Statistik - SoSe 2025

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Grundbegriffe

1.1 Ergebnismenge und Ereignisse

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zur Ergebismenge Ω (Groß Omega) zusammen.

Bsp. 1.1: Zweimaliges Werfen eines Würfels

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}\\ &= \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}\\ &= \{1,\ldots,6\} \times \{1,\ldots,6\} = \{1,\ldots,6\}^2\end{aligned}$$

Bsp. 1.2: Ziehung der Lottozahlen (6 aus 49)

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_6) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 49\}, 1 \leq i \leq 6, \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_6\}$$

Bsp. 1.3: Verkaufszahlen. Ein Laden erhält morgens 3 Tageszeitungen Z_1, Z_2, Z_3, und zwar 100 bzw. 200 bzw. 250 Stück. Die verkauften Anzahlen sind dann als Ergebis eines Zufallsexperiments zu interpretieren.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_1 \in \{0, 1, \dots, 100\}, \omega_2 \in \{0, 1, \dots, 200\}, \omega_3 \in \{0, 1, \dots, 250\}\} \\ &= \{0, 1, \dots, 100\} \times \{0, 1, \dots, 200\} \times \{0, 1, \dots, 250\}\end{aligned}$$

Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge. Ereignisse werden zunächst verbal beschrieben und lassen sich dann als Teilmengen von Ω auffassen.

In Bsp. 1.1:

- Ereignis E: Augensumme ist 10; zugeordnete Teilmenge von $\Omega : E = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$
- E: Pasch; $E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
- E: mindestens eine 6; $E = \{(6, 1), (6, 2), \dots (6, 6), (5, 6), \dots, (1, 6)\}$

In Bsp. 1.3:
Ereignis A: Von jeder der 3 Zeitungen werden mindestens 50 Stück verkauft
Teilmenge: $A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_1 \leq 50, \omega_2 \leq 50, \omega_3 \leq 50\} = \{50, 51, \dots, 100\} \times \{50, 51, \dots, 200\} \times \{50, 51, \dots, 250\}$

Ist $\omega \in \Omega$ das betrachtete Ergebnis eines Zufallsexperiments und ist $E \subset \Omega$ ein Ereignis, so sagt man *E ist eingetreten*, falls $\omega \in E$ und *E ist nicht eingetreten*, falls $\omega \notin E$.
Übertrage Begriffe der Mengenlehre auf das zufällige Eintreten von Ereignissen. (Dies wird durch die Zuordnung *Ereignis* $\Leftrightarrow$ *Teilmenge von* Ω möglich.)

Mengenschreibweise	**Interpretation für Ereignisse**
$A = \Omega$	A ist ein sicheres Ereignis (A tritt sicher ein)
$A = \emptyset$	A ist ein unmögliches Ereignis (A tritt nicht ein)
$A^c = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$ $\bar{A} = A^c$ (andere Schreibweise)	Komplementärereignis zu A (A tritt nicht ein)
$A \cap B$	A geschnitten B. (A und B treten ein.)
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n$	Durchschnitt der Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ (Jedes dieser Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ tritt ein.)
$A \cap B = \emptyset$	A und B sind disjunkt. (A und B treten sicher nicht zusammen ein.)
$A \cup B$	Vereinigung von A und B. (A oder B tritt ein. „Oder“ ist nicht ausschließend.)
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n$	Mindestens eines der Ereignisse tritt ein.
$A \subset B$	Implikation: Aus dem Eintreten von A folgt das Eintreten von B.
$A \backslash B = A \cap B^c$	A tritt ein, aber B tritt nicht ein.

Einelementige Teilmengen $\{\omega\} \subset \Omega$ (die nur einen Punkt enthalten) nennt man Elementarereignisse.

Bsp. 1.4: Einmaliges Werfen eines Würfels; $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$
Ereignis A: „Augenzahl ist gerade“ $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$, Ereignis B: „Augenzahl ist mindestens 4“ $\Rightarrow B = \{4, 5, 6\}$

Schreibweise	Interpretation
$A^c = \{1, 3, 5\}$	Augenzahl ist ungerade
$B^c = \{1, 2, 3\}$	Augenzahl ist kleiner als 4
$A \cap B = \{4, 6\}$	Augenzahl ist gerade und mind. 4
$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$	Augenzahl ist gerade oder mind. 4
$B \backslash A = B \cap A^c = \{4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \{5\}$	Augenzahl ist mind. 4, aber nicht gerade.
$A \backslash B = A \cap B^c = \{1, 3, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{1, 3\}$	Augenzahl ist nicht gerade, aber mind. 4

1.1.1 Rechenregeln für Mengen

Für beliebige Mengen A,B,C gilt:

- Kommutativgesetze: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativgesetze: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributivgesetze: $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Komplement: $(A^c)^c = A$
- De Morgansche Regeln: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Hinweis: Um das Komplement verwenden zu können benötigt man eine bestimmte Obermenge.

Allgemeiner: Für beliebige $A_1, \ldots, A_n$ und B gilt:

- Kommutativ- und Assoziativgesetze gelten, da die Reihenfolge keine Rolle spielt.
- $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$
- $(\bigcap_{i=1}^n A_i) \cup B = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B)$
- $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c, (\bigcap_{i=1}^n A_i)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$
- Für beliebige Mengen A,B gilt $A \subset B \Leftrightarrow A^c \supset B^c$

Beweis für $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$, wobei die Komplemente bzgl. Ω gebildet werden.
Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}
\omega \in (\bigcup_{i=1}^n A_i)^c &\Leftrightarrow \omega \notin \bigcup_{i=1}^n A_i \\
&\Leftrightarrow \omega \text{ ist in keiner der Mengen } A_1, \ldots, A_n \text{ enthalten.} \\
&\Leftrightarrow \omega \in A_1^c \text{ und } \omega \in A_2^c \text{ und} \ldots \text{und } \omega \in A_n^c \\
&\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i=1}^n A_i^c
\end{aligned}$$

1.2 Wahrscheinlichkeitsmaße

Def. 1.1: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ einer Ergebnismenge. Eine für alle Ereignisse $A \subset \Omega$ definierte reelwertige Funktion P heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf Ω falls sie die folgenden Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfüllt:

(i) $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse $A < \Omega$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) σ-Additivität: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ gilt für jede endliche oder unendliche Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$

P(A) heißt *Wahrscheinlichkeit* von A (probability). (Ω, P) heißt *Wahrscheinlichkeitsmodell* für das Zufallsexperiment. (i)-(iii) heißen *Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung* oder *Kolmogorov-Axiome*.

Bsp. 1.5: Zweimaliges Werfen eines Würfels.
$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$
Für $A \subset \Omega$ sei $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{36}$, wobei $|A| =$ Anzahl der Elemente von A. Dann ist P ein W-Maß, denn P ist reelwertig
(i) $P(A) \geq 0$ für alle $A \subset \Omega$
(ii) $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$
(iii) Sind $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkte Teilmengen von Ω, so ist $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i_1}^n |A_n|$, also $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \frac{|\bigcup_{i=1}^n A_i|}{|\Omega|} = \frac{\sum_{i_1}^n |A_n|}{|\Omega|} = \sum_{i=1}^n \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.
Für jede unendliche Folge von paarweise disjunkten Teilmengen $A_1, \dots, A_n$ von Ω existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $A_i = \emptyset$ für alle $i > N$, da Ω endlich ist. Es gilt also:
$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\mathbb{N}} A_i)$
$\Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\mathbb{N}} A_i) = P(\sum_{i=1}^\infty A_i)$
$P(A_i) = P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$ für alle $i \notin \mathbb{N}$
Für das Ergebnis A: „Augensumme ist 10“, also $A = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ ergibt sich $P(A_i) = \frac{|A|}{|Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
Für das Ergebnis B: „Pasch“, also $B = \{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$ ergibt sich $P(A) = \frac{|A|}{|Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ist allgemeiner $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige endliche Menge und haben alle Ergebnisse (genauer: alle Elementarereignisse) dieselbe Wahrscheinlichkeit, dann folgt aus Axiomen (ii) und (iii)

$$P(\{w\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

und daher wegen Axiom (iii)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Also

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in A}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

P(A) heißt *Laplace-Wahrscheinlichkeit* von A.

Bsp. 1.6 Roulette. Wenn $\Omega = \{0, 1, ..., 36\}$ ist die W'keit, dass eine ungerade Zahl fällt, $P(\{1,3,5,...,35\}) = \frac{|\{1,3,5,...,35\}|}{|\Omega|} = \frac{18}{37}$.

Grundlegendes Prinzip des Zählens ... was heißt das?

Multiplikationsregel: Betrachte k Aufgaben. Nimm an, die 1. Aufgabe kann auf n_1 Arten erledigt werden; danach kann die 2. Aufgabe auf n_2 Arten erledigt werden;...; danach kann die k-te Aufgabe erledigt werden. (Annahme: $n_1, n_2, ..., k$ sind unabhängig.)
Die Anzahl der Möglichkeiten, alle k Aufgaben zu erledigen, ist $n_1 * n_2 * ... * k$

Bsp. 1.7: Eine faire Münze wird n-mal geworfen. Ergebnisse sind Folgen von Kopf(K) und Zahl(Z) der Länge n: $\Omega = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \{K, Z\}, i = 1, ..., n\}$. Verwende Laplace-Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{2^n}$ für alle $A \in \Omega$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von A_j: „K fällt im j-ten Wurf zum 1. Mal“?

$$A_j = \{x_1, ..., x_n\} : x_i = Z \text{ für } 1 \leq i \leq j-1; x_j = K; x_i\{K, Z\} \text{ für } j+1 \leq i \leq n$$

$$A_j = 1^{j-1} * 1 * 2^{n-j} = 2^{n-j} \to P(A_j) = \frac{|A_j|}{|\Omega|} = \frac{2^{n-j}}{2^n}$$

Bsp. 1.8: Geburtstagsproblem. W'keit, dass von k Personen 2 oder mehr am selben Tag im Jahr Geburtstag haben? $2 \leq k \leq 365$ ohne (29.2) und verwende Laplace-W'keiten mit $\Omega = \{x_1, ..., x_k\} : x_i \in \{1, ..., 365\}, i = 1, ..., k$, also $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{365}$ für alle $A \subset \Omega$. Sei $B = \{(x_1, ..., x_k) \in \Omega : \text{mind. 2 der } x_i \text{ stimmen überein}\}$

$$\begin{aligned}
|B^c| &= \{(x_1, \dots, x_k) \in \Omega : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\} \\
&= 365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - k + 1) \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} (365 - i) \\
\to P_k = P(B) &= \frac{|\Omega| - |B^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{1}{365} \times \prod_{i=0}^{k-1} (365 - i) \\
&= 1 - \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \frac{i}{365}) \text{ z.B. } P_{30} = 0,705
\end{aligned}$$

1.2.1 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße

1.1 $P(A^c) = 1 - P(A)$, denn $1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{(iii)}{=} P(A) + P(A^c) \Rightarrow$ (1.1)

1.2 $P(\emptyset) = 0$, denn $P(\emptyset) = P(\Omega^c) \overset{(1.1)}{=} 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

1.3 Falls $A \subset B$, dann $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$, denn: Falls $A \subset B$, dann $B = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \overset{A \subseteq B}{=} A \cup (B \cap A^c) \Rightarrow P(B) \overset{(iii)}{=} P(A) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B \backslash A) \Rightarrow$ (1.3). Beachte: $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$ gilt im Allgemeinen nicht ohne die Voraussetzung $A \subset B$.
Bsp.: $A = \Omega$, $B = \emptyset \Rightarrow P(B \backslash A) = P(\emptyset \cap \Omega^c) = P(\emptyset) \overset{(1.2)}{=} 0$; $P(B) - P(A) = P(\emptyset) - P(\Omega) = 0 - 1 = -1 \neq 0$

1.4 Falls $A \subset B$, dann $P(A) \leq P(B)$ *(Monotonie)*, denn: Falls $A \subset B$, dann $P(B) - P(A) \overset{(1.3)}{=} P(B \backslash A) \overset{(i)}{\geq} 0$

1.5 Verallgemeinerung von (1.3): $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$, denn: $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup A^c)) = P((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c) = P(A \cap B) + P(B \backslash A) \Rightarrow$ (1.5)

1.6 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, denn: $(A \cup B) \backslash B = (A \cup B) \cap B^c = (A \cup B) \cap B^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = A \backslash B$ und $A(A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = A \backslash B$. Daher ist $(A \cup B) \backslash B = A \backslash (A \cap B) \Rightarrow P((A \cup B) \backslash B) = P(A \backslash (A \cap B)) \overset{(1.3)}{\Rightarrow} P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow (1.6)$

1.7 Erweiterung von 1.6: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

1.8 Für alle Ereignisse $A_1, A_2, \dots$ gilt
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
Dies ist als **Boolesche Ungleichung** bekannt. Bei Disjunktheit gilt Gleichheit. Beweis in der Übung.

Bsp. 1.9: Ein Geschäft verkauft zwei Produkte. Für die zwei Ereignisse A_i: „Produkt ist (am Abend) ausverkauft", $i = 1, 2$ ist bekannt: $P(A_1) = \frac{1}{8}$, $P(A_2) = \frac{1}{10}$, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{20}$. Wie groß sind die W'keiten von:

B_1 : „Produkt 1 ausverkauft, aber Produkt 2 nicht"? *(Lös: $\frac{3}{40}$)*

B_2 : „genau ein Produkt ausverkauft"? *(Lös: $\frac{5}{40}$)*

B_3 : „mindestens ein Produkt ausverkauft"? *(Lös: $\frac{7}{40}$)*

B_4 : „höchstens ein Produkt ausverkauft"? *(Lös: $\frac{19}{20}$)*

Bem. 1.1: Ist Ω nicht diskret, so ist es aus mathematischen Gründen in manchen Andwendungen nicht möglich, das W.-Maß P für alle Teilmengen von Ω zu definieren. Jedoch lässt sich der Definitionsbereich von P stets so groß wählen, dass alle praktisch interessanten Teilmengen von Ω erfasst sind. Ist Ω diskret, so lässt sich das W.-Maß stets für alle Teilmengen von Ω definieren (vgl. Satz 1.1).

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Oft von Interesse: W'keit des Ereignisses unter der Annahme, dass ein anderes Ereignis eintritt bzw. eingetreten ist. Dafür definieren und berechnen wir sog. *bedingte Wahrscheinlichkeiten.*

Bsp. 2.1: 100 Personen

	mit Bachelorabschluss	ohne Bachelorabschluss	gesamt:
hohes Einkommen	21	19	40
niedriges Einkommen	15	45	60
	36	64	100

Wird von den 100 Personen eine zufällig ausgewählt, ergeben sich für die Ereignisse H: „hohes Einkommen" und B: „mit Bachelorabschluss" die Laplace-W'keiten:
$P(H) = \frac{40}{100}$, $P(B) = \frac{36}{100}$, $P(H \cap B) = \frac{21}{100}$

Intuitiv: W'keit für H, wenn bekannt ist, dass die Person einen Bachelorabschluss hat.
Quotient: Anzahl der Personen mit hohem Einkommen von denen mit Bachelorabschluss / Anzahl der Personen mit Bachelorabschluss $= \frac{21}{36}$. Bedingte W'keit ist also hier:

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B| \backslash \Omega}{|B| \backslash \Omega} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Entsprechend definiert man allgemeiner

Def. 2.1: Sei Ω eine Ergebnismenge und P ein W'Maß auf Ω. $B \subset \Omega$ sei ein EReignis mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, A \subset \Omega$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von A unter der Bedingung B.

In Bsp. 2.1:

$$P(H|B) = \frac{P(H \cap B)}{P(B)} = \frac{21}{36}$$
$$P(B|H) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} = \frac{21}{40}$$

Bem. 2.1: Manchmal ist es einfach, direkt $P(A|B)$ und $P(B)$ zu bestimmen, um damit $P(A \cap B)$ zu bestimmen: $(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Bsp. 2.2: Eine Urne enthält s schwarze und r rote Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen entnommen. Es seien
A_1: „erste entnommene Kugel ist schwarz"
A_2: „zweite entnommene Kugel ist rot"
Berechne $P(A_1 \cap A_2)$:

$$P(A_1) = \frac{s}{r+s}$$
$$P(A_2|A_1) = \frac{r}{r+s-1}$$
$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{s \cdot r}{(r+s)(r+s-1)}$$

Verallgemeinerung von 2.1:

2.1.1 Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten

Für n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

sofern $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$.

Denn: Die Bedingung $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ stellt sicher, dass die bed. W'keiten definiert sind, und es gilt

$$\begin{aligned} &P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \\ =&P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \cdots \cdot \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})} \\ =&P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

Bem. 2.2: Betrachtet man bei festem $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$ $P(A|B)$ als Funktion von A, dann ist $P(A|B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω (s.Tut., A14).

Daher lassen sich auch für $P(A|B)$ die Eigenschaften (1.1)-(1.8) benutzen. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} P(A^c|B) &= 1 - P(A|B) \\ P(A_1|B) &\leq P(A_2|B), \text{falls} A_1 \subset A_2 \\ P(\emptyset|B) &= 0 \\ p(A_1 \cup A_2|B) &= P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B) \end{aligned}$$

2.1.2 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse, die eine Zerlegung von Ω bilden [d.h. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$] und es sei $P(A_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \text{ für alle Ereignisse } B \subset \Omega$$

Denn:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) \\ &= P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \\ &= P(B) \end{aligned}$$

2.1.3 Satz von Bayes

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse, die eine Zerlegung von Ω bilden und es sei $P(A_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot A_i} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

Denn:

$$\begin{aligned} \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot A_i} &\overset{(2.1.2)}{=} \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} \\ &\overset{(B.2.1)}{=} \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} \\ &\overset{(D.2.1)}{=} P(A_k|B) \end{aligned}$$

Bsp. 2.3: Betrachte für eingehende Emails die folgenden 3 Ereignisse:
A_1: „Spam“
A_2: „niedrige Priorität“
A_3: „hohe Priorität“
A_1, A_2, A_3 bildet eine Zerlegung. Es gil $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = 0,1$.

Für das Ereignis B: „E-mail enthält das Wort ‚gratis'“gelte ?$(B|A_1) = 0,8$, $P(B|A_2) = 0,05$, $P(B|A_3) = 0,05$. (W'keiten wurden durch Beobachtung des Postfachs errechnet.)
$\Rightarrow$ Was ist P(B)?

Von dem Satz der totalen W'keit gilt

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\ &= 0,8 \cdot 0,6 + 0,05 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,1 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Angenommen, eine E-mail ist eingegangen, die das Wort „gratis“ enthält. Wie groß ist die W'keit, dass es sich um Spam handelt?

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) = \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,5} = 0,96}$$

Analog,

$$\begin{aligned} P(A_2|B) &= \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)} = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,5} = 0,03 \\ P(A_3|B) &= \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)} = \frac{0,05 \cdot 0,1}{0,5} = 0,01 \end{aligned}$$

Bem. 2.2: In den Situationen des Satzes von Bayes ($A_1, \ldots, A_n$ bilden eine Zerlegung von Ω, $B \subset \Omega$, $P(B) > 0$) bezeichnet man $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ auch als *a-priori-Wahrscheinlichkeiten* und $P(A_1|B), P(A_2|B), \ldots, P(A_n|B)$ als *a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten.*

Bsp. 2.4: Ein medizinischer Test für eine Krankheit liefert bei erkrankten Personen mit hoher W'keit 0,99 das richtige Resultat „positiv“. Bei Gesunden liefert der Test mit geringer W'keit 0,02 das falsche Resultat „positiv“. 0,3% der Personen aus der Bevölkerung sind krank (a priori). Wie groß ist die bedingte W'keit, dass jemand krank ist (a posteriori), wenn das Testergebnis positiv ist?
Seien
A_1: „krank“
A_2: „gesund Priorität“
B: „positiv“
Geg. also $P(A_1) = 0,003$ (a priori), $P(A_2) = 1 - 0,003 = 0,997$, $P(B|A_1) = 0,99$, $P(B|A_2) = 0,02$.
Formel von Bayes liefert

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} \\ &= \frac{0,99 \cdot 0,03}{0,99 \cdot 0,003 + 0,02 \cdot 0,997} \\ &= 0,13 \qquad \text{(a posteriori)} \end{aligned}$$

2.2 Unabhängigkeit

Intuitiv: Ereignisse A und B sind unabhängig, falls die Kenntnis über das Eintreten des einen keine Information über die W'keit des Eintretens des anderen liefert:

$P(A|B) = P(A)$ und $P(B|A) = P(B)$, $P(A), P(B) > 0$. Beide Gleichungen sind Äquivalent zu $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Nehme diese Gleichung für die Definition:

Def. 2.2: Zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bsp. 2.5: Zweimaliger Würfelwurf. Der erste Wurf ist unabhängig vom Zweiten.
Also sind z.B.
A_1: „im ersten Wurf 6“
A_2: „im zweiten Wurf mind. 3“
unabhängige Ereignisse und $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$ anwendbar.

Bem. 2.4: Sind A und B unabhängig, dann gilt auch

(i) A und B^c sind unabhängig.

(ii) A^c und B sind unabhängig.

(iii) A^c und B^c sind unabhängig.

Nachweis von (i):

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &\overset{(1.5)}{=} P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(A) \cdot P(B^c) \end{aligned}$$

Def. 2.3: Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine endliche oder unendliche Folge von Ereignissen. $A_1, A_2, \ldots$ heißen *paarweise unabhängig*, falls

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

für jedes Paar von Indizes $i \neq j$.
$A_1, A_2, \ldots$ heißen *unabhängig*, falls für jede endliche Auswahl von verschiedenen Indices i_1, i_k gilt

$$P(i_1 \cap i_k) = P(i_1)P(i_k)$$

Bem.2.5: Unabhängigkeit $\Rightarrow$ paarweise Unabhängigkeit, aber die Implikation gilt NICHT in die andere Richtung. Paarweise Unabhängigkeit ist außerdem oft zu schwach, um interessante Resulatate zu erhalten.

Bsp.2.6: Zweimaliger Würfelwurf.
A: „erste Augenzahl gerade“
B: „zweite Augenzahl ungerade“
C: „beide Augenzahlen gerade oder beide ungerade“
$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3 * 3}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= \frac{3 * 3}{36} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= \frac{3 * 3}{36} = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

$\Rightarrow A, B, C$ sind paarweise unabhängig. Aber $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0 < P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \Rightarrow A, B, C$ sind nicht unabhängig.

Bem.2.6: Sind $A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse, und ist für jedes $i \in 1, \ldots, n B_i = A_i$ oder $B_i = A_i^c$, dann sind $B_1, \ldots, B_n$ unabhängig.

Bsp.2.7: Drei Personen werden gefragt, ob sie einem bestimmten Vorschlag zustimmen. Jede Person antwortet mit W'keit 0,8 „nein“ und mit W'keit 0,2 „ja“Ḋie Antworten sind unabhängig. Wie groß ist dann die W'keit, dass alle drei Personen dieselbe Antwort geben?

Sei A_i das Ereignis. Person i antwortet „ja“ $i = 1, 2, 3$. Dann gilt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,2$ und A_1, A_2, A_3 sind unabhängig.
Gesuchte W'keit ist

$$\begin{aligned}
P([A_1 \cap A_2 \cap A_3] \cup [A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c]) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\
&= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) \\
&= 0,2^3 + 0,8^3 = 0,52
\end{aligned}$$

3 Zufallsvariablen

3.1 Zufallsvariablen

Eine *Zufallsvariable* beschreibt eine reellwertige Größe, die vom Zufall, d.h. von ω abhängt. Genauer:

Def.3.1: Sei Ω eine Ergebnismenge. Eine Zufallsvariable (ZV) X ist eine Abbildung von Ω nach $\mathbb{R}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Bsp.3.1: Zweimaliger Münzwurf

Ω	$X(w) =$Anzahl von K
$\omega_1 = (K, K)$	$X(\omega_1) = 2$
$\omega_2 = (K, K)$	$X(\omega_2) = 1$
$\omega_3 = (K, K)$	$X(\omega_3) = 1$
$\omega_4 = (K, K)$	$X(\omega_4) = 0$

Ist $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$ für alle $\omega \in \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$, dann lassen sich die W'keiten

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= \text{W'keit, dass die ZV X den Wert n annimmt} \\
&= \text{W'keit, dass n-mal Kopf fällt} \\
&= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = n\}) n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

berechnen.

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} \\
P(X = 1) &= P(\{\omega_2, \omega_3\}) = \frac{1}{2} \\
P(X = 2) &= P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \\
P(X = 3) &= P(\emptyset) = 0
\end{aligned}$$

Notation: Für ZV X,Y

$$\begin{aligned}
\{X = a\} &= \{\omega \in \omega : X(\omega) = a\}, \quad a \in \mathbb{R} \\
\{X < a\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \\
\{X \in A\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathbb{R} \\
\{X \in A, Y \in B\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A \text{ und } Y(\omega) \in B\}, \quad A, B \in \mathbb{R} \\
P(X \geq a) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}) \\
P(X \leq a, Y \leq b) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a \text{ und } Y(\omega) \leq b\}), \quad a, b \in \mathbb{R} \\
P(X > Y) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\})
\end{aligned}$$

usw.

Def. 3.2:
(a) ZV $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, falls

$$(*) \qquad P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) * \cdots * P(X_n \in B_n)$$

für alle $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}$.
(b) Ist $X_1, X_2, \ldots$ eine unendliche Folge von ZV, dann heißen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig, falls $(*)$ für alle $n \geq 2$ gilt.

Bem. 3.1: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZV und sind $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse, so dass Eintreten von A_i nur von X_i abhängt, $i = 1, \ldots, n$, dann sind $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig.

Bsp. 3.2: Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige ZV. Dann sind die Ereignisse $A_1 = \{X_1 < 3\}$, $A_2 = \{X_2^2 > 7\}$, $A_3 = \{4 < |X_3| < 7\}$ unabhängig.
Wählt man in (*) z.B. $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 7\}$, $B_3 = \mathbb{R}$ ergibt sich:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, X_3 \in B_3) \quad = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2) \cdot P(X_3 \in B_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot 1$$

3.1.1 Satz 3.1:

$X_1, \ldots, X_n$ seien ZV, die jeweils höchstens abzählbar viele Werte annehmen. Dann gilt: $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig, gdw

$$P(X_1 = b_1, \ldots, X_n = b_n) = P(X_1 = b_1) \ldots P(X_n = b_n)$$

für alle $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Bsp. 3.3: X_1 sei ZV mit $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$ und ZV X_2 sei definiert durch $X_2 = X_1^2 + 2$.
Für $b_1 = 0$ und $b_2 = 2$ gilt $P(X_1 = b_1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}$, $P(X_2 = b_2) = P(X_1^2 + 2 = 2) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}$