

CI2613: Algoritmos y Estructuras III

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Enero-Marzo 2015

Ordenamiento topológico

© 2014 Blai Bonet

CI2613

Ordenamiento topológico

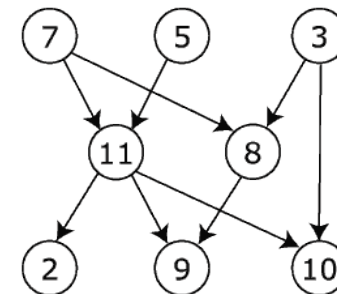
Dado un **digrafo** $G = (V, E)$, un ordenamiento topológico de G es una **lista de sus vértices** tal que:

Si la arista $(u, v) \in E$, entonces u “aparece antes que” v en la lista

© 2014 Blai Bonet

CI2613

Ordenamiento topológico: Ejemplo



7, 5, 3, 11, 8, 2, 9, 10

3, 5, 7, 8, 11, 2, 9, 10

5, 7, 3, 8, 11, 10, 9, 2

3, 7, 8, 5, 11, 10, 2, 9

© 2014 Blai Bonet

CI2613

Ordenamiento topológico: Pseudocódigo

```
1 void ordenamiento-topologico(G, L):
2   Correr DFS(G) para computar los tiempos de finalización
3   f[u] para cada vértice u
4
5   A medida que los vértices son finalizados, insertarlos
6   al frente de la lista L
```

Tiempo de ejecución: $\Theta(V + E) + \Theta(V) = \Theta(V + E)$

Ordenamiento topológico: Correctitud

Lema

Un grafo dirigido G es acíclico (DAG) si y sólo si un recorrido DFS no produce ninguna arista "back"

Prueba:

\Rightarrow : Suponga que el recorrido DFS produce una arista "back" (u, v) . Entonces, por definición, el vértice v es un ancestro del vértice u . Por lo tanto, G contiene un camino de v a u , y la arista (u, v) completa un ciclo

\Leftarrow : Suponga que G contiene un ciclo c . Mostraremos que un recorrido DFS de G genera una arista "back"

Sea v el primer vértice descubierto en c , y sea (u, v) la arista de c que "entra" en v

A tiempo $d[v]$, los vértices en c forman un camino blanco de v a u . Por el Teorema de Caminos Blancos, el vértice u termina siendo descendiente de v en el bosque DFS. Por lo tanto, la arista (u, v) es una arista "back" \square

Ordenamiento topológico: Correctitud

Teorema

Ordenamiento-Topologico(G, L) produce un ordenamiento topológico de G si G es un DAG

Prueba: Sea G un DAG y suponga que corremos DFS sobre G para computar los tiempos de finalización $f[u]$ para cada vértice u

Es suficiente mostrar que si $(u, v) \in E$, entonces $f[v] < f[u]$ (¿por qué?)

Considere una arista (u, v) explorada por DFS. Cuando (u, v) es explorada, v no puede ser gris ya que entonces sería una arista "back" y G tendría un ciclo

① v es BLANCO: v se convierte en descendiente de u y $f[v] < f[u]$

② v es NEGRO: v ya fue finalizado mientras que u todavía se está procesando. Entonces, $f[v] < f[u]$ \square