CI2613: Algoritmos y Estructuras III

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Enero-Marzo 2015

Conceptos básicos de grafos

© 2014 Blai Bonet

Grafos

Un grafo es una estructura algebraica que consiste en un conjunto de **vértices** y un conjunto de **aristas**

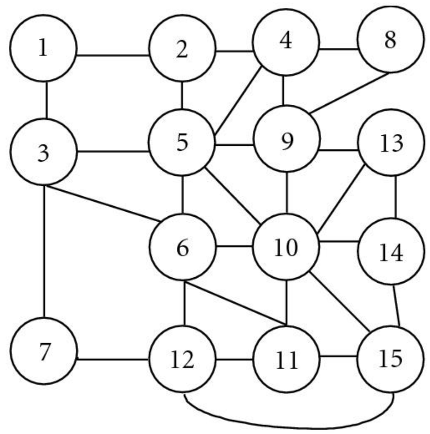
Los vértices son **entidades abstractas**

Las aristas **conectan** pares de vértices entre si

Un grafo G es un par $G = (V, E)$ donde:
– V es el conjunto de vértices
– E es el conjunto de aristas

© 2014 Blai Bonet

Ejemplo: grafo



© 2014 Blai Bonet

Grafos dirigidos y no dirigidos

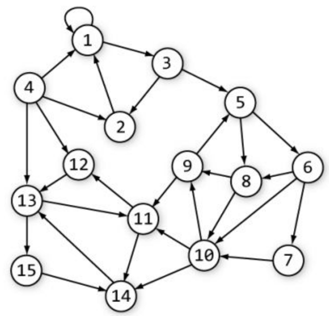
Clases importantes de grafos:

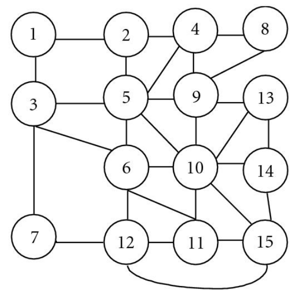
– **Grafo dirigido:** las aristas son de la forma $x \to y$

– **Grafo no dirigido:** las aristas son de la forma $x - y$

© 2014 Blai Bonet

Ejemplos: grafos dirigidos y no dirigidos





© 2014 Blai Bonet

Grafos simples y multigrafos

Una arista entre dos vértices x y y es un **bucle** si $x = y$

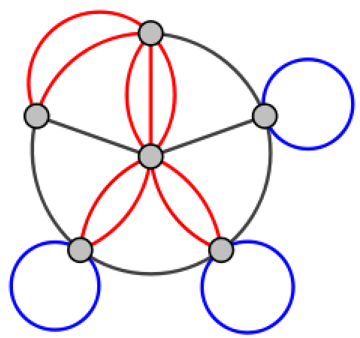
Dos aristas son **paralelas** si conectan el mismo par de vértices (en la misma dirección)

Un **grafo simple** es un grafo sin bucles y sin aristas paralelas

Un **multigrafo** es un grafo con bucles o aristas paralelas

© 2014 Blai Bonet

Ejemplos: multigrafo



© 2014 Blai Bonet

Grafos simples

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple

Si G es dirigido, entonces $E \subseteq (V \times V) \setminus \{(x, x) : x \in V\}$

Si G es no es dirigido, entonces $E \subseteq \binom{V}{2}$

© 2014 Blai Bonet

Caminos

Sea $G = (V, E)$ un grafo

Un **camino** es una sucesión de vértices $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que:

– Si G es dirigido, $(x_i, x_{i+1}) \in E$ para todo $1 \leq i < n$

– Si G es no dirigido, $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$ para todo $1 \leq i < n$

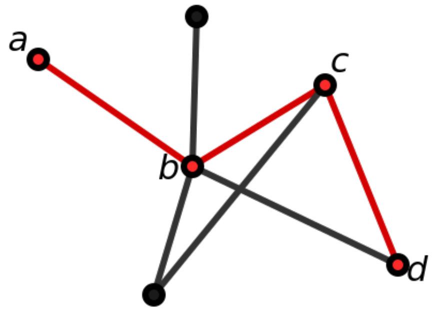
Un camino es **simple** si no repite vértice

Si $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ es un camino, x_1 y x_n estan **conectados**

La sucesión $\langle x \rangle$, para $x \in V$, es un camino

© 2014 Blai Bonet

Ejemplo: caminos



Camino $\langle a, b, c, d \rangle$

© 2014 Blai Bonet

Ciclos

Sea $G = (V, E)$ un grafo

Un **ciclo** es un camino $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que:

– el primer y último vértice son iguales; i.e. $x_1 = x_n$

Un ciclo $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ es **simple** ssi $x_i = x_j \implies \{i, j\} = \{1, n\}$

Si $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ es un ciclo, entonces los siguientes:

– $\langle x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_1, x_2 \rangle$

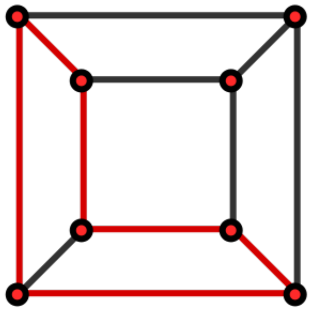
– $\langle x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_1, x_2, x_3 \rangle$

– $\ldots$

son el **mismo** ciclo

© 2014 Blai Bonet

Ejemplo: ciclos



Ciclo simple

© 2014 Blai Bonet

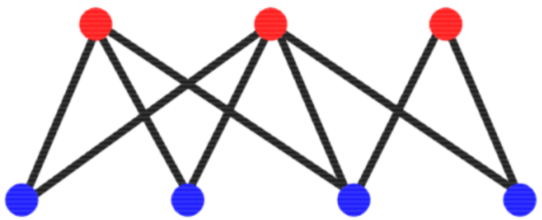
Grafos bipartitos

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **bipartito** ssi V se descompone en dos partes disjuntas $V = V_1 \cup V_2$ (con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) tal que:

– Si $\{x, y\}$ es una arista, entonces $x \in V_1$ y $y \in V_2$

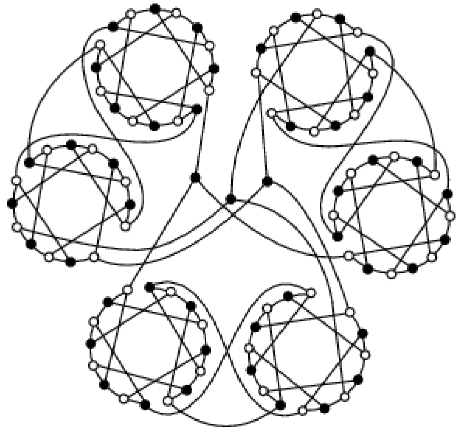
© 2014 Blai Bonet

Ejemplo: grafos bipartitos



© 2014 Blai Bonet

Ejemplo: grafos bipartitos



© 2014 Blai Bonet

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito ssi no contiene un ciclo de longitud impar

© 2014 Blai Bonet

Grafo conexo

Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido es **conexo** ssi todo par de vértices están conectados

Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido, el grafo no dirigido **subyacente** es $G' = (V, E')$ donde:

– $E' = \{\{x, y\} : (x, y) \in E\}$

Un grafo $G = (V, E)$ **dirigido** es conexo si el grafo no dirigdo subyacente es conexo

© 2014 Blai Bonet

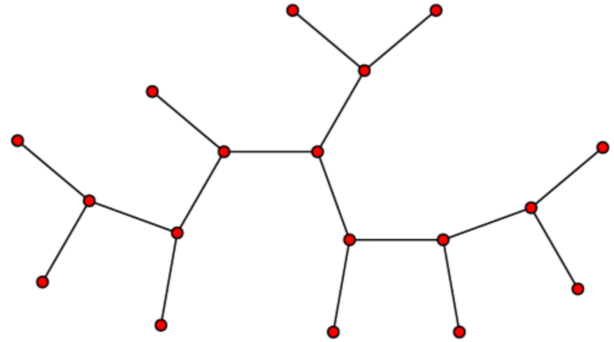
Arboles y forestas

Un **árbol** $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido que es conexo y no tiene ciclos

Una **foresta o bosque** es un grafo compuesto por árboles desconectados

© 2014 Blai Bonet

Ejemplo: Arboles



© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Los siguientes son equivalentes:

1. *G es un árbol*
2. *Todo par de vértices están conectados por un único camino simple*
3. *G es conexo pero se desconecta al remover cualquier arista*
4. *G es conexo y $|E| = |V| - 1$*
5. *G es acíclico y $|E| = |V| - 1$*
6. *G es acíclico pero si cualquier arista se añade aparece un ciclo*

© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

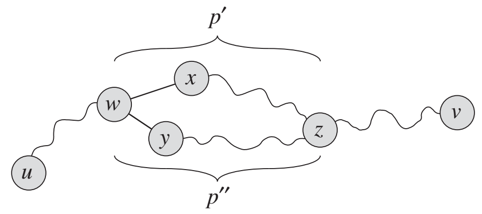
$1 \Rightarrow 2$: Como todo árbol es conexo, G es conexo

Sea u y v dos vértices y suponga que existen dos caminos p_1 y p_2 distintos de u a v

Sea w el primer vértice tal que el sucesor x de w en p_1 es distinto al sucesor y de w en p_2

Sea z el primer vértice para el cual p_1 y p_2 convergen

El subcamino p' de p_1 de w a z seguido del subcamino p'' de p_2 de z a w forma un ciclo en G y por lo tanto no es un árbol (contradicción)



© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

$2 \Rightarrow 3$: Claramente G es conexo

Si se remueve la arista (u, v), u queda desconectado de v puesto que existe un único camino de u a v en G

© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

$3 \Rightarrow 4$: Veamos por inducción en $n = |V|$ que $|E| = |V| - 1$

Un grafo que satisface (3) con $n = 2$ vértices tiene una sola arista

Suponga que G tiene $n \geq 3$ vértices y que todo grafo que satisface (3) con a lo sumo $n - 1$ vértices tiene $|V| - 1$ aristas

Sea (u, v) una arista en el grafo y remuevala para obtener dos grafos desconectados G_1 y G_2. Ambos grafos satisfacen (3) y por hipótesis inductiva:

$$|E_1| = |V_1| - 1$$
$$|E_2| = |V_2| - 1$$

Claramente, $|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = |V| - 1$

© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

$4 \Rightarrow 5$: Suponga que G es conexo y $|E| = |V| - 1$. Debemos mostrar que G es acíclico. Suponga que G tiene un ciclo $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0 = v_k$, y asuma que es un ciclo simple

Sea $G_k = (V_k, E_k)$ el subgrafo formado por el ciclo con $|V_k| = |E_k| = k$

Si $k = |V_k| < |V|$, existe un vértice $v_{k+1} \in V \setminus V_k$ que es adyacente a algún vértice v_i en V_k ya que G es conexo

Sea $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ con $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ y $E_{k+1} = E_k \cup \{(v_i, v_{k+1})\}$, y $|V_{k+1}| = |E_{k+1}| = k + 1$

Continue de la misma forma hasta obtener un subgrafo $G_n = (V_n, E_n)$ con $|V_n| = |E_n| = n = |V|$

Esto es una contradicción ya que $|E| = |V| - 1$

© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

$5 \Rightarrow 6$: Suponga que G es acíclico y $|E| = |V| - 1$. Debemos mostrar que si añadimos cualquier arista a G se crea un ciclo

Sea k el número de componentes conexas en G. Cada una de las k componentes es un árbol ya que es conexa y acíclica

Como $(1) \Rightarrow (5)$, si sumamos el número de aristas en cada componentes, obtenemos $|E| = |V| - k$ y por lo tanto $k = 1$

Es decir, solo hay una componente conexa y G es un árbol

Si añadimos la arista (u, v), se crea un ciclo de u a v ya que G contiene un camino de u a v por ser un árbol

© 2014 Blai Bonet

Caracterización de Arboles

$6 \Rightarrow 1$: Suponga que G es acíclico y al añadir cualquier arista se crea un ciclo

Sea u y v dos vértices no adyacentes. Al añadir (u, v) se crea un ciclo. Dicho ciclo debe involucrar a u y v. Por lo tanto, u esta conectado con v en G

Es decir, G es conexo y por la tanto es un árbol

$\square$

© 2014 Blai Bonet