CI2613: Algoritmos y Estructuras III

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Enero-Marzo 2015

Componentes fuertemente conectadas

Componentes fuertemente conectadas

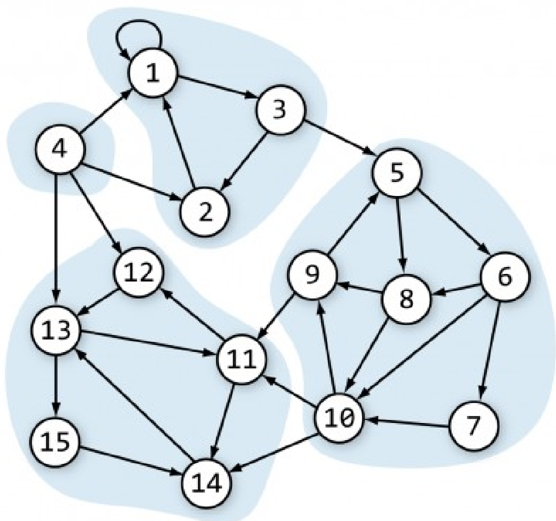
Dado un digrafo $G = (V, E)$

Una **componente fuertemente conectada** de G es un subconjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que:

– para todo par de vértices u, v en C, se cumple que existe un camino $u \rightsquigarrow v$ en G y existe un camino $v \rightsquigarrow u$ en G

– C es **maximal**

Componentes fuertemente conectadas: Ejemplo



Componentes fuertemente conectadas: Propiedades

Lema

Sea $G = (V, E)$ un digrafo y C, C' dos componentes fuertemente conectadas de G. Sean $u, v \in C$ y $u', v' \in C'$ vértices de G (no necesariamente distintos). Si existen caminos $u \rightsquigarrow u'$ y $v' \rightsquigarrow v$, $C = C'$

Prueba: Sea $w' \in C'$. Entonces, existen caminos $u' \rightsquigarrow w'$ y $w' \rightsquigarrow v'$

Concatenando caminos obtenemos:

$$u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow w' \qquad\qquad w' \rightsquigarrow v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$$

Por la maximalidad de C, entonces $w' \in C$

Como w' es arbitrario en C', entonces $C' \subseteq C$

Similarmente, $C \subseteq C'$ y $C = C'$ □

Componentes fuertemente conectadas: Propiedades

Corolario

Sea $G = (V, E)$ un digrafo, y sean C y C' dos componentes fuertemente conectadas de G. Entonces, $C = C'$ ó $C \cap C' = \emptyset$

Prueba: Sean C y C' dos componentes fuertemente conectadas de G

Basta mostrar que si existe un vértice común a C y C', entonces $C = C'$

Sea $w \in C \cap C'$, y sea $u \in C$ y $u' \in C'$

Por def. existe $u \rightsquigarrow w$ (camino de C a C') y $u' \rightsquigarrow w$ (camino de C' a C)

Por el Lema, $C = C'$ □

Componentes fuertemente conectadas: Propiedades

Sea $G = (V, E)$ un digrafo

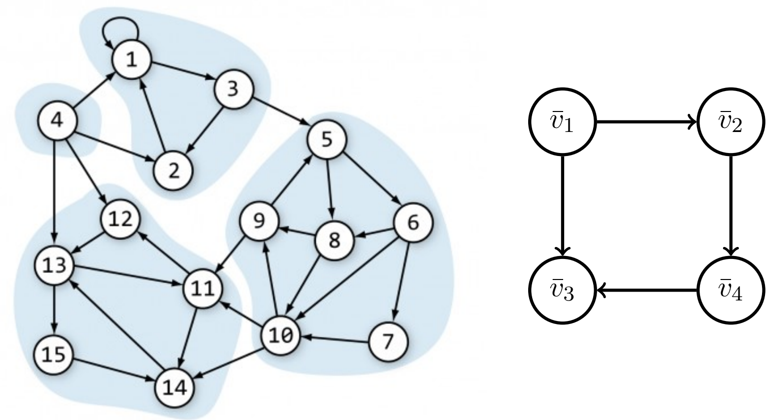
Por el Corolario, V se particiona en $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ donde cada C_i es una componente fuertemente conectada de G; i.e.

- $V = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$
- $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $1 \leq i < j \leq k$
- C_i es una componente de G para todo $1 \leq i \leq k$

Definimos el **grafo de componentes** $G^{scc} = (V^{scc}, E^{scc})$:

- $V^{scc} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ donde $\bar{v}_i$ **representa** la componente C_i
- $E^{scc} = \{(\bar{v}_i, \bar{v}_j) : i \neq j$ y existen $u \in C_i$ y $v \in C_j$ con $(u, v) \in E\}$

Grafo de componentes: Ejemplo



Grafo de componentes: Propiedades

Lema

Sea $G = (V, E)$ un digrafo. El grafo de componentes $G^{scc} = (V^{scc}, E^{scc})$ es un grafo dirigido acíclico (DAG)

Prueba: Suponga que existe un ciclo $\bar{v}_i \rightsquigarrow \bar{v}_j \rightsquigarrow \bar{v}_i$ en G^{scc} $(i \neq j)$

Por definición, existen vértices $u, v \in C_i$ y $u', v' \in C_j$ tal que G contiene los caminos $u \rightsquigarrow u'$ y $v' \rightsquigarrow v$

Por el Lema, $C_i = C_j$ y $\bar{v}_i = \bar{v}_j$ (contradicción) $\square$

Grafo transpuesto $G^\top$

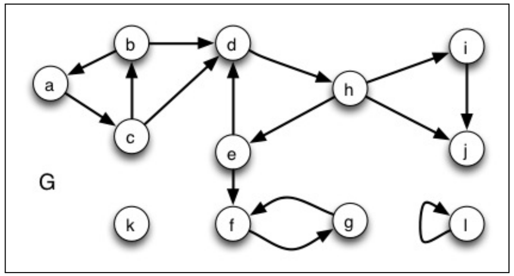
Dado un digrafo $G = (V, E)$

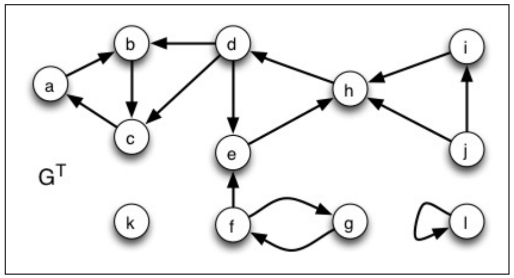
Definimos el **grafo transpuesto** $G^\top = (V, E^\top)$ donde:

– $E^\top = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$

El grafo transpuesto $G^\top$ no es otra cosa que "invertir" todas las "flechas" en G

Grafo transpuesto: Ejemplo





Grafo transpuesto $G^\top$

Lema (Ejercicio)

Las componentes fuertemente conectadas de G y $G^\top$ son las mismas. Además, $(G^\top)^{scc} = (G^{scc})^\top$

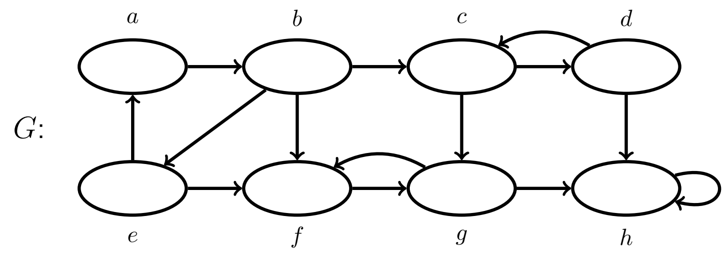
Cálculo de las componentes

Para cálcular las componentes fuertemente conectadas de un digrafo $G = (V, E)$, utilizaremos el algoritmo DFS y el grafo transpuesto $G^\top$:

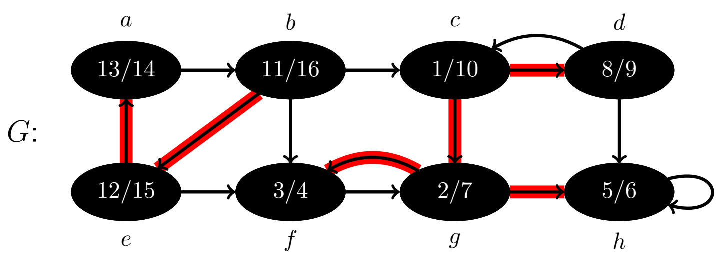
```
void componentes-fuertemente-conectadas(G):

    Correr DFS(G) para computar los tiempos de finalización f[u]
        para cada vértice u

    Calcular el grafo transpuesto G' de G

    Correr DFS(G') pero en el lazo del programa principal, ordenar
        los vértices por valor f[u] de forma decreciente

    Los vértices en cada árbol del bosque DFS resultante (de la
        segunda llamada) es una componente fuertemente conectada
```

Análisis de tiempo: $\Theta(V + E)$ **¿Qué pasó con el tiempo para ordenar?**

Cálculo del grafo de componentes: Ejemplo

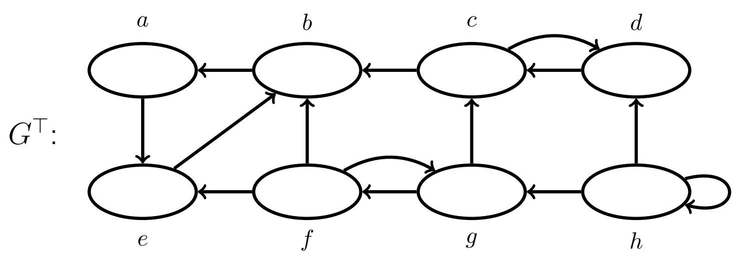


Cálculo del grafo de componentes: Ejemplo



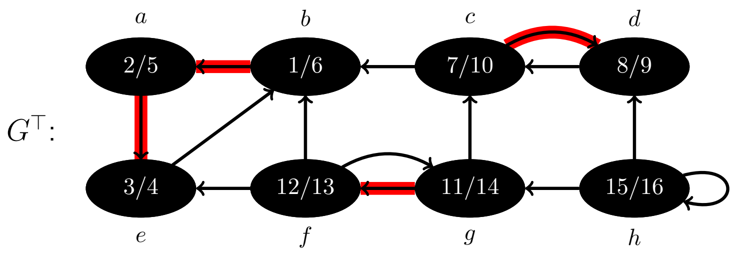
$$b,\ e,\ a,\ c,\ d,\ g,\ h,\ f$$

Cálculo del grafo de componentes: Ejemplo



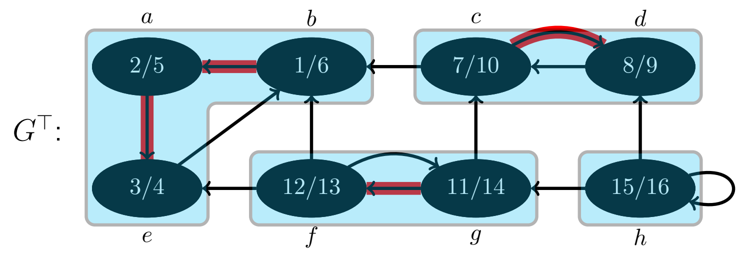
$$b,\ e,\ a,\ c,\ d,\ g,\ h,\ f$$

Cálculo del grafo de componentes: Ejemplo



$b,\ e,\ a,\ c,\ d,\ g,\ h,\ f$

Cálculo del grafo de componentes: Ejemplo



$b,\ e,\ a,\ c,\ d,\ g,\ h,\ f$

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Dos ejecuciones de DFS: la primera sobre G y la segunda sobre $G^\top$

Denotamos los tiempos de finalización y descubrimiento para cada corrida por f_i y d_i para $i = 1, 2$

Para un conjunto de vértices $C \subseteq V$, definimos:

– $f(C) = \max_{u \in C} f_1[u]$ (**mayor tiempo de finalización** en C)

– $d(C) = \min_{u \in C} d_1[u]$ (**menor tiempo de descubrimiento** en C)

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Lema

Sean C y C' dos componentes distintas de $G = (V, E)$. Si existe una arista $(u, v) \in E$ para $u \in C$ y $v \in C'$, entonces $f(C) > f(C')$

Prueba: Consideramos dos casos: un vértice de C se descubre antes que cualquier vértice de C', o vice versa:

1. $d(C) < d(C')$: Sea x el primer vértice descubierto en C

A tiempo $d_1[x]$ todos los vértices en C y C' son blancos, y por lo tanto existen **caminos blancos** desde x a todo vértice $u \in C \cup C'$

Por el Teorema de Caminos Blancos, todos los vértices en C y C' terminan como descendientes de x en el bosque del primer DFS

Por el Corolario al Teorema de Paréntesis, $f_1[x] > f_1[u]$ para todo $u \in C \cup C'$; i.e. $f_1[x] = f(C) > f(C')$

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Lema

Sean C y C' dos componentes distintas de $G = (V, E)$. Si existe una arista $(u, v) \in E$ para $u \in C$ y $v \in C'$, entonces $f(C) > f(C')$

Prueba: Consideramos dos casos: un vértice de C se descubre antes que cualquier vértice de C', o vice versa:

2. $d(C) > d(C')$: Sea y el primer vértice descubierto en C'

A tiempo $d_1[y]$ todos los vértices en C' son blancos y todos terminan como descendientes de y en el bosque del primer DFS, y $f_1[y] = f(C')$

Como $C \neq C'$, G^{scc} es un DAG, y existe la arista (u, v) que conecta C con C', no puede haber un camino $C' \rightsquigarrow C$

Al finalizar y a tiempo $f_1[y]$, todos los vértices en C siguen blancos. Ellos son descubiertos y finalizados a tiempo mayor a $f_1[y]$; i.e. $f(C) > f(C')$ □

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Corolario

Sean C y C' dos componentes distintas de $G = (V, E)$. Si existe un camino $C \rightsquigarrow C'$, entonces $f(C) > f(C')$

Prueba: Considere el camino $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en G^{scc} donde $C_1 = C$ y $C_k = C'$:

Por el Lema, $f(C_1) > f(C_2)$

Por el Lema, $f(C_2) > f(C_3)$

$\vdots$

Por el Lema, $f(C_{k-1}) > f(C_k)$

$$f(C_1) > f(C_2) > f(C_3) > \cdots > f(C_{k-1}) > f(C_k)$$

□

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Teorema

El algoritmo `componentes-fuertemente-conectadas` *calcula la componentes fuertemente conectadas del digrafo $G = (V, E)$ dado como entrada*

Prueba: Por inducción en el número de árboles encontrados en el bosque que resulta de ejecutar el segundo DFS sobre $G^\top$

Tesis (al paso k): los conjuntos de vértices de los primeros k árboles encontrados son componentes fuertemente conectadas

- $k = 0$: trivial ya que no hay ningún árbol que considerar!

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Teorema

El algoritmo `componentes-fuertemente-conectadas` *calcula la componentes fuertemente conectadas del digrafo $G = (V, E)$ dado como entrada*

Prueba: Por inducción en el número de árboles encontrados en el bosque que resulta de ejecutar el segundo DFS sobre $G^\top$

Tesis (al paso k): los conjuntos de vértices de los primeros k árboles encontrados son componentes fuertemente conectadas

- $k > 0$: considere el k-ésimo árbol. Sea u su raíz y C la componente de u

Tenemos que mostrar dos cosas:

1. todos los vértices $v \in C$ son descendientes de u en el bosque DFS
2. ningún vértice $v \in C'$, para otra componente C', es descendiente de u en el bosque DFS

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Teorema

El algoritmo `componentes-fuertemente-conectadas` *calcula la componentes fuertemente conectadas del digrafo $G = (V, E)$ dado como entrada*

Prueba: Por inducción en el número de árboles encontrados en el bosque que resulta de ejecutar el segundo DFS sobre $G^\top$

Tesis (al paso k): los conjuntos de vértices de los primeros k árboles encontrados son componentes fuertemente conectadas

• $k > 0$: considere el k-ésimo árbol. Sea u su raíz y C la componente de u

❶ Por HI, todos los vértices $v \in C$ son blancos a tiempo $d_2[u]$

Por el Teorema de Caminos Blancos, todos los vértices $v \in C$ terminan como descendientes de u en el bosque del segundo DFS

Cálculo del grafo de componentes: Correctitud

Teorema

El algoritmo `componentes-fuertemente-conectadas` *calcula la componentes fuertemente conectadas del digrafo $G = (V, E)$ dado como entrada*

Prueba: Por inducción en el número de árboles encontrados en el bosque que resulta de ejecutar el segundo DFS sobre $G^\top$

Tesis (al paso k): los conjuntos de vértices de los primeros k árboles encontrados son componentes fuertemente conectadas

• $k > 0$: considere el k-ésimo árbol. Sea u su raíz y C la componente de u

❷ Sea $C' \neq C$ otra componente y $v \in C'$

Si no existe camino de u a v en $G^\top$, v no termina como descendiente de u

Si existe $u \rightsquigarrow v$ en $G^\top$. Entonces, $v \rightsquigarrow u$ en G y $f(C') > f(C)$ por Lema

Por lo tanto, a tiempo $d_2[u]$, `DFS-Visit` se ha activado sobre algún $w \in C'$. Por HI, v es negro. Por el T.C.B., v no termina como descendiente de u $\square$

