Ornstein-Uhlenbeck
UFRGS - FIS01082

Aluno: Henrique Alexandre Boneto - 288744

Junho 2020

Processo de Ornstein-Uhlenbeck

O processo de Ornstein-Uhlenbeck é definido pela equação diferencial estocástica (EDE):

$$dV = \gamma(V_d - V)dt + \beta^2 dW_t$$

Onde $\theta, \sigma > 0$, são parâmetros da equação e W_t é o processo de Wiener. Podemos chegar à conclusão que, através da tentativa de solucionar a EDE e através da propriedade de isometria de Ito:

$$\lim_{t \to \infty} (V) = \frac{\beta^2}{2\gamma}$$

Circuito RC

Um circuito composto por somente resistores e capacitores é chamado de um circuito RC. Usando a Lei de Kirchhoff podemos escrever a seguinte equação para um circuito com um resistor resultante R em série com um capacitor C.

$$C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = 0$$

$$dV = -\frac{V}{RC}dt$$

A solução analítica para essa equação é:

$$V(t) = V(0)\exp\Big(-\frac{t}{RC}\Big)$$

Podemos ver que no limite $\lim_{t \to \infty} V(t) = 0$. Ou seja, a tensão demora um certo tempo para entrar em equilíbrio (tensão zero). Chamamos de $\tau = RC$ o tempo necessário para que a tensão aplicada sobre o circuito atinga aproximadamente 63% ($V(\tau) = V(0)e^{-1}$) da tensão primeiramente aplicada sobre ele $V_0 = V(0)$. Antes do sistema atingir o equilíbro, chama-se essa fase de transitória, sendo que essa fase dura aproximadamente um tempo igual a 5τ.

Caso adicionemos um um fator de ruído βdW (caso em que um circuito seja submetido aquecido) à equação acima, teremos:

$$dV = -\frac{V}{RC}dt + \beta dW$$

Podemos caucular β para o circuito utilizando as equações na primeira seção em conjunto com equações da termodinâmica. O resultado final nos dá:

$$\beta^2 = \frac{2k_bT}{RC^2}$$

Sendo k_b a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema.

Método de Euler-Maruyama

O método de Euler-Maruyama é um método numérico utilizado para aproximar EDEs. Ele consiste em fazer N subdivisões no intervalo escolhido e fazer $\Delta t = T/N$ e recursivamente fazer:

$$Y_{t+1} = Y_t + a(Y_t)\Delta t + b(Y_t)\Delta W_t$$

Sendo a e b os parâmetros da EDE e W_t o processo de Wiener. No caso específico do circuito RC:

$$a = -\frac{V}{RC}$$

e

$$b = \sqrt{\frac{2k_bT}{RC}}$$

Prática

Esta prática consistirá na simulação numérica de um circuito RC utilizando-se o método de Euler-Maruyama sobre o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

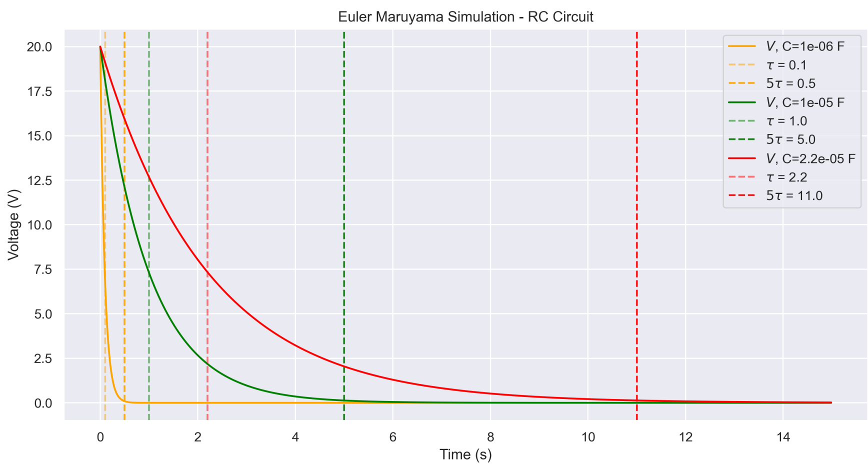
Parâmetros Utilizados

Os parâmetros utilizados para a simulação foram os seguintes, variando somente o valor da capacitância do capacitor no sistema (e automaticamente o tempo RC):

N	1000
t_0	0s
t_f	15s
R	100 $\times 10^3 \Omega$
C_1	1 $\times 10^{-6} F$
C_2	10 $\times 10^{-6} F$
C_3	22 $\times 10^{-6} F$
T	500 K
V_0	20 V

Resultados

Abaixo, é possível ver os resultados para a simulação, com as linhas verticais mostrando o tempo τ e 5τ com a cor correspondente a cada circuito.



A simulação não aparenta ter ruído pois o parâmetro β realmente influencia muito pouco à equação por conta da constante de Boltzmann no numerador. Também podemos checar que tanto a fase transiente como a de equilíbrio do sistema foram respeitadas, já que em todos os três circuitos, após $t = 5\tau$ a voltagem atinge o equilíbrio em torno do zero.

Implementação

Abaixo o código feito em Python:

```
#constants
N = 1000
t0 = 0
tf = 15
dt = (tf - t0) / N

#circuit constants
R = 100e3
Cs = [1e-6, 10e-6, 22e-6]
taus = [R*C for C in Cs]
kb = Boltzmann
T = 500
v0 = 20

x = np.zeros(N)
x[0] = v0

#Wiener Process
def dW(dt):
    dW = np.random.normal(0, scale=np.sqrt(dt))
    return dW

#param a RC circuit for an O-U Process
def a(n, x, R, C):
    a = -x / (R * C)
    return a

#param b RC circuit for an O-U Process
def b(kb, T, R, C):
    b = np.sqrt((2 * kb * T) / (R * C**2))
    return b

#numerical solution using Euler-Maruyama method
def euler_maruyama(x, kb, R, C, T, dW):
    for n in range(N-1):
        x[n+1] = x[n] + a(n, x[n], R, C)*dt + b(kb, T, R, C)*dW(dt)
    return x

def v_tau(v0, tau, R, C):
    v_tau = v0*np.exp((-tau)/(R*C))
    return v_tau

fig, ax = plt.subplots(figsize=(12,6))
colors = ['orange', 'green', 'red']

#plotting simulations
for i in range(len(Cs)):
    C = Cs[i]
    tau = round(taus[i], 2)

    x = euler_maruyama(x, kb, R, C, T, dW)
    t = np.arange(t0, tf, dt)

    ax.set_title('Euler Maruyama Simulation - RC Circuit')
    ax.plot(t, x, color=colors[i],label='$V$, C={} F'.format(C))
```

```
    vtau = v_tau(v0, tau, R, C)
    #plt.plot(tau, vtau, 'o', label=r'$V$($\tau={}$)'.format(tau))
    ax.axvline(x=tau, color=colors[i], alpha=0.5, linestyle='--',
    label=r'$\tau$ = {}'.format(round(tau,2)))
    ax.axvline(x=5*tau, color=colors[i], alpha=0.9, linestyle='--',
    label=r'$5\tau$ = {}'.format(round(5*tau, 2)))
    plt.plot(tau,)
    plt.ylabel('Voltage (V)')
    plt.xlabel('Time (s)')
    plt.legend()

plt.savefig('figs/euler-maruyama-sim.png', dpi=300)
```

Referências

[1] En.wikipedia.org. 2020. Ornstein–Uhlenbeck Process. [online] Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Ornstein%E2%80%93Uhlenbeck_process#Higher_dimensions [Accessed 20 June 2020].

[2] En.wikipedia.org. 2020. Euler–Maruyama Method. [online] Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Maruyama_method [Accessed 20 June 2020].

[3] En.wikipedia.org. 2020. RC Circuit. [online] Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit [Accessed 22 June 2020].

[4] Caxias.ufrj.br. 2020. [online] Available at: https://caxias.ufrj.br/images/Lab_Didatico/Fisica/FISEXP_3/Exp_3-Transientes_em_circuitos_RC_e_RL_alimentados_com_onda_quadrada.pdf [Accessed 20 June 2020]..