ROYAUME DU MAROC
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de l'Innovation
Université Hassan II de Casablanca
Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique Mohammedia

ENSET

المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والابتكار
جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
المدرسة العليا لأساتذة التعليم التقني
المحمدية

Département Mathématiques et Informatique

Concours d'accès en 1ère Année du Master de Recherche

Session Juillet 2023

Systèmes Distribués et Intelligence Artificielle : SDIA
Epreuve : Mathématiques
Durée de l'épreuve : 2 H

Consignes importantes à respecter :

1- L'épreuve est un QCM dont les réponses doivent être reportées dans la grille de réponses fournie.

2- Dans la grille de réponses, il est nécessaire de préciser votre numéro d'examen dans la grille relative au numéro d'examen en remplissant les cases correspondantes aux 4 chiffres composant à votre numéro d'examen. Exemple : pour un numéro d'examen 0129, il sera représenté dans la grille comme suit :

Num Examen			
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9

- Le premier chiffre 0 du numéro de l'examen (0129) sera représenté en remplissant la case portant le chiffre 0 de la première colonne de grille
- Le deuxième chiffre 1 du numéro de l'examen (0129) sera représenté en remplissant la case portant le chiffre 1 de la deuxième colonne de grille
- Le troisième chiffre 2 du numéro de l'examen (0129) sera représenté en remplissant la case portant le chiffre 2 de la troisième colonne de grille
- Le quatrième chiffre 9 du numéro de l'examen (0129) sera représenté en remplissant la case portant le chiffre 9 de la quatrième colonne de grille

3- Pour une question donnée du QCM, une bonne réponse est possible parmi les 4 choix : A, B, C et D.

4- Pour répondre aux questions, dans la grille de réponses, Il faut remplir la case correspondante à la bonne réponse associée à chaque question. Exemple : pour un QCM à 3 Questions Q1, Q2 et Q3 dont les bonnes réponses respectives sont B pour Q1, D pour Q2 et C pour Q3, la grille sera remplie alors de la manière suivante :

Q - 1	A	B	C	D
Q - 2	A	B	C	D
Q - 3	A	B	C	D

5- Le barème appliqué dans la correction est le suivant :
- Bonne réponse : 2 Pts
- Mauvaise réponse : - 1 pt
- Aucune réponse : - 0,5 pt

6- L'utilisation des documents, téléphones portables, calculatrices, appareils électroniques, correcteur « blanco », sont strictement interdits

7- Aucune explication supplémentaire ne vous sera donnée pendant l'examen. Il vous appartient de prendre vos décisions selon votre compréhension et votre analyse.

8- A la fin de l'examen, il faut rendre : l'énoncé de l'épreuve, la grille de réponses. Ces deux documents doivent être enveloppés dans une double feuille, qui vous sera fournie, portant votre nom, votre prénom et votre numéro d'examen.

9- La grille de réponses est fournie en un seul exemplaire. En aucun cas, une autre grille ne vous sera fournie.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = 0$ où θ est une inconnue réelle.

A. Si θ est solution, alors $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = 2^n$.

B. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta)\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)^n$.

C. L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. Aucune réponse n'est juste.

Q2. On utilise dans cette question les notations normalisées : $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z, et $\bar{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

Soit .

$$z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(1+i)^3 - (2+i)^2}$$

Quelle est l'affirmation exacte ?

A. $\Re(z) = -\frac{7}{29}$

B. $\bar{z} = \frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(1+i)^3+(2+i)^2}$

C. $arg(z) = \frac{2arg((1+2i))-3arg((1-i))}{3arg((1+i))-2arg((2+i))}$

D. Aucune réponse n'est juste.

Q 3. Soient a, b et c trois réels quelconques ? Quelle est la propriété vérifiée par la valeur absolue ?

A. $\big||a| - |b|\big| \geq |a-b|$

B. $|b-a| + |b-c| + |a-c| = 2[max\{a;b;c\} - min\{a;b;c\}]$

C. $a+b+c = \frac{3}{2}(max\{a;b;c\} + min\{a;b;c\})$

D. $|a+b| + |a+c| + |b+c| = |a+b+c| + |a| + |b| + |c|$

Q 4. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des réels strictement positifs, on définit leur moyenne arithmétique $A(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ par :

$$A(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

leur moyenne géométrique $G(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ par :

$$G(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n},$$

et leur moyenne harmonique $H(x_1; x_2; \cdots; x_n)$ par :

$$H(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Quelle est l'inégalité reliant ces trois moyennes ?

A. $A(x_1; x_2; \cdots; x_n) \leq G(x_1; x_2; \cdots; x_n)$
B. $A(x_1; x_2; \cdots; x_n) \leq H(x_1; x_2; \cdots; x_n)$
C. $H(x_1; x_2; \cdots; x_n) \geq G(x_1; x_2; \cdots; x_n)$
D. $H(x_1; x_2; \cdots; x_n) \leq G(x_1; x_2; \cdots; x_n)$

Q 5. Des fermiers décident sur la base des prix pratiqués une année de la quantité de blé qu'ils planteront pour l'année suivante : en supposant que les cours resteront stables, ils plantent beaucoup si les prix sont élevés, peu si les prix sont faibles. L'année suivante, si les récoltes sont abondantes, les prix baissent, tandis qu'ils montent si les récoltes sont faibles.

On désigne par D_n la demande de l'année n, par p_n le prix de blé au quintal l'année n, par S_n la récolte de l'année n. Pour modéliser les hypothèses précédentes, on suppose que les fonctions prix-demande et prix-offre sont affines, c'est-à-dire qu'il existe des réels strictement positifs a, b, c et d els que

$$\begin{cases} D_n = -ap_n + b \\ S_{n+1} = cp_n + d \end{cases}$$

Enfin, il y a forcément équilibre de l'offre et de la demande, ce qui se traduit par

$$D_{n+1} = S_{n+1}.$$

Que peut-on dire de l'évolution des prix ?

A. La suite (p_n) des prix satisfait à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, de la forme
$$\alpha p_{n+1} + \beta p_n + \gamma p_{n-1} = 0.$$
B. La suite (p_n) des prix converge toujours.
C. La suite (p_n) des prix converge si et seulement si $\frac{a}{c} > 1$.
D. La suite (p_n) des prix est croissante.

Q 6. Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par $u_0 \in [0; 1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$$

Quelle est l'affirmation exacte ?

A. L'ensemble des points fixes de f est $\{0; 1\}$.
B. La suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers 0 si $u_0 \neq 1$.
C. La suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers 1 si $u_0 \neq 0$.
D. La suite $(u_n)_{n\in N}$ converge vers $\frac{1}{2}$ si $u_0 \notin \{0; 1\}$.

Q 7. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Quelle est l'affirmation exacte ?

A. Si (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.
B. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge.
C. Si $\sum(u_n + v_n)$ converge, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
D. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Q 8. Soit $(b_n)_{n\in N}$ une suite d'entiers vérifiant $1 \leq b_n \leq n - 2$ pour $n > 2$.

Que peut-on dire de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!}$?

A. Cette série converge toujours.

B. Cette série converge seulement si l'on a $b_n \leq \frac{n}{2}$ pour tous les n, sauf peut-être un nombre fini.

C. Cette série diverge seulement si l'on a $b_n \geq \frac{n}{2}$ pour tous les n, sauf peut-être un nombre fini.

D. Cette série converge si et seulement si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Q 9. Dans une lettre datée du 12 mai 1676, Leibniz communiqua deux séries à henry Oldenburg, Secrétaire de la ***Royal Society***, en lui demandant si quelqu'un pouvait en trouver la somme. Newton avait déjà trouvé dix ans plus tôt la somme de l'une de ces deux séries, et il envoya deux lettres de réponse (connues sous le nom d'***Epistola Prior***, et d'***Epistola Posterior***) ; dans l'une d'elles, il donna la somme qu'il avait déjà trouvée, et dans l'autre, il donna la somme d'une troisième série, dont le terme général ressemblait à celui de la deuxième série de Leibniz. Traduite en français, et en termes mathématiques contemporains, voici (annexe 1) quelle était en substance la démonstration de Newton pour le calcul de la somme de cette troisième série.

Justement, quelle est la série dont Newton trouvera ainsi la somme ?

A. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$

B. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$

C. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$

D. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots$

Q 10. Quelles sont les propriétés de la fonction f définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$?

A. f se prolonge par continuité en 1, en posant $f(1) = e$.

B. f est prolongeable par continuité en 1, et la fonction prolongée est dérivable en 1, de dérivée $\frac{1}{2}$.

C. f est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}|x|^{\frac{1}{x-1}-1}$$

D. f est décroissante sur son ensemble de définition.

Q 11. Soit f une fonction continue positive sur l'intervalle $[a; b]$. Que représente $\int_a^b f$?

A. L'aire de la région délimitée par l'axe des y, les droites $y = a$, $y = b$, et le graphe de f.

B. L'aire de la région délimitée par l'axe des x, les droites $x = a$, $x = b$, et le graphe de f.

C. $\frac{1}{2\pi}$ fois le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, et le graphe de f.

D. $\frac{1}{2\pi}$ fois le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface délimitée par les droites $y = a$, $y = b$, et le graphe de f.

Q 12. Quelle est l'affirmation exacte ?

A. Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$.
B. L'inverse d'une fonction continue par morceaux $f: [a; b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ est une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$.
C. Si f est une fonction continue par morceaux $[a; b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et si g est une fonction continue par morceaux $f([a; b]) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est une fonction continue par morceaux $[a; b] \to \mathbb{R}$.
D. Toute fonction monotone sur $[a; b] \subset \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a; b]$.

Q 13. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I dont l'intérieur contient 0 (autrement dit, deux fonctions définies au voisinage de 0). Que peut-on dire des développements des fonctions que l'on peut construire à partir de f et de g ?

A. Si f et g admettent un développement limité d'ordre n en 0, $f \circ g$ admet aussi un développement limité d'ordre n en 0.
B. Si f admet un développement limité d'ordre $n > 1$ en 0, alors f' admet un développement limité d'ordre $n - 1$ en 0.
C. Si f est continue, et si f admet un développement limité d'ordre n en 0, alors toute primitive de f admet un développement limité d'ordre $n + 1$ en 0.
D. Si $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, alors f et g admettent un développement limité d'ordre n en 0.

Q 14. Si P est une approximation de π à 10^{-n} près, voici trois formules d'accélération qui donnent chacune une meilleure approximation de π

$$\begin{cases} P + \sin P, & (1) \\ P + 2\cos\frac{P}{2}, & (2) \\ P + \frac{(2\sin P - \tan P)}{3}, & (3) \end{cases}$$

Que peut-on dire de ces trois accélérations ?

A. (1) est meilleure que (2) ou (2) est meilleure que (3).
B. (3) est la moyenne de (1) et (2).
C. Si P donne n décimales correctes de π, alors (1) et (2) en donnent chacune au moins $3n$.
D. Si P donne n décimales correctes de π à 10^{-5} près, (3) est une approximation de π à 10^{-40} près.

Q 15. Quelle est la meilleure approximation, au voisinage de 0, de la fonction cosinus par une fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

A. $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$

B. $x \mapsto \frac{1-\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{24}}$

C. $x \mapsto \frac{1-\frac{5}{12}x^2}{1-\frac{1}{12}x^2}$

D. $x \mapsto \frac{1-\frac{5}{12}x^2}{1+\frac{1}{12}x^2}$

Q16.

Rappel : l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau non commutatif. On note $\mathbb{I}$ la matrice identité.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = a\mathbb{I} + bA$. Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

A. $A^2 = 2A + \mathbb{I}$.
B. $A^2 = 2A - \mathbb{I}$.
C. A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - A)$.
D. $(A + \mathbb{I})(A - 2\mathbb{I})$.

Q17. Sous les mêmes conditions que la questions **Q16**.

A. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau non commutatif.
B. $(\mathbb{I}, A)$ est une famille génératrice de E, mais n'est pas une base de E.
C. Soient M et M' des matrices de E. On a : $MM' = 0 \implies M = 0$ *ou* $M' = 0$.
D. $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -2b$.

Q18. On considère que dans une équipe de basket, chacun des 12 joueurs a 1 chance sur 4 d'être absent au moins une fois durant le mois de juillet. On suppose que l'absence ou la présence d'un joueur n'a pas d'impact sur les chances qu'a un autre joueur de se retrouver absent. On s'intéresse au nombre N de joueurs absents durant le mois de juillet.
Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 4 joueurs absents durant le mois de juillet ?

A. Elle vaut exactement $1 - \sum_{k=0}^{3}(1/4)^k$.
B. Elle vaut environ 35%.
C. Elle vaut environ 19%.
D. On ne peut pas répondre car la loi de N n'est pas connue.

Q19. Soit X le temps de trajet quotidien de Monia, en heures, variable aléatoire de densité définie par

$$f_X(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

A. $E(X) = 1$ et $P(X > 1) \cong 63.2\%$.
B. $E(X) = 2$ et $P(X > 1) \cong 26.4\%$.

C. $P(X > 1) \cong 73.6\%$ et on ne peut pas facilement déterminer la médiane de X.
D. $E(X)$ vaut $+\infty$ (c'est-à-dire X n'admet pas d'espérance) et $P(X > 1) \cong 26.4\%$.

Q20. On suppose que X désigne le montant du gain (en Dh) que rapporte un employé à son entreprise en un mois, et que X est de loi $\mathcal{N}(500, (150)^2)$. L'entreprise verse à l'employé une prime Y égale à 0 si ce gain est inférieur à 700 Dhs, et, si le gain X excède 700 Dhs, a la moitié de l'excès en question. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- **A.** La loi de Y est une loi continue et l'employé a environ 2,3% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 Dhs.
- **B.** La loi de Y n'est pas une loi continue et l'employé a environ 2,3% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 Dhs.
- **C.** La loi de Y est une loi continue et l'employé a environ 17% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 Dhs.
- **D.** La loi de Y n'est pas une loi continue et l'employé a environ 17% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 Dhs.

Annexe pour Q9.

Considérons l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x+x^2}$. Par primitivation, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x+x^2} = \left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Par ailleurs, on a

$$1+x^4 = \left(1+\sqrt{2}\,x+x^2\right)\left(1-\sqrt{2}\,x+x^2\right),$$

ce qui conduit à

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1-\sqrt{2}\,x+x^2}{1+x^4}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

puis à

$$\int_{0}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et enfin à la somme de série...