2.1], {3.2} и (1.2), [2.4], {3.7}, которые заканчиваются в точках ((1.1)), [[2.1]], {{3.2}}} и ((1.2)), [[2.3]], {{3.3}}} соответственно. Однако траектории (1.1), [2.2], {3.3} и (1.2), [2.2], {3.6} с начала «забрались на нейтральную территорию» (линию раздела, точка [[2.2]]), но «одумались и вернулись на свою» (точки {{3.2}}} и {{3.3}}} соответственно). Но этого не скажешь о траекториях (1.1), [2.2], {3.4} и (1.2), [2.2], {3.5}, которые заканчиваются в тех же точках: они прошли через точку [[2.2]], слились с траекториями (1.1), [2.2], {3.3} и (1.2), [2.2], {3.6}, и «отправились гулять по чужой территории» (точки {{3.3}}} и {{3.1}}} соответственно, выше и ниже линии раздела).*

На схеме рис.4 возможные траектории пути изображены прямыми стрелками, однако, по сути, они не отражают (замечание 4, стр.11) путь  $\delta_s$ , пройденный материальной точкой по той или иной траектории за промежуток времени  $\delta_T$ . Реально, при линейной зависимости  $v(q)$ , возможные траектории пути на каждом из промежутков времени  $\delta_T$  являются отрезками парабол  $\delta_s(t) = (\Delta_V + \delta_v) \cdot t^2/2$  ( $0 \leq t \leq \delta_T$ ) и изображать их следует параболками. Тогда будет видно, что возможные траектории, изображенные одинаковыми стрелками, разные, например: путь из точки (1,1) в точку (2,1) отличается от пути из точки (1,2) в точку (2,3), а путь из точки (1,1) в точку (2,3) отличается от пути из точки (1,2) в точку (2,4). Соответственно, отличаются и пути, пройденные точкой по разным возможным траекториям в точку с данным номером на линии  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Теперь о *возможных траекториях скоростей*. На линии “1” в точках ((1.1)) или ((1.2)) имеем разные скорости  $v_1^1 = \delta_v$  или  $v_2^1 = \delta_v + \Delta_V$ . На линии “2” имеем два равенства  $v_3^2 = v_1^2 = 2\delta_v + \Delta_V$  и  $v_4^2 = v_2^2 = 2(\delta_v + \Delta_V)$ , однако скорости  $v_1^2$  и  $v_3^2$  (или  $v_2^2$  и  $v_4^2$ ) начинаются в разных точках ((1.1)) и ((1.2)) соответственно, и заканчиваются в разных точках [[2.1]] и [[2.2]] (или [[2.2]] и [[2.3]]): т.е. имеем, как и для путей точки 4-е возможных траектории. Используя формулы {7} (п.1 прима 6 стр.32) легко показать, что на линии “3” будет 8 траекторий скорости.

Из анализа следует: схема определяет возможные траектории скорости.

п.3. При данном значении  $t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) имеем  $2^n$  *возможных траекторий*, которые начинаются в точке (0,0) и заканчиваются на линии  $s = t_n$ .

**{А.27.1}** Число *возможных траекторий* начинающихся в точке  $\{0, 0\}$  и заканчивающихся в точках  $\{n, k\}$  ( $n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n + 1$ ), на линии  $s = t_n$ , определяется *биномиальными коэффициентами*  $C_n^{k-1}$ .

При значениях  $k = 1$  и  $k = n + 1$  возможные траектории соответствуют нижней и верхней границе случайного процесса. В точках при значениях  $k = 2, 3, \dots, n$  возможные траектории  $C_n^{k-1}$  движения материальной точки имеют равную длину, т.е. равные изменения скорости или пути за время  $t_n - t_0$ .

Если на рис.3-3.а, *вместо линии раздела, ввести ось  $N$* , определяющую числа отборов  $n$  (она обозначена на рис.4 стр.34), то *элементарные события* в примерах 4-5 (стр.24, 29) будут принадлежать *линиям, перпендикулярным оси  $N$* . Конечно же, в этом случае можно говорить об условных скоростях и путях возможных траекторий, но это не влияет на суть случайного процесса. Они существуют не только в механике, но и в процессах, не связанных с механикой только называть придется по-другому: об этом – ближе к завершению данной статьи.

**{А.27.2}** Таким образом, *равенство в промежутки времени  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  ( $j = 2, 3, \dots, n - 1$ ) возможных траекторий движения материальной точки при линейной зависимости  $v = c \cdot f$  скорости от действующей силы* предопределяет *сходимость и пересечение* некоторых групп из *возможных траекторий в одной точке* на линиях  $s = t_n$  (или  $v = t_n$ ), а также их *слиянию на некоторых участках*.

Прямолинейное движение точки, которое взято за основу движения в начале примера 6 (предположение {I} стр.22), приводит к тому, что реальная траектория при любом данном значении времени  $t = t_n$  «накрывает» все траектории при значениях  $t < t_n$ .

**{А.27.3}** Однако, *равенство в промежутки времени  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  ( $j = 2, 3, \dots, n - 1$ ) возможных траекторий движения не определяет равенства изменения параметров движения* материальной точки за время  $t = t_n$ .

Равенство возможно для параметра (силы, ускорения или скорости), не зависящего от времени. В рассматриваемом примере – это сила, действующая на точку.

**Замечание 7.** При нелинейной зависимости скорости  $v = c \cdot f(t)$  от времени  $t$  (т.е. силы  $f = f(q)$  от условия  $Q$ ) «картинка» на рис.4 остается без изменений. Проще всего это можно проверить при степенной зависимости  $v = c \cdot f^m$  ( $m \geq 2$ ). В этом случае формулы {7} (стр.32) следует записать в виде  $v_1^j = j\delta_V^j + (j-1)(\Delta_V^j)$  и  $v_2^j = j(\delta_V^j + \Delta_V^j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), где  $\delta_V^j = c \cdot \delta_F^j \cdot \delta_T$ ,  $\Delta_V^j = c \cdot \Delta_F^j \cdot \delta_T$ ,  $\delta_F^j = \Delta - f_{1,j}^m \ll \Delta_F^j$ ,  $\Delta_F^j = f_{2,j}^m - f_{1,j}^m$  и  $\Delta = \delta_F^j + \Delta_F^j = b/n$ .

**п.4.** Вероятность *суммы* всех *элементарных событий*, принадлежащих *любой данной линии  $s = t_n$*  равна единице (положение {А.18.1}-{А.18.2}, стр.27). Т.е., проекции их *сумм* на ось  $T$  (или ось  $N$ ) является действительным числом (временем  $t_n$ ), не имеющим *ни какого отношения к случайным событиям* (и к случайным величинам тоже).

*Распределение* вероятностей имеет место только на линиях  $s = t_n$ . Следовательно, при данном значении  $j=1,2,\dots,n$  *вероятность* появления данной *возможной траектории* определяется *вероятностью*  $P(b_v^n) \cdot M_v^n / M_o^n$  или  $P(r_v^n) \cdot M_v^n / M_o^n$  ( $v = 1, 2, \dots, 2^n$ ) *элементарного события* (или значений вероятностной функции), которым соответствуют точки на линиях  $s = t_n$ .

*Вычисление* вероятностей появления возможных абстрактных траекторий будет показано в примере 7 (стр.36). Несмотря на то, что некоторые возможные траектории имеют равную длину, вероятность их появления различается, в силу принятого различия вероятностей элементарных событий  $b_v^n, r_v^n$  (примеры 4 и 5).

Теперь остановимся на *случайном процессе*, который рассматривается в теории вероятностей и непосредственно связан с задачами в примерах 1 и 6 (вообще говоря, со всеми рассмотренными примерами, ибо мы их, по сути, уже связали между собой): *случайное блуждание* частицы по прямой линии.

Мы начали построение случайных процессов на основе механики: анализируя движение частицы (материальной точки) при случайных изменениях скорости. Этот прием не нов и придуман Б.В. Гнеденко, «... которому пришла удачная мысль связать ее с геометрической теорией путей» [6,89], задолго до того, как автор сего труда начал заниматься теорией вероятностей.

Однако в принятой теории вероятностей при *геометрическом* изображении *возможных траекторий* используются только их *отдельные* фрагменты (например: рис.13-14 [1,105], рис.1,2,5 [6,87,90,109]), но нам «не попалось» изображения *развития процесса*, т.е. *с начальной точки*, как это выполнено в примерах 1, 4-6. В работах, написанных в основном «высоким математическим штилем» (например, [16; 18; 20]) – *одна алгебра* и нет хотя бы *какого-либо намека на геометрию*: соответственно, нет *никаких* изображений – даже отдельных фрагментов<sup>19</sup>.

Продолжая *механическую интерпретацию процесса*, введем *предположение*: частица движется с постоянной скоростью  $v = const$ . В этом случае, в отличие от примеров 1, 6, схема построения процесса является искусственной<sup>20</sup> и далека от реальности<sup>21</sup>, но теоретически «имеет право

<sup>19</sup>Почему так, по-видимому, надо спрашивать у авторов. Мы пояснить не в состоянии, но полагаем: помешал именно «высокий математический штиль»

<sup>20</sup>Искусственность схемы состоит в изменении направления скорости движения скачком на противоположное направление

<sup>21</sup>Для приближения к реальному процессу следовало бы рассмотреть движение частицы на плоскости  $XOY$ , ограниченное по одной из осей, например  $Y$ , двумя отражающими стенками, которые имеют некоторые случайные отклонения от прямых линий. Если ограничить движение частицы двумя стенками и по оси  $X$ , то получим плоский аналог движения частицы в замкнутом объеме

на существование<sup>22</sup>».

Вообще говоря, первоначально она появилась как результат изучения *реальных физических* задач: загрузки телефонных линий, броуновского движения, теории диффузии [1,103]. Кроме того, она имеет определенные особенности, которые не присущи процессам, рассмотренным в примерах 1, 6 (мы намеренно осуществим построение вне связи с примером 6). Построение процесса проводится на основе примера 4 (или 5), используя схему на рис.3 (стр.25) и принятые в примере обозначения.

**Пример 7.** Введем ортогональные координаты  $TOS$  (рис.5), обозначим положительное направление движения и положим: частица в точке  $s = 0$  в момент времени  $t = 0$  получает одинаковые удары с вероятностью  $P(b_1^0)$  элементарного события  $b_1^0$  в положительном или с вероятностью  $P(r_1^0)$  элементарного события  $r_1^0$  в отрицательном направлении оси  $S$ . Через равные промежутки времени  $\delta_T$  на пути частицы (в том числе – в точке  $s = 0$ ) могут появиться или не появиться отражающие экраны («толчки»), соответственно,

с вероятностями<sup>23</sup>  $P(r_v^n)$  или  $P(b_v^n)$  ( $v = 1, 2, \dots, 2^n$ ) при движении частицы в положительном и с вероятностями  $P(b_v^n)$  или  $P(r_v^n)$  – в отрицательном направлении, при появлении которых движение изменяется на противоположное направление.

п.1. В примерах 1 и 6 были приведены *условные* схемы (рис.2, 4 стр.10, 32) *развития случайных процессов*: глядя на которые, можно решить, что *каждая возможная траектория* заканчивается на прямой  $s = t_n$  линии в *своей точке*. *Предположение о постоянстве скорости* вносит «свои коррективы» в рассматриваемый процесс.

1. Во-первых, оно приводит к *смещению по оси  $S$  на одинаковое расстояние  $\Delta_S$* . Оно определяется *проекцией возможной* (напоминание: абстрактной) *траектории* частицы  $\delta_S = |v \cdot \delta_T|$  на ось  $S$  в *любой промежуток времени  $\delta_T$  в положительном или отрицательном направлении*. В соответствии с условием задачи, реальная траектория частицы является прямолинейной. Горизонтальные и вертикальные сплошные тонкие линии на рисунке соответствуют значениям времени  $t_n$  и координатам  $S_k = \pm \Delta_S \cdot k$  ( $k=0,1,\dots,n$ )  $\{*\}$ . Смещение  $\Delta_S$  – проекция расстояния  $\delta_S$  на ось  $S$  в условных единицах. *Расстояния  $\delta_S$ , пройденные частицей за промежутки времени  $\delta_T$ , обозначены стрелками, совпадающими с диагоналями ячеек: они изображают некоторые из возможных абстрактных траекторий*.

2. Во-вторых, *возможный путь  $s$  пройденный частицей за время движения по реальной прямолинейной траектории* из точки А (0,0) в точки с координатами  $\{t = 0, S_k\}$  (так как *путь – величина положительная*),

<sup>22</sup>При некоторых упрощающих предположениях

<sup>23</sup>Т.е. с вероятностями элементарных событий  $r_v^n$  и  $b_v^n$  в примерах 4 или 5

определяется суммой всех смещений  $\Delta_S$  частицы в положительном и отрицательном направлении. Все смещения одинаковы, а число смещений равно числу моментов времени  $t_n$ , следовательно, все пути, пройденные частицей за время  $t_n$  по любой из возможных (абстрактных) траекторий одинаковы и равны  $s_k^n = \Delta_S \cdot n \quad \{**\}$ .

Однако, возможные (абстрактные) траектории (следовательно, и пути), заканчивающиеся в данной точке  $(t_n, S_k)$  на линии  $s = t_n$ , содержат разные числа  $n_1$  положительных  $+\Delta_S$  и  $n_2$  отрицательных  $-\Delta_S$  ( $n_1 + n_2 = n$ ) смещений. Например. Возможная траектория из точки (0,0) в точку (8,8) состоит только из положительных смещений, в точку (8,7) – из 7 положительных и одного отрицательного смещения, а в точку (8,0) – из 4-х положительных и 4-х отрицательных смещений. Отсюда следует очевидное утверждение:

**{A.28}** Пути, пройденные частицей в данную точку с координатами  $\{t = 0, S_k = \pm \Delta_S \cdot k\}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), отличаются от путей, пройденных частицей в любую другую точку  $\{t_n, S_j = \pm \Delta_S \cdot j\}$  на линии  $s = t_n$ , только числом  $n_1$  положительных  $+\Delta_S$  и  $n_2$  отрицательных  $-\Delta_S$  ( $n_1 + n_2 = n$ ) смещений.

**3. В-трепых** к зеркальной симметрии возможных (абстрактных) траекторий (следовательно, и путей) частицы относительно оси  $T$ . Рассмотрим возможные траектории из точки А с координатами (0,0), которые заканчиваются в точках В (10,6), или В' (10,-6), или А' (10,0) (по принятой в теории случайных блужданий терминологии – возвращение в начало пути).

Длинные сплошные утолщенные стрелки обозначают верхнюю и нижнюю границы процесса: ни один экран при движении частицы не появился с вероятностью  $P(b_v^n)$  или  $P(r_v^n)$  соответственно. Очевидно (замечания к положению {A.4}, стр.14), что все другие возможные траектории находятся только внутри границ.

Точки с координатами, (8,8) и (2,-2) (или (2,2) и (8,-8)) являются последними точками на верхней и нижней границе, из которых возможная траектория частицы может закончиться в точке В или В' соответственно: они обозначены укороченной сплошной и длинной штриховой утолщенной стрелками. Эти траектории, совместно с границами процесса, ограничивают область возможных траекторий, которые заканчиваются в точке В или В'.

Точки с координатами, (5,5) и (-5,-5) являются последними точками на верхней и нижней границе, из которых возможная траектория частицы заканчивается в точке А' (10,0): они обозначены длинными штрихпунктирными стрелками. Эти траектории, совместно с границами процесса, ограничивают область возможных траекторий, которые заканчиваются в точке А'.

Аналогично можно построить границы возможных траекторий из точки А в точки с координатами (10,8), (10,4), (10,2), (10,-2), (10,-4) и (10,-8). Очевидно, что через точки (10,10) и (10,-10) проходит только по одной возможной траектории, определяемые верхней и нижней границами процесса. Все возможные траектории из точки А в точки с координатами  $S_n = -\Delta_S \cdot n$  (в том числе – в точки с координатой  $s = 0$ ) симметричны<sup>24</sup> относительно оси  $T$  возможным траекториям в точки с координатами  $S_n = +\Delta_S \cdot n$ .

**3. В-четыреых.** Кроме («общей») зеркальной симметрии относительно

<sup>24</sup>Принцип отражения [6,90]

оси  $T$ , рассматривается также («местная») *зеркальная симметрия* относительно *произвольной* прямой линии  $t = S_n = \pm \Delta_S \cdot n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Относительно линии  $t = S_n$  *симметричны только продолжения* возможных траекторий из точек  $(t_n, S_n)$ , которые принадлежат *границам* процесса. Например, *продолжение траектории* (рис.5 стр.36), проходящее через точки (6,6), (8,4) и (10,6) *симметрично продолжению*, проходящему через точки (6,6), (8,8) и (10,6).

4. *В-пятых*, к пересечению *возможных траекторий* между собой и их наложению друг на друга. Например. В точку с координатами (9,7), кроме траектории, приходящего через точку (8,8), приводят возможные траектории, ответвляющиеся от верхней границы в точках (0,0), (1,1), (2,2), ... (7,7), которые налагаются друг на друга. Эти точки лежат на отрезке прямой, который начинается в точке (1,-1), образован последовательностью элементарных событий  $r_1^0, b_2^1, b_4^2, b_8^3, b_{16}^4, b_{32}^5$  и определяет движение частицы в положительном направлении. На схеме рис.3 (стр.25) она соответствует ветви, образованной элементарными событиями, противоположными событиям, образующих нижнюю границу процесса (последовательность  $r_1^0, r_2^1, r_4^2, r_8^3, r_{16}^4, r_{32}^5$ ). Рассматривая возможные траектории, которые приводят в точку (9,-7), получим, что последовательность  $b_1^0, r_1^1, r_2^2, r_3^3, r_4^4, r_5^5$  начинается в точке (1,1), определяет движение частицы в отрицательном направлении и соответствует ветви на схеме рис.3, образованной элементарными событиями, противоположными событиям, образующих верхнюю границу процесса (последовательность  $b_1^0, b_1^1, b_2^2, b_3^3, b_4^4, b_5^5$ ). Число траекторий, наложенных друг на друга, приводящих в точку с координатами (10, 6), увеличится значительно. Аналогично, ветвям  $r_1^0, r_2^1, b_3^2, r_6^3, r_{12}^4, r_{24}^5$  или  $b_1^0, b_1^1, r_2^2, b_3^3, b_5^4, b_9^5$  на схеме рис.3 соответствуют последовательности  $r_1^0, r_2^1, b_3^2, b_6^3, b_{12}^4, b_{24}^5$  или  $b_1^0, b_1^1, r_2^2, r_3^3, r_5^4, r_9^5$  на схеме рис.4, (стр.32) которые начинаются в точках (2,-2) или (2,2) соответственно, определяют или отрицательное направление движение частицы и возможные траектории, полученные ответвлением от точек (1,-1), (2,0), (3,1), ..., (9,7) или (1,1), (2,0), (3,-1), ..., (9,-7), которые заканчиваются в точках (10,6) или (10,-6) соответственно.

Таким образом, можно сказать, что формулы (1) (п.2 примера 3, стр.24, и подобные им) определяют вероятности того, что на *всех возможных траекториях*, которые *начинаются* в точке А (0,0) и *заканчиваются* на линии  $s = t_n$ , частица с вероятностью  $P(b^n)$  двигалась в положительном или с вероятностью  $P(r^n)$  – в отрицательном направлении. *Есть ли в этом какой-то смысл?* Мы, в общем-то, его не видим.

5. *В-шестых*, к *периодичности возможных* (абстрактных) *траекторий* движения частицы по *оси T*. Минимальный период находится между двумя ближайшими линиями  $t_{2n}$  и  $t_{2(n+1)}$  с четными номерами. Из рисунка легко видно, что при увеличении числа  $n$ , появляются периоды, содержащие 2, 3 и более минимальных периодов. Каждый из периодов характеризуется максимальным или минимальным смещением по *оси S*, что следует из симметрии процесса относительно *оси T*: с увеличением периода оно увеличивается. Некоторые рассуждения о максимумах и минимумах будут при рассмотрении случайных флуктуаций.

Еще один результат *периодичности*: при нечетных значениях  $n = 1, 3, 5, \dots$ ,

траектории проходят только через точки с нечетными номерами, а при четных значениях  $n = 0, 2, 4, \dots$  – с четными номерами значений смещения по оси  $S$ .

*Число точек  $k$ , в которых могут закончиться возможные траектории частицы на линии  $s = t_n$  равно  $k = n + 1$ . Как следствие периодичности, при нечетных значениях  $n = 1, 3, 5, \dots$  они заканчиваются в точках  $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(2n - 1)$ , а при четных значениях  $n = 0, 2, 4, \dots$  – в точках  $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2n$ .*

*Число возможных (абстрактных) траекторий из точки  $A$  в точки  $S_n = \pm \Delta \cdot k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), заканчивающихся на линии  $s = c \cdot t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), определяется биномиальными коэффициентами  $C_n^k$  (значения  $k = n$  и  $k = -n$  определяют нижнюю и верхнюю границы процесса).*

**{А.29}** *Проекция точек  $k = n + 1$  ( $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(2n - 1)$  при нечетных и  $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2n$  при четных значениях  $n$ ) возможных (абстрактных) траекторий на ось  $S$  (т.е. на реальную прямолинейную траекторию) определяет точки, в которых может закончиться путь при движении частицы по одной из возможных траекторий, а биномиальные коэффициенты  $C_n^k$  – число возможных траекторий, путь по которым закончится в точке с данным номером  $k$ .*

п.2. Можно было бы продолжить дальнейшее построение процесса, увеличивая число промежутков времени  $\delta_T$ : традиционный, но, вообще говоря, «банальный» подход, принятый в существующей теории вероятностей. Поэтому применим подход, использованный при построении процесса в примере 1 (положение {А.5}, стр.14) на ограниченном отрезке  $0 \leq t \leq t_b$ .

**1-й вариант.** Разделим промежутки времени  $\delta_T$  и смещения  $\Delta_S$  пополам. В этом случае граничные траектории сохраняют тот же наклон, расстояния между элементарными событиями на каждой из линий  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) также уменьшаются в 2 раза, а число возможных траекторий увеличивается в  $2^n$  раз. **2-й вариант.** Однако можно разделить пополам только промежутки времени  $\delta_T$ : число траекторий тоже станет равным  $2^{2n}$ , но изменится наклон граничных линий (тонкие сплошные стрелки другого типа на рис.5, стр.36) случайного процесса.

Неизменность наклона границ процесса в 1-м варианте означает, что скорость  $v$  частицы не изменяется, а его изменение во 2-м – увеличение скорости  $v_1 > v$ . Т.е. 2-й вариант просто иллюстрирует влияние скорости частицы на случайный процесс (в данном примере – на число траекторий), что, вообще-то, следует из примера 1. Далее рассмотрим только 1-й вариант.

При продолжении процесса деления промежутков времени  $\delta_T$  и смещений  $\Delta_S$  на 3,4 и более частей, расстояния между линиями  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и элементарными событиями, принадлежащих этим линиям уменьшаются в 3,4 и более раз, а число траекторий – увеличивается и равно  $2^{3n}, 2^{4n}, \dots$ .

При неограниченном увеличении числа делений, расстояния между линиями  $s = t_n$  и элементарными событиями, принадлежащих этим линиям стремятся к нулю, а число элементарных событий на каждой из линий и число возможных траекторий – к бесконечным (несчетным) множествам в области, определяемой границами процесса. Соответственно, вероятности элементарных событий на любой из линий  $s = t_1$  и  $s' = t_2$ , ограничивающих произвольный конечный отрезок  $t_2 - t_1$  ( $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_b$ )

сходятся к нулю (приложение II [19,50]).

{A.30} Это определяет предпосылки *возможного предельного перехода* от процесса с *дискретным* временем или/и *дискретным* распределением к *случайному процессу с непрерывным* временем или/и *непрерывным* распределением.

Т.е. положение {A.5} (стр.14) обеспечивает не только правильное построение случайного процесса с дискретным временем, но и предельный переход к непрерывному процессу.

п.3. Выше сказано (положение {A.24}, стр.31), что понятие *произведения неприменимо* к *элементарным* событиям, образующих *возможные траектории*. К ним могло бы подойти понятие *суммы* событий, но здесь также есть серьезное «препятствие». Обратим внимание на то, что *элементарные* события  $r_v^n$  и  $b_v^n$ , которые являются основой для построения *возможные траектории путей*, расположены, как и в примере 1 (положение {A.8}, стр.14), на линиях  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Замечание 8. Если на рис.3-3.а, вместо линии раздела ввести *ось N*, определяющую *числа отборов n* (она показана на рис.4-5 стр.32, 36), то *элементарные* события в примере 4 будут *принадлежать линиям, перпендикулярным этой оси*.

Вероятность суммы всех элементарных событий, принадлежащих любой данной линии  $s = t_n$  равна единице (положение {A.1.1}, стр.10). Т.е., проекции их сумм на ось  $T$  является действительным числом (временем  $t_n$ ), не имеющим ни какого отношения к случайным событиям (и к случайным величинам тоже).

С другой стороны, в общем случае (примеры 1, 4, стр.9, 24) на каждой линии  $s = t_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) каждая из возможных траекторий начинается в точке на линии  $s = t_n$  и заканчивается в точке, на линии  $s = t_{n+1}$ , которой соответствует только одно элементарное событие: это же следует из схем на рис. 2-3 (стр.10, 25). Соответственно, вероятность появления возможной траектории в этой точке зависит от числа отборов и определяется вероятностью появления этого элементарного события на данной линии  $s = t_n$  которая определяется значением  $P(b_v^n) \cdot M_v^n / M_o^n$  или  $P(r_v^n) \cdot M_v^n / M_o^n$  ( $v = 1, 2, \dots, 2^n$ ) ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) (положение {A.1.1}, стр.10).

W.1. Следовательно, *вероятность* появления данной *возможной траектории* определяется *вероятностью*  $P(b_v^j) \cdot M_v^j / M_o^j$  или  $P(r_v^j) \cdot M_v^j / M_o^j$  ( $v = 1, 2, \dots, 2^j$ ) ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) (4) (положение {A.18.2}, стр.27) *элементарного* события, которым она определяется на линии  $s = t_n$ . *Распределения вероятностей на оси T принципиально не существует.*

{A.31} На основе вывода W.1 и учитывая, что *возможные* (абстрактные) *траектории* являются *несовместимыми* событиями (положения A.19 и A.20, стр.25), их можно, вообще говоря, называть *элементарными* событиями *случайного процесса*.

*Не потерять бы при этом связь возможных траекторий с изменением параметров движения материальной точки!*



п.4. Все возможные траектории, заканчивающиеся на линии  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в точках  $S_j = \pm \Delta_S \cdot j$  (где  $j = 1, 3, \dots, n$  при нечетном и  $j = 0, 2, \dots, n/2$  при четном значении  $n$ ) имеют равные пути  $s_k^n$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ), однако вероятности их появления в общем случае различны (примеры 4-5, стр.21, 25, положение {A.18.2}). Запишем выражения вероятностей появления возможных траекторий (ветвей), которые заканчиваются в точках на линиях  $n=1-3$ . Имеем: 1)  $\{P(b_1^0), P(r_1^0)\}$ ; 2)  $P(b_1^1), \{P(b_1^1) + P(r_2^1), \{P(r_2^1)\}$ ; 3)  $\{P(b_1^2), \{P(r_1^2) + P(b_2^2) + P(b_3^2)\}, P(r_2^2) + P(r_3^2) + P(b_4^2)$  4)  $\{P(r_4^2)\}$  {8}, Вероятности на линиях умножаются (положение A.18.2) на отношение  $M_v^j/M_o^j$ . Можно продолжить и получить рекуррентную формулу, но мы этим заниматься не будем. Тем не менее, отметим следующее:

{A.32} Вероятности  $P(b_v^j) \cdot M_v^j/M_o^j$  или  $P(r_v^j) \cdot M_v^j/M_o^j$  ( $v = 1, 2, \dots, 2^j$ ) ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) означают, что частица двигалась по одной из возможных траекторий от точки на линии  $s = t_{j-1}$  к данной точке на линии  $s = t_j$  в положительном или отрицательном направлении.

Вообще говоря, это напоминание об основном предположении при постанове задачи (стр.35), чтобы «не забывалось» в последующем изложении.

Нам (надеюсь, что и Читателям тоже) более интересно сравнение результатов проведенных исследований, с результатами, имеющимися в существующей теории, но в ней случайные блуждания частицы рассматриваются при неизменных  $P(b_v^n) = P(b) = p$  и  $P(r_v^n) = P(r) = 1 - p = q$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) {9} вероятностях (частный случай при значениях  $c = d = 0$ , обозначенный в замечании к положению {A.18.2} формулы (5) стр.27).

В этом случае вероятности появления всех возможных траекторий из точки А в точки  $(t_n, 0)$ , что возможно только при четных значениях  $n$ , (возвращение в начало пути) равны между собой. Для данного значения  $n$ , вероятности появления возможных траекторий из точки А (0,0) в точки В, не принадлежащих оси  $T$ , равны между собой. Вероятности появления возможных траекторий из точки А (0,0) в точки В', симметричных точкам В относительно оси  $T$ , также равны между собой, но вероятности их появления не равны вероятностям появления траекторий из точки А в точку В.

Для  $n = 1, 2, \dots$  получим:  $C_n^0 q/2^{n-1}$ ;  $(C_{n-1}^j q + C_{n-1}^{j-1} p)/2^{n-1}$  при  $(1 \leq j \leq n/2)$  и  $(C_{n-1}^{j-1} q + C_{n-1}^j p)/2^{n-1}$  при  $(n/2 < j \leq n-1)$ ;  $C_n^n p/2^{n-1}$  (6).

В формулах (6) «участвует» опыт 2-мя элементарными (сложными – в классической и не понятно какими – в аксиоматической теории) событиями, имеющих разные вероятности, есть биномиальные коэффициенты, нет только одного – биномиального распределения в существующей трактовке: в формулах произведения вероятностей заменили их суммы. Не удивительно ли? Но об этом немного погодя.

Учитывая положение {A.29} (стр.39) и вывод W.1 (стр.40), можно утверждать:

{A.33.1} Формулы (6) определяют *вероятность* события, *заключающегося* в том, что *при движении* частицы *по оси S* в точке  $(0, S_k^1 = \Delta_S \cdot k)$  ( $k = 1, 3, \dots, 2n - 1$  при нечетных и  $k = 0, 2, \dots, 2n$  при четных значениях  $n$ ) *на оси S могут закончиться*  $C_n^k$  *путей* (с учетом отличия путей, положение {A.28}, стр.37) *из общего числа*  $2^n$  *возможных*, которые могла пройти частица за время  $t^n$ .

{A.33.2} Формулы (6) определяют *вероятность того*, что в точке  $(t_n, S_k^1 = \Delta_S \cdot k)$  ( $k = 1, 3, \dots, 2n - 1$  при нечетных и  $k = 0, 2, \dots, 2n$  при четных значениях  $n$ ) *на линии*  $s = t_n$  *появится*  $C_n^k$  *возможных* (абстрактных) *траекторий из общего числа*  $2^n$  *возможных*.

Формулировки, в общем-то, равноправны: в 1-й точно говорится о реальном положении вещей, а 2-я формулировка не очень корректна, но несколько короче.

п.5. Пусть на некоторых расстояниях  $S_k^1 = \Delta_S \cdot k$  и  $S_k^2 = -\Delta_S \cdot k$  расположены стенки (экраны), которые могут отражать (или/и поглощать) частицу (горизонтальные утолщенные штриховые линии на рис.5). Здесь отметим следующее: 1. Расстояния могут быть разными, но очевидно, что стенки должны находиться по разные стороны от оси  $T$ . 2. Если вместо стенок ввести некоторые ограничивающие условия на развитие процесса, то по формулам (6) определяются вероятности выхода за назначенные границы – задача, которая решается в теории флуктуаций [6,89].

Обратим внимание на другое важное обстоятельство. «Вспомним» о появлении «экранов» на пути частицы, что предполагалось при постановке задачи (стр.35): именно их *работа* определяет ее *возможные траектории*.

Например, траектория из точки (0,0) в точку (2,2) возможна только при условии: в точке (0,0) движение началось «в положительном направлении, и не появился экран в точке (1,1)», а в точку (2,-2) – если в точке (0,0) движение началось «в отрицательном направлении, и не появился экран в точке (1,-1)». Соответственно, траектория из точки (0,0) в точку (2,0) возможна только при условии: в точке (0,0) движение началось «в положительном направлении, и появился экран в точке (1,1)», либо в точке (0,0) – «в отрицательном направлении, и появился экран в точке (1,-1)». Т.е. для любой из этих траекторий определяется произведением элементарных  $b_1^0 \cdot b_1^1$ ,  $r_1^0 \cdot r_1^1$  и  $b_1^0 \cdot r_1^1$ ,  $r_1^0 \cdot b_1^1$  соответственно. После преобразования получим  $p^2$ ,  $2p \cdot q$ ,  $q^2$ , т.е. члены биномиального распределения (вывод подробно дан в [10,82]) при значении  $n = 2$ .

{A.34.1} Однако *вероятность совместной «работы экранов»*, определяющих *движение* частицы, *не имеет отношения к ее возможным траекториям: одна частица не может быть в двух точках одновременно* (положение {A.1.3}, стр.11).

Отметим: в существующей теории «работа экранов» определяется как последовательность независимых испытаний.

{A.34.2} Вероятность появления *возможных траекторий случайных блужданий* одной частицы *определяется именно формулами (6), распределение вероятностей* которых также является *биномиальным*.

Оно отличается от существующего биномиального распределения, о чем разговор будет далее (стр.57) и, в частности, будет показано, когда получается существующая трактовка.

В общем, *процессы* в примерах 6 и 7 очень схожи: легко видеть, что некоторые из *возможных траекторий сходятся* в точках на линиях  $s = t_n$ , *пересекаются друг с другом и сливаются между собой* на некоторых участках, вероятности появления *возможных траекторий при равных вероятностях элементарных событий одинаковы*.

**Замечание 9.** При построении случайного процесса в примере 6 (стр.28) полагалось: усилие является *дискретной* случайной величиной  $F$  с *вероятностной функцией*  $p_F(f_k^n) = p_k^n$  ( $k=1,2$ ) на каждой из линий  $s = t_n$  (или  $v = t_n$ ). Значения  $p_k^n$  *вероятностной функции* определяются вероятностями двух *элементарных событий*  $b_v^n, r_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ). Показано, что число *возможных абстрактных траекторий* заканчивающихся в точках  $(n, k)$ , на линии  $s = t_n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) (или  $v = t_n$ ), определяется *биномиальными коэффициентами*  $C_n^j$  ( $j=1,2,\dots,n-1$ ). Следовательно, все рассуждения в п.3 примера 7 (стр.35-36) справедливы и для примера 6. Соответственно, вывод W.1 (стр.35) и положения А.31 (стр.36), А.33.1-А.34.2 (стр.37) также остаются в силе. Т.е. вероятность появления  $C_n^k$  *возможных абстрактных траекторий* в точке  $(n, k)$  определяется формулами (6).

Это вполне естественно: в примере 7, частица в *равные промежутки времени* получает «толчки», *изменяющие направление ее движения на противоположное*, однако, если она будет получать «толчки» только в *направление ее движения*, так, чтобы *скорость увеличивалась пропорционально* некоторому числу, то получим *случайный процесс*, приведенный в примере 6. Мы использовали *линейное изменение скорости* потому, что оно значительно ближе к *реальному процессу*, чем неизвестно, как и откуда появляющиеся «толчки» («экраны») в примере 7. Справедливости ради отметим, что в *реальных процессах при движении* материальных частиц или тел, возможны *удары* различного рода (в том числе, столкновение друг с другом), которые *изменяют их движение*.

Построение *случайных процессов*, выполненное на примере *опыта с 2-мя элементарными событиями*, можно *распространить на опыт с числом  $K$  элементарных событий*<sup>25</sup> (сноска 16, стр.25). Такое построение выполнить необходимо для правильного понимания случайных процессов, происходящих при движении большого числа частиц (например, газа или жидкости в трубопроводе или замкнутом объеме (сноска 21, стр.35)).

<sup>25</sup>Это, конечно, трудоемко и «мучительно», ибо придется писать весьма громоздкие выражения (и «картинки» сложнее), но не так сложно, по крайней не так, как кажется на 1-й взгляд

## 4. Случайные блуждания частицы: существующая теория и результаты проведенных исследований

Мы выполнили построение процесса в примере 7 вне связи с примером 6 намеренно для того, чтобы можно было *достаточно подробно* провести сравнение результатов *проведенных исследований* с существующей *теорией случайных блужданий* частицы. Начнем с цитат:

8. «С формальной точки зрения мы будем иметь дело с упорядоченными конечными множествами плюс единиц и минус единиц. Рассмотрим  $n = p + q$  символов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , каждый из которых означает  $+1$  или  $-1$ : предположим, что имеется  $p$  плюс единиц и  $q$  минус единиц. Частная сумма  $s_k = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k$  представляет собой разность между числом плюсов и минусов, находящихся на первых  $k$  местах. Тогда  $s_k - s_{k-1} = \varepsilon_k$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_n = p - q$  (1.1), где  $k = 1, 2, \dots, n$ . . . . Определение. Пусть  $n > 0$  и  $x$  целые числа. Путь  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  из начала координат в точку  $(n, x)$  представляет собой ломанную, вершины которой имеют абсциссы  $0, 1, \dots, n$  и ординаты  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , удовлетворяющие (1.1) с  $s_n = x$ . Мы будем называть  $n$  длиной пути. Существует  $2^n$  путей длины  $n$ . Если среди  $\varepsilon_k$  имеется  $p$  положительных и  $q$  отрицательных, то  $n = p + q$ ,  $x = p - q$  (1.2). Путь из начала координат в произвольную точку  $(n, x)$  существует только тогда, когда  $n$  и  $x$  удовлетворяют (1. 2). В этом случае  $p$  мест для положительных могут быть выбраны из  $n = p + q$  имеющихся мест  $N_{n,x} = C_{n+p}^p = C_{n+p}^q$  (1.3) различными способами» [6,86].

9. «Каждый путь длины  $n$  можно интерпретировать как результат случайного блуждания; имеется  $2^n$  таких путей, и мы приписываем вероятность  $2^{-n}$  каждому» [6,92].

10. «Представим себе, что в определенные моменты времени частица, находящаяся в начальный момент в положении  $x = 0$ , испытывает случайные толчки, в результате которых она получает смещение вправо или влево на единицу масштаба. . . . В результате толчков частица переместится на расстояние  $\mu$ . Ясно, что в этой задаче мы имеем дело со схемой Бернулли в чистом виде. Отсюда следует, что при каждом  $n$  и  $m$  мы можем вычислить вероятность того, что : а именно  $P\{\mu = m\} = C_{(n+m)/2}^n$ , если  $-n \leq m \leq n$  и 0, если  $|m| > n$ . . . . Пусть в начальный момент имелось большое число частиц, имеющих координату  $x = 0$ . Все частицы независимо друг от друга начинают перемещаться по прямой под влиянием случайных толчков. Тогда после  $n$  толчков доля частиц, переместившихся на расстояние  $m$ , дается формулой<sup>26</sup> (1)» [1,103]. 11. «Эти условия можно записать в виде  $P(\xi_{x+1} = l + 1 | \xi_x = l, C_t = p)$ ,  $P(\xi_{x-1} = l - 1 | \xi_x = l, C_t = 1 - p)$  при любых значениях  $l = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $C_t$  – любое событие, относящееся к движению точки до момента  $t$ » [16,49].

От «множества “+1” и “-1”» (цитата 8) мы «благополучно избавились» точно также как и от «конечного множества целых чисел» при рассмотрении дискретных случайных величин. «Множества “+1” и “-1”» только «затуманивают» понимание *случайного процесса* и не способствуют его *правильному* построению: их можно начинать писать после анализа его построения. Сначала разберемся с *возможными реальными и абстрактными траекториями*: эти понятия влияют на все рассуждения при построении случайных процессов. Опять обратимся к механике.

<sup>26</sup>Формула (1) – нормальное распределение

#### 4.1. О реальной траектории, пути пройденной частицей и некоторых других понятиях механики

Замечания 10. 1. *Реальная траектория* в механике – это линия, которую описывает движущаяся материальная точка (частица) или центр тяжести тела в пространстве.

Длина реальной траектории равна длине кривой  $l_{H \leftrightarrow K}$  от начальной точки “Н” до конечной точки “К” движения.

Положительное направление движения точки по реальной траектории – движение при удалении материальной точки от начальной точки “Н”.

Положительное перемещение – расстояние  $S_{V1 \rightarrow V2}$  ( $l_{H \rightarrow V1} < l_{H \rightarrow V2} < l_{H \rightarrow K}$ ) по кривой при движении материальной точки в положительном направлении от некоторой точки “V1” до некоторой точки “V2”: отрицательное перемещение – расстояние  $S_{V2 \rightarrow V1}$ , пройденное материальной точкой в отрицательном направлении (т.е. от точки “V2” до точки “V1”).

Путь является суммой всех перемещений материальной точки без учета знака перемещения при ее движении от начальной “Н” до конечной “К” точки траектории.

Например, движение пешехода, автомобиля, поезда или полет снаряда, самолета, ракеты и т.п. Траектория движения автомобиля – дорога со всеми ее изгибами, поворотами в том числе, – в обратном направлении, спусками, подъемами, различного вида неровностями и т.п., а путь – расстояние, пройденное автомобилем по этой дороге в любом (положительном, либо отрицательном) направлении, которое определяет длину траектории движения автомобиля. Существенную роль на движение по дороге играют интенсивность движения и погодные условия. Траектория снаряда – эллипс (в координатах  $X, Z$ ), «испорченный» сопротивлением воздуха, а длина этой траектории и есть путь снаряда. Если траекторию снаряда можно считать плоской кривой (изображается в координатах  $X, Z$ ), то траектория автомобиля – пространственная кривая (изображается в координатах  $X, Y, Z$ ).

Их основное отличие: А. Траектория автомобиля «жестко» задана и ее характеристики, в том числе – длина, не изменяются, а движение автомобиля по дороге характеризуется возможным абстрактными траекториями. В. Траектория снаряда определяется исходными данными (начальная скорость, наклон ствола к горизонту и т.п.) и состоянием атмосферы (например, боковой ветер приводит к отличию траектории от плоской кривой). При каждом выстреле из данного орудия и данным типом снаряда определяется одна из множества возможных реальных траекторий полета данного типа снарядов.

2. При известной зависимости одного из параметров (например, пути  $s = s(t)$ ) от времени, можно вычислить путь (а также изменение других параметров: скорости, ускорения и силы), пройденный материальной точкой при ее движении, подчеркиваем, по реальной траектории за любой отрезок времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Следовательно, хотя зависимости параметров движения материальной точки от времени и связаны с реальной траекторией но, подчеркиваем, – это абстрактные математические линии, которые мы называли возможными абстрактными траекториями, тем самым подчеркивая: они принципиально траекториями не являются.

Отметим. Для снаряда по зависимостям дальности  $x = x(t)$  и высоты  $z = z(t)$  полета (по сути – это *параметрическое* задание траектории в координатах  $XOZ$ ), с которыми связана зависимость  $s = s(t)$ , можно определить *реальную траекторию* его движения, исключив из уравнений движения время  $t$ . Однако для автомобиля это сделать невозможно: ее необходимо определить *только реальными измерениями*. Еще об одном отличии траекторий автомобиля и снаряда поговорим немного погодя.

**3.** Если траектория прямолинейна, то от времени зависит *только одна* координата  $x = x(t)$ , следовательно, *длина траектории*, на отрезке времени  $t_H \leq t \leq t_K$  определяется *абсолютным* значением *разности* координат  $|x(t_K) - x(t_H)|$ . Это существенно упрощает рассуждения: *именно* поэтому в примерах из механики мы *полагали*, что *движение* происходит по *прямолинейной траектории*. Если частица переместилась из точки  $t_H$  в точку  $t_2$ , возвратилась в точку  $t_1$  ( $t_H < t_1 \leq t \leq t_2 < t_K$ , а затем продолжила движение в точку  $t_K$ , то ее путь (учитывая, что путь величина положительная  $s \geq 0$ ) равен значению  $s(t_H \leq t \leq t_K) + 2s(t_1 \leq t \leq t_2) = |x(t_K) - x(t_H)| + 2|x(t_2) - x(t_1)|$ .

{A.35} Т.е. *путь частицы и при движении по прямолинейной траектории* может отличаться от *перемещения*, которое определяется *только разностью* координат  $x(t_2) - x(t_1)$  частицы в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

**4.** Подчеркнем еще раз (положение {A.1.1}, стр.10): в координатах  $T, 0, F$ ;  $T, 0, W$ ;  $T, 0, V$  и  $T, 0, S$  сила, ускорение, скорость и путь определяются проекциями зависимостей  $f(t)$ ,  $w(t)$ ,  $v(t)$  и  $s(t)$  от времени на оси  $F$ ,  $W$ ,  $V$  и  $S$ , которые мы называли возможными абстрактными траекториями.

В примере 7 имеем:  $f(t) = w(t) = 0$ ,  $v(t) = c_0 = \text{const}$  и  $s(t) = c_0 t$ .

**5.** Тем не менее, вместо словосочетания «зависимости параметров движения от времени» можно использовать словосочетание «возможные траектории», как *абстрактные математические* понятия некоторых *кривых линий*, которые позволяют определить *путь* (перемещение, скорость и другие параметры) движения *в любой* промежуток времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Но не следует забывать, что в этом *понимании* *возможная траектория не является реальной траекторией движения*.

Возможно, надо дать другое название или, например, говорить просто о зависимости параметров движения от времени, чтобы не создавать «путаницы».

Из анализа следует, что *частичные суммы*  $s_k = p - q$  и *координата*

$x = p - q$  (цитата 8 стр.44) определяют *одно и то же*: смещение  $S_k = \pm \Delta_S \cdot k$  (где  $\Delta_S$  формула {\*\*}, п.1.2 примера 7, стр.36) частицы *по оси X* или  $S$  (в нашем обозначении, рис.5 стр.36), ибо она *движется по прямолинейной траектории* (п.1.1 примера 7, стр.36).

Сумма  $p + q = s_k^n = \Delta_S \cdot n$  действительно определяет *путь* (формула {\*\*}, п.1.2 примера 7, стр.36) частицы, но только как *сумму всех смещений без учета их знака по оси X* или  $S$ , а не по оси времени  $T$  (это легко видно и из рисунков, в том числе – данных в работах [1; 6]).

О прямолинейности движения по оси  $X$  говорится в существующей теории, однако полагается, что *путь*  $p + q$  частицы равен значению  $p + q = n$  (цитаты 9,10, стр.44). «Странное равенство», ибо значение  $n$  соответствует значению времени  $t = t_n$  (замечание 8, стр.40). Можно, конечно, «измерять длину дороги секундами или часами», а не метрами или километрами, но для пешехода, автомобиля или самолета, летящего вдоль дороги, «измерение в часах будет уж слишком отличаться», а значение длины дороги в километрах одно и то же.

Ничто не мешает положить (сноска 8, стр.10) *время случайным*, но тогда следует считать *путь детерминированным (неслучайным)* параметром: в общем случае задача усложнится.

Очевидно, что *сумма  $p + q$  связана* со значением  $n$  (точнее со временем  $t$ ) в том смысле, что она определяет общее число (т.е. положительных и отрицательных без учета их знака) смещений  $S_k$  точки при данном значении  $n$ , т.е. на линии  $s = t_n$ . Биномиальный коэффициент<sup>27</sup>  $C_{(n+k)/2}^n$  (цитата 10 стр.44) дает *правильное* значение числа *возможных абстрактных траекторий*, т.е. имеем равенство  $C_{(n+k)/2}^n = C_n^k$ .

«Загвоздка» в одном: «график движения» – это *зависимость  $s = s(t_n)$* , которая является *абстрактной математической* линией, определяющей *одну из возможных абстрактных траекторий*. *Возможная траектория* (подчеркиваем еще раз – *математическая абстракция*) как раз и позволяет определить *смещение  $S_k$  и путь  $s_k^n$*  частицы за время  $t_n$  при ее *движении по реальной прямолинейной траектории*, т.е. по координате  $S$  или  $X$ .

«Малюсенькая путаница» в простых рассуждениях: ее результат «превозмошел все ожидания» – «смысл закона больших чисел часто неправильно истолковывается» (об этом – при кратком рассмотрении теории флуктуаций (раздел 5 стр.57): отмеченная теория изложена в работе [6]).

<sup>27</sup> Он записан здесь в наших обозначениях

## 4.2. О постановке вероятностных задач в теории событий

Обратим внимание еще на один момент, следующий из существующей теории вероятностей: при *равных* вероятностях *случайный процесс* рассматривается как *последовательность независимых опытов* [1,103; 6,92], а если вероятности *не равные* – как *последовательность зависимых опытов* (демонстрация применения формулы полной вероятности [16,49], цепи Маркова [1,110; 16,162]).

Кстати, как при *неравных*, так и *равных* вероятностях *условия* (цитата 11, стр.44) относятся к *изменению направлению движения* частицы (вообще говоря – к изменению условий опыта), а не к *вероятностям*: *никакого отношения к определению понятия условной вероятности события они вообще не имеют*.

**Замечание 11.** Бросание *одной* монеты  $n$  раз – это *последовательные опыты* (испытания), однако *одновременное* бросание  $n$  монет в существующей теории вероятностей *названия не имеет*. Да и вообще о нем практически не говорится: разговор обычно идет о комбинациях, композиции или повторении опытов, прямом (декартовом) произведении, но опять же под этим понимаются *последовательность независимых или зависимых опытов* [1,72; 6,146; 12,52; 13,59; 16,57]. Об этом уже много сказано при анализе существующих определений, как теории событий [19,53], так и случайных величин [29,16-39].

*Аксиоматическая* теория, в конечном счете, все сводит (цитата в пояснении I [29,25]) к одному названию: *последовательности опытов*, которые «...являются прямым (декартовым) произведением пространств элементарных событий» (цитата в пояснении II [29,28]), разделяя их на *независимые и зависимые опыты* (цитата в пояснении III [29,28]). Однако, вопрос, в конце концов, не в названии:

**{А.36.1}** Решение *вероятностной задачи* (впрочем – и любой другой) определяется ее *постановкой*, однако *ни при бросании одной монеты  $n$  раз, ни при одновременном бросании  $n$  монет в существующей теории событий об этом даже не упоминается*.

Выделено как положение потому, что этот вопрос *важен* не только для *теории случайных процессов*, но и для *теории вероятностей* в целом. До рассмотрения случайных процессов мы тоже над этим как-то не размышляли – да и повода, вообще говоря, для этого не было: «во всем виноваты процессы, больше свалить не на что». Поэтому рассмотрим постановку задач, решаемых в теории событий, на конкретных примерах в



простейшем варианте: бросание монет. Однако запись событий (значений, отношений и т.п.) будем вести в более общем виде, что позволяет легко распространить примеры, например, на *опыты* с выниманием наугад одного шара из урны (как универсальных).

#### 4.1.1. Первая основная задача теории событий

**Пример 9.** Одна монета бросается  $n$  раз или одновременно бросается  $n$  монет<sup>28</sup> (в статистике – серия опытов,  $n$  – длина серии). Самое простое, что можно сделать в обоих случаях: подсчитать число  $m_1$  в 1-м или  $m'_1$  во 2-м случае выпавших «гербов» и число  $m_2$  ( $m_1 + m_2 = n$ ) или  $m'_2$  ( $m'_1 + m'_2 = n$ ) «решеток». Повторяя бросания  $N$  раз (в статистике – повторение серии  $n$  опытов), получим  $N$  разных чисел  $m_j$  или  $m'_j$  выпавших «гербов» и отношений  $m_j / n$  или  $m'_j / n$  ( $j=1,2,\dots,N$ ). По отношениям  $p_1 = m_1 / n$  или  $p'_1 = m'_1 / n$  при достаточно большом числе  $n$  мы можем судить о вероятности появления «или герба  $p$ , или решетки»  $q$ .

Повторение испытаний позволяет определить среднее значение  $\bar{p} = \sum_1^N m_j / \{nN\}$  (или  $\bar{p}' = \sum_1^N m'_j / \{nN\}$ ), т.е. уточнить значение  $p$  или  $q$ , и отклонения от уточненного значения  $|\bar{p} - p_j|$  или  $|\bar{p}' - p'_j|$ . А также отклонение значений  $\bar{p}$  и  $\bar{p}'$  от теоретических значений  $p = q = 1/2$  математической вероятности.

*В обоих случаях задача теории событий решается в одной и той же постановке:*

**{А.36.2}** *Появление «или герба, или решетки» при бросаниях монеты определяется логическим отношением, которое соответствует в (классической) теории событий определению операции суммы событий. Оно определяет постановку задачи и не зависит от того, последовательно или одновременно бросаются монеты.*

При *одновременном* бросании  $n$  монет «герб» на *каждой* из монет появляется с *той же вероятностью*, что и при бросании *одной* монеты: этого, к счастью, «еще никто не отменял»<sup>29</sup>. Это позволяет: *отложив* монеты с *выпавшими* «гербами» и «решетками» в *разные* стороны, *последовательно* подсчитать числа их появления при каждом бросании. С другой стороны, *одновременное* бросание  $n$  монет позволяет существенно «укоротить» временные затраты (вообще говоря, и финансовые) на проведение *экспериментов*. Несомненный плюс в пользу одновременного бросания  $n$  монет.

<sup>28</sup> Сколько раз не бросай одну монету или одновременно много монет будет появляться только одно и то же: «гербы» и «решетки», ибо ничего другого на монете нет

<sup>29</sup> По сути, оно «отменено» в теории флуктуаций, изложенной в работе [6]: по крайней мере, в других работах возражений (правда, и восторгов тоже) мы не увидели. Подробнее в разделе 5 (стр.57)

{А.37.1} Из результатов экспериментов следует: При увеличении  $n$  точность определения  $p_1$  (и, конечно же  $\tilde{p}$ ) увеличивается, а отклонения от значения  $\tilde{p}$  уменьшаются.

{А.37.2}. Поведение вероятностей  $p'_1$  и  $\tilde{p}'$ , определенных по одновременному бросанию  $n$  монет и при бросаниях одной монеты  $n$  раз, ничем не отличается, при этом выполняются приближенные равенства (при значении  $n \gg 1$ )  $p'_1 \approx p_1$  и  $\tilde{p} \approx \tilde{p}'$ .

Утверждения – это закон больших чисел, открытый Я. Бернулли<sup>30</sup>, который справедлив для любых случайных явлений, которые называются *массовыми* (сноска 1, стр.1).

**Пример 10. п.1.** Пусть в урне находится  $k = 1, 2, \dots, K$  ( $K \geq 2$ ) разных<sup>31</sup> монет. Примем обозначение:  $a_{1,k}$ ,  $a_{2,k}$  – появление событий «герба» или «решетки» монете с номером  $k = 1, 2, \dots, K$ . Отберем из урны *наугад одну* монету, подбросим ее и запишем появившееся событие. Например,  $a_{2,k}$  – «решетка» на монете с номером  $k$ . *Повторим* испытание  $n$  раз (серия испытаний). Подсчитаем число  $n_k$  ( $\sum_{k=1}^K n_k = n$ ) появлений каждой монеты, а также числа  $m_{1,k}$ ,  $m_{2,k}$  появления «герба» или «решетки» на монете с номером  $k$ .

Подсчитаем число  $n_k$  ( $\sum_{j=1}^K n_j = n$ ) появлений каждой монеты, а также числа  $m_{1,k}$ ,  $m_{2,k}$  появления «герба» или «решетки» на монете с номером  $k$ . По отношениям  $m_{1,k}/M_k$ ,  $m_{2,k}/M_k$  (где  $M_k = m_{1,k} + m_{2,k}$ ,  $M_2 = m_{1,2} + m_{2,2}$  при достаточно большом числе  $n$  можно судить о вероятности появления «герба» или «решетки» на монете с номером  $k$ , а по отношениям  $n_k/n$  – о вероятности появления монеты с номером  $k$  в испытании. Как и в примере 9, при повторении серии  $n$  испытаний  $N$  раз можно определить средние значения вероятностей: появления элементарных событий из 1-й или 2-й урны соответственно; появления 1-й или 2-й урны: отклонения вероятностей от средних значений.

**п.2.** Можно рассмотреть другую редакцию испытаний. Пусть  $n$  монет с данным номером  $k$  находится в одной из  $K$  ( $K \geq 2$ ) урн. Выберем наугад одну из урн, подыдем ее на некоторую высоту, вытряхнем все монеты и подсчитываем число  $m_{1,k}^1$  «гербов», а для уверенности и число  $m_{2,k}^1$  «решеток» ( $m_{1,k}^1 + m_{2,k}^1 = n$ ) в 1-м испытании (верхний индекс). При достаточно большом числе  $n$  по отношениям  $m_{1,k}^1/n$  и  $m_{2,k}^1/n$  можно судить о вероятности появления «герба или решетки». Повторяем испытание  $N$  раз и дополнительно подсчитываем число  $n_k$  ( $\sum_{j=1}^K n_j = N$ ) появления урн, содержащих монеты с номером  $k$ . В результате получим  $N$  разных чисел  $m_{1,k}^j$ ,  $m_{2,k}^j$  и  $n_k$ . Как и выше, имеем серию испытаний и ее повторение. В этом случае можно получить средние значения вероятностей и отклонения от них появления: «гербов или решеток»; «1-й или 2-й чаши».

**Постановка задачи** соответствует положению {А.36.2} (стр.49), но, в

<sup>30</sup>Гениальное решение Я. Бернулли посвящено именно доказательству того, что при увеличении числа испытаний, статистическая (экспериментальная) вероятность будет сколь угодно близко приближаться к значению, определенного непосредственными вычислениями. Как он догадался применить для этого ряд, определяемый степенью бинома, и провести практически все доказательство на основе его свойств [4,46-59], уму непостижимо!

<sup>31</sup>Чтобы «не загружать себя» поиском монет не отличимых «на ощупь», следует взять одинаковые монеты, а для отличия тонкой кистью нанести номера монет

отличие от примера 9, логическое отношение «или ..., или ...» применяется дважды: 1) к появлению одной из монет с номером  $k$ , т.е. одной из  $k$  урн; 2) к появлению элементарных событий на появившейся монете.

Отметим, что постановка задачи, рассмотренной в примере 10, в существующей теории вообще *отсутствует*, но она «имеет место быть и никуда от этого не деться». Постановка задач подобного типа в существующей теории, фактически, соответствует примеру 9 с «привлечением» условной вероятности и зависимости событий – так называемая формула полной вероятности. Об этом уже говорилось и неоднократно как в [19], так и в этой части.

#### 4.1.2. Вторая основная задача теории событий

**Пример 11.** При бросании одной монеты  $n$  раз требуется определить вероятность появления герба или решетки «и в 1-м, и во 2-м, ..., и в опыте с номером  $n$ ». Учитывая, что вероятности появления событий  $b$  («герба») и  $r$  («решетки») одинаковы  $p_b = p_r = 1/2$ , искомая вероятность, определенная из теоретического решения, равна  $p_b^n = p_r^n = 1/2^n$ . Если вероятности появления событий  $b$  и  $r$  разные, то получим разные вероятности  $p_b^n$  и  $p_r^n$  соответственно.

*Логическое отношение «и ..., и ...» соответствует в классической теории событий определению операции произведения событий, однако определение имеет продолжение, из которого следует вторая трактовка: появление 2-х, 3-х и более событий вместе, одновременно.*

**Пример 12.** п.1. Будем проводить эксперименты, одновременно бросая: 1. Две монеты  $n$  раз. Подсчитываем число появления:  $m_0^2$  – «и герба, и герба» на 1-й и 2-й монете;  $m_1^2$  – «и герба, и решетки» на 1-й и 2-й или на 2-й и 1-й монетах,  $m_2^2$  – «и решетки, и решетки» на 1-й и 2-й монете. 2. Три монеты  $n$  раз. Подсчитываем число появления:  $m_0^3$  – «3-х гербов» на 3-х монетах;  $m_1^3$  – «2-х гербов и решетки» (герб на 1-й и 2-й монетах, решетка на 3-й монете, или герб на 1-й и 3-ей монетах, решетка на 2-й монете, или герб на 2-й и 3-ей монетах, решетка на 1-й монете);  $m_2^3$  – «герба и 2-х решеток» (герб на 1-й монете, решетка на 2-й и 3-й монетах, или герб на 2-й монете, решетка на 1-й и 3-ей монетах, или герб на 3-ей монете, решетка на 1-й и 2-й монетах);  $m_3^3$  – «3-х решеток» на 3-х монетах. 3. Можно продолжить эксперименты, одновременно бросая 4-е, 5-ть, и более монет: задача усложнится, но ее суть не изменится. По отношениям  $p_k^n = m_k^n / n$  при достаточно большом числе  $n$  экспериментов можно судить о вероятности совместного (одновременного) появления 2-х, 3-х и более событий и увидеть, что они приближаются к вероятностям, определяемых биномиальным распределением в существующей трактовке. При повторении бросаний  $N$  раз (как и в примерах 9-10), уточняется значение экспериментальных вероятностей и отклонений от них.

п.2. Легко видеть, что решение задачи в примере 11 *следует из решения* задачи в примере 12: *первый и последний* члены биномиального

распределения. Дело в том, что при каждом бросании монеты может появиться «или «герб», или «решетка». Это обстоятельство не учтено при постановке задачи в примере 11, отсюда следует, что *такая постановка не совсем корректна*. При двух *последовательных* бросаниях на монете могут появиться «или 2 герба», «или герб и решетка», «или 2 решетки». При трех бросаниях – «или 3 герба», «или 2-а герба и решетка», «или герб и 2-е решетки», «или 3-и решетки». Т.е. правильная постановка задачи в примере 11 приводит к результату, который нечем не отличается от одновременного бросания 2-х, 3-х и более монет.

п.3. Как и в примере 10 (п.2) можно применить другую редакцию опытов. Пусть имеется  $n$  монет *одного* номинала и  $n$  монет *другого* номинала. Образует из 2-х видов монет  $n$  пар<sup>32</sup>, а чтобы отличать пары друг от друга на каждой паре тонкой кистью нанесем номера от 1 до  $n$ . «Загрузим» все монеты в чашу, подыдем ее вверх, опрокинем и подсчитаем выпадение «или 2-х гербов», «или герба и решетки», «или 2-х решеток» на каждой из пар. Т.е. одновременно проводится серия  $n$  опытов, которые в п.1 проводились *последовательно*.

Таким образом, из анализа в этом примере следует:

{А.38} Появление «и герба, и решетки» при бросаниях монеты определяется *логическим отношением*, которое *соответствует* в (классической) теории событий *определению операции произведения событий*. Оно определяет *постановку задачи* и не зависит от того, *последовательно или одновременно* бросаются монеты.

Обратим внимание на два момента: 1. Из анализа задачи в примере 12 видно: применяется как *логическое отношение* «и ... , и ...», которое определяет *произведение элементарных событий* 2-х, 3-х и более *опытов*, так и *логическое отношение* «или ... , или ...», которое означает, что появление *одного произведения исключает* появление *любого другого*, т.е. они *несовместимы*. 2. Очевидно, что в эксперименте с *одновременным* бросанием 2-х монет невозможно появление 3-х «гербов» (или других *произведений* 3-х *элементарных событий*), но верно и обратное: при *одновременном* бросании 3-х монет невозможно появление только 2-х «гербов», ибо в этом случае всегда появляются *произведения* 3-х *элементарных событий*.

п.4. Отметим следующее: *экспериментально убедиться в правильности теоретического решения* задач в примере 11 *при  $n$  последовательных бросаниях монеты невозможно*. Осуществить проверку можно только при одновременном бросании  $2 \div 5$  монет (пример 12). Т.е. при большом числе повторений испытания, убедиться в том что вероятность появления только «гербов» будет достаточно близка к значениям  $2^{-2} \div 2^{-5}$ . Использование второй редакции опытов (п.3) значительно «ускорит» проведение экспериментов.

Увлекаться большим числом монет не стоит: если для двух монет вероятность появления 2-х «гербов» в два раза меньше появления «герба и решетки», то уже при пяти монетах вероятность появления «5-ти гербов» в 10 раз меньше вероятности появления

<sup>32</sup>Для образования троек, четверок и т.д., следует взять 3-и, 4-е и т.д. вида монет

«2-х гербов и 3-х решеток» (или «3-х гербов и 2-х решеток»). При увеличении числа монет появление только «гербов» быстро становится маловероятным (практически невозможным<sup>33</sup>) событием. Впрочем, как и близких к ним, например, «одного герба и  $n - 1$  решеток» или «2-х гербов и  $n - 2$  решеток».

В примерах шел разговор об *экспериментальной* (статистической) вероятности, хотя иногда и упоминалась теория. Теперь сосредоточим внимание на теории, т.е. определении *математической* вероятности событий.

**{А.39}** *Постановки задач в положениях {А.36.2} и {А.38} определены как основные потому, что в том или ином виде они (а также их комбинации) применяются явно или неявно при решении любой вероятностной задачи.*

В *новой исходной* системе теории событий введены понятия (*простого*) опыта (пример 9) и *сложного* опыта (определение 2 [19,29]). Понятия *сложного* опыта (примеры 10-12) потребовало, наряду с *алгеброй* событий, введения *алгебры опытов* (вывод W.10 [19,32]), что определило два вида *сложного* опыта: *объединение* (пример 10) или *совмещение* (пример 12) 2-х и более *опытов* (определение 5 [19,32]). *Алгебра опытов*, по сути, соответствует *отличию* в постановке задач, рассмотренных в примерах 10-12. *Алгебра* событий применяется *при любом виде испытаний*, с учетом *особенностей* данного вида.

#### 4.1.3. О решении первой задачи теории событий

В *новой исходной* системе теоретическое решение задачи, рассмотренной в примере 9, это определение вероятностей *элементарных* событий по числу *возможных* исходов. В *классической* теории – *сложных* событий по «частным случаям», а в *аксиоматической* теории – *сложных* событий по «элементарным» событиям, обозначенных последовательностью одинаковых букв или других одинаковых знаков (символов).

В *новой исходной* системе теоретическое решение задачи, рассмотренной в примере 10, определяет *объединение  $n$  опытов* (определения 5 и 6, пример 15, замечания 10, 12, 13 и 14 [19,32,33,34,35,40,43]). Результатом *объединения опытов* является появление *одного из элементарных* событий «или 1-го, или 2-го, ..., или опыта с номером  $n$ ». В случае, рассмотренном в примерах 9-10, бросание каждой монеты – *один опыт*, бросание  $n$  раз *одной* монеты или *одновременно  $n$  монет* – это  $n$  *опытов*. Соответственно, *объединение опытов* в примере 10 – это применение *логического отношения* «или ..., или ...» к появлению *одной из*

<sup>33</sup>Практически невозможные события, как это ни странно, время от времени появляются тоже: особенно, когда «они совсем некстати»

монет, а появление *одного из элементарных* событий – (т.е. герба или решетки) «или 1-го, или 2-го, ..., или опыта с номером  $n$ » – применение к событиям. По-другому – *одного из элементарных событий опытов*.

*Этого понятия нет* в существующей теории событий: решение этой задачи основано на формуле полной вероятности<sup>34</sup>  $P(A) = \sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)$ . Отметим: событие  $A$  принадлежит одному *опыту*, а события  $B_j$   $\sum_{j=1}^n P(B_j) = 1$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) – другому *опыту* (положения {A.11.1}–{A.11.2} и замечания к ним, стр.19). Их называют гипотезами и полагают их, то ли несовместными, то ли несовместимыми (об этой «неразберихе» мы говорили не единожды). Возражений нет, формула правильная, но только для одного события, однако о том, что представляет собой событие  $A$  в теории «как-то умалчивается» (в том числе, что оно принадлежит какому-то опыту, а гипотезы – другому опыту). Хорошо, если в этом опыте их два (например,  $A_1$  и  $A_2$ ). *Влияет ли на вероятность совместимость (несовместимость) событий  $A_1$  и  $A_2$ ? А что делать, если их в опыте, например, сотня? А как быть, если гипотезы  $B_j$  дополнить гипотезами  $C_k$  ( $k=1,2,\dots,m$ )?* Вопросы есть, но только ответов на них ни классическая, ни аксиоматическая теория не дает: все это «скрыто в густом тумане понятий независимых и зависимых событий, которые связали с условной вероятностью»: без изменения этого «основного предположения сплошной туман вряд ли рассеется».

Решение на основе объединения опытов определяется *только постановкой* вероятностной задачи и позволяет *наиболее просто* получить теоретическое решение *при любом конечном* числе опытов и числе элементарных событий *в каждом из опытов*.

Объединение одномерных опытов определяет *одномерную* таблицу вероятностей  $p_o = p/2^n$  и  $q_o = q/2^n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) (формулы (6), замечание к положению {A.18.2}, стр.27) вероятностей элементарных событий  $c_o^m$  (где  $m=1,2,\dots,\sum_{j=1}^k n_j$ ) объединенного опыта, который состоит из элементарных событий  $b_v^n$  и  $r_v^n$  опытов  $A_v^n$  ( $v=1,2,3,\dots,2^n$ ) при данном значении  $n=0,1,2,\dots$ .

Формулы (6) – частный случай формул {5} (положение {A.18.2} стр.27), полученных на основе объединения опытов 2-го типа, при значениях  $M_v^n = M_1^n$ . В этом случае (замечание 12 [19,40]) объединение опытов 2-го и 1-го типов похоже.

#### 4.1.4. О решении второй задачи теории событий

В новой исходной системе теории событий теоретическое решение задачи, рассмотренной в примерах 11-12, определяет *совмещение  $n$  опытов* (определение 5, пример 15, замечания 13 и 14 [19,32,33,43]). Результат *совмещения опытов* – появление *по одному элементарному* событию «и 1-го, и 2-го, ..., и опыта с номером  $n$ ». В случае, рассмотренном в примерах 11-12, опять же бросание каждой монеты – *один опыт*, бросание  $n$  раз *одной* монеты или *одновременно  $n$  монет* – это  $n$  *опытов*. Соответственно, *совмещение опытов* – это появление двух элементарных событий (герба или решетки) «и 1-го, и 2-го, ..., и опыта с номером

<sup>34</sup> Впервые сформулирована как основное предположение теории вероятностей П. Лапласом: основное предположение, ибо «... играет основную роль во всей дальнейшей теории» [1,59]. К огорчению это лишь частный случай более общего положения

$n$ », по-другому – появление *по одному* элементарному событию каждого из  $n$  *опытов* *одновременно, вместе*.

*Совмещение одномерных опытов* определяет *многомерную* таблицу *произведений*  $q^{n-v}p^v$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) *вероятностей элементарных событий* (можно использовать  $b_v^n$  и  $r_v^n$  *опытов*  $A_v^n$  ( $v = 1, 2, 3, \dots, 2^n$ ) рассмотренных в примере 4 при значениях вероятностей  $P(b_v^n) = P(b) = p$  и  $P(r_v^n) = P(r) = q$ , ( $p + q = 1$ ): рис.3, стр.22), т.е. *совмещенный опыт* (пример 15 [19,33]). *Линейным преобразованием многомерного совмещенного опыта к одномерному опыту* (разделы 2.1-2.2 [30,36,41]), которое, по сути, определяет *сумму произведений*, имеющих одинаковые вероятности, и дает нам формулу  $C_n^v \cdot q^{n-v}p^v \{11\}$ .

В существующей теории понятие *совмещения опытов* также не определяется. Тем не менее, решение задачи верно: «претензий» к решению никаких, есть только небольшой вопрос к трактовке полученного решения. По-видимому, этому способствовала независимость опытов, хотя ее тоже «связали» с условной вероятностью событий. Решение определяет *формулу* Бернули (по-другому ее называют *биномиальным* распределением [12,95; 13,61], но оно не точно [31,11-12]), полученную *на основе схемы последовательных* (повторением) *опытов* в существующей теории. Если говорить в общем, то решение определяется правильно. Отметим: при числе элементарных событий больше двух правильно определяются только полиномиальные коэффициенты, но не распределение: об этом в разделе 2.2 [30,41]. *Совмещение опытов* и его последующее преобразование дает правильное понимание построения и трактовку распределения, но наиболее просто распределение получается разложением бинома  $(q + px)^n$  по степеням  $x$ , что, в принципе, и было впервые выполнено Я. Бернулли. Отметим: если изменение условий проведения опытов приводят к изменению вероятностей элементарных событий – то произведением биномов  $\prod_{v=1}^n (q_v + p_v x)$ , где  $p_v = P(b_v^n)$  и  $q_v = P(r_v^n)$ .

В существующей теории, как отмечено выше, 2-я задача решается только на основе схемы *последовательных опытов* (например [1,103,110; 12,63; 13,60; 16,49]): при этом о *произведении* событий упоминается весьма редко (из цитируемых работ - в [13,60], возможно именно потому, что она в основном опирается на классическое понимание события и его вероятности).

**Замечание 12.** Сначала рассматривается «...простейший случай повторения одного и того же испытания при постоянных условиях» [12,63; 13,60], т.е. *вероятности событий не изменяются*, а затем – *общий случай*, «...когда опыты проводятся в неодинаковых условиях и вероятность события от опыта к опыту *меняется*<sup>35</sup>» [12,67; 13,61]. При трех испытаниях возможно 8 следующих исходов:  $A_1 A_2 A_3$ ,  $\bar{A}_1 A_2 A_3$ ,  $A_1 \bar{A}_2 A_3$ ,  $A_1 A_2 \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ ,  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ ,  $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$ , где  $A_j$  означает, что событие  $A$  появилось, а  $\bar{A}_j$  – что оно не появилось в испытании с номером  $j=1,2,3$ . В обоих случаях *испытания* считаются *независимыми*, хотя во втором случае они *зависят от изменения условий проведения опытов*.

<sup>35</sup>Что соответствует пониманию, изложенному при рассмотрении теории событий (приложение III [19,55])

Отметим: в задаче с перекладыванием шаров [16,57] определяются точно те же 8 исходов при трех опытах (с 3-мя урнами), при этом «условные вероятности» при 2-м и 3-ем опытах вычисляются после изменения внутренних условий их проведения (число шаров черного или красного цвета в урнах увеличивается на 1). Отличий от общего случая, рассмотренного выше, «под микроскопом не разыщешь»: мало того, само решение проводится «не при условии, а в предположении», что событие  $A_j$  произошло, о чем говорилось ранее (положения {A.11.1}-{A.11.3} стр.19).

Их последовательность интерпретируется как *зависимые опыты*: это так, но с одной существенной поправкой – *зависимость* определяется изменением условий проведения опытов, а не (стр.18-19) *условной вероятностью событий*.

Задача с перекладыванием шаров – это *частный* случай комбинации условий в задачах, рассмотренных в примерах 5 (разные числа шаров в урнах 1,2,3) и 4 (в предположении  $c = -1$  и  $d = 1$ ). При применении *предположения*, что произошло «или событие  $A_j$ , или противоположное ему событие  $\bar{A}_j$ , возвращение к исходному состоянию невозможно (это легко проверить, используя схемы на рис.3-3.а, стр.25, 29). Для этого следует дополнить его *предположением*: числа черных или красных шаров изменяются после каждого отбора.

Т.е., в урне 1 остается или  $m_1^1 - 1$  черных, или  $m_2^1 - 1$  красных шаров ( $m_1^j + m_2^j = M^j$ ) ( $j = 1, 2, 3$ ); соответственно, в урне 2 –  $m_1^2$ ,  $m_2^2$  или  $m_1^2 + 1$ ,  $m_2^2 - 1$  если из урны 1 появился черный и  $m_1^2 - 1$ ,  $m_2^2 + 1$  или  $m_1^2$ ,  $m_2^2$  если из урны 1 появился красный шар. Далее продолжать не будем, но отметим, что возвращение в исходное состояние будет ровно в половине случаев, независимо от числа  $n$ .

Таким образом, на основе анализа показано:

{A.40} Как *теоретическое*, так и *экспериментальное* решение вероятностной задачи (не только монет, ибо это имеет принципиальное значение для всей теории) связано с ее *постановкой*: она определяется 2-мя логическими отношениями «или ... , или ... », «и ... , и ... » в различных комбинациях и не зависит от того, последовательно или одновременно проводится опыты.

Напомним, отношения определяют: 1) сумму или произведение событий; 2) объединение или совмещение (простых) опытов.

С другой стороны, последовательное проведение опыта с 2-мя элементарными (бросание монеты – частный случай) событиями определяет случайные процессы, рассмотренные в примерах 4, 6-7: при повторении опыта  $n$  раз получаем одну возможную (напоминание, абстрактную) траекторию, а при повторении серии  $n$  опытов  $N$  раз –  $N$  траекторий из  $2^n$  возможных траекторий процесса. Вероятность появления возможной траектории вычисляется по формулам {4} (положение {A.18.2})



стр.27), а вероятность появления  $C_n^k$  возможных траекторий в точке  $(t_n, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$  (или путей частицы в точке  $(t = 0, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$ ) с данным номером  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$  – по формулам {6} (положения {A.33.1}-{A.33.2}, стр.42).

### 4.3. Случайные блуждания частицы и биномиальное распределение, полученное в теории событий. О распределении Пуассона

Пришла пора объяснить, когда в процессе случайных блужданий частицы появляется биномиальное распределение, полученное в теории событий и определяемое формулой {11} (стр.55), и показать, чем оно отличается от биномиального распределения, полученного на основе случайных блужданий частицы и описываемого формулами (6) (стр.41).

**Замечания 13.** При построении случайных процессов мы подчеркивали: 1. Одна частица не может быть в двух точках одновременно (положение {A.1.5}, стр.10). 2. Именно это определяет применение логического отношения «или ..., или» при построении процесса.

1. Случайный процесс, распределение вероятностей которого на линиях  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) будет биномиальным распределением, полученным в теории событий (т.е. описываться формулой {11}), только при одновременном движении 2-х частиц; чтобы не вникать в тонкости механики (и «дебри» теории вероятностей тоже), положим, что движение одинаковых частиц происходит с одинаковой скоростью. Соответственно изменим постановку задачи в примере 7: две частицы в точке  $s = 0$  в момент времени  $t = 0$  одновременно получают одинаковые удары с вероятностью  $P(b_1^0)$  элементарного события  $b_1^0$  или с вероятностью  $P(r_1^0)$  элементарного события  $r_1^0$  одна в положительном, а другая в отрицательном направлении оси  $S$ . «Экраны работают» по той же схеме. В этом случае возможные траектории, вероятности появления и пути каждой из частиц одинаковы и определяются схемой на рис.5 (стр.36).

Очевидно, что в точках  $(t_n, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$   $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$  на линиях  $s = t_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) они появляются одновременно, что соответствует логическому отношению «и ..., и ...»: имеем совмещению опытов. Из анализа, данного в п.4.1.3 (стр.55) очевидно: в этом случае решение задачи определяется биномиальным распределением, определяемым формулой {11} (стр.55).

2. Легко видно: формулы  $C_n^0 q^{2^{-n+1}}$ ,  $(C_{n-1}^j q + C_{n-1}^{j-1} p)^{2^{-n+1}}$  ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) и  $C_n^n p^{2^{-n+1}}$  (6) при значениях  $q = p = 1/2$  приводятся, с учетом равенства  $C_{n-1}^j + C_{n-1}^{j-1} = C_n^j$  ( $j=2, 3, \dots, n-1$ ), к виду  $C_n^k \cdot (1/2^n)$ , который непосредственно следует из формул  $C_n^k \cdot q^{n-k} p^k$  {11}. В этом, конечно же, нет ничего удивительного, ибо в этом случае<sup>36</sup> оно равно коэффициентам  $C_n^k$ , деленным на их сумму  $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ .

<sup>36</sup>По сути, биномиальное распределение аппроксимируется нормальным законом только при равных вероятностях (раздел 1.3.1 [31,6]). Аппроксимацию можно применять для приближенного вычисления биномиального распределения при достаточно больших значениях  $n$  и  $k$ . Вообще говоря, она для этого и создана А. Муавром

Но если  $q \neq p$ , то ситуация *изменяется*. Хорошо известно, что *математическое ожидание*  $M = np$  распределения {11} существенно зависит от значений  $p$  и  $n$ , например, если  $p = 0,01; 0,5; 0,99$  и  $n = 10, 100, 1000$ , то математические ожидания равны  $M = 0,1; 5; 9,9$ ,  $M = 1; 50; 99$  и  $M = 10; 500; 990$  соответственно. Отметим, что на ось вероятностей  $P$  равномерно отображаются все точки, соответствующие вероятностям биномиального распределения в точках на оси  $X$ . В этом случае, математическое ожидание распределения на оси  $P$  будет определяться одним значением – координатой  $p$  при любых значениях  $n$  (примечание 4 [10,84]).

*Математическое ожидание* распределения, определяемого формулами (6), равно  $M_1 = (n-1)/2 + p$  и *слабо зависит* от вероятности  $p$ : мало того, можно показать, что это распределение при *увеличении опытов* быстро приближается к *симметричному* распределению (т.е. вероятности которого равны  $q = p = 1/2$ ). Проще всего это сделать, представив вероятности в виде  $q = 2^{-1} - q'$  и  $p = 2^{-1} + p'$  (где  $q' + p' = 1/2$ ) и рассматривая распределение относительно точки 0 на оси  $S$ . На оси вероятностей  $0 \leq p \leq 1$  оно приближенно равно  $S$ , т.е. *именно это* распределение *аппроксимируется* *нормальным* законом (сноска 36 стр.57).

**3.** Выше показано (положение {A.33.1}-{A.33.2}, стр.36), что формулы (6) определяют вероятность появления в точке  $(t_n, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$  на линии  $s = t_n$  (или путей на оси  $S$ )  $C_n^k$  *возможных траекторий* из общего числа  $2^n$  *возможных*. В отличие от формул (6):

**{A.41.1}** Формула {11} определяет вероятность того, что в точке  $(t = 0, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$  ( $k = 1, 3, \dots, 2n-1$  при *нечетных* и  $k = 0, 2, \dots, 2n$  при *четных* значениях  $n$ , с учетом отличия путей, положение {A.28}, стр.37) на *оси S* могут *одновременно закончиться* пути *двух частиц при движении в противоположных направлениях* по  $C_n^k$  возможным (реальным!) траекториям.

*Движение частиц* происходит с *одинаковой* скоростью по *оси S* (по *прямолинейной траектории*, п.1.1 примера 7, стр.36), следовательно, возможна их *встреча (соударение 2-х одинаковых частиц, результат которого – движение частиц в обратных направлениях)* в точках  $(t_n, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$  (*исключая* границы, на которых она *невозможна*): вероятность встречи также вычисляется по формулам {11}.

В существующей теории формула {11} часто трактуется как появление, например, события  $b \{P(b) = p\}$  – красного шара (примеры 2-5) *ровно k раз в n последовательных независимых опытах*. Из анализа, данного в примере 12 (стр.51) и настоящего раздела, следует уточнение<sup>37</sup> этой трактовки:

**{A.41.2}** Вероятность  $q^{n-k} p^k$  определяет появления «и *произведение*  $\{b^k\}$   $k$  *элементарных* событий  $b$ , и *произведение*  $\{r^{n-k}\}$   $n-k$  *элементарных* событий  $r$ » (индекс означает степень – произведение одинаковых событий), т.е. *совместного* появления (*произведения*  $b^k \cdot r^{n-k}$ )  $k$  *элементарных* событий  $b$  и  $n-k$  *элементарных* событий  $r$ , а формула {11} – вероятность того, что появляется *ровно*  $C_n^k$  *произведений*  $b^{(k)} \cdot r^{(n-k)}$ .

<sup>37</sup> До сих пор мы «без раздумий» ее и применяли: «корректировку внесла его связь» с процессами

{A.41.3} *Биномиальное* распределение, определяемое формулой {11}, следует из теории событий и, в принципе, никак не связано с образованием процесса, в отличие биномиального распределения, определяемого формулами (6), которое обусловлено построением процесса: оно не существует вне процесса.

1. Формула {11} определяется именно подсчетом числа появления произведений элементарных событий (т.е. их одновременного появления в эксперименте) совмещенного опыта, имеющих одинаковую вероятность (раздел 1.3.1 [31,6]). 2. Распределение (6) нельзя получить только на основе теории событий: для этого необходимо обратиться к построению случайного процесса, следовательно, этот случайный процесс неразрывно связан со схемой последовательных опытов в теории событий.

4. Рассмотрим движение большого числа  $n$  частиц по прямой линии с постоянной скоростью, полагая, что их движение в точке с координатами  $(0,0)$  началось одновременно.

Одновременное движение  $n$  частиц по прямой линии означает, что все частицы, при представлении их в виде точек, движутся в одной плоскости, перпендикулярной движению. Каждая частица движется по своей прямой линии, соответственно, все частицы будут одновременно отражаться от «экранов» и двигаться по одной из возможных траекторий как одна частица. Следовательно, вероятность появления возможных траекторий в точке  $(t_n, S_k = \pm \Delta_S \cdot k)$  при случайных блужданиях всех частиц будет определяться формулами (6). Если такую же группу частиц одновременно «отправить» в противоположном направлении, то их поведение при движении будет характеризоваться формулами {11}. Отсюда следует:

{A.42.1} *Биномиальное* распределение, описываемое формулой {11} относится только к процессу, определяемого одновременным случайным блужданием 2-х частиц по прямолинейной траектории в противоположных направлениях.

Отсюда следует: утверждение, что при одновременном движении  $n$  частиц по прямой линии «... после  $n$  толчков доля частиц, переместившихся на расстояние  $m$ , дается формулой (1)» (т.е. нормальным распределением, цитата 10, сноски 26 стр.44), по сути – несостоятельно.

Отметим еще одно отличие свойств распределений, определяемых формулой (6) (стр.41) и формулой {11} (стр.55):

{A.42.2} *Биномиальное* распределение, описываемое формулой {11}, при значениях  $p$ , близких к 0 преобразуется в распределение Пуассона. Для биномиального распределения, описываемое формулой (6), такое преобразование невозможно.

С точки зрения механики частица имеет только 2 «степени свободы» – двигаться по одной прямой линии в одном или противоположном направлении: соответственно, 2-е частицы могут двигаться одновременно только в противоположных направлениях. Чтобы «сразу запустить» большее число частиц, надо «дать им большее число степеней свободы». Опять «слышим весьма весомый аргумент»: теория вероятностей – это

не механика. Для «любителей подобных аргументов»<sup>38</sup>:

**Замечания 14.** 1. Из анализа, данного в примере 12 (стр.45) и п.4.1.4 (стр.48), следует: при *одновременном* бросании *любого* числа  $n$  монет получим *один* результат, определяемый формулой {11}: *одновременное* появление *только 2-х элементарных* событий – «герб» или «решетка» – *другого просто не дано*. «Как ни старайся» появления 3-х или более элементарных событий *вместе* не увидишь, т.е. тоже имеем только 2-е «степени свободы». Чтобы увидеть появление больше 2-х событий вместе, необходимо большее число событий в опыте: например, бросать одновременно тетраэдры, или кубы, или какие-либо другие правильные многогранники. 2. При игре в монету, игрок при *каждом* бросании монеты может «или выиграть, или проиграть» – *других исходов в игре не дано*. Но если он *одновременно* играет в 2-х играх, то он может *одновременно* «или выиграть, или проигрывать» в обеих играх, «или в одной выиграть, в другой проиграть» при *каждом* бросании монеты в одной или другой игре. 3. Один человек может «или заразиться, или не заразиться» инфекционным заболеванием от другого человека – и здесь *других исходов быть не может*. А два человека? Повторите 2-е предложение в п.2, но только со словами «человек» и «заразиться».

К механике примеры не имеют *никакого отношения*, но *суть одна и та же*. Аналогом *игры в монету* является *движение* частицы с *постоянной* скоростью, однако *аналог* распространения *инфекции*, существенно сложнее: 1. Существуют *периоды развития, стабилизации и затухания процесса* (положение {A.10}, стр.14), на которые влияют различные факторы (в том числе, *эффективность мер, принимаемых для уменьшения распространения инфекции*). 2. Заразившийся человек может «или заболеть или не заболеть», на что тоже влияют различные факторы (в том числе, *своевременность и эффективность лечения*). Анализ же, данный в пунктах 1-2, подтверждает с позиций теории событий то, что следует из механики. Можно привести множество других примеров из разных областей знаний (техники, химии, биологии, социологии и т.д.), – суть не изменится. Даже «при ярком освещении» отличий от механики не обнаружить, но так и «быть должно»:

*Правила математической теории не должны зависеть от области, в которой она применяется.*

## 5. Замечания к теории случайных флуктуаций

Вопрос об *одновременном движении* большого числа частиц (*материальных точек*) будет рассмотрен несколько позже (раздел 6, стр.60), а сейчас вернемся к *сериям последовательных опытов* и *повторению* серии  $N$  раз (примеры 9-12 стр.43-46).

Повторение «бросаний монеты» (одной  $n$  раз или  $n$  монет одновременно)

---

<sup>38</sup>Об аргументах подобно го рода мы уже говорили ранее (сноска 57 [29,39])

позволяет по результатам *экспериментов* определить среднее значение вероятности и отклонения от него (*вообще говоря, и от математической вероятности, если она известна*), т.е. *флуктуации* при *экспериментальном* определении вероятности событий, распределения *случайной* величины или *процесса*.

Мы *не готовы* детально обсуждать эту *теорию*, ибо, во-первых, обратили внимание на эту тему только потому, что *случайные блуждания* частицы *по прямой линии* в работе [6] рассмотрены в главе, посвященной *случайным флуктуациям*, и только в связи с теми «поразительными и потрясающими результатами», которые следуют из этой «теории».

Во-вторых, последующий анализ касается не всей теории, а только малой области ее применения, ограниченной узкими гранями.

В-третьих, тема слишком обширная и связана с задачами математической статистики, об одной (*теории корреляции, сноска 70 [29,64]*) из которых мы упоминали ранее при рассмотрении свойств распределений двумерных (*многомерных*) величин (*подоробно вопросы связанные с теорией корреляции рассмотрены в разделах 2.2 [30,18] и 1.1 [31,10]*). Теория вероятностей является теоретической основой для многих положений математической статистики, но хорошо, что не для всех: один пример несоответствия положений этих двух ветвей теории вероятностей был дан при анализе исходных понятий случайных величин (*пример 11 [29,36]*).

В-четвертых, несмотря на «поразительные результаты», следующие из данной теории, ее изложение в работе [6] было просмотрено достаточно бегло, т.е. в общем-то, поверхностно, тем не менее, учитывая проведенные выше исследования случайных процессов и, в частности, *случайных блужданий* частицы *по прямой линии* (*именно этот случайный процесс стал основой, определившей «потрясающие» результаты*), некоторые замечания следуют и из такого прочтения.

Но прежде еще несколько цитат

12. «Простые методы вскоре приведут нас к результатам большой теоретической и практической важности. (Мы столкнемся с теоретическими заключениями, которые окажутся не просто неожиданными, но будут прямо противоречить интуиции и здравому смыслу). { { Они покажут, что широко распространенные представления о случайных флуктуациях лишены основания и что смысл закона больших чисел часто неправильно истолковывается } }. [Например, в различных приложениях предполагается, что наблюдения за результатами бросания одной и той же монеты в течении длительного промежутка времени будут давать те же статистические характеристики, что и наблюдения результатов очень большого числа независимых бросаний в данный момент. Это не так.]» [6,85].

13. «(Более совершенная модель принимает в расчет, что *приращения* и их вероят-

ности *изменяются от испытания к испытанию*, но даже *простая модель с бросанием монеты приводит к удивительным, даже потрясающим результатам*). ... Отсюда следует, что *(случайные флуктуации при бросании монеты типичны для более общих случайных процессов накопления)*. Во всяком случае, это приводит к констатации того, что, *(коль скоро даже простая игра с бросанием монеты приводит к парадоксальным результатам, противоречащим нашей интуиции, последняя не может служить надежным советчиком в более сложных ситуациях)*» [6,90].

14. «Мы готовы теперь к строгому анализу природы флуктуаций при случайных блужданиях. *(Результаты поразительны)*. Согласно широко распространенному убеждению, {так называемый “закон средних”, должен гарантировать, что при длительном бросании монеты *каждый из игроков будет в выигрыше примерно половину времени и лидерство будет нередко переходить от одного игрока к другому*}» [6,96].

15. «Мы видели, что {*вопреки общераспространенным суждениям вполне вероятно, что в длительной игре с бросанием монеты один из игроков практически остается все время в выигрыше, а другой – в проигрыше*}» [6,99].

Мы специально привели несколько цитат и выделили текст в цитатах косым шрифтом и подчеркиванием, а некоторые его части – разного вида скобками, для того, чтобы обратить на них внимание Читателя.

Можно было бы поговорить о «неожиданных и потрясающих» (части текста цитат 12-14, выделенные выделенные одинарными круглыми скобками) теоретических результатах, которые противоречат «интуиции и здравому смыслу» и «удариться» в философские рассуждения на эту тему. Однако это «заведет нас в очень глубокие дебри» философии: начиная с понятий «интуиции» и «здравого смысла», которые время от времени «конфликтуют между собой», и вплоть до вопросов, связанных с возникновением вселенной и существованием Бога – еще более остро конфликтующие точки зрения. Из них так просто не выбраться – «конфликты сплошь покрыты сединой» и закончатся ли они когда-либо неизвестно.

Чтобы «не заплутать в дебрях» философии, в прямоугольных и фигурных скобках выделены части цитат, на которые мы обращаем особое внимание Читателя, ибо для анализа утверждений, декларируемых в этих частях цитат, *вполне достаточно математики*: вообще говоря, вся необходимая работа уже выполнена при анализе *построения случайных блужданий* частицы *по прямой линии*.

Утверждение, выделенное прямоугольными скобками (одинарными, цитата 12) голословное. В примерах 9-12 (стр.49-51), п.4.1.3 (стр.53) и п.4.1.4 (стр.548) проведен анализ постановки задач в теории событий, и показано, что бросание *одной монеты  $n$  раз и одновременное бросание  $n$  монет – это одно и то же*. *Никаких отличий* между этими способами *нет* – все *отличия связаны только с постановкой задачи* (положения {А.36.2}- {А.38}, стр.49, 52), которую необходимо решить в данном виде испытаний, но в существующей теории, к сожалению, *нет даже намеков на необходимость обсуждения этого вопроса*.

Если бы на этом *утверждении все закончилось*, то вряд ли бы мы

стали рассматривать теорию флуктуаций. Однако другие выделенные утверждения *затрагивают основу* теории вероятностей *массовых* случайных явлений. Именно *массовые случайные* явления позволяют *проводить* многочисленные эксперименты при неизменных условиях, которые подтверждают свойство *устойчивости относительных частот* и само *существование математической вероятности* событий. Без *этого* подтверждения все математические построения теории вероятностей были бы лишены всякого смысла.

Вполне естественный вопрос: *на чем основаны эти утверждения?* Если по сути, то на двух предложениях (подчеркиваем, именно предложениях, а не предположениях), выделенных в цитатах 12 и 15 двойными фигурными скобками, а также результатах «некоего эксперимента», приведенного в работе [6,105].

Совсем не просто, среди обычных монет найти «правильную», в принципе – вообще невозможно (*предложение, выделенное в цитате 12 двойными круглыми скобками*). Но не очень понятно, относится ли это утверждение к *идеальным* игральным костям или монетам, выниманию «наугад» одного лотерейного билета или шара урны, которые *использовали для создания теории* ее родоначальники (Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс, Я. Бернулли и др.). Дело в том, что в *классической теории вероятностей* существуют *только абсолютно правильные* монеты, игральные кости и т.п.: *именно на них она и построена*<sup>39</sup>.

Не будем рассматривать «эмпирические иллюстрации», о которых говорится в работе (в этом нет смысла, что будет показано далее), а проведем анализ *исходных данных*, которые послужили *основой* их построения и последующих выводов.

**Замечания 14.** 1. Сначала отметим следующий момент. Способов моделирования «бросаний монеты» не существует: по крайней мере, нам они неизвестны. Моделируется *равновероятное дискретное* распределение на *ограниченном отрезке числовой оси независимо* от того, что для этого используется: таблицы случайных (натуральных) чисел, генераторы случайных шумов или так называемые датчики «псевдослучайных чисел» (программные методы) на ЭВМ (в последнем случае – обычно на отрезке  $0 \leq r \leq 1$  действительных чисел). Именно *близость* набора чисел (или цифр

<sup>39</sup>Мы не говорим об аксиоматической теории, ибо она постулирует: вероятность события (в том числе, – *элементарного*) может быть *любым вещественным* числом  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Однако в этой теории имеется *полная неопределенность* понятий как *элементарного*, так и *сложного* событий, что приводит к *полной неясности их применения*. Об этом в разделе 2 [19,17] и разделе 1.1 [29,8]

в числах) *к равновероятному* распределению *гарантирует*, что при *любом случайном отборе* некоторой совокупности чисел (цифр) из данного набора вероятность появления *любого* числа (цифры) будет (приблизительно) *одна и та же*. Т.е. «похоже на бросание монеты, но не совсем то, что надо бы».

**2.** Теперь рассмотрим данные, приведенные в таблице (это копия табл.3 в [6,40]). По строкам (колонки 2÷11) имеем «серии опытов» (в скобках – число повторений серии) с длинами – 100 (100), 500 (20 – каждая строка разделена пополам), 1000 (10 – в колонке 12), 5000 (2 – взяты суммы по 5-ть значений в колонке 12) и 10000 (1). Из 100, 20, 2 и 1 имеющихся серий, выбрана серия с максимальным отклонением появления «герба» от среднего значения (т.е. от 1/2), которые равны 50-39=11, 277-250=27, 536-500=36, 2537-2500=37 и 5021-5000=21. Такое же значение принято и для отклонения «числа», соответственно, погрешность определения среднего –  $\pm 0.11, \pm 0.054, \pm 0.036, \pm 0.0074$  и  $\pm 0.0021$ . Эти результаты показывают: 1) при увеличении длины серии точность определения среднего повышается: никаких противоречий с законом больших чисел; 2) учитывая, что значение 1/2 – это вероятность появления «герба или числа» на монете, при числах 5000 и 10000 *опытов* достигается неплохая *точность моделирования* бросания одной монеты.

Таблица

**3.** Повторение серий опытов не упоминается, ибо, по сути, имеется только 100 повторений одной серии из 100 опытов (других намного меньше), а для того, чтобы получить более-менее «приличное» представление об отклонениях от среднего значения (т.е. точность моделирования бросаний

монеты) необходимо провести 5000÷10000 повторений каждой из серий опытов. Это достаточно просто проверяется на современных ПК: делать это по таблицам «весьма неблагодарное занятие». Есть большие сомнения в том, что используя таблицы случайных чисел такую задачу вообще можно решить в необходимом объеме.

Если подойти с точки зрения случайных процессов, то при 100 опытах, мы имеем только 100 *возможных реализаций* из общего числа  $2^{100}$  *возможных*.

*И что же получено в результате этого простого анализа «эксперимента»? Как это ни странно (это если исходить с «позиции» утверждений в цитатах 12-13,15), но в серии последовательных опытов закон больших чисел «работает» и «работает» правильно: при увеличении длины n серии относительная частота приближается к математической вероятности события. «Не отстает от него» и «так называемый “закон средних”»: относительная частота приближается к математическому ожиданию (в*



соответствии с утверждением в цитате 14, выделенном двойными фигурными скобкам, а не вопреки ему – цитата 15). Именно так определяется *среднее* значение (*его определение соответствует теоретическому определению математического ожидания*, замечание 5.2 [30,15]) по экспериментальным результатам для непрерывных величин.

Можно затеять спор, но прежде, чем начать его, лучше провести еще некоторые (виртуальные – на ЭВМ) «эксперименты».

Попробуйте смоделировать: 1. «Бросание монеты». 2. «Бросание икосаэдра». 3. «Вынимание наугад шара из урны»: а) с 30-ю черными и 70-ю белыми шарами; б) с одним черным и 99-ю белыми шарами; с) с одним черным и 999-ю белыми шарами. Для всех «экспериментов» программа для ПК реализуется совсем несложно.

Два замечания. 1. Программа одна, но изменяются условия. В задаче 1 отрезок  $0 \leq r \leq 1$  делится на 2-е равные части  $0 < r \leq 1/2$  или  $1/2 < r \leq 1$  – выпадение «герба или числа», а в задачах 3 на 2 неравные части:  $0 < r \leq 0.3$ ,  $0.3 < r \leq 1$  или  $0 < r \leq 0.01$ ,  $0.01 < r \leq 1$  или  $0 < r \leq 0.001$ ,  $0.001 < r \leq 1$  – появление «черного или белого шара» соответственно. В задаче 2 отрезок делится на 20 равных частей – появлении одной из 20 граней. В каждом «эксперименте» подсчитывается число попаданий на данный интервал. 2. Чтобы убедиться в правильности рассуждений, достаточно провести «эксперименты» 1 и 3.а: их можно начать с повторения серии в 100 опытов. Что касается «экспериментов» 2 и 3.б (тем более – 3.с), то на них «уйдет уйма» зря потраченного времени: *никаких новых результатов* не получим.

Подобными экспериментами можно проверить правильность рассуждений в примерах 9, 10 и 12. Придется, конечно, несколько усложнить программу, чтобы можно было моделировать *одновременное* проведение серии опытов в примерах, а также *одновременное* появление элементарных событий в примере 12. Это не так сложно: был бы только датчик случайных чисел «хорошим» – важное условие в методе Монте-Карло.

Эти «эксперименты» – некоторое *дополнительное подтверждение* положений {A.36.2}, {A.37.1}-{A.37.1}, {A.38}-{A.40} (стр.49,50, 52-56) и *правильности теоретического подхода* к решению задач, изложенному в п.4.1.3 (стр.53) и п.4.1.4 (стр.54).

Однако если рассматривать *случайный процесс блужданий* частицы по *прямолинейной траектории*, то, в соответствии с утверждениями в цитатах, все вдруг резко изменяется: «закон о средних значениях» превращается в «закон о крайних» (утверждения в двойных фигурных скобках, цитаты 14-15).

*И как же в этом случае* (утверждение в двойных фигурных скобках, цитата 12) *правильно толковать закон больших чисел?*

В работе [6] поэтому поводу никаких пояснений нет: есть только утверждение, что не выполняется закон о средних значениях, но из этого автоматически следует, что закон больших чисел «надо тоже отменить». Напомним, что в законе *больших чисел, доказанным Я. Бернулли, определяется сходимость*

именно к математическому ожиданию. Вообще-то, Я. Бернулли рассматривает максимальное значение членов разложения бинома  $(a + b)^n$ : с точки зрения случайных величин – моду биномиального распределения. Но при увеличении числа  $n$  повторений опыта мода приближается к математическому ожиданию.

Продолжая «в том же духе» (т.е. утверждений в цитатах 12, 13 и 15), придем к неутешительному выводу:

**{А.43.1}** В этом случае основная аксиома теории вероятностей массовых (сноска 1 стр.1) случайных явлений – существования математической вероятности события – «не имеет места быть».

Возникает еще один очень естественный вопрос:

*А какая же теория вероятностей тогда создана?*

Это должно было бы «насторожить» и, по крайней мере, привести к мысли, что где-то что-то не так: вообще говоря, и к попытке найти, где и в какие рассуждения «заползла ошибка» – не случилось ... Правда, без механики это как-то сложно будет сделать, но «коль уж взялись за теорию путей», то, по крайней мере, с этим что это означает в механике надо бы разобраться. Мы уже писали (стр.47), что при анализе случайных блужданий частицы в существующей теории произошла «подмена» реальной прямолинейной траектории частицы зависимостями параметров движения от времени. «Малюсенькая путаница» в простых рассуждениях предопределила неверный результат:

**{А.43.2}** Исследуется не движение частицы по реальной прямолинейной траектории (т.е. проекции точек  $(t_n, S_k = \pm \Delta_s \cdot k)$  возможных абстрактных траекторий на ось  $S$  или  $X$ ), а абстрактные геометрические линии, изображающие зависимость пути от времени: действительные функции действительного аргумента, на которых распределение вероятностей не существует (вывод W.1, стр.40).

Этим все сказано: анализ случайных блужданий частицы в примере 7 показал, что распределение вероятностей для каждого значения времени  $t_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) определено на оси  $S$  (или линиях  $s = t_n$ ) и все расставил «на свои места». Конечно же, вывод W.1 следует не только и не столько из примера 7: он обусловлен предваряющим анализом построения процессов как в примерах 1 и 6, так и в примерах 3-5: без него было бы сложно понять, что происходит в искусственно организованном процес-

се случайных блужданий.

Кстати, в примерах 1 и 6 *нет экстремумов* – есть наибольшее и наименьшее значения скоростей, смещений и путей на границах процесса.

**{А.43.3}** *Экстремумы параметров движения – силы, ускорения, скорости и смещения (исключая путь, ибо, как и масса, энергия или вероятность – это положительная величина) могут появляться только тогда, когда изменяется направление параметра на противоположное направление.*

Разговор идет об *экстремумах*, ибо при *случайных блужданиях* частицы есть как *максимумы*, так и *минимумы* смещений по оси S: числа их появлений *абсолютно одинаковы*, что следует из *зеркальной симметрии* процесса относительно оси X (пример 7, п.1.3, стр.37).

Анализ теорем, доказываемых в [6], проводить не будем: *они все основаны на анализе зависимости пути от времени* (положения {А.43.2} стр.66).

Замечание 16. Насколько нам известно (это вообще-то немного), механики, используя теорию, в том числе, случайных флуктуаций, *не применяют* положений, изложенных в цитатах. Точно также как для определения *математического ожидания 2-х случайных масс* применяют формулы, определяющие *центр тяжести системы*, а не *суммируют их математические ожидания*.

## 6. Приближение к реальным процессам: общие сведения

До сих пор рассматривалось *движение* материальной точки *только по прямолинейной траектории*, что неоднократно подчеркивали в примерах 1 (положения {А.1.2}-{А.1.3}, стр.8), 6 и 7 (стр.27,30-31) и непосредственно в тексте: по существу – *одномерное движение* материальной точки. Перед построением случайного процесса в примере 7 мы говорили, что используемая схема является *искусственной* и далека от *реальности* (стр.30), поэтому перейдем к схемам, которые более близки к *реальным* случайным процессам. Рассмотрим *движение* материальной точки (центра тяжести тела) по *криволинейной траектории*, например, автомобиля или снаряда (замечание 10.1, стр.45).

Пример 13. п.1. *Реальная траектория движения* автомобиля в об-

щем случае определяется *кривой, жестко заданной* в трехмерном пространстве. Характеристики дороги (длины, повороты и др.) и автомобиля (вес, мощность двигателя и др.) являются известными величинами. Знание номинальных значений характеристик и случайные отклонения от них, определяемых документацией, можно проводить исследования движения автомобиля по данной дороге. *Связь параметров движения со временем* (например, пути  $s = s(t)$ , скорости  $v_1 = v_1(t)$  и т.п.) определяет возможные абстрактные траектории (пример 1 стр.9) при движении автомобиля по данной дороге, т.е. по реальной траектории.

Т.е. почти также как и при прямолинейном движении. Но так как *длина* дороги не изменяется, то *время  $t$  движения* по дороге из точки  $x_1, y_1, z_1$  в некоторую точку  $x_2, y_2, z_2$  дороги (реальной траектории) является *случайным параметром*.

п.2. Движение снаряда определяется исходными данными, соответствующие началу движения (начальной скоростью  $v_0$  при вылете из ствола орудия, углом наклоном ствола к горизонту и углом направления на цель, баллистическими характеристиками снаряда и т.п.), состоянием атмосферы и действием земного притяжения.

При отсутствии атмосферы скорость  $v_2 = v_0 = \text{const}$  движения снаряда по траектории постоянна, а траектория в координатах  $XOZ$  (дальность и высота полета снаряда) представляет собой часть эллипса, содержащую одну из его осей, которая перпендикулярна поверхности земли [28,250-254]: уравнение эллипса получают исключением времени  $t$  из уравнений движения. Сопротивление воздуха приводит к уменьшению скорости  $v_2(t)$  снаряда при увеличении времени, что «портит» эллипс. Применяя методы внешней баллистики (науки о движении снаряда в воздухе), можно найти теоретическую траекторию  $z = f(x)$  снаряда и в этом случае. Случайные отклонения исходных данных и состояния атмосферы определяют отклонение конкретной траектории  $z^{(n)} = f^{(n)}(x)$  при данном выстреле от теоретической траектории  $z = f(x)$ .

{А.44} Однако при каждом реальном выстреле траектория движения снаряда является одной из возможных реальных траекторий его движения, в отличие от возможных абстрактных траекторий автомобиля.

п.3. Процессы, определяющие движение автомобиля и снаряда отличаются, но есть особенность, характерная для обоих процессов: скорости  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  и  $v_z(t)$  связаны равенством  $v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t) = v_j^2(t)$  ( $j=1,2$ ) {12}. Определяющей является скорость  $v_j = v_j(t)$  автомобиля или снаряда, а скорости  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  и  $v_z(t)$  являются их проекциями на оси  $X, Y, Z$ . Для снаряда проекция  $v_y(t)$  имеет место только при боковом ветре.

Отметим, что случайность угла направления ствола орудия на цель влияет только на направление плоскости  $XOZ$ , в которой определена траектория, но не на саму траекторию.

Теперь рассмотрим схемы, которые более близки к реальным случайным процессам (сноска 19, стр.35). Проведем анализ движения материальной точки на плоскости  $XOY$  в 2-х вариантах (сноска 20, стр.35): движение

точки ограничено по одной из осей или по каждой из осей двумя отражающими стенками.

п.1. Точка начинает движение в точке  $s = 0$  в момент времени  $t = 0$  в положительном или отрицательном направлении оси  $Y$  под одним из углов  $\alpha$  или  $\beta$  к оси  $X$  соответственно.

1. Поверхность стенки абсолютно ровная. При отражении точка продолжает движение в противоположном направлении оси  $Y$  с учетом закона: угол отражения равен углу падения. После каждого отражения имеем 2-е реальные двумерные траектории движения точки. На рис.6.а они обозначены сплошной и штриховой стрелками, которые после 2-го отражения заканчиваются на линиях 5 и 10 на верхней и нижней стенке (углы в начале движения и при 1-м отражении обозначены кривыми сплошными и штриховыми стрелками) соответственно.

Рис. 6.а

Рис. 6.б

{А.45.1} Таким образом, при плоском движении точки между ограничивающими стенками получаем реальные двумерные траектории.

Пусть теперь точка начинает движение «или под углом  $\alpha$ , или под углом  $\beta$ » к оси  $X$  с вероятностями «или  $P(b_1^0)$ , или  $P(r_1^0)$ »  $P(b_1^0) + P(r_1^0) = 1$  соответственно.

{А.45.2} У точки «появилась возможность выбора».

Она имеет две степени свободы в начале движения: двигаться по одной из возможных реальных (а не абстрактных!) траекторий. Таким образом, определен случайный процесс, существенно отличающийся от процессов, рассмотренных в примерах 1, 6 и 7.

2. Теперь положим поверхность стенки неровной, такой, что отражение от них может происходить «или под углом  $\alpha$ , или под углом  $\beta$ » с вероятностями «или  $P(b_1^0)$ , или  $P(r_1^0)$ » соответственно. В точках отражения движение точки может продолжаться по направлению, определяемого одним из углов. После 1-го отражения имеем 4-е траектории: в этих точках ответвления от траекторий, определенных в п.1.1, обозначены на рис.6.а штриховыми стрелками с одним и двойным пунктирами соответственно. После 2-го отражения имеем 8-мь траекторий: в этих точках ответвления от траекторий, определенных в п.1.1, обозначены так же, как и ответвления при 1-м отражении, если углы падения и отражения равны, а в противном случае – пунктирными стрелками.

{А.45.3} К двум степеням свободы в начале движения, добавились две степени свободы, определяемые отражением точки от стенки. Это привело к удвоению числа возможных (но по-прежнему) реальных траекторий точки при каждом отражении.

3. Построение *траекторий* проведено при двух направлениях в начале движения точки, но ничто не мешает дополнить их другими значениями углов. Например, точка может также начинать движение под углом  $\beta$  или под углом  $\alpha$  к оси  $X$  при движении точки в положительном или отрицательном направлении оси  $Y$  соответственно. С учетом п.1.2, получим еще столько же реальных траекторий движения точки, которые будут зеркально симметричны относительно оси  $X$  траекториям, изображенным на рис.6.a. Семейство возможных реальных траекторий условно изображено на рис.6.b: утолщенные стрелки соответствуют рис.6.a, а тонкие стрелки – их зеркальному отражению.

В этом примере точка имеет в начале движения 4-е степени свободы: для обеспечения возможности движения точки (п.2) по одной из 4-х реальных траекторий, но можно определить опыт не с 2-мя, а с 4-мя и более элементарными событиями. Из п.1.2 следует, что при каждом отражении точки от стенки число траекторий увеличивается.

Рис. 7

По тому же принципу построены *траектории при ограничении движения* точки по двум осям (рис.7): границы обозначены утолщенными линиями. Траектории движения точки обозначены сплошной и штриховой стрелками: при отражении от правой стенки – пунктирной и штрих-пунктирной стрелками соответственно. Чтобы не

«затуманивать» рисунок, на нем изображены две траектории только при гладких стенках. Даже простое удлинение области ограничения в направлении оси  $X$  делало рисунок не очень понятным, а при попытке привести на нем стрелки, определяющие двойное отражение от неровных стенок (п.2), приводит к полной «неразберихе» на рисунке.

п.2. Отметим свойства возможных реальных траекторий, следующие из схем, изображенных на рис.6.a-b. 1. Траектории не зависят ни от вероятностей, ни от скорости точки: они определяются только углами в начале движения и при отражении точки от стенок. 2. Движение точки от стенки к стенке происходит по *прямолинейной траектории*. Отражение приводит к движению точки в противоположном направлении по оси  $Y$  (рис. 6.a-b) или по обеим осям (рис.7). 3. Даже при гладких стенках, *траектории*, определяемые движением точки под разными углами, *пересекаются* между собой: *неровность стенок увеличивает число пересечений*: пересечения изменяют траектории и их число. 4. При данном числе отражений длины траекторий зависят только от этих углов

и могут существенно отличаться. 5. В точках (обозначены темными кругами) на линиях 7-8 (рис.6.a) и линиях 5,6,... (рис.6.b) заканчиваются по две траектории. Т.е. в этих точках возможно слияние реальных траекторий. Длины траекторий – трансцендентные числа: слияние траекторий будет происходить при определенных соотношениях углов: в общем случае они могут быть просто близки друг к другу. Далее процесс возможного слияния будет продолжаться. 6. Слияние приводит к уменьшению роста числа траекторий. Например, после второго отражения имеем 8 траекторий (рис. 6.a): если в точках на линиях 7-8 траектории сливаются, то будем иметь те же 8 реальных траекторий, но (п.2.5) не все траектории сливаются.

Эти свойства характерны и при ограничении движения по обеим осям (рис.7).

п.3. 1. Вообще говоря, «остановка» на свойствах траекторий сделана только для лучшего понимания развития и сути случайного процесса. Для нас более интересны другие аспекты.

*Направление движения* точки определяется углами  $\alpha$  и  $\beta$ , значения которых может быть *любым из значений на интервале*  $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ . Следовательно, уже в начале движения точки определяется *бесконечное множество реальных двумерных траекторий движения* точки. Поверхности отражающих стенок имеют неровности (условно изображены на рис.6.a в виде тонких сплошных кривых), которые различны как для поверхностей данной стенки, так и для любых 2-х стенок: т.е. формы поверхностей имеют случайный характер.

Таким образом, бесконечное множество траекторий дополняется другим бесконечным множеством при отражении от стенок.

Итак, «анархия»: определить *траектории* (т.е. связать их с координатами) *движения* точки не то что сложная, а практически невыполнимая задача, но в «анархии» есть и «полезные вещи».

2. Во-первых, закон – *угол отражения равен углу падения* справедлив в любом случае: «его никто не отменял».

{А.46.1} Следовательно, если *движение* точки началась *под данным* углом  $\alpha$ , то ее *движение* между 2-мя *данными* поверхностями будет происходить *по конкретной реальной траектории*. Если *движение* *другой* точки началось *под таким же* углом, то ее *движение* будет определяться *этой же траекторией*.

«Заставить» двигаться молекулу (или атом) под каким-то определенным углом невозможно. Они двигаются так «как им вздумается» – по случайным произвольным направлениям и с произвольными скоростями – такова их природа. Мало того, даже большой (например, бильярдный) шар «запустить» по одной и той же траектории невозможно. Тем не менее, каждая реализация определяет реальную двумерную траекторию.

3. Во-вторых. *Бесконечное множество реальных траекторий* означат (п.1.2) *бесконечное число степеней свободы в начале движения* точки.

Отсюда следует:

{А.46.2} *Бесконечное число степеней свободы в начале движения точки определяет возможность одновременного движения огромного числа частиц, каждая из которых имеет свою реальную траекторию.*

*Существенное отличие от прямолинейного движения материальной точки* (замечание 13.4, стр.58). Это не привело нас к решению задачи, ибо стало еще хуже. При движении 2-х и более частиц по реальным траекториям становится «неизбежной их встреча»: она может произойти не только в точках отражения, но и в точках пересечения траекторий (рис.6.а-б), хотя пересечения никак не влияют на число траекторий. Учитывая огромное число частиц и то, что движение частиц происходит по разным направлениям и с разными скоростями, получим «первозданный хаос».

Можно было бы «запаниковать», но спасла гениальность Дж. Максвелла, который увидел в «первозданном хаосе» достаточно «жесткий» порядок. Это и позволило ему решить задачу (для трехмерного случая, ибо он и является реальным), плоским аналогом которой является схема, изображенная на рис.7.

п.4. *Возможные реальные траектории* не позволяют определить ни одного из параметров движения частицы по любой из обозначенных траекторий. Для этого необходимо перейти к возможным абстрактным траекториям, т.е. ввести ось времени  $T$  перпендикулярно плоскости  $XOY$  и задать один из параметров движения частицы по реальным траекториям. Занятие бессмысленное, ибо траектории неизвестны.

Отметим, что *двумерные траектории движения* частицы можно представить в виде проекций на оси  $X$  и  $Y$ . Например, задать зависимость скорости от времени по осям  $X$  и  $Y$ :  $v_{x,\alpha} = v_{x,\alpha}(t) = v_\alpha \cdot \sin \alpha$  и  $v_{y,\alpha} = v_{y,\alpha}(t) = v_\alpha \cdot \cos \alpha$ , где  $v_\alpha = v_\alpha(t)$  – скорость по направлению движения, определяемого углом  $\alpha$  к оси  $X$ . Тогда скорость на участках реальных траекторий, соответствующих направлению угла  $\alpha$  определяется равенством  $v_{x,\alpha}^2 + v_{y,\alpha}^2 = v_\alpha^2$  {12.а}. Очевидно, что равенство справедливо для движения частицы под произвольным углом  $\alpha$  к оси  $X$ . В 3-х мерной системе координат  $XYZ$ , проекции скоростей на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  связаны равенством  $v_x^2 + v_{y,\alpha}^2 = v_\alpha^2$  {12.б}, где – скорость частицы по направлению движения под углами  $\alpha$  к плоскости  $XOY$  и  $\beta$  к плоскости  $XOZ$ .

{А.47} Равенства определяют связь проекций скорости  $v = \text{const}$  на оси координат при движении частицы по реальной прямолинейной траектории: в принципе, в трехмерном пространстве можно задать две из величин, а третью определить из равенства {12}, т.е. две из трех проекций скорости можно считать независимыми.

1. Именно в трехмерном пространстве существуют реальные траектории частиц.
2. Например, полагая, как и в примере 7, что точка движется по реальной траектории с постоянной скоростью  $v = \text{const}$ , можно задать скорость только по одной из осей, а по 2-й оси она определяется из равенств {12.а}. Можно ограничить изменение скорости  $v$ :



например, положить, что она является постоянной, либо определяется линейной или степенной зависимостью от времени и т.д. При этом заданная скорость по оси, не должна превышать скорость  $v$ .

Дж. К. Максвелл впервые (сноска 10 стр.17) рассмотрел стационарное состояние газа в замкнутом объеме (например, ограниченном парами плоскостей перпендикулярными каждой из осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ ) и решил задачу о распределении скоростей молекул.

Отметим: если ограничить движение частицы на плоскости двумя стенками по осям  $X$  и  $Y$  (рис.7), то получим плоский аналог движения частицы в замкнутом объеме.

Законы состояния идеального газа. **1. Изотермическое состояние** (закон Бойля-Мариотта (1662г., 1676г.) — для данной массы  $m=\text{const}$  газа при, неизменной температуре  $T=\text{const}$  произведение давления газа на его объем постоянно  $p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const}$ ). **2. Изобарное состояние** (закон Гей-Люссака (1802г.) — для данной массы газа  $m=\text{const}$ , при неизменном давлении  $p=\text{const}$  отношение объема газа к его абсолютной температуре постоянно  $V_1/T_1 = V_2/T_2 = \text{const}$ ), **3. Изохорное состояние** (закон Шарля (1878г.) — для данной массы газа  $m=\text{const}$ , при постоянном объеме  $V=\text{const}$  отношение давления газа к его абсолютной температуре остается неизменным  $p_1/T_1 = p_2/T_2 = \text{const}$ ).

Закон Дальтона (1801г.) — Давление смеси химически не взаимодействующих идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $p_1, p_2, \dots, p_m$  этих газов  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_m$ .

Закон Авогадро (1811г.) — моли любых газов, при одинаковых температуре и давлении, занимают одинаковые объемы.

Б. Клапейрон, объединил законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Шарля, и вывел уравнение состояния идеального газа  $pV/T = \text{const}$  ( $B$  — газовая постоянная, различая для разных газов)

Д.И. Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнес уравнение к одному молю, используя молярный объем  $pV = RTm/M$  ( $R$  — универсальная газовая постоянная)

Может быть, нам просто кажется, но такого количества законов, связанных с именами конкретных ученых, нет ни в одном разделе физики. За каждым из законов — кропотливая работа в лабораториях, тщательные измерения, длительные аналитические размышления и точные расчеты.

## Список литературы

1. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Учебник — Изд. 6-е. — М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1988г. — 448с
2. Л.Е Майстров. Теория вероятностей. Исторический очерк.— М: Наука, 1967. — 321с
3. О.Б. Шейнин. Теория вероятностей до П. Л. Чебышёва // Историко-математические исследования. — М.: Наука, 1978. — № 23. — с. 284-306
4. Я. Бернулли. О законе больших чисел. — М: Наука, 1986. — 176с

5. Википедия: История теории вероятностей.
6. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 528с.
7. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ. – М. «Мир» 1984. 738с.
8. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1984г. – 834с
9. А.Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. – Изд.2-е – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1980г. – 120с.
10. И.И. Бондарчук. Теория вероятностей и теория надежности: результаты уточнения основных понятий. – Вена. “East-West” Association for Advanced Studies and Education, 2017. – 166с
11. С.Н. Берштейн. Теория вероятностей. – Изд. 2-е – М.-Л. Государственное технико-теоретическое издательство, 1927, 364с
12. Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Изд. 3-е – М. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 511с
13. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей.- Изд. 7-е – М. Издательский центр «Академия», 2003. – 576с
14. А.А. Марков. Исчисление вероятностей. – Изд.4-е – М.-Л.: – Госиздат, – 1924. – 589с.
15. В.И. Гливенко. Курс теории вероятностей. – М.-Л. Государственное объединенное научно-техническое издательство, 1939г. ? 220с.
16. В.П. Чистяков. Курс теории вероятностей. – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 224с
17. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М. “Наука”, 1980г. – 976с
18. А.А. Боровков. Теория вероятностей: учебное пособие для вузов. – Изд.2-е – М. – «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 432с.
19. И.И. Бондарчук. Часть I. Теория событий: критика исходных понятий, создание новой исходной системы.
20. В.И. Лотов. Теория вероятностей. Конспект лекций для студентов механико-математического факультета Новосибирского Государственного Университета
21. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 – Изд. 6-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1966г. – 607с
22. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 – Изд. 7-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 800с
23. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 – Изд. 5-е, стереотипное. – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1969г. – 656с
24. Р. Дедекин. Непрерывность и иррациональные числа. – Изд. 4-е.– Одесса. Mathesis, 1923. – 44с
25. С.А. Ануфриенко. Введение в теорию множеств и в комбинаторику, Учебное пособие. – Екатеринбург. УрГУ, 1998. – 62с
26. И.И. Бондарчук. Часть II. О распределениях скоростей Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна, Ферми-Дирака
27. М.М. Филоненко-Бородич, С.М. Изюмов, Б.А. Олисов, Л.И. Мальгинов. Курс сопротивления материалов. Часть первая. – Изд. 5-е – М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961г. – 656с

28. М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. – Изд.5-е – М. “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы, 1967г. – 480с
29. И.И. Бондарчук. Часть III. Теория случайных величин: критика существующих исходных понятий и создание новой исходной системы
30. И.И. Бондарчук. Часть IV. Преобразование законов распределения случайных величин
31. И.И. Бондарчук. Критика теории вероятностей. Часть V. Числовые характеристики случайных величин
32. И.И. Бондарчук. Критика теории вероятностей. Часть VI. Виды зависимости случайных величин