UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Mecânica

EM607 - Vibrações de Sistemas Mecânicos

Projeto 1

Grupo 11

Bruno Monteiro Bonetti - 232488

Bruno Cardoso Holanda - 167542

Henrique Fonseca M. de Oliveira - 174547

Campinas - SP
2023

Sumário

1. Introdução 3
2. Objetivos 3
3. Metodologia 3
4. Desenvolvimento 4
5. Fontes 21

1. Introdução

Nos sistemas mecânicos lidamos constantemente com o fenômeno de vibrações, que ocorre quando um sistema sofre oscilações em torno de uma posição de equilíbrio. As oscilações podem ser oriundas de diversas fontes, como excitações, desequilíbrio, choques, forças externas e outras perturbações. Assim sendo, nos diversos projetos, como pontes, veículos, construções e máquinas, é um fator muito importante a ser considerado.

Na disciplina de EM607 estudamos os comportamentos desses sistemas mecânicos com a finalidade de entendê-los e saber como controlá-los. Tendo isso em mente, esse trabalho é um estudo da vibração de um sistema mecânico, apresentado na figura 1.

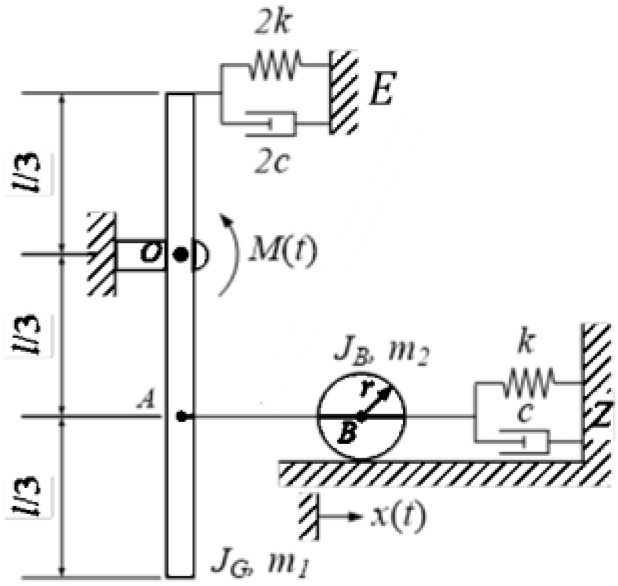


Figura 1. Sistema mecânico explorado no trabalho

2. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo analisar a vibração em um sistema mecânico, avaliando o deslocamento, parâmetros modais, a resposta temporal do sistema e sua transmissibilidade.

3. Metodologia

Inicialmente, temos o sistema apresentado na figura 1, além disso, consideramos as seguintes informações sobre o mesmo:

- $m_1 = 3\ kg,\ m_2 = 2gk,\ r = 10cm,\ l = 1m,\ M(t) = 20sin(\omega t)Nm,\ k = 1000N/m,$
- $J_g = m1l^2/12\ \ e\ J_B = m_2r^2/2$

Além disso, a elaboração das análises seguiu por responder os seguintes itens:

- A equação de movimento utilizando o deslocamento horizontal do cilindro B, x(t), como coordenada generalizada;
- Os parâmetros modais e o valor do coeficiente de amortecimento c.
- Resposta temporal do cilindro em metros e da barra em graus dadas a seguintes
- condições:
  - o Vibração livre com posição e velocidade iniciais da barra $\theta_0 = 2,5°$ e $\frac{d}{dt}\theta_0 = 10°/s$
  - o Condições iniciais nulas e ω = 15 rad/s.
  - o Condições iniciais nulas na frequência de ressonância.
  - o Condições iniciais nulas, c = 0 e ω = 21 rad/s (plotar 10s)
  - o Condições iniciais nulas, c = 0 e na frequência de ressonância (plotar 10s).

- A função de resposta em frequência (FRF).
- Gráfico da força transmitida ao suporte E quando a transmissibilidade de força é de 80%. Considerar condições iniciais nulas. Comparar o valor obtido com o valor total da força transmitida a todos os suportes.
- Encontre o sistema equivalente (meq, ceq, keq) para M(t) = 0 como mostrado na figura abaixo. Suponha que a base apresenta uma oscilação y(t) = 5 sin(27t) mm. Calcule uma nova rigidez equivalente de forma que a aceleração da massa equivalente fique limitada a 0,1g. Plotar a resposta temporal do sistema equivalente original e do novo sistema equivalente. Considerar condições iniciais nulas.

4. Desenvolvimento

Inicialmente utilizando o sistema mecânico apresentado na figura 1, fizemos o DCL do sistema, apresentado na figura 2.

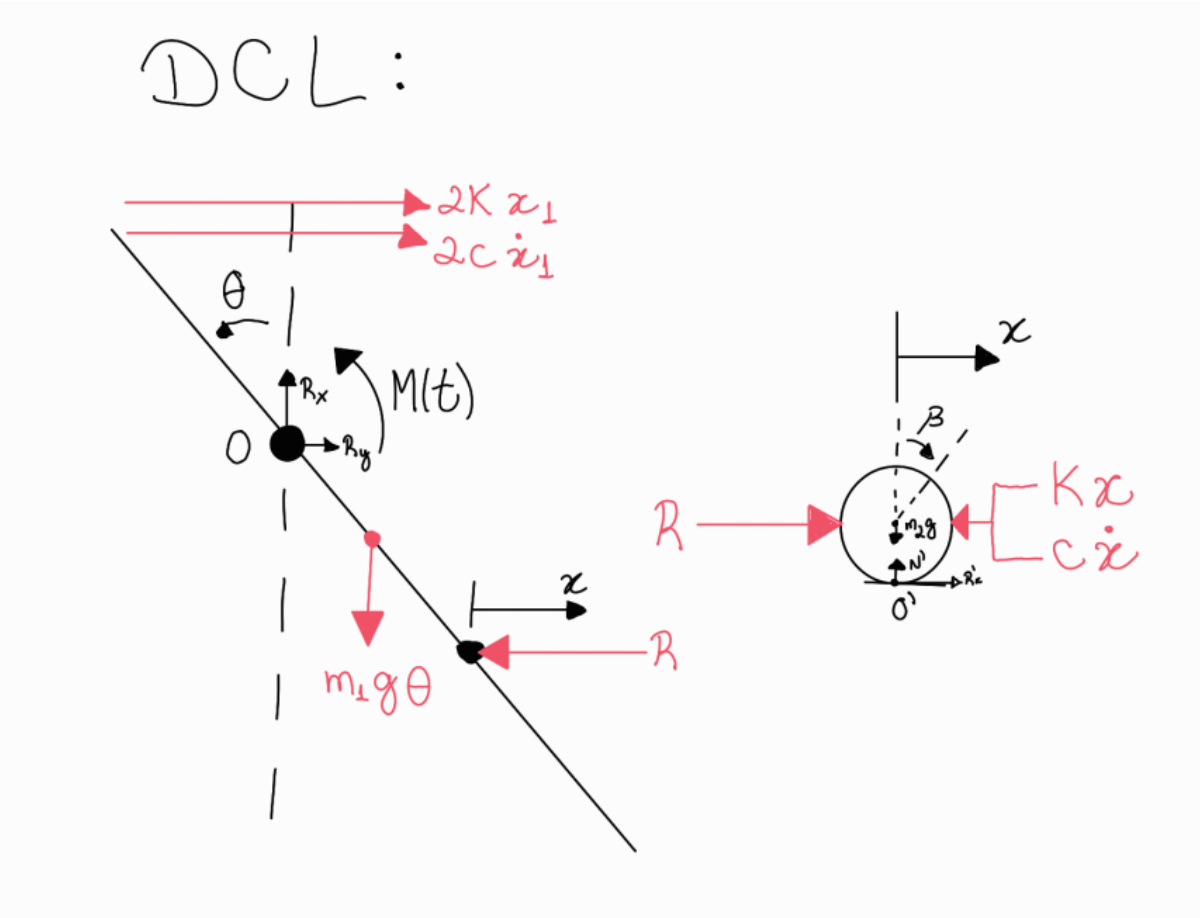


Figura 2. Apresenta o DCL do sistema mecânico.

Utilizando o DCL foi elabora o seguinte equacionamento:

Primeiramente, utilizamos as relações cinemáticas abaixo.

- Relações Cinemáticas (considerando pequenos deslocamentos):

$$x = \frac{l}{3}\theta \rightarrow \theta = \frac{3}{l}x$$

$$x_1 = \frac{l}{3}\theta \rightarrow \boxed{x_1 = x}$$

$$x = \beta \cdot r \rightarrow \beta = \frac{x}{r}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

Considerando essas relações e mais o DCL fizemos o seguinte equacionamento:

- Somatório de Momentos no ponto O:

$$\circlearrowright^{+} \sum M_0 = J_0 \cdot \ddot{\theta}$$

$$-(2Kx_1 + 2c\dot{x}_1)\cdot\frac{l}{3} - m_1 g\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)\theta - R\frac{l}{3} + M(t) = J_0\,\ddot{\theta} \;,$$

sendo $J_0 = J_G + m_1\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)^2$

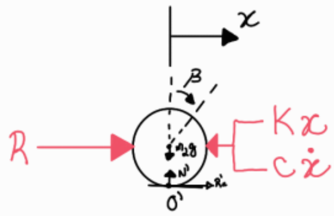
J_G

$$-2K\frac{l}{3}x - 2c\frac{l}{3}\dot{x} - \frac{m_1}{2} g \cancel{\frac{l}{6}}\cancel{\frac{3}{l}}x - R\frac{l}{3} + M(t) = \left(m_1\frac{l^2}{12} + m_1\frac{l^2}{36}\right)\frac{3}{l}\ddot{x}$$

$$-2K\frac{l}{3}x - 2c\frac{l}{3}\dot{x} - \frac{1}{2}m_1 g x - \frac{1}{3}Rl + M(t) = \left(m_1\frac{3}{12}l + m_1\frac{l}{12}\right)\ddot{x}$$

$$R\frac{l}{3} = -2K\frac{l}{3}x - 2c\frac{l}{3}\dot{x} - \frac{1}{2}m_1 g x - \frac{1}{3}m_1 l\ddot{x} + M(t)$$

$$R = -2Kx - 2c\dot{x} - \frac{3}{2l}m_1 g x - m_1\ddot{x} + \frac{3}{l}M(t) \qquad (I)$$



- Somatório de momentos em O':

$$\circlearrowright^{+} \sum M_{O'} = J_B \cdot \ddot{\beta}$$

$$R\cdot r - (Kx + c\dot{x})\cdot r = J_{O'}\cdot\ddot{\beta} \;,$$

$$J_{O'} = J_B + m_2\cdot r^2 \;,\quad J_B = \frac{m_2 r^2}{2}$$

$$Rr - Kxr - c\dot{x}r = \left(\frac{1}{2}m_2 r^2 + m_2 r^2\right)\cdot\frac{\ddot{x}^2}{r}$$

$$Rr - Kxr - c\dot{x}r = \frac{1}{2}m_2 r\ddot{x} + m_2 r\ddot{x}$$

$$R = \frac{3}{2}m_2\ddot{x} + c\dot{x} + Kx \qquad (II)$$

Juntando as duas equações (I) e (II), obtivemos:

$$\frac{3}{2} m_2 \ddot{x} + c\dot{x} + Kx = -2Kx - 2c\dot{x} - \frac{3}{2\ell} m_1 g x - m_1 \ddot{x} + \frac{3}{\ell} M(t)$$

Equação de movimento:

$$\boxed{\left(m_1 + \frac{3}{2} m_2\right)\ddot{x} + 3c\dot{x} + \left(3K + \frac{3}{2\ell} m_1 g\right)x = \frac{3}{\ell} M(t)}$$

Sabendo disso, temos os valores de todas as constantes, exceto o valor de c. Porém, sabemos que ao aplicar determinada condição inicial, a amplitude de vibração decai 6 vezes em 3 ciclos. Logo, utilizando o decremento logarítmico, temos:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) \quad ; \quad \xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Do enunciado, $n = 3$, $x_n = \frac{1}{6} x_0$:

$$\delta = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\cancel{x_0}}{\frac{1}{6}\cancel{x_0}}\right) = \frac{1}{3} \ln(6) \rightarrow \delta = 0{,}597$$

$$\xi = \frac{0{,}597}{\sqrt{4\pi^2 + 0{,}597^2}} \longrightarrow \xi = 0{,}0946$$

Então, retornando para a equação de movimento, obtemos:

$$\left(3 + \frac{3}{2} \cdot 2\right)\ddot{x} + 3c\dot{x} + \left(3 \cdot 10^3 + \frac{3}{2 \cdot 1} 3 \cdot 9{,}81\right)x = 3\,M(t)$$

$$6\ddot{x} + 3c\dot{x} + 3044{,}145\,x = 3\,M(t)$$

Logo:

$$m_{eq} = 6\ kg \qquad K_{eq} = 3044{,}145\ N/m$$

$$C_{eq} = 3c \longrightarrow C = \frac{C_{eq}}{3}$$

Sabemos também que:

$$\xi = \frac{C_{eq}}{C_c} = \frac{C_{eq}}{2\,\omega_n\, m_{eq}} \longrightarrow C_{eq} = 2 m_{eq} \omega_n \xi$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3044{,}145}{6}} \longrightarrow \omega_n = 22{,}525\ rad/s$$

Então:

$$C_{eq} = 2(6) \cdot (22{,}525) \cdot 0{,}0946$$

$$C_{eq} = 25{,}57\ Ns/m \longrightarrow C = 8{,}52\ Ns/m$$

Assim sendo, a equação de movimento é:

$$6\ddot{x} + 25{,}57\,\dot{x} + 3044{,}125\,x = 3\,M(t)$$

ou

$$\boxed{\ddot{x} + 4{,}26\,\dot{x} + 507{,}35\,x = 0{,}5\,M(t)}$$

$$\hookrightarrow \omega_{nx} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{507{,}35} = 22{,}52$$

Podendo ser escrita como:

$$\left(\frac{\ell}{3}\ddot{\theta}\right) + 4,26\left(\frac{\ell}{3}\dot{\theta}\right) + 507,35\,\frac{\ell}{3}\theta = 0,5\,M(t)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + 12,78\,\dot{\theta} + 1522,05\,\theta = 1,5\,M(t)}$$

$$\hookrightarrow \omega_{n\theta} = \sqrt{1522,05} = 39,013$$

Assim, com o auxílio do software MatLab e utilizando o equacionamento anterior, obtivemos os resultados apresentados nas figuras 3 até 7.

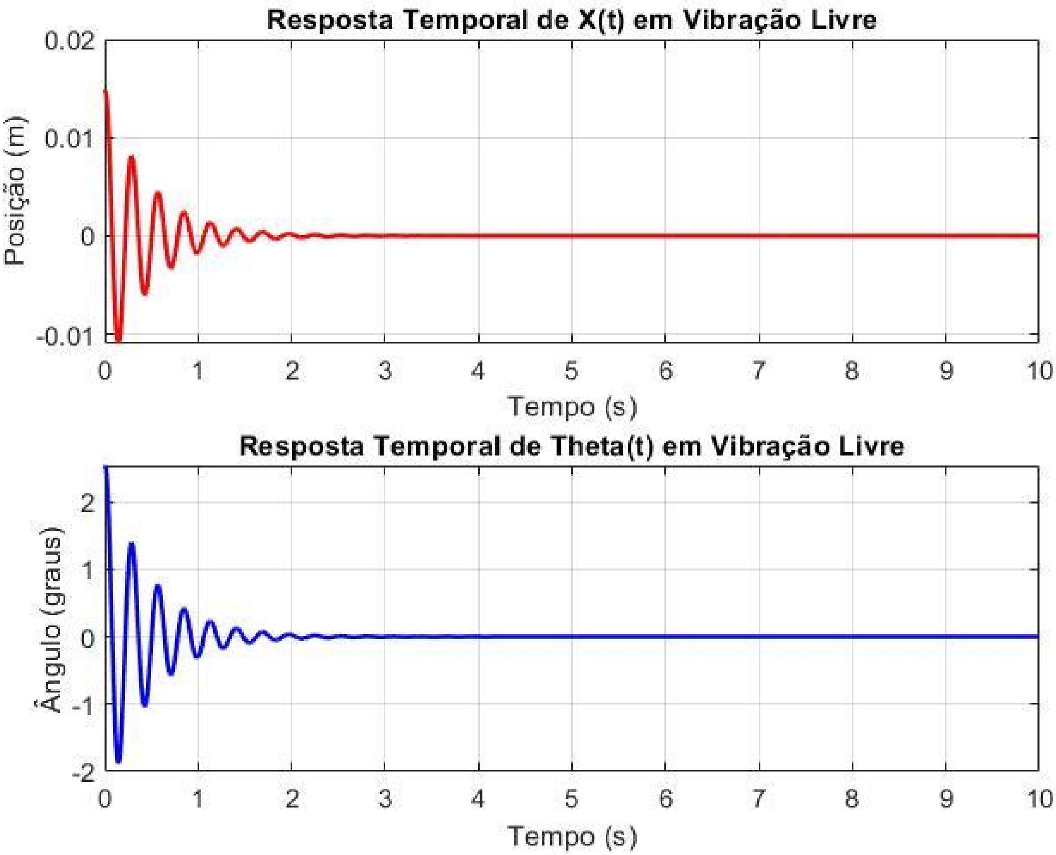


Figura 3. Resposta temporal para o sistema em vibração livre, $\theta_0 = 2,5°$ e $\frac{d}{dt}\theta_0 = 10°/s$

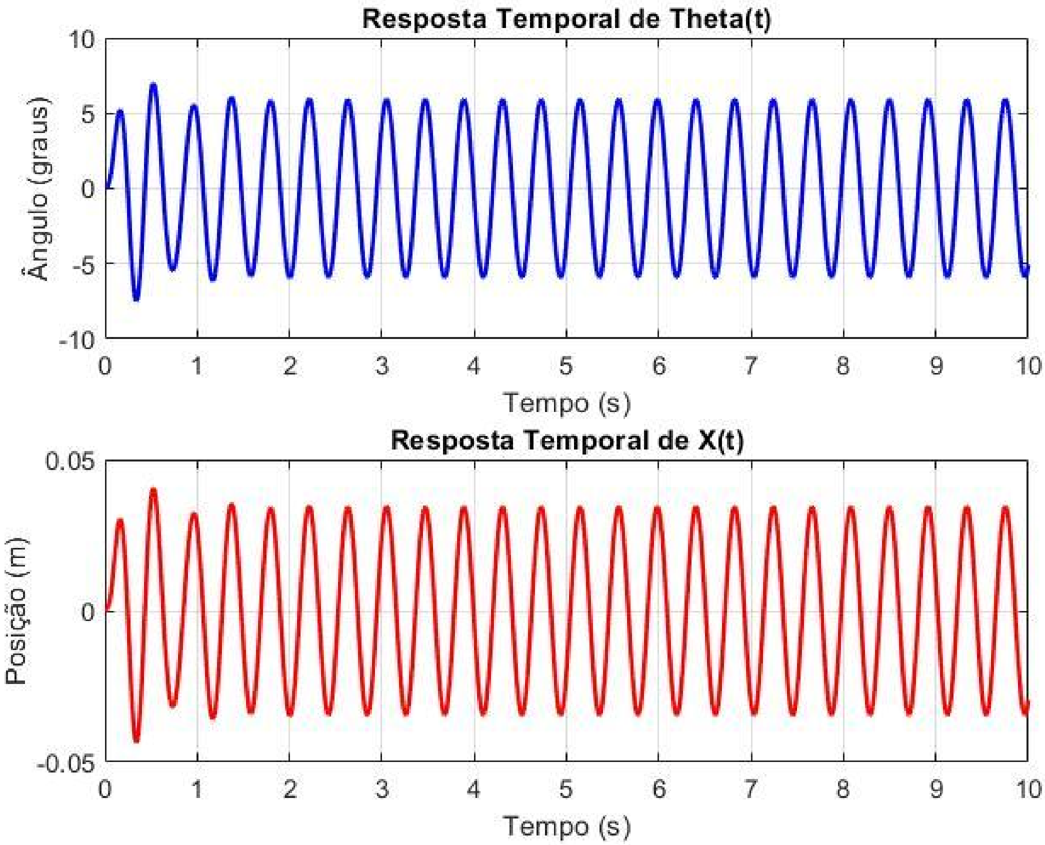


Figura 4. Resposta temporal para condições nulas e ω = 15 rad/s.

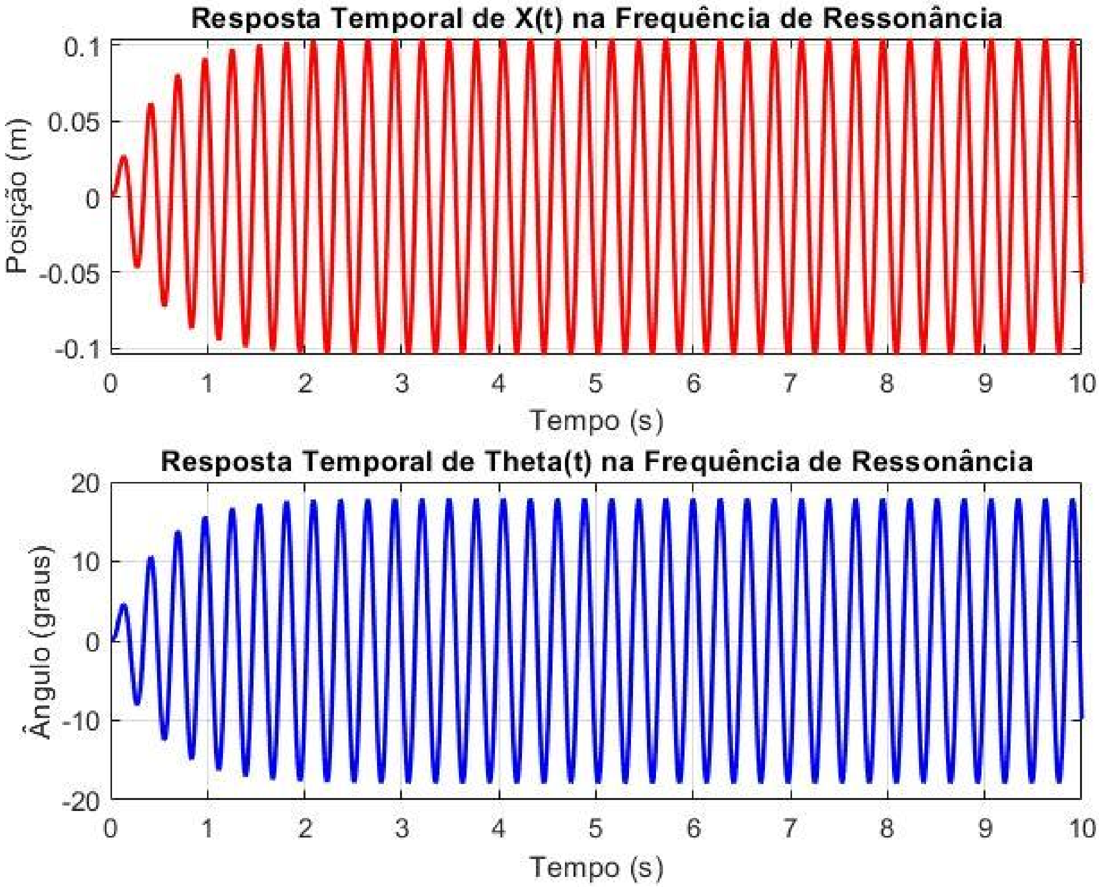


Figura 5. Resposta temporal para condições iniciais nulas, na frequência de ressonância e com $\omega = \omega_n = 22,52\ rad/s$.

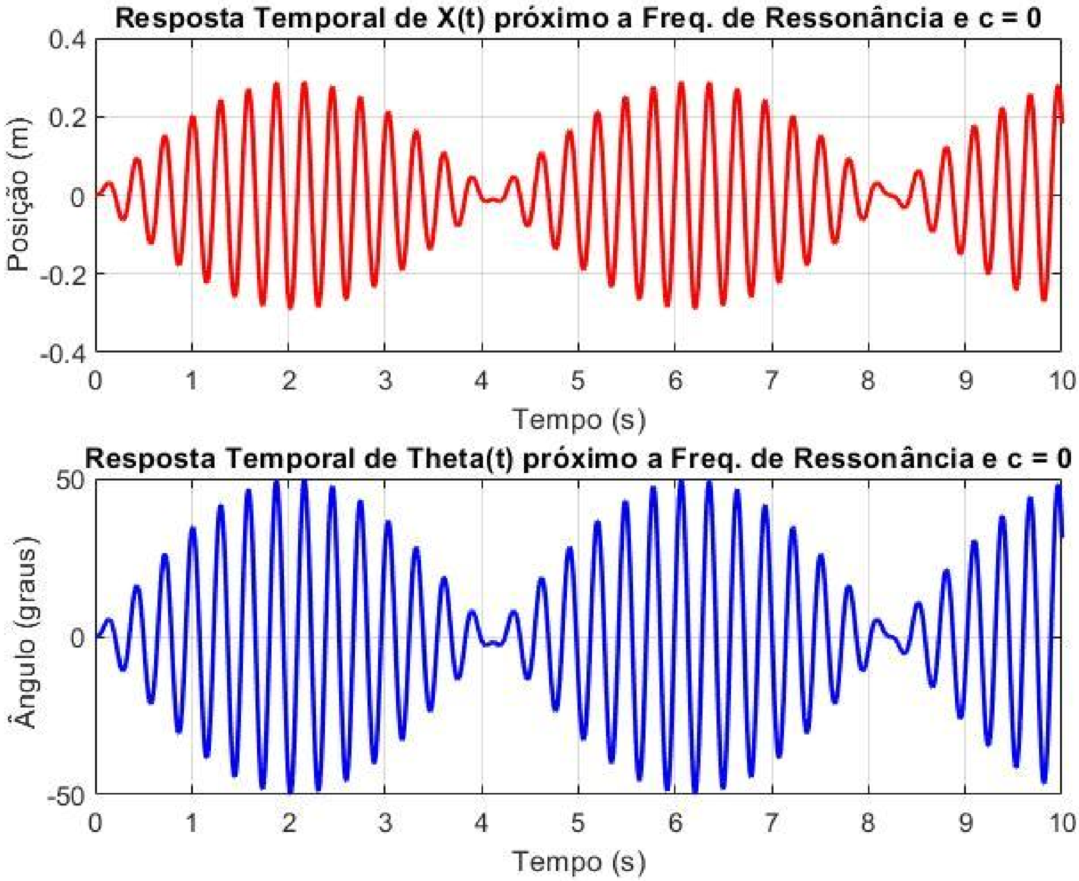


Figura 6. Resposta temporal para condições iniciais nulas, com c = 0 e ω = 21 rad/s, podemos notar que apresenta o fenômeno conhecido como batimento.

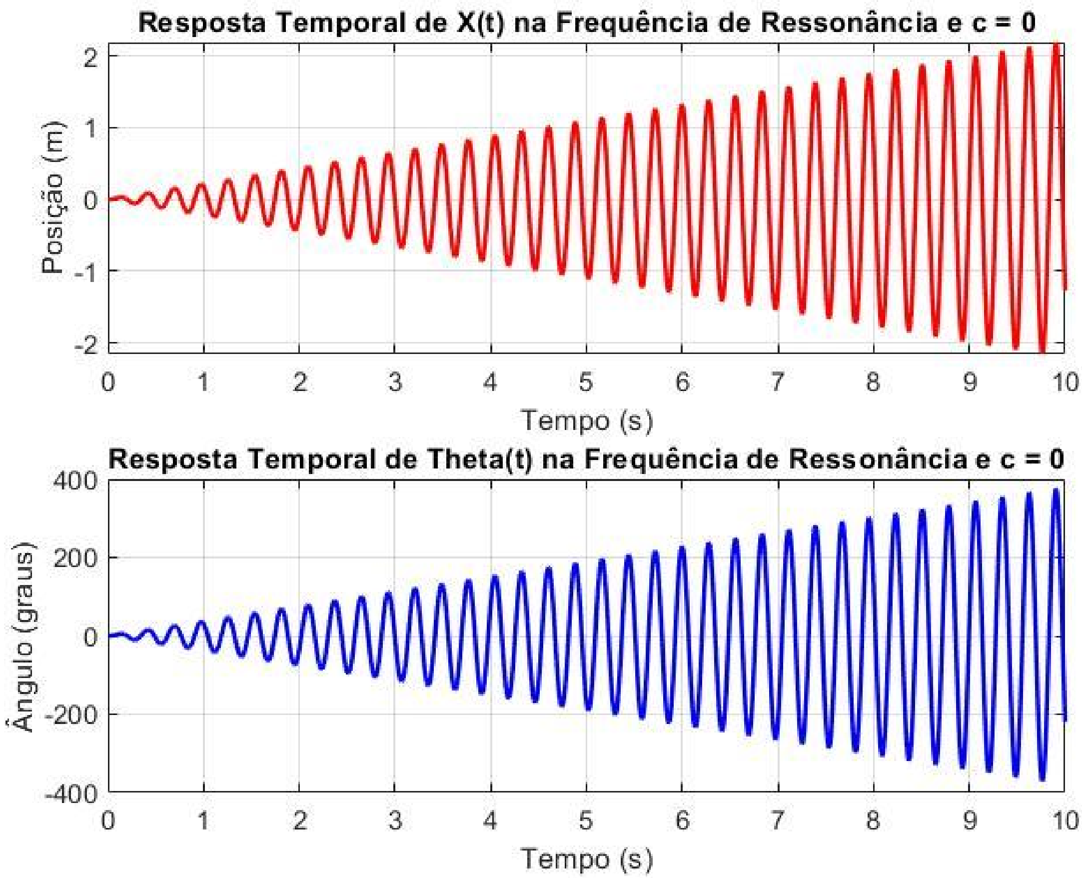


Figura 7. Resposta temporal para condições iniciais nulas, com c=0 e em ressonância, como podemos notar a frequência vai crescendo indefinidamente, o que comprova que o sistema entrou em ressonância.

Após essa análise, equacionamos a resposta em frequência (FRF) do sistema em que:

$$|H(r)| = \frac{1}{K_{eq} \cdot \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Usando o deslocamento em x:

$$|H(r)| = \frac{1}{3044{,}145\sqrt{(1-r^2)^2 + 0{,}036\, r^2}}$$

Assim, com o auxílio do MatLab, obtivemos os resultados apresentados na figura 8.

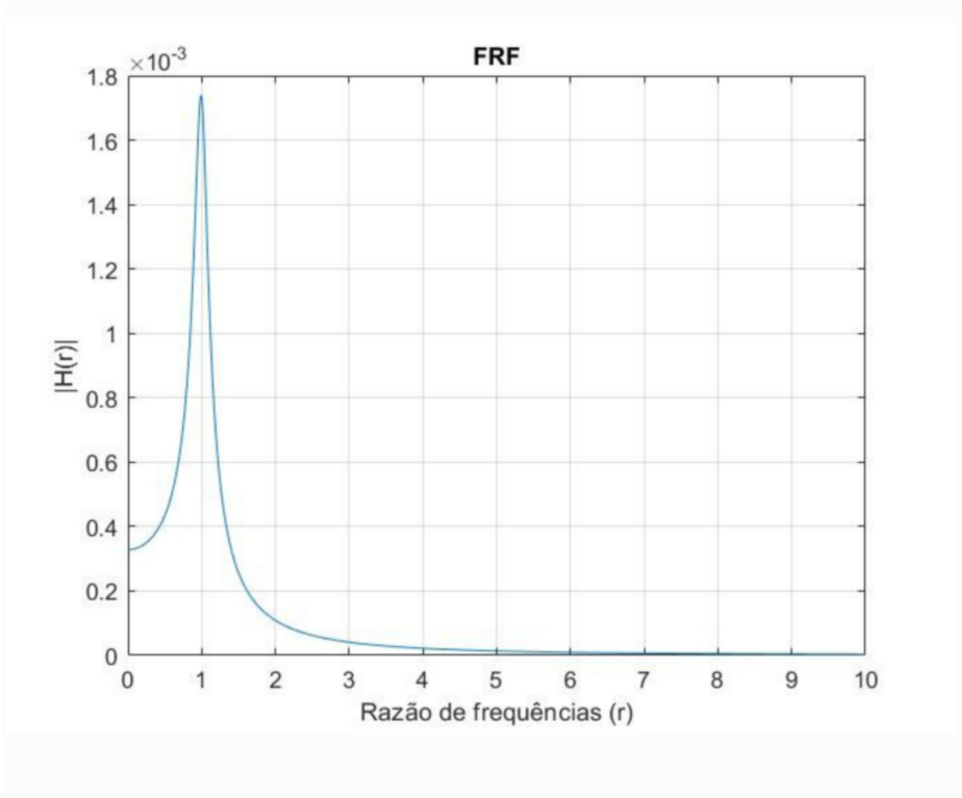


Figura 8. Podemos notar que o gráfico apresenta o deslocamento em x de acordo com a razão de frequências.

Sabendo que $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ e $\omega_n = 22,52\, rad/s$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3044,145\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{507,15}\right)^2 + 7,1 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2}}$$

Com essa equação obtivemos o gráfico apresentado na figura 9.

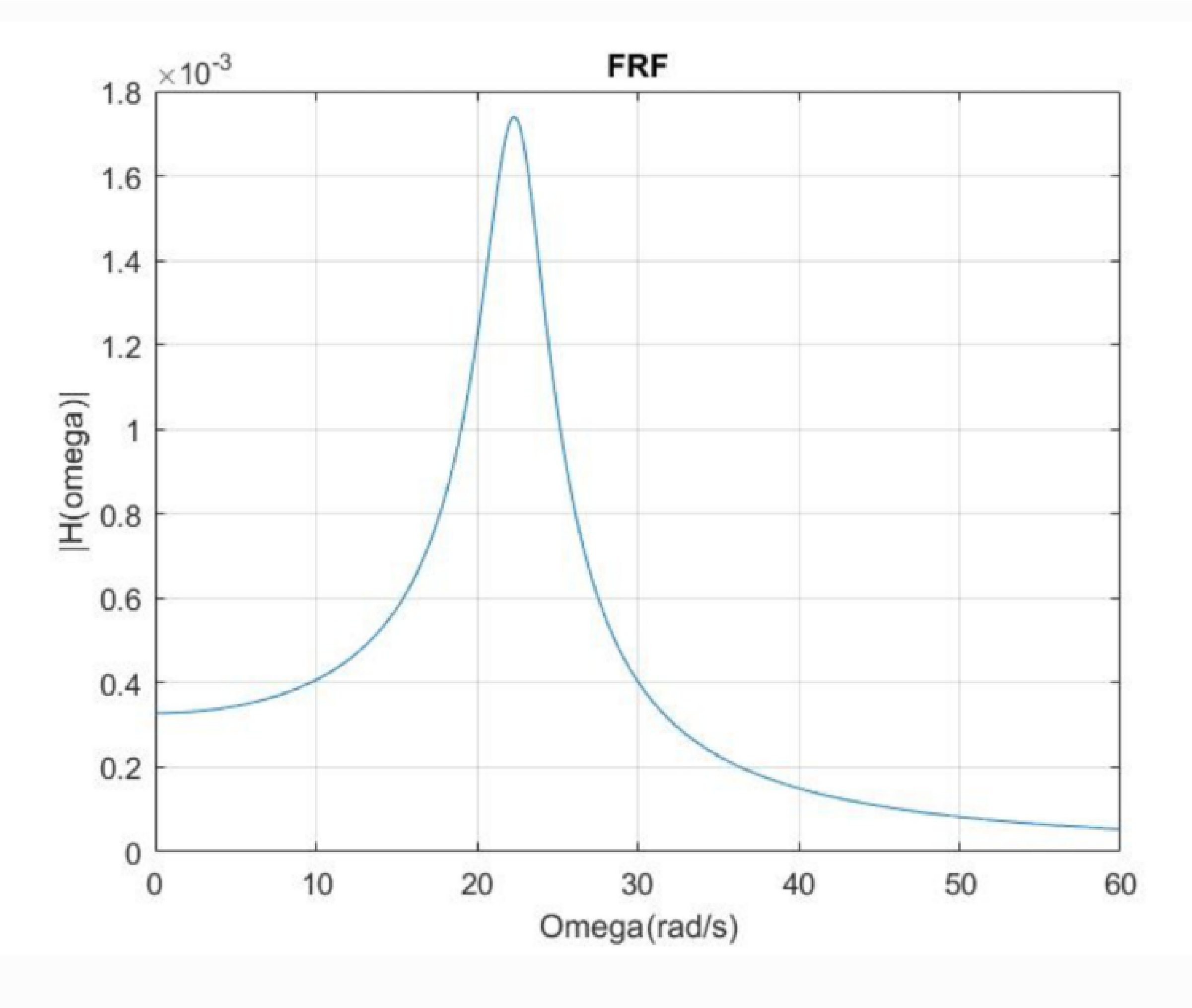


Figura 9. Apresenta o deslocamento em relação à frequência ω.

Assim chegamos no equacionamento da Força transmitida ao suporte E:

$$F_T(t) = 2K\,x(t) + 2c\,\dot{x}(t)$$

$$F_E = 0{,}5\,M(t) = \underbrace{0{,}5 \cdot 20}_{f_0 = 10\ N}\ \text{sen}(\omega t)$$

Assim sendo, e sabendo a resposta para um sistema de 1GDL excitado por força harmônica, temos que:

$$x_p(t) = \underbrace{\boxed{\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}}}}_{A} \operatorname{sen}\left(\omega t - \underbrace{\boxed{\tan^{-1}\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}}}_{B}\right) \quad (III)$$

$$F_T(t) = 2K\,x_p(t) + 2c\,\dot{x}_p(t) \quad (IV)$$

$$\dot{x}_p(t) = A\,\omega\cos(\omega t - B) \quad (V)$$

Logo, juntando as equações (III), (IV) e (V), temos a equação da força transmitida ao suporte E.

Além disso, sabemos que a transmissibilidade da força é de 80%. Então, temos que:

$$\frac{F_T}{F_0} = 0{,}8 = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \rightarrow \text{Sendo } \xi = 0{,}0946$$

$\rightarrow$ Assim, tiramos o valor de r.

$$r = 1{,}506 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = r \rightarrow \omega = r\,\omega_n$$

$\rightarrow$ sendo $\omega_n = 22{,}52$ rad/s

$$\omega = 33{,}915 \text{ rad/s}$$

Logo, resolvendo A e B obtemos:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}} = 0{,}0152$$

$$B = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) = -12{,}66^{\circ} = -0{,}221\ \text{rad}$$

Por fim, juntando os equacionamentos, obtemos que:

$$F_T(t) = 2K\, 0{,}0152\, \text{sen}(33{,}915t + 0{,}221) + 2c \cdot (33{,}915) \cdot 0{,}0152 \cdot \cos(33{,}915t + 0{,}221)$$

$$\boxed{F_T(t) = 30{,}4\, \text{sen}(33{,}915t + 0{,}221) + 8{,}78\cos(33{,}915t + 0{,}221)}$$

Com o auxílio do MatLab novamente, podemos visualizar a força transmitida ao suporte E, presente na figura 10.

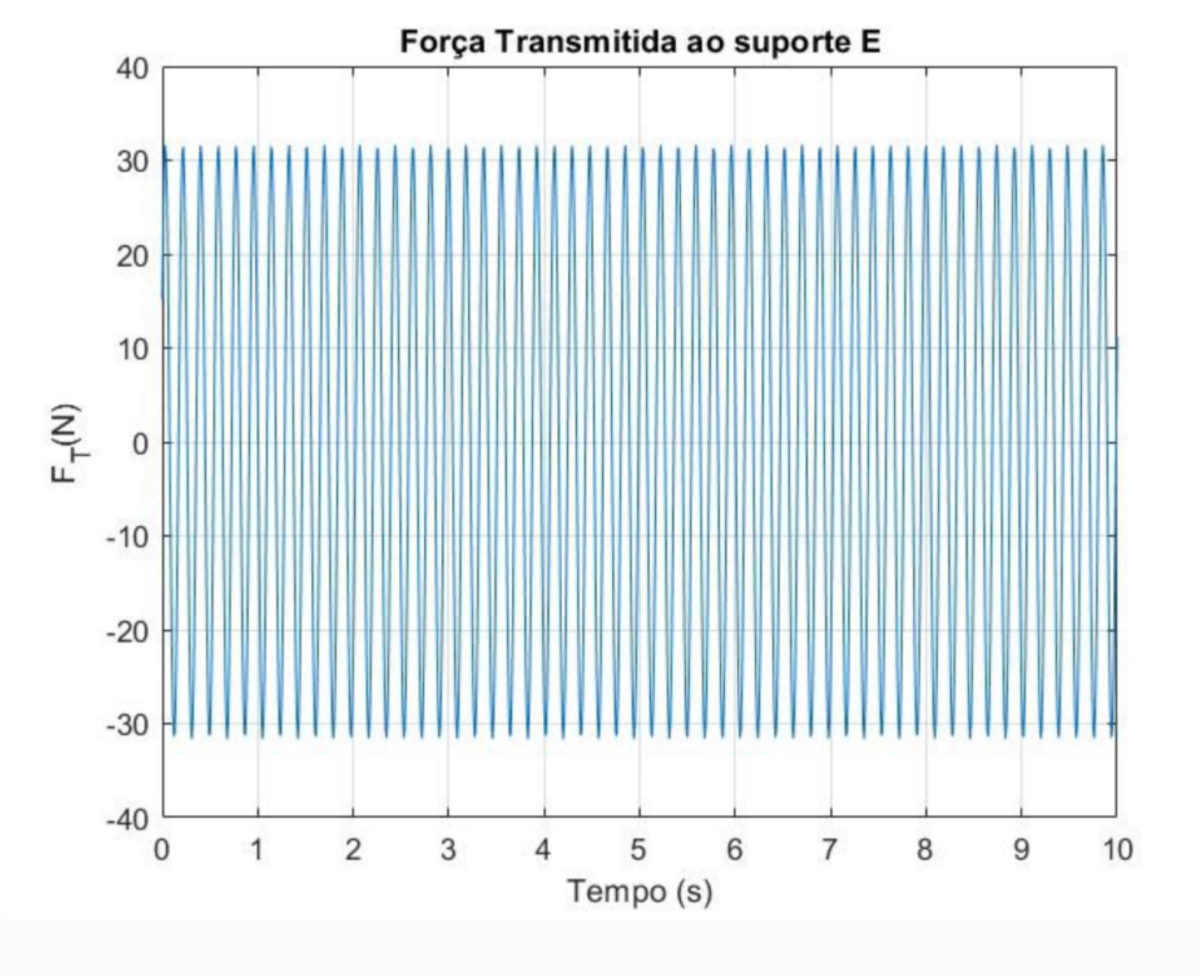


Figura 10. Podemos visualizar a força transmitida ao suporte E.

Assim sendo, considerando a Força transmitida em todos os suportes, obtivemos:

$$F_{T\,Total} = \underset{\text{Suporte E}}{F_{TE}} + \underset{\text{Suporte Z}}{F_{TZ}}$$

$$F_{TZ}(t) = K x(t) + c\dot{x}(t)$$

$$F_{T\,Total} = 3K x(t) + 3c\dot{x}(t)$$

Aproveitando o equacionamento realizado para o suporte E, temos que:

$$F_{TTotal}(t) = 3K\, x_p(t) + 3c\, \dot{x}_p(t)$$

Tendo como conhecidos os valores de k, c e as expressões de Xp(t) e $\frac{dXp(t)}{dt}$, temos que:

$$\boxed{F_{TTotal}(t) = 45{,}6\, \text{sen}(33{,}915\, t + 0{,}221) + 13{,}18\, \cos(33{,}915\, t + 0{,}221)}$$

Os resultados são expressos na figura 11 com o auxílio do MatLab.

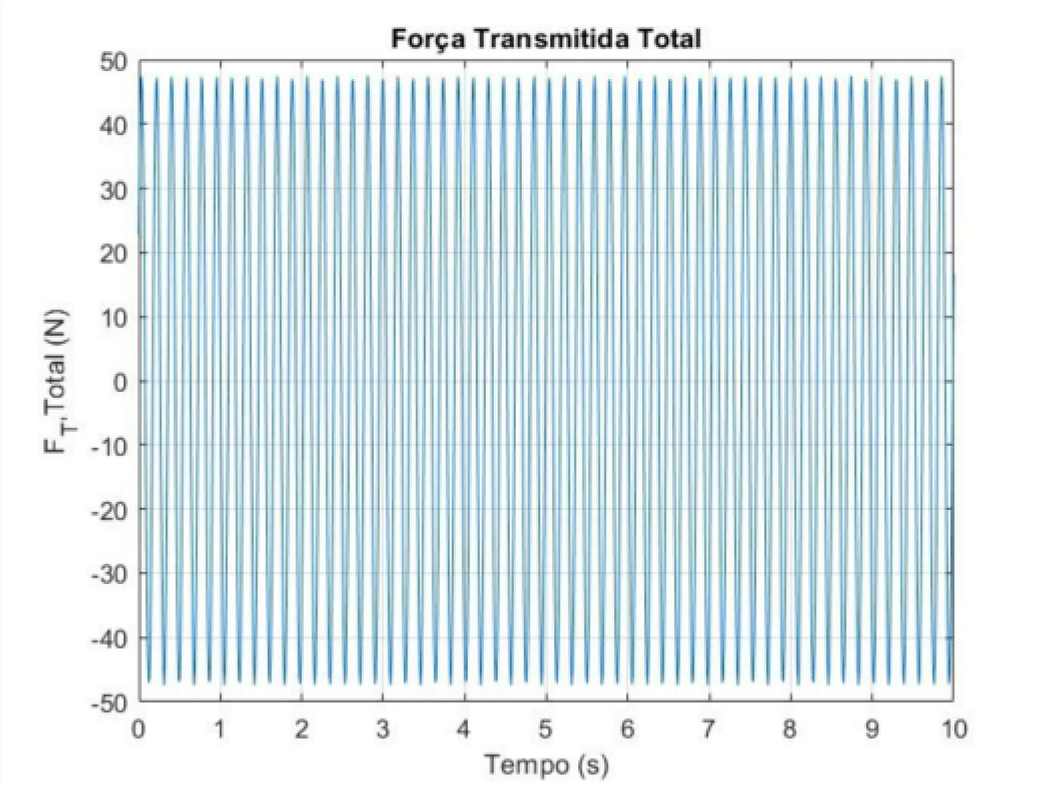


Figura 11. Apresenta a força total transmitida no suporte em função do tempo.

Por fim, considerando os sistema equivalente (m_{eq}, c_{eq}, k_{eq}) para M(t)=0 assim como apresentado na figura 12. Também considerando que a base apresenta a oscilação y(t)=5sin(27t) [mm] e também considerando que a aceleração da massa equivalente seja 0,1g.

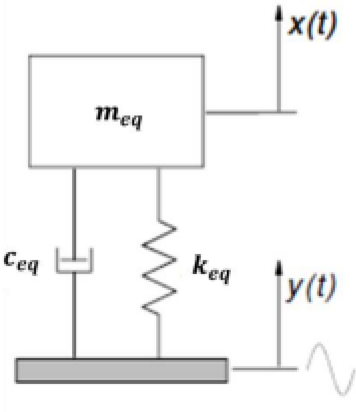


Figura 12. Apresenta o sistema equivalente considerado.

Inicialmente foi realizado o DCL do sistema apresentado na figura 13.

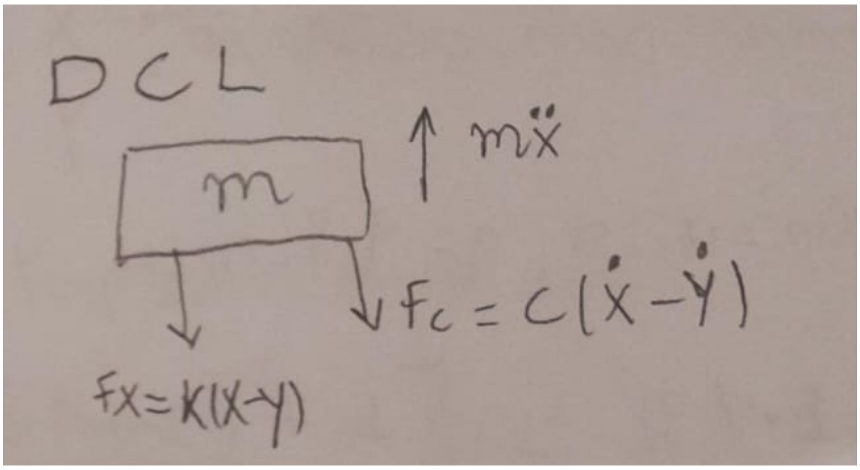


Figura 13. DCL realizado para as considerações da modelagem.

Considerando esse DCL obtivemos a seguinte equação:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\dot{y} + Ky$$

Aplicando o y(t) conhecido, temos:

$$(I)\ m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = c\,27 \cdot 5\cos(27t) + K \cdot 5\sin(27t)$$

Fazendo algumas simplificações e passando de mm para m, obtivemos:

$A = 0,005\sqrt{(c \cdot 27)^2 + k^2}$ e $\alpha = arctg\left[\frac{-c \cdot 27}{k}\right]$

Com as devidas simplificações, temos:

$$(II)\ m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = A\sin(27t - \alpha)$$

Também considerando:

$\omega_b = 27,\ y = 0.005\,m,\ c = 2\xi\omega,\ m = 6\,kg$

Relembrando o princípio da superposição das respostas:

$Xp(t) = Xp^{1}(t) + Xp^{2}(t)$

Também lembrando que $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

Assim, temos que:

$$\frac{X}{Y} = \frac{\omega^2 X}{\omega^2 Y} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2}$$

Considerando: $X\omega^2 = 0,1g,\ g = 9,81 m/s^2,\ y = 5 \cdot 10^{-3} m, S = 0,0946$

Assim obtemos:

$$\frac{0,1 \cdot 9,81}{27^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = \left[\frac{1 + (2 \cdot 0,0946 \cdot r)^2}{(1-r^2)^2 + (2 \cdot 0,0946 \cdot r)^2}\right]^{1/2}$$

Deste modo, efetuando o cálculo com o auxílio de software temos:

$r = 2,238$

Assim obtivemos a frequência natural de:

$\omega_n = \frac{\omega_b}{r} = 12,064 rad/s$

Por fim, calculamos a rigidez equivalente:

$k_{eq} = m_{eq} \cdot \omega_n^{2} = 6 \cdot (12,064)^2$

$k_{eq} = 874,24 N/m$

Plotando os gráficos da resposta temporal à excitação da base, tanto do sistema original, com $m_{eq} = 6\,kg,\ c_{eq} = 25,57\,Ns/m,\ k_{eq} = 3044,145\,N/m$ e quanto do novo, com $k_{eq} = 874,24\,N/m$ encontrado. Utilizou-se condições iniciais nulas.

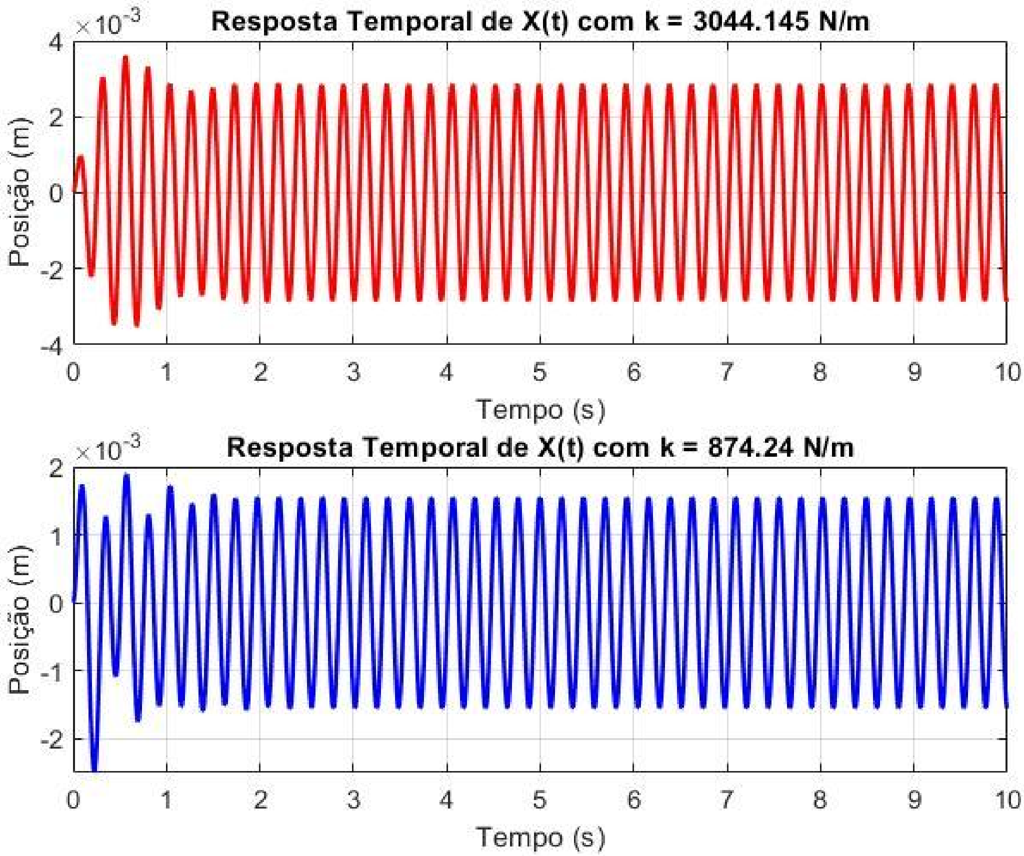


Figura 14. Resposta temporal do sistema equivalente, sujeito à excitação pela base, utilizando dois parâmetros de. k_{eq} diferentes.

Observa-se pela figura 14 que, ao utilizar um menor valor de k_{eq} , foi obtido menor valor de amplitude. Isso é contra intuitivo, pois espera-se que quanto menor a rigidez do sistema, maior a amplitude da resposta. Sugere-se que os valores de c_{eq} e ω tenham influenciado nisso.

5. Conclusão

Foi possível, a partir deste trabalho, obter a equação de movimento de um sistema formado por uma barra, um cilindro, e amortecedores e molas. Ao plotar a resposta temporal do sistema, usando diferentes condições iniciais e excitações, pôde ser observado diversos fenômenos característicos de vibrações de sistemas mecânicos.

Ao plotar o sistema sob vibração livre, ou seja sem forças externas, observou-se uma oscilação inicial na amplitude do sistema, porém à medida que o tempo passou, o sistema estabilizou em torno da posição de equilíbrio.

Já para o caso em que há força externa sendo aplicada, observa-se uma oscilação inicial também, porém à medida que o tempo passa, o sistema tende a vibrar com a frequência da força externa.

Usando a frequência da força externa igual à frequência natural do sistema, observou-se um aumento na amplitude apenas e após um tempo, o sistema vibrou com a frequência da força externa. Porém, quando a frequência da força de excitação foi igual à frequência natural do sistema e o sistema estava sem amortecimento, observou-se aumento indefinido da amplitude da resposta, o que é conhecido como ressonância. Esse tipo de situação pode gerar diversos problemas para a estrutura, incluindo a falha da mesma.

Já quando a frequência da força de excitação foi próxima, porém não igual, à frequência natural, com o sistema sem amortecimento, observou-se um padrão na amplitude, conhecido como batimento.

Gerou-se também a função de resposta em frequência (FRF) do sistema, e observou-se um pico em r = 1, e consequentemente um pico em $\omega = 22,52\, rad/s$.

Obteve-se a expressão para força transmitida ao suporte E, e a força transmitida à todos os suportes, ou seja, suporte E somado ao suporte Z. Observando as figuras 10 e 11, é possível perceber que a força do Suporte E é uma fração da força transmitida total.

Por fim, encontrou-se um sistema equivalente, sujeito à excitação pela base. Também fora calculado um novo valor de k_{eq} para satisfazer a condição de que a aceleração da massa equivalente ficasse limitada a $0,1\ g$.

6. Fontes

- Slides da disciplina de EM607
- INMAN, Daniel J. Engineering Vibration. 3rd ed, Printice Hall, 2007
- RAO, SINGIRESU S. Vibrations Mechanical. 4 th ed., Printice Hall, New Jersey, 2003.
- Apostila de Vibrações PUC. Disponível no link: < https://www.puc-rio.br/ensinopesq/ccpg/pibic/relatorio_resumo2018/relatorios_pdf/ctc/MEC/MEC-Ricardo%20de%20Castro.pdf > data 20/10/2023