

CI2612: Algoritmos y Estructuras de Datos II

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Análisis probabilístico

© 2017 Blai Bonet

Objetivos

- Estudiar los elementos básicos de la teoría de probabilidad para realizar los análisis necesarios de algoritmos
- Ejemplos de análisis probabilístico

© 2017 Blai Bonet

Espacio de probabilidad

Intuitivamente, utilizamos la idea de probabilidad para asignar una medida de plausibilidad al resultado de un experimento “aleatorio”

Formalmente, la noción de probabilidad se define sobre un **espacio de probabilidad**

El espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo conforman:

- el **espacio muestral** Ω que contiene todos los **posibles resultados** del experimento o proceso aleatorio
- el conjunto \mathcal{F} de **eventos a considerar** (en nuestro caso todos los subconjuntos de Ω)
- la **función o medida de probabilidad** $\mathbb{P}(\cdot)$ definida sobre los **eventos**

© 2017 Blai Bonet

Ejemplo: Lanzar una moneda

Considere el experimento de **lanzar una moneda**

Existen dos posibles resultados del experimento: $\Omega = \{H, T\}$

El conjunto de eventos es $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$:

- El evento \emptyset denota que el experimento vacuo (considerado por conveniencia)
- El evento $\{H\}$ denota que la moneda salió cara
- El evento $\{T\}$ denota que la moneda salió cruz
- El evento $\{H, T\}$ denota que la moneda salió cara o cruz

Si la moneda es insesgada (resultados equiprobables), definimos:
 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\{H\}) = \mathbb{P}(\{T\}) = \frac{1}{2}$, y $\mathbb{P}(\{H, T\}) = 1$

Eventos

Para cada $\omega \in \Omega$, el evento $\{\omega\}$ se llama **evento atómico** y representa un único resultado del experimento

Los otros eventos denotan conjuntos de **posibles resultados** los cuales son útiles para el análisis del experimento

Por ejemplo, si el experimento es lanzar un dado, podemos hablar del evento que el dado cae en un número par

Después de realizar el experimento podemos decir cuando un evento es cierto o falso. Si el resultado del experimento es ω , decimos que el evento E es cierto si $\omega \in E$. Si $\omega \notin E$, decimos que E es falso

Función (medida) de probabilidad

La función de probabilidad \mathbb{P} es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que asigna probabilidades a los eventos y debe satisfacer:

P1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

P2. para toda colección $\{E_i\}_i$ de eventos que sean **disjuntos dos a dos** (i.e. $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $1 \leq i < j \leq n$):

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \dots + \mathbb{P}(E_n)$$

Por lo tanto, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) \implies \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Evento complemento

Considere un evento E que denota un posible resultado del experimento

El evento $E^c = \Omega \setminus E$ es el **evento complemento**:

E es cierto ssi E^c es falso

Entonces, $\mathbb{P}(E)$ es la probabilidad de que E sea cierto y $\mathbb{P}(E^c)$ es la probabilidad de que E sea falso

Por la aditividad de la medida y la propiedad P1:

$$\mathbb{P}(E^c) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E)$$

Ejemplo: Lanzar dos monedas

Ahora considere dos monedas “**insesgadas e independientes**”

Definimos:

- $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$
- $\mathcal{F} = \{E \subseteq \Omega\}$
- $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{4}$ para todo evento atómico E (la probabilidad de los demás eventos queda determinada por la propiedad P2)

Probabilidad de que **1ra moneda** salga cara: $\mathbb{P}(\{HH, HT\}) = \frac{1}{2}$

Probabilidad de que **2da moneda** salga cara: $\mathbb{P}(\{HH, TH\}) = \frac{1}{2}$

Independencia: Dos eventos

Considere un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y dos eventos $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$

E_1 es **independiente** de E_2 si conocer alguna información sobre la ocurrencia de E_1 no altera la probabilidad de la ocurrencia de E_2 (y vice versa)

Formalmente, E_1 y E_2 son independientes ssi $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$

En el ejemplo, considere $E_1 = \{HH, HT\}$ y $E_2 = \{HH, TH\}$ que denotan los eventos en donde la primera y segunda moneda salen cara respectivamente:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(\{HH\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2)$$

Independencia: Más de dos eventos

Dos formas de definirla

Considere la colección $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de eventos:

- \mathcal{E} es **independiente dos a dos** ssi E_i es independiente de E_j para cualquier (i, j) con $i \neq j$; i.e. $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \mathbb{P}(E_i) \times \mathbb{P}(E_j)$ para todo $1 \leq i < j \leq n$
- \mathcal{E} es **mutuamente independiente** ssi $\mathbb{P}(\cap_{E \in \mathcal{A}} E) = \prod_{E \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(E)$ para todo subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ de eventos

Las definiciones no son equivalentes, pero la segunda implica la primera

Probabilidad condicional

Considere el experimento de lanzar un dado insesgado y los eventos $A =$ “el dado cae en múltiplo de 3 ó 5” y $B =$ “el dado cae par”

Vemos $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ pero $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$

¿Cuál es la probabilidad del evento A si sabemos que B es **cierto**?

De las tres posibilidades para el evento B (i.e. el dado sale 2, 4, o 6), solo una hace cierta al evento A . Por lo tanto, la respuesta es $\frac{1}{3}$

Definimos la **probabilidad condicional** $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$

[por lo general denotamos $\mathbb{P}(A \cap B)$ con $\mathbb{P}(A, B)$]

Independencia y probabilidad condicional

Considere dos eventos independientes A y B :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A, B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

Ahora considere dos eventos A y B tales que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Conclusión: A y B son independientes ssi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Regla de la cadena

Considere una colección de n eventos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

$$\mathbb{P}(A_1, A_2) = \mathbb{P}(A_1|A_2) \times \mathbb{P}(A_2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1, A_2, A_3) &= \mathbb{P}(A_1|A_2, A_3) \times \mathbb{P}(A_2, A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1|A_2, A_3) \times \mathbb{P}(A_2|A_3) \times \mathbb{P}(A_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1, A_2, A_3, A_4) &= \mathbb{P}(A_1|A_2, A_3, A_4) \times \mathbb{P}(A_2, A_3, A_4) \\ &= \mathbb{P}(A_1|A_2, A_3, A_4) \times \mathbb{P}(A_2|A_3, A_4) \times \mathbb{P}(A_3, A_4) \\ &= \mathbb{P}(A_1|A_2, A_3, A_4) \times \mathbb{P}(A_2|A_3, A_4) \times \mathbb{P}(A_3|A_4) \times \mathbb{P}(A_4)\end{aligned}$$

En general,

$$\mathbb{P}(A_1, \dots, A_k) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i|A_{i+1}, \dots, A_k)$$

Variables aleatorias

Considere la siguiente propuesta:

Usted paga n bolívars para tener el chance de lanzar una moneda. Si la moneda sale cara, usted recibe un pago m_H y si la moneda sale cruz usted recibe m_T (ambos pagos en bolívars)

¿Vale la pena aceptar la propuesta?

Utilizaremos **variables aleatorias** y **cálculo de esperanza** para responder la pregunta

Variables aleatorias

Una variable aleatoria X sobre un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es una **función** desde el espacio muestral a los reales (i.e. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

Definimos el evento $[X = x] = \{w \in \Omega : X(w) = x\}$ con probabilidad

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) = x\})$$

En el ejemplo, $\Omega = \{H, T\}$ y definimos la variable $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ igual al **beneficio neto** que se obtiene de aceptar la propuesta:

$$Z(H) = m_H - n$$

$$Z(T) = m_T - n$$

E.g. si $m_H \neq m_T$, entonces $\mathbb{P}(Z = m_H - n) = \mathbb{P}(\{H\})$

Esperanza

Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la **esperanza** de X se define como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Si los valores tomados por X son enteros no negativos

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \geq 0} x \mathbb{P}(X = x)$$

La esperanza cuantifica el valor esperado (promedio) de la variable aleatoria X :

Si repetimos el experimento muchas veces de forma independiente, y promediamos los valores obtenidos de X , el promedio tiende a $\mathbb{E}[X]$ a medida que el número de repeticiones se incrementa

Resolución del problema de apuesta

El beneficio neto Z de aceptar la propuesta es:

$$Z(H) = m_H - n$$

$$Z(T) = m_T - n$$

El **beneficio neto esperado** es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= Z(H) \mathbb{P}(\{H\}) + Z(T) \mathbb{P}(\{T\}) \\ &= (m_H - n) \times \frac{1}{2} + (m_T - n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(m_H + m_T) - n \end{aligned}$$

Entonces, $\mathbb{E}[Z] > 0$ cuando $m_H + m_T > 2n$

Independencia de variables aleatorias

Dos variables aleatorias X, Y definidas sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ son **independientes** ssi

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

para todos los subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$

Una colección $\{X_i\}_{i=1}^n$ de variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio es **independiente dos a dos** ssi para todo $1 \leq i < j \leq n$, X_i y X_j son independientes

Propiedades de esperanza

- $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$

- Si $Y = g(X)$ para $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces Y es variable aleatoria y

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_y y \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x g(x) \mathbb{P}(X = x)$$

(cuando las sumas esten bien definidas; e.g. X y Y tengan rango finito)

- Si X e Y son independientes, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$

Variables aleatorias indicadoras

Una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que tome valores en $\{0, 1\}$ se llama **variable aleatoria indicadora**

Calculemos su esperanza:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= 0 \times \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) + 1 \times \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) \\ &= \mathbb{P}(E)\end{aligned}$$

donde E es el evento $E = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} = [X = 1]$

Cota para la probabilidad de la unión

Considere una colección de eventos $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

Si los eventos son disjuntos dos a dos,

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(E_i)$$

En cualquier caso, siempre se cumple

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(E_i)$$

Esperanza de variables enteras

Considere una v.a. entera no-negativa X ; i.e. con rango $\{0, 1, 2, \dots\}$

Por definición, su esperanza es

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \geq 0} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \geq 1} x \mathbb{P}(X = x)$$

La suma la podemos expresar de la siguiente forma:

$\mathbb{P}(X = 1)$	$\mathbb{P}(X = 1)$				
$2\mathbb{P}(X = 2)$	$\mathbb{P}(X = 2)$	$\mathbb{P}(X = 2)$			
$3\mathbb{P}(X = 3)$	$\mathbb{P}(X = 3)$	$\mathbb{P}(X = 3)$	$\mathbb{P}(X = 3)$		
$4\mathbb{P}(X = 4)$	$\mathbb{P}(X = 4)$	$\mathbb{P}(X = 4)$	$\mathbb{P}(X = 4)$	$\mathbb{P}(X = 4)$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{P}(X \geq 1)$	$\mathbb{P}(X \geq 2)$	$\mathbb{P}(X \geq 3)$	$\mathbb{P}(X \geq 4)$	\dots

Entonces, $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \geq 1} \mathbb{P}(X \geq x)$ cuando X es entera no-negativa

Desigualdad de Markov

La desigualdad de Markov permite acotar la probabilidad de una variable X no negativa utilizando la esperanza de X

Para todo $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

Ejemplos de análisis probabilístico

Lanzar monedas

Considere el experimento de lanzar una moneda hasta obtener cara. Con suerte, lanzamos una sola vez. Con mala suerte, lanzamos muchas veces

¿Cuántas veces tenemos que lanzar la moneda en promedio?

Sea X la v.a. para el número de veces que tenemos que lanzar la moneda

Queremos calcular $\mathbb{E}[X]$. Utilizaremos $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1/4$$

...

$$\mathbb{P}(X \geq k) = 1/2^{k-1}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} = 2$$

Paradoja del día de nacimiento 1/4

¿Cuántos estudiantes deben haber en un salón para que la probabilidad de que dos de ellos nazcan el **mismo día** sea $> \frac{1}{2}$?

Asumiremos que el año tiene $n = 365$ días (obviando años bisiestos) e indizamos a las personas con los enteros $1, 2, \dots, k$

Sea $b_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ el día de nacimiento de la persona i . Asumimos $\mathbb{P}(b_i = r) = 1/n$ y $\mathbb{P}(b_i = r, b_j = s) = 1/n^2$ para todo i, j, r, s

La probabilidad que las personas i y j nazcan el mismo día es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(b_i = b_j) &= \mathbb{P}(\cup_{d=1}^n \{b_i = d, b_j = d\}) && \text{(eventos equivalentes)} \\ &= \sum_{d=1}^n \mathbb{P}(b_i = d, b_j = d) && \text{(eventos disjuntos, cota unión)} \\ &= \sum_{d=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} && \text{(suposición)} \end{aligned}$$

Paradoja del día de nacimiento 2/4

Ahora acotaremos $\mathbb{P}(B_m)$ donde B_m es el evento que los **días de nacimiento de las personas $1, 2, \dots, m$ son todos distintos**

Para $m \geq 2$, definimos el evento $A_m =$ “las personas $1, 2, \dots, m-1$ nacen en días distintos a la persona b_m ”

Observar

$$B_1 = \Omega$$

$$B_2 = B_1 \cap A_2$$

$$B_3 = B_2 \cap A_3 = B_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$B_4 = B_3 \cap A_4 = B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

En general, $B_k = B_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$

Paradoja del día de nacimiento 3/4

Para responder la pregunta, necesitamos el número k de personas tal que

$$\mathbb{P}(B_k^c) \geq \frac{1}{2}$$

donde $B_k^c =$ “al menos dos personas en $\{1, 2, \dots, k\}$ nacen el mismo día”

Como $\mathbb{P}(B_k^c) = 1 - \mathbb{P}(B_k)$, queremos calcular k tal que $\mathbb{P}(B_k) \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_k) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(A_2|B_1) \times \mathbb{P}(A_3|B_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_k|B_{k-1}) \\ &= 1 \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n} \\ &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &\leq e^{-1/n} \times e^{-2/n} \times \dots \times e^{-(k-1)/n} \quad [\alpha < 1 \implies 1 - \alpha \leq e^{-\alpha}] \\ &= e^{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k-1} i} = e^{-k(k-1)/2n} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

cuando $-k(k-1)/2n \leq \ln(1/2)$. Para $n = 365$, basta $k \geq 23$

Paradoja del día de nacimiento 4/4

Resolvamos nuevamente usando **variables indicadoras y la linealidad de la esperanza**. Considere la v.a. indicadora $X_{ij} = \mathbb{I}\{b_i = b_j\}$:

$$\mathbb{E}[X_{ij}] = \mathbb{P}(X_{ij} = 1) = \mathbb{P}(b_i = b_j) = 1/n$$

Sea X el número de pares de personas distintas con el mismo día de nacimiento: i.e. $X = \sum_{1 \leq i < j \leq k} X_{ij}$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \mathbb{E}[X_{ij}] = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1}{n} = \binom{k}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}$$

Si $\mathbb{E}[X] \geq 1$ entonces existe al menos un i y j tal que $X_{ij} = 1$

$\mathbb{E}[X] \geq 1$ cuando $k(k-1)/2n \geq 1$ lo que implica $k \geq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8n})$

Para $n = 365$, cuando $k \geq 28$ esperamos que exista al menos 1 par de personas que cumplan el mismo día

Más fácil pero la cota $k \geq 28$ es menos ajustada que $k \geq 23$

Pelotas y cajas

Considere el proceso de lanzar n **pelotas idénticas** en b **cajas distintas**, numeradas $1, 2, \dots, b$

Los **lanzamientos son independientes** y la probabilidad de que una pelota caiga en una caja cualquiera es $1/b$

– ¿Cuántas pelotas caen (en promedio) en una caja dada?

Respuesta: n/b pelotas por caja en promedio

– ¿Cuántas pelotas debemos lanzar (i.e. determinar n) hasta que 1 pelota caiga en una caja dada?

Respuesta: debemos lanzar b pelotas en promedio

– ¿Cuántas pelotas debemos lanzar (i.e. determinar n) hasta que toda caja contenga al menos 1 pelota? (**Coleccionista de cupones**)

Respuesta: debemos lanzar $b \ln b$ pelotas en promedio

Coleccionista de cupones 1/2

Cada vez que una pelota cae en una caja vacía lo llamamos un **hit**

Queremos calcular el número esperado de lanzamientos hasta obtener b hits

Particionamos los lanzamientos en episodios:

- el primer episodio consiste en los lanzamientos hasta el primer hit (incluyendo el hit)
- el i -ésimo episodio consiste en los lanzamientos después de $(i-1)$ -ésimo hit y hasta el i -ésimo hit (incluyendo el hit)

Sea n_i el número de lanzamientos en el i -ésimo episodio. El número total de lanzamientos para obtener b hits es $\sum_{i=1}^b n_i$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^b n_i\right] = \sum_{i=1}^b \mathbb{E}[n_i] = \sum_{i=1}^b \frac{b}{b-i+1} = b \sum_{i=1}^b \frac{1}{i} = b(\ln b + O(1))$$

donde $\mathbb{E}[n_i] = b/(b-i+1)$ (ver próximo slide)

Coleccionista de cupones 2/2

Distribución y esperanza de la variable n_i

Sea p_i la probabilidad de que un lanzamiento en el i -ésimo episodio sea un hit y $q_i = 1 - p_i$

$$\mathbb{P}(n_i \geq k) = \mathbb{P}(n_i > k - 1) = q_i^{k-1}$$

($n_i > k - 1$ ssi los primeros $k - 1$ lanzamientos no son un hit)

$$\mathbb{E}[n_i] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(n_i \geq k) = \sum_{k \geq 1} q_i^{k-1} = \sum_{k \geq 0} q_i^k = \frac{1}{1 - q_i} = \frac{1}{p_i}$$

Observe que $p_i = (b - i + 1)/b$ ya que durante el i -ésimo episodio, $i - 1$ cajas tiene pelotas y $b - i + 1$ cajas no tienen pelotas

Resumen

- Elementos de teoría de probabilidades:
 - espacio de probabilidades: espacio muestral, eventos, función de probabilidad
 - independencia de eventos, probabilidad condicional y regla de la cadena
 - variables aleatorias e independencia de variables
 - esperanza y propiedades
 - cota para la unión, regla de probabilidad total y desigualdad de Markov
- Ejemplos de análisis probabilístico

Ejercicios opcionales (1 de 2)

1. (8.4-3) Sea X una variable aleatoria que es igual al número de caras en dos lanzadas de una moneda insesgada. Calcule $\mathbb{E}[X^2]$ y $\mathbb{E}[X]^2$
2. (5.2-3) Use variables indicadoras para computar el valor esperado de la suma de n dados lanzados (insesgados)
3. (5.2-4) Use variables indicadoras para resolver lo siguiente. Cada uno de los n clientes en un restaurant dejan sus sombreros con el guardaropas. Al salir, el guardaropas devuelve los sombreros totalmente al azar. ¿Cuál es el número esperado de clientes que obtienen su sombrero al salir del restaurant?

Ejercicios opcionales (2 de 2)

4. (5.2-5) Sea $A[1 \dots n]$ un arreglo con n enteros distintos. Si $i < j$ y $A[i] > A[j]$, decimos que el par (i, j) es una inversión de A . Suponga que los elementos de A forman una permutación uniforme sobre $\{1, 2, \dots, n\}$. Use variables indicadoras para calcular el número esperado de inversiones en A
5. Responda la primera y segunda pregunta para el problema de las pelotas y las cajas