CI2613: Algoritmos y Estructuras III

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Enero-Marzo 2015

Caminos de costo mínimo en grafos

Caminos de costo mínimo

En las próximas clases nos enfocamos en calcular caminos de costo mínimo en **grafos dirigidos** $G = (V, E)$ con pesos $w : E \to \mathbb{R}$

Dado un camino $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, el **peso** o **costo** de p es la suma de los costos de las aristas en p:

$$w(p) \; = \; \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

La **distancia** o **peso** $\delta(u, v)$ entre dos vértices u y v es el menor peso de los caminos de u a v:

$$\delta(u, v) \; = \; \min \; \{w(p) : p \text{ es un camino de } u \text{ a } v\}$$

(donde $\min \emptyset = \infty$)

Si $p = u \rightsquigarrow v$ es un camino de u a v tal que $w(p) = \delta(u, v)$, p es un **camino más corto** o un **camino de costo mínimo**

Variantes del problema

Existen diferentes variantes del problema. Las más importantes son:

– Camino más corto entre un **par de vértices** dados

– Caminos más cortos desde un mismo **vértice fuente**

– Caminos más cortos hacia un mismo **vértice destino**

– Caminos más cortos entre **todos los pares de vértices**

Estructura óptima de los caminos más cortos

Ya que el costo de un camino es la suma de los costos de sus aristas, los caminos óptimos están compuestos por subcaminos óptimos

Lema (Principio de optimalidad de caminos más cortos)

Sea $G = (V, E)$ un digrafo con pesos $w : E \to \mathbb{R}$ y $p = (v_0, \ldots, v_k)$ un camino más corto de v_0 a v_k. Entonces, el camino $p_{ij}{=}(v_i, \ldots, v_j)$, para $1 \leq i \leq j \leq k$, es un camino más corto de v_i a v_j

Prueba: suponga que p_{ij} no es óptimo. Entonces existe un camino q de v_i a v_j con $w(q) < w(p_{ij})$

Considere el camino $p' = (v_0, \ldots, v_{i-1}, q, v_{j+1}, \ldots, v_k)$ de v_0 a v_k

Su costo es: $w(p') \;=\; w(p) - w(p_{ij}) + w(q) \;<\; w(p)$

Por lo tanto, p no es óptimo contradiciendo la suposición $\square$

Aristas y ciclos de costo negativo

En presencia de costos negativos es posible que no exista un camino más corto de u a v

Sea $p = (v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k)$ un camino de v_0 a v_k con $v_i = v_j$; i.e. p contiene el ciclo $c = (v_i, \ldots, v_j = v_i)$

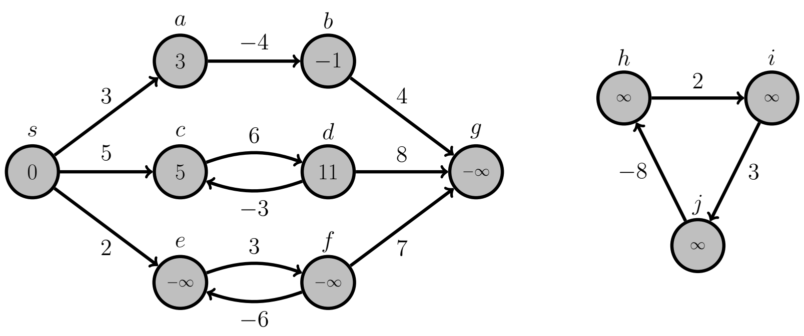
Si $w(c) < 0$, podemos formar caminos:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = p \\
&p_2 = (v_0, \ldots, c, c, \ldots, v_k) \\
&p_3 = (v_0, \ldots, c, c, c, \ldots, v_k) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

con $w(p_1) > w(p_2) > w(p_3) > \cdots$

Definimos $\delta(v_0, v_k) = -\infty$ y **no existe camino más corto de v_0 a v_k**

Aristas y ciclos de costo negativo: Ejemplo



Longitud de caminos de costo mínimo

Sea $p = (v_0, \ldots, v_k)$ un camino de v_0 a v_k con $w(p) = \delta(v_0, v_k)$

– p no contiene un ciclo de costo negativo

– Análogamente, p no puede contener un ciclo c de costo positivo; ya que removiendo c obtendríamos un camino de v_0 a v_k de costo menor a $\delta(v_0, v_k)$

– La única posibilidad para la existencia de un ciclo c en p es que $w(c) = 0$. Dicho ciclo se puede remover para obtener un camino óptimo de v_0 a v_k de menor longitud

Concluimos que si $\delta(u, v) \notin \{-\infty, \infty\}$, entonces existe un camino óptimo de u a v de **longitud a los sumo $|V| - 1$**

Dos propiedades sobre costos de caminos óptimos

Lema (Desigualdad triangular)

Si $(u,v) \in E$ *es una arista,* $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v)$

Prueba: si no existe camino $s \rightsquigarrow u$, la desigualdad se cumple. En otro caso, considere un camino óptimo q de forma $s \rightsquigarrow u$, y $p = q \rightarrow v$. Tenemos, $\delta(s,v) \leq w(p) = w(q) + w(u,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$ □

Lema (Camino óptimo)

Si $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ *es un camino óptimo,* $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$

Prueba: por principio de optimalidad, $s \rightsquigarrow u$ es camino óptimo. Entonces, $\delta(s,v) = w(s \rightsquigarrow u \rightarrow v) = w(s \rightsquigarrow u) + w(u,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$ □

Representación de caminos óptimos

Como en BFS, mantendremos un **grafo de predecesores** definido por "apuntadores padres" $\pi[v]$ asociados a cada vértice v

El grafo de predecesores relativo a la fuente s es $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$:

$$V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq \textbf{null}\} \cup \{s\}$$

$$E_\pi = \{(\pi[v], v) \in E : v \in V_\pi \setminus \{s\}\}$$

G_π termina en un **árbol de caminos óptimos** $G' = (V', E')$ para s:

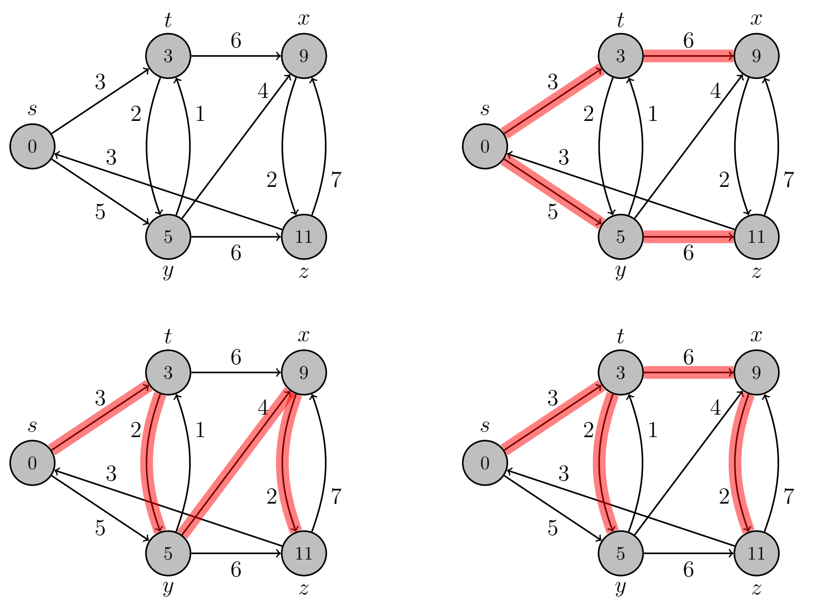
– G' es un subgrafo de G; i.e. $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$

– V' es el conjunto de vértices alcanzables desde s

– G' es un árbol con raíz s

– el único camino de s a v en G' es un camino óptimo en G

Representación de caminos óptimos: Ejemplo



Operaciones básicas

Los algoritmos para el cálculo de caminos más cortos desde un vértice fuente pueden entenderse como que realizan dos operaciones:

– `Inicializar-vertice-fuente(G,s)`: ejecutada una sola vez

– `Relajar(u,v,w)`: ejecutada varias veces para distintas aristas (u,v)

Inicializar-vertice-fuente(G,s)

Se ejecuta una sola vez para un grafo $G = (V, E)$, antes de cualquier operación `Relajar(u,v,w)`

```
Inicializar-vertice-fuente(G,s):
    foreach Vertice v
        d[v] = ∞
        π[v] = null
    d[s] = 0
```

Esta operación por si sola toma tiempo $\Theta(V)$

Relajar(u,v,w)

Se ejecuta múltiples veces para aristas (u, v) con peso $w = w(u, v)$

```
Relajar(u,v,w):
    if d[v] > d[u] + w(u,v)
        d[v] = d[u] + w(u,v)
        π[v] = u
```

Esta operación por si sola toma tiempo $\Theta(1)$

Invariantes

A continuación establecemos 5 invariantes (propiedades) que se cumplen para **cualquier secuencia** σ de operaciones básicas tal que:

– la primera operación en σ es de inicialización

– todas las operaciones en σ excepto la primera son de relajación

Invariante 1

Lema (Cotas superiores)

Para todo vértice v, $d[v] \geq \delta(s, v)$. Si $d[v] = \delta(s, v)$, el valor $d[v]$ no vuelve a cambiar

Prueba: por inducción en el número n de operaciones en σ

- Para $n = 1$: la operación es de inicialización. Después de la operación, $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$ para $v \neq s$ y $d[s] = 0 = \delta(s, s)$

Invariante 1

Lema (Cotas superiores)

Para todo vértice v, $d[v] \geq \delta(s,v)$. Si $d[v] = \delta(s,v)$, el valor $d[v]$ no vuelve a cambiar

Prueba: por inducción en el número n de operaciones en σ

- Para $n > 1$: descomponemos $\sigma = (\sigma', op = \texttt{Relajar(u,v,w)})$ con $|\sigma'| = n-1$. Por HI, la propiedad se cumple después de ejecutar σ'

Si op no cambia el valor de $d[v]$, la propiedad se cumple. Si lo cambia,

$$d[v] = d[u] + w(u,v) \geq \delta(s,u) + w(u,v) \geq \delta(s,v)$$

Por HI y la desigualdad triangular sobre los valores $\delta(s,\cdot)$

Como `Relajar(u,v,w)` sólo puede decrementar $d[v]$, una vez $d[v] = \delta(s,v)$ el valor no vuelve a cambiar □

Invariante 2

Lema (Inexistencia de caminos)

Si no existe un camino de s a v, $d[v] = \delta(s,v) = \infty$

Prueba:

Si no existe camino de s a v, $\delta(s,v) = \infty$. Por Invariante 1, $d[v] \geq \delta(s,v)$. Por lo tanto, $d[v] = \infty$ □

Invariante 3

Lema (Convergencia)

Si $s \rightsquigarrow u \to v$ es un camino óptimo de s a u, y $d[u] = \delta(s,u)$ antes de ejecutar `Relajar(u,v,w)`, entonces $d[v] = \delta(s,v)$ después de la ejecución

Prueba: por la propiedad de camino óptimo, $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$

Por Invariante 1, $d[v] \geq \delta(s,v)$ antes de la ejecución.

Si $d[v] > \delta(s,v)$ antes de la ejecución,

$$d[v] > \delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v) = d[u] + w(u,v)$$

Luego, `Relajar(u,v,w)` cambia $d[v] = d[u] + w(u,v) = \delta(s,v)$

Si $d[v] = \delta(s,v)$ antes de la ejecución, el valor $d[v]$ no cambia □

Invariante 4

Lema (Relajación monótona)

Si $p = (v_0, \ldots, v_k)$ es un camino óptimo de $s = v_0$ a v_k, y σ contiene (en orden) relajaciones de las aristas (v_0, v_1), ..., (v_{k-1}, v_k), entonces después de ejecutar σ, $d[v_i] = \delta(s, v_i)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$.

(Las relajaciones no tienen que ser consecutivas: entre cada par de ellas puede haber cualesquiera otras relajaciones)

Prueba: por inducción en i se muestra $d[v_i] = \delta(s, v_i)$

- Para $i = 0$: $d[v_0] = d[s] = 0 = \delta(s,s)$
- Para $i > 0$: por HI $d[v_{i-1}] = \delta(s, v_{i-1})$ antes de $\texttt{Relajar}(v_{i-1}, v_i, w)$

Como el camino $s \rightsquigarrow v_{i-1} \to v_i$ es óptimo, el Invariante 3 implica que después de $\texttt{Relajar}(v_{i-1}, v_i, w)$ se cumple $d[v_i] = \delta(s, v_i)$ □

Invariante 5

Lema (Árbol de caminos óptimos)

Asuma que $d[v] = \delta(s, v)$ *para todo vértice* v*, y que no existen ciclos de costo negativo alcanzables desde* s*. Entonces, el grafo de predecesores* $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ *es un árbol de caminos óptimos para* s

Prueba: ver el libro de texto □