CI2612: Algoritmos y Estructuras de Datos II

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Nociones básicas

Objetivos

- Concepto de algoritmo y modelo computacional
- Complejidad en tiempo y espacio de algoritmos
- Repasar conceptos de crecimiento de funciones y notación asintótica
- Búsqueda lineal y binaria sobre un arreglo
- Ordenamiento por inserción y su análisis

Algoritmos

Un algoritmo es un **procedimiento** para resolver un tarea específica que está descrito en un **lenguaje de programación**. El algoritmo se ejecuta sobre un **modelo computacional**

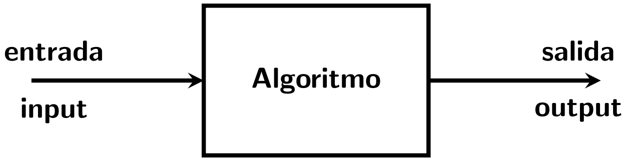
El algoritmo resuelve la tarea para una **instancia** dada como **entrada**. La **salida** del algoritmo es la solución de la tarea sobre la instancia

– La **longitud** de la entrada es medida en **bits**

– El **tiempo de ejecución** es medido es unidades de tiempo fijas como segundos

– La **cantidad de memoria** utilizada por el algoritmo (adicional a la entrada) es medida en **bits**

Caja negra



Modelo computacional: RAM

Modelo: random-access machine (RAM) con único procesador secuencial

Tipos básicos: enteros y punto flotante de **precisión acotada**

(Asumimos que todas las operaciones aritméticas y punto flotante toman **tiempo constante** lo que implica que el **tamaño de palabra** es suficiente para guardar las cantidades manejadas. No podemos asumir **precisión arbitraria** porque entonces podríamos guardar cantidades arbitrarias de información en una celda de memoria o registro.)

Memoria: computador tiene infinitas celdas de memoria. Las celdas pueden direccionarse directamente (random-access)

Complejidad en tiempo y espacio

Considere un algoritmo A

El **tiempo de ejecución** de A es una **función** T_A tal que $T_A(\omega)$ es el número de unidades de tiempo que A toma sobre la entrada es ω

El **consumo de memoria** de A es una **función** M_A tal que $M_A(\omega)$ es el número de bits de memoria que A utiliza sobre la entrada es ω

En el curso nos enfocamos en el **tiempo de ejecución** ya que:

- el consumo de memoria está acotado por el tiempo, $M_A \leq T_A$: en X unidades de tiempo solo pueden accesarse a lo sumo X celdas de memoria
- los algoritmos que veremos tienen poco consumo de memoria

Consumo de tiempo en el peor caso

Considere un algoritmo A con función de tiempo T_A

La función de tiempo en el **peor caso** para A mide para cada entero n, el mayor tiempo que toma A en una entrada de tamaño n

Formalmente, la función de tiempo en el peor caso para A es una función $T_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$T_A(n) \;=\; \max\,\{\, T_A(\omega) : |\omega| = n \,\}$$

Nos interesa conocer que tan rápido crece $T_A(n)$ cuando $n \to \infty$

Consumo de tiempo en el caso promedio

Aunque importante, el peor caso es una **medida pesimista** que puede reflejar incorrectamente el desempeño del algoritmo en la práctica

Una medida mas realista es el desempeño en el **caso promedio**

Para hablar de caso promedio necesitamos conocer como se **distribuyen** las posibles entradas al algoritmo

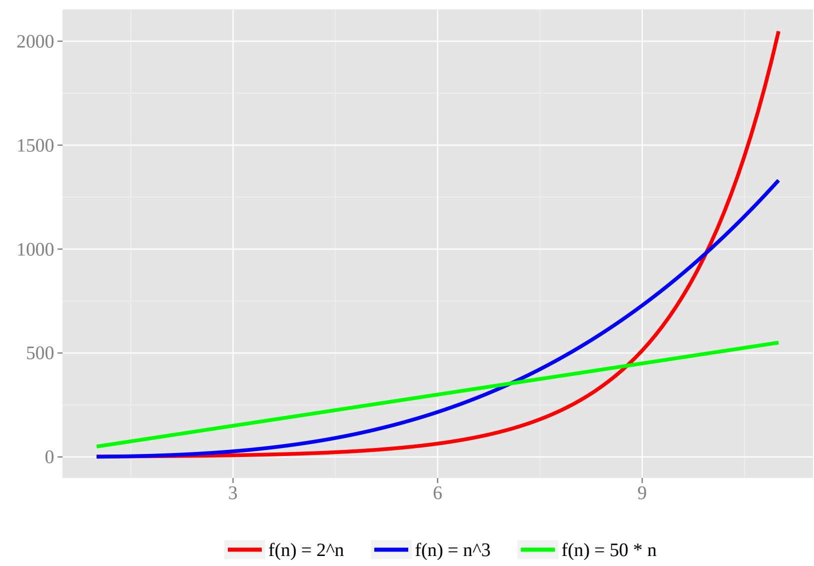
Para un n fijo, asumimos una **distribución uniforme** sobre las entradas de tamaño n: **cada entrada es igualmente probable**

El tiempo promedio sobre entradas de tamaño n para A es:

$$\frac{1}{m} \sum_{\omega:|\omega|=n} T_A(\omega)$$

donde m es el número de entradas de tamaño n

Crecimiento de funciones



Notación asintótica

- Dominancia: $o(\cdot)$ (o-pequeña) y $\omega(\cdot)$ (ω-pequeña)
- Cotas superiores: $O(\cdot)$ (O-grande)
- Cotas inferiores: $\Omega(\cdot)$ (Ω-grande)
- Cota exacta (superior e inferior): $\Theta(\cdot)$

Notación o-pequeña

$f(n) = o(g(n))$ ssi $g(n)$ es **significativamente mayor** a $f(n)$

Es decir,

$$\frac{f(n)}{g(n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \longrightarrow \infty$$

i.e. para todo $\epsilon > 0$, existe entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$:

$$\frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$$

Notación ω-pequeña

$f(n) = \omega(g(n))$ ssi $g(n)$ es **significativamente menor** a $f(n)$

i.e. $g(n) = o(f(n))$

Es decir,

$$\frac{f(n)}{g(n)} \longrightarrow \infty \qquad \text{cuando} \qquad n \longrightarrow \infty$$

Notación O-grande (cota superior)

$f(n) = O(g(n))$ ssi a partir de cierto momento un múltiplo de $|g(n)|$ **acota** a $|f(n)|$ **por arriba**

Es decir,

existe una constante C y un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$:

$$|f(n)| \leq C\,|g(n)|$$

Notación Ω-grande (cota inferior)

$f(n) = \Omega(g(n))$ ssi a partir de cierto momento un múltiplo de $|g(n)|$ **acota** a $|f(n)|$ **por abajo**

Es decir,

existe una constante C y un entero n_0 tal que para todo $n \geq n_0$:

$$|f(n)| \geq C\,|g(n)|$$

$f(n) = \Omega(g(n)) \iff g(n) = O(f(n))$

Notación Θ (cota exacta)

$f(n) = \Theta(g(n))$ ssi

- $f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \Omega(g(n)) \iff g(n) = O(f(n))$

Cota asintótica exacta

Búsqueda lineal

Input: arreglo $A[1 \dots n]$ con n elementos y un elemento x

Output: índice i tal que $A[i] = x$ o el valor NIL

```
Linear-Search(array A, int x)
    for i = 1 to A.length do
        if A[i] == x
            return i
    return nil
```

Tiempo en peor caso: $\Theta(n)$ cuando x no está en A ó $A[n] = x$

Tiempo en caso promedio: $\Theta(n)$

$$\tfrac{1}{n+1}\left[\Theta(n) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \Theta(i)\right] \;=\; \tfrac{1}{n+1}\Theta(n + \tfrac{n(n+1)}{2}) \;=\; \Theta(n)$$

Búsqueda binaria

Si el arreglo A está ordenado (de forma creciente o decreciente), podemos hacer una búsqueda sobre A de forma más eficiente

La idea es comparar el elemento x a buscar con el elemento z guardado en la **mitad del arreglo**, y **descartar la mitad inferior o superior** cuando x sea mayor o menor a z

El procedimiento se repite hasta encontrar el elemento o descartar todos los elementos del arreglo

Búsqueda binaria: Ejemplo

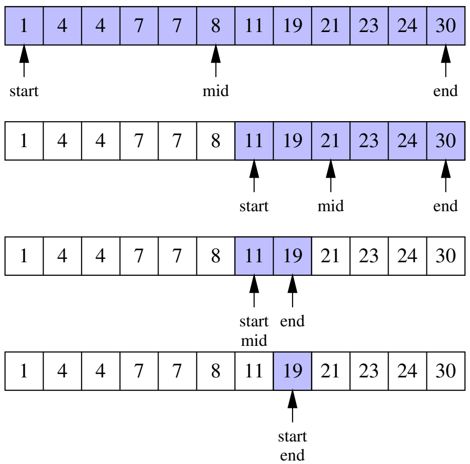


Imagen de https://puzzle.ics.hut.fi/ICS-A1120/2015/notes/round-efficiency–binarysearch.html

Búsqueda exitosa del elemento $x = 19$ en un arreglo con 12 elementos: se realizan 4 comparaciones de x con el elemento `mid`

Búsqueda binaria: pseudocódigo

Input: arreglo $A[1 \dots n]$ con n elementos **ordenados** y un elemento x

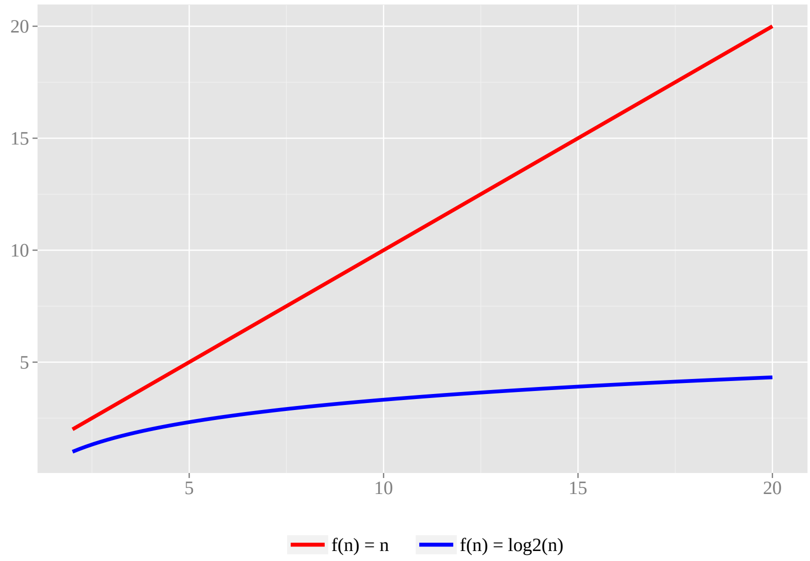
Output: índice i tal que $A[i] = x$ o el valor NIL

```
Binary-Search(array A, int x)
    start = 1
    end = A.length
    while start < end do
        mid = (start + end) / 2                    % división entera
        if A[mid] == x
            return mid
        else if A[mid] < x
            start = mid + 1                 % x no está en A[start...mid]
        else
            end = mid - 1                   % x no está en A[mid...end]
    return A[start] == x ? start : nil
```

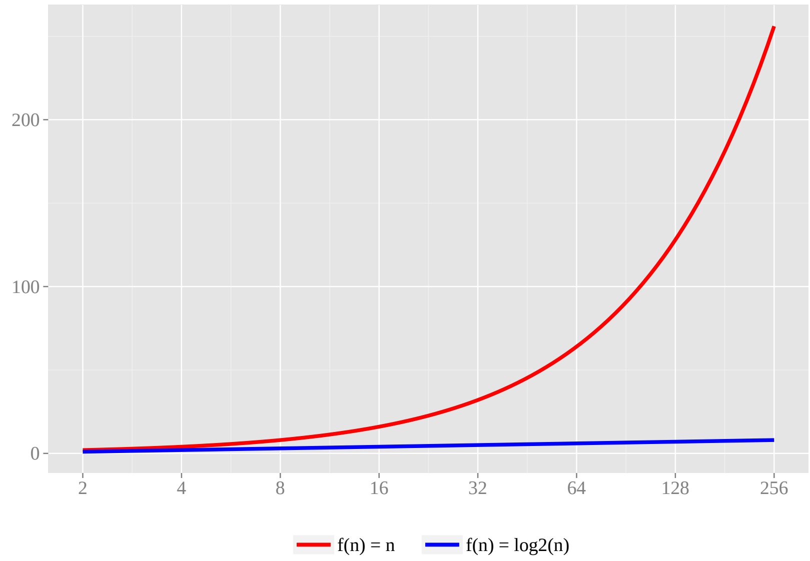
Tiempo en peor caso: $\Theta(\log n)$

(en cada iteración se descarta la mitad de los elementos restantes)

Tiempo: n vs. $\log(n)$



Tiempo: n vs. $\log(n)$



Ordenamiento por inserción

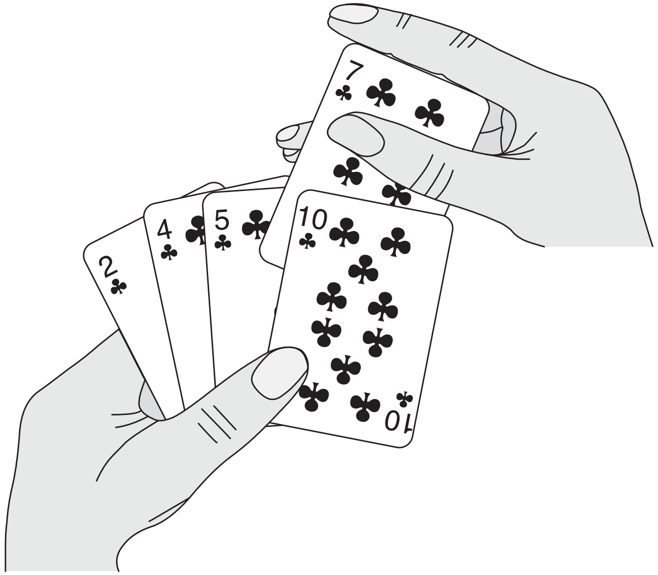


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Ordenamiento por inserción

Algoritmo sencillo para ordenar elementos

Método similar al que utiliza la gente para ordenar cartas:

- comienza con un mazo vacío en la mano izquierda y las cartas a ordenar sobre la mesa
- se recoge una carta de la mesa y se inserta en el mazo en la **posición correcta**
- para conseguir la posición correcta, la carta se **compara** con las cartas en el mazo desde la primera (la mayor en el mazo) hasta la última (la menor en el mazo) ó hasta encontrar una carta menor
- se repite el procedimiento hasta insertar todas las cartas en el mazo

Ordenamiento “in-place” por inserción

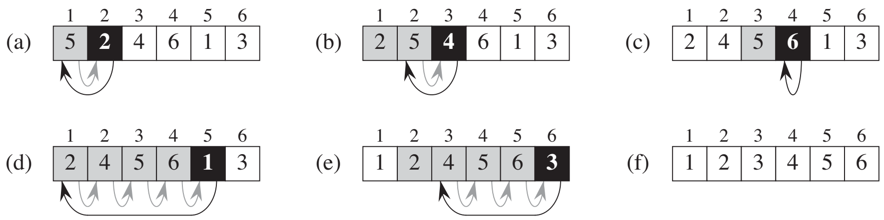


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

Ordenamiento por inserción

Pseudocódigo de ordenamiento por inserción del arreglo A. El ordenamiento se hace **“in place”**: los elementos son reordenados dentro del mismo arreglo

Input: arreglo $A[p \dots r]$ con $n = r - p + 1$ elementos

Output: arreglo A con elementos reordenados de menor a mayor

```
Insertion-Sort(array A, int p, int r)
    for j = p + 1 to r do
        key = A[j]                              % elemento a insertar

        % insertar elemento en la posición correcta
        i = j - 1
        while i >= p && A[i] > key do
            A[i+1] = A[i]
            i = i - 1
        A[i+1] = key
```


Correctitud de ordenamiento por inserción

Propiedad del algoritmo:

Al comienzo de cada iteración del lazo, el subarreglo $A[p \dots j-1]$ consiste de los elementos originalmente en $A[p \dots j-1]$ pero ordenados de menor a mayor

Propiedad se llama **invariante de lazo**

Si el invariante es cierto, al terminar el lazo (iteración $j = r + 1$), el subarreglo $A[p \dots r]$ está ordenado y por lo tanto el algoritmo es **correcto**

Invariantes de lazo

Para establecer la certeza de un invariante de lazo, debemos mostrar tres cosas:

Inicialización: el invariante es cierto justo antes de la primera iteración del lazo

Mantenimiento: si el invariante es cierto antes del inicio de una iteración, el invariante sigue siendo cierto después de finalizar la iteración (incluye incremento de variable inductiva)

Terminación: cuando el lazo termina, el invariante nos da una propiedad útil para probar la correctitud del algoritmo

Correctitud de ordenamiento por inserción

Input: arreglo $A[p \dots r]$ con $n = r - p + 1$ elementos

Output: arreglo A con elementos reordenados de menor a mayor

```
1  Insertion-Sort(array A, int p, int r)
2      for j = p + 1 to r do
3          key = A[j]                            % elemento a insertar
4
5          % insertar elemento en la posición correcta
6          i = j - 1
7          while i >= p && A[i] > key do
8              A[i+1] = A[i]
9              i = i - 1
10         A[i+1] = key
```


Correctitud de ordenamiento por inserción

Invariante:

Al comienzo de cada iteración del lazo, el subarreglo $A[p \dots j-1]$ consiste de los elementos originalmente en $A[p \dots j-1]$ pero ordenados de menor a mayor

Inicialización: justo antes de la primera iteración, $j = p + 1$. El invariante dice que el subarreglo $A[p \dots j-1] = A[p \dots p]$ contiene los elementos originalmente en $A[p \dots p]$ y están ordenados de menor a mayor

Claramente es cierto porque el subarreglo contiene un solo elemento

Correctitud de ordenamiento por inserción

Invariante:

Al comienzo de cada iteración del lazo, el subarreglo $A[p \dots j-1]$ consiste de los elementos originalmente en $A[p \dots j-1]$ pero ordenados de menor a mayor

Mantenimiento: asuma que estamos por comenzar la j-ésima iteración y que el invariante es cierto

Informalmente, el lazo interno mueve los elementos $A[j-1], \dots, A[k]$ una posición a la derecha e inserta $A[j]$ en la posición $A[k]$, donde $p \leq k < j$ es único tal que $A[k-1] \leq A[j] < A[k]$ ó $k = p$ si tal k no existe

Al terminar de ejecutar la asignación en la línea 9, $A[p \dots j]$ contiene los elementos originales en $A[p \dots j]$ de forma ordenada. Por lo tanto, el invariante es cierto después de incrementar j en 1

Correctitud de ordenamiento por inserción

Invariante:

Al comienzo de cada iteración del lazo, el subarreglo $A[p \dots j-1]$ consiste de los elementos originalmente en $A[p \dots j-1]$ pero ordenados de menor a mayor

Terminación: el lazo termina cuando $j > r$. Al finalizar la última iteración del lazo, j se incrementa hasta $j = r + 1$ y el invariante sigue siendo cierto por mantenimiento. Por lo tanto, el arreglo $A[p \dots r]$ contiene los elementos originales en A ordenados de forma creciente

Entonces podemos concluir que el **algoritmo es correcto**

Análisis de ordenamiento por inserción

Sea $T(n)$ el tiempo en el peor caso del algoritmo para arreglos de tamaño n

Claramente el lazo externo realiza $n-1$ iteraciones. Cada lazo interno puede realizar $j-p$ iteraciones ya que la variable i comienza en $j-1$ y el lazo termina cuando $i=p$

Por lo tanto,

$$T(n) \;\leq\; \sum_{j=p+1}^{r} O(j-p) \;=\; \sum_{j=1}^{r-p} O(j) \;=\; O\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \;=\; O(n^2)$$

donde $n = r-p+1$ es el número de elementos en el arreglo

Análisis de ordenamiento por inserción

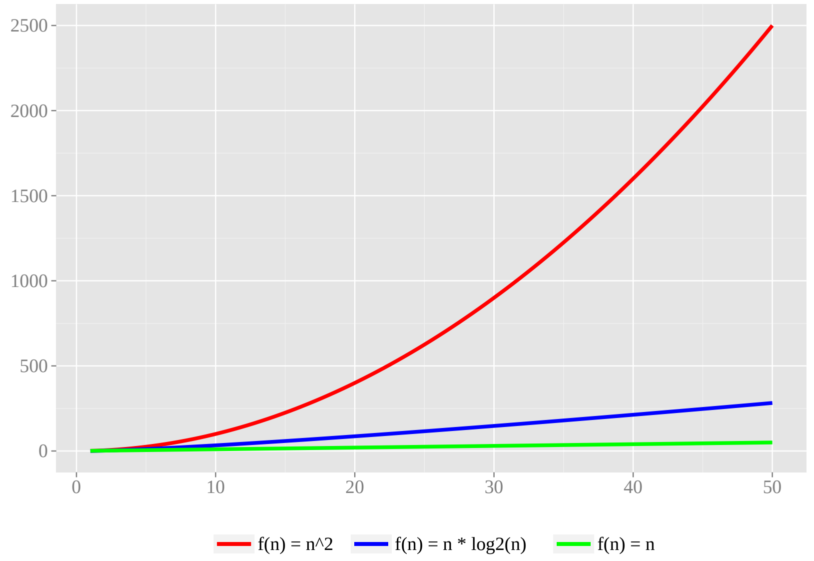
Sea $T(n)$ el tiempo en el peor caso del algoritmo para arreglos de tamaño n

Por otro lado, no es difícil ver que si el arreglo esta inicialmente ordenado de mayor a menor, cada lazo interno toma $j-p$ iteraciones:

$$T(n) \;\geq\; \sum_{j=p+1}^{r} \Omega(j-p) \;=\; \sum_{j=1}^{r-p} \Omega(j) \;=\; \Omega\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \;=\; \Omega(n^2)$$

Por lo tanto, $T(n) = \Theta(n^2)$

Tiempo: n vs. $n \log n$ vs. n^2



Resumen

- Algoritmo, modelo computacional y complejidad en tiempo y espacio
- Crecimiento de funciones y notación asintótica
- Búsqueda lineal y binaria sobre un arreglo
- Ordenamiento por inserción

Ejercicios (1 de 3)

1. Haga una búsqueda binaria de $x = 6$ en el arreglo $\langle 1, 4, 4, 7, 7, 8, 11, 19, 21, 23, 24, 30\rangle$

2. Demuestre la correctitud del algoritmo de búsqueda binaria. Defina un invariante y demuestrelo. Puede separar los casos cuando x está en el arreglo y cuando no

3. (2.1-1) Ejecute `Insertion-Sort` sobre el arreglo $\langle 31, 41, 59, 26, 41, 58\rangle$

4. (2.1-2) Modifique `Insertion-Sort` para que ordene de forma decreciente en lugar de creciente

Ejercicios (2 de 3)

5. (2.2-2) Considere un algoritmo de ordenamiento para el arreglo $A[1 \ldots n]$ que primero busca el menor elemento en $A[1 \ldots n]$ y lo intercambia con $A[1]$. Luego busca el menor elemento en $A[2 \ldots n]$ y lo intercambia con $A[2]$, y repite el procesor $n - 1$ veces

   Dicho algoritmo es conocido como `Selection-Sort`. Escriba el pseudocódigo de `Selection-Sort`

   a. ¿Cuál es el invariante de lazo que debe utilizarse para probar la correctitud del algoritmo?

   b. ¿Por qué solo hace falta repetir el lazo $n - 1$ veces y no n veces?

   c. ¿Cuál es la complejidad en tiempo de `Selection-Sort` en el mejor y peor caso?

Ejercicios (3 de 3)

6. (2.1-4) Considere el problema de sumar dos enteros de n bits que se encuentran almacenados en dos arreglos A y B de n-elementos. La suma de los dos enteros debe ser almacenada en un arreglo C de $n + 1$ elementos. Diseñe un algoritmo que compute la suma de los números almecenados en A y B, y que guarde el resultado en el arreglo C

7. (2-4) Inversiones

   Considere el arreglo $A[1 \ldots n]$ con n elementos **distintos**. Si $i < j$ y $A[i] > A[j]$, el par (i, j) es llamado una **inversión** en A

   a. Diga cuales son las 5 inversiones en el arreglo $\langle 2, 3, 8, 6, 1\rangle$

   b. ¿Cuál arreglo sobre los enteros $\{1, \ldots, n\}$ tiene el mayor número de inversiones? ¿Cuántas tiene?

   c. ¿Cuál es la relación entre el número de inversiones en A y el tiempo de corridad de `Insertion-sort` sobre A?