



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Mecânica

EM607 - Vibrações de Sistemas Mecânicos

Projeto 2

Grupo 11

Bruno Monteiro Bonetti - 232488

Bruno Cardoso Holanda - 167542

Henrique Fonseca M. de Oliveira - 174547

**Campinas - SP
2023**

Sumário

1. Introdução	3
2. Objetivos	3
3. Metodologia	3
4. Desenvolvimento	4
4.1 Análise por Newton	4
4.2 Análise por Lagrange	12
4.3 FRF do sistema	15
4.4 Resposta Temporal para vibração livre	17
4.5 Resposta Temporal para vibração Forçada	18
5. Conclusão	25
6. Fontes	25

1. Introdução

Nos sistemas mecânicos lidamos constantemente com o fenômeno de vibrações, que ocorre quando um sistema sofre oscilações em torno de uma posição de equilíbrio. As oscilações podem ser oriundas de diversas fontes, como excitações, desequilíbrio, choques, forças externas e outras perturbações. Assim sendo, nos diversos projetos, como pontes, veículos, construções e máquinas, é um fator muito importante a ser considerado.

Na disciplina de EM607 estudamos os comportamentos desses sistemas mecânicos com a finalidade de entendê-los e saber como controlá-los. Tendo isso em mente, esse trabalho é um estudo da vibração de um sistema mecânico, apresentado na figura 1.

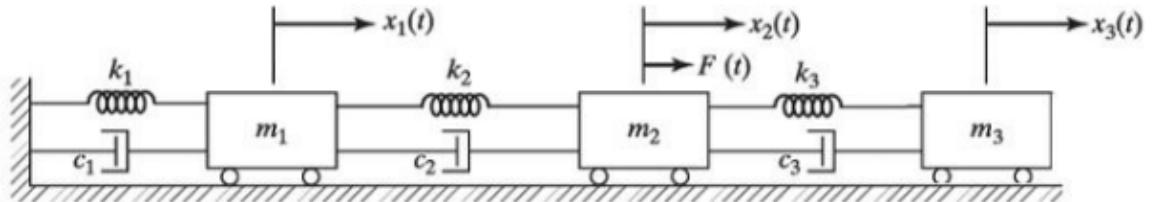


Figura 1. Sistema mecânico com 3 GDL, explorado no trabalho.

2. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo analisar a vibração em um sistema mecânico de 3 GDL utilizando os métodos de Newton e Lagrange, determinando os parâmetros modais, resposta em frequência, resposta temporal livre e forçada., .

3. Metodologia

Inicialmente, temos o sistema apresentado na figura 1, além disso, consideramos as seguintes informações sobre o mesmo:

- $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $m_3 = 1 \text{ kg}$, $k_1 = 4000 \text{ N/m}$, $k_2 = 8000 \text{ N/m}$, $k_3 = 6000 \text{ N/m}$,
- $c_1 = 100 \text{ N.s/m}$, $c_2 = 200 \text{ N.s/m}$, $c_3 = 150 \text{ N.s/m}$, $F = 50e^{i\omega t} \text{ N}$

Além disso, a elaboração das análises seguiu pelos seguintes itens:

- Equacionamento do movimento de um sistema massa-mola-amortecedor de três graus de liberdade tanto por Newton como por Lagrange;
- Determinação dos parâmetros modais do sistema: frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar;
- Resposta em frequência do sistema;
- Resposta temporal do sistema para a vibração livre com condições iniciais:
 $x_1(0) = 10 \text{ mm}$; $x_2(0) = x_3(0) = 5 \text{ mm}$; $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = 0$; $\dot{x}_2(0) = 1 \text{ m/s}$

- Resposta temporal do sistema para a vibração forçada com condições iniciais nulas e variando a frequência de excitação (testar excitações iguais às frequências naturais e acima e abaixo destas frequências);

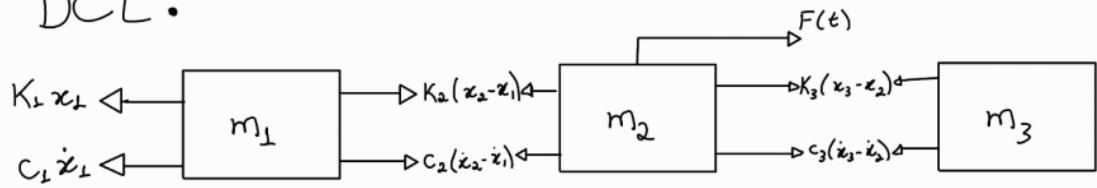
4. Desenvolvimento

4.1 Análise por Newton

Para o sistema em questão assumimos que:

$$x_3 > x_2 > x_1 > 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_3 > \dot{x}_2 > \dot{x}_1 > 0$$

DCL:



Com este DCL, obtivemos:

Para m_1 :

$$\sum F_x = m \ddot{x} \rightarrow m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

Para m_2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_3(x_3 - x_2) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + F$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 - c_3 \dot{x}_3 + c_3 \dot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2 - k_3 x_3 = F$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 = F$$

Para m_3 :

$$m_3 \ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0$$

Avaliando a forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

Aplicando o sistema encontrado anteriormente na forma matricial, obtivemos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assim, podemos notar que existe uma simetria nas matrizes. Substituindo os valores dados para o problema obtivemos:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{kg} ; C = \begin{bmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 350 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \frac{\text{N}_\text{m}}{\text{m}} ; K = \begin{bmatrix} 12000 & -8000 & 0 \\ -8000 & 14000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 6000 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

4.1.1 Definindo os Parâmetros modais:

Definimos como matriz dinâmica (A) do sistema, o seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \dots & \vdots & \dots \\ -M^{-1}K & \vdots & -M^{-1}C \end{bmatrix} \rightarrow \text{Como temos 3 graus de liberdade, a matriz é } 6 \times 6$$

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12000 & -8000 & 0 \\ -8000 & 14000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 6000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 & -4000 & 0 \\ -1600 & 2800 & -1200 \\ 0 & -6000 & 6000 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 350 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -100 & 0 \\ -40 & 70 & -30 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix}$$

Construindo a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6000 & 4000 & 0 & -150 & 100 & 0 \\ 1600 & -2800 & 1200 & 40 & -70 & 30 \\ 0 & 6000 & -6000 & 0 & 150 & -150 \end{bmatrix}$$

O problema de autovalor e autovetor é solucionado por:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Logo, calculando os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -6000 & 4000 & 0 & -150-\lambda & 100 & 0 \\ 1600 & -2800 & 1200 & 40 & -70-\lambda & 30 \\ 0 & 6000 & -6000 & 0 & 150 & -150-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Com o auxílio do Matlab, obtivemos 6 raízes:

$$\lambda_1 = -156,8$$

$$\lambda_2 = -53,7$$

$$\lambda_{3,4} = -4,75 \pm 18,91 j$$

$$\lambda_{5,6} = -75 \pm 19,36 j$$

Sabemos que a parte real da raiz é responsável pelo decaimento logarítmico da resposta temporal. Caso essa parte real fosse positiva, a resposta cresceria exponencialmente com o tempo, de modo desenfreado, caracterizando um sistema instável.

Já a parte imaginária é responsável pelo caráter oscilatório da resposta temporal. Sabendo que as raízes λ_1 e λ_2 só apresentam números reais, temos que não

oscilarão, o que para esse estudo em específico não é de nosso interesse. Portanto, temos apenas as outras raízes para analisar, apresentando 2 frequências naturais, 2 fatores de amortecimento e 2 modos de vibrar.

Portanto:

$$\omega_{n1} = \sqrt{(-4,75)^2 + (18,91)^2} \rightarrow$$

$$\omega_{n1} = 19,497 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{(-75)^2 + (19,36)^2} \rightarrow$$

$$\omega_{n2} = 77,458 \text{ rad/s}$$

$$\xi_1 = \frac{4,75}{19,497} \rightarrow$$

$$\xi_1 = 0,244$$

$$\xi_2 = \frac{75}{77,458} \rightarrow$$

$$\xi_2 = 0,968$$

Seguindo o método de solução, calculamos os autovetores e consequentemente os modos de vibrar:

$$([A] - \lambda I) \{Z\} = \{0\}$$

Para $\lambda_3 = -4,75 + 18,91j$:

$$\begin{bmatrix} +4,75-18,91j & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +4,75-18,91j & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +4,75-18,91j & 0 & 0 & 1 \\ -6000 & 4000 & 0 & -145,25-18,91j & 100 & 0 \\ 1600 & -2800 & 1200 & 40 & -65,25-18,91j & 30 \\ 0 & 6000 & -6000 & 0 & 150 & -145,25-18,91j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{Z\}^\perp = \left\{ \begin{array}{l} -0,0055 - 0,0217j \\ -0,0077 - 0,0305j \\ -0,0082 - 0,0326j \\ 0,4369 \\ 0,6139 \\ 0,6554 \end{array} \right\} \rightarrow X_\perp = \begin{bmatrix} 0,4369 \\ 0,6139 \\ 0,6554 \end{bmatrix}$$

modo de vibrar \perp

Podemos notar que os 3 primeiros elementos do vetor são a relação das velocidades dos corpos e não são objetos da nossa análise.

Se fizermos para λ_4 , chegaremos em

$$\{Z\}^2 = \left\{ \begin{array}{l} -0,0055 + 0,0217j \\ -0,0077 + 0,0305j \\ -0,0082 + 0,0326j \\ 0,4369 \\ 0,6139 \\ 0,6554 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Chegando no mesmo modo 1.}$$

Fazendo para $\lambda_5 = -75 + 19,36j$:

$$\{Z\}^3 = \left\{ \begin{array}{l} 0,0075 + 0,0019j \\ 0 \\ -0,1 - 0,0026j \\ -0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{array} \right\} \rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

modo de vibrar 2

Para λ_6 , temos o mesmo modo de vibrar 2.

$$\{Z\}^4 = \left\{ \begin{array}{l} 0,0075 - 0,0019j \\ 0 \\ -0,1 + 0,0026j \\ -0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{array} \right\}$$

Além dessa análise por meio da matriz A, achamos os parâmetros modais por meio considerando que a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa e à matriz de rigidez.

Logo, temos as matrizes M, C e K apresentadas abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{kg} ; C = \begin{bmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 350 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \frac{\text{Ns}}{\text{m}} ; K = \begin{bmatrix} 12000 & -8000 & 0 \\ -8000 & 14000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 6000 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Podemos verificar se C é proporcional pelo seguinte método:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

$$300 = 2\alpha + 12000\beta \longrightarrow \alpha = 0$$

$$-200 = -8000\beta \longrightarrow \beta = 0,025$$

$$350 = 5\alpha + 14000\beta \quad 350 = 14000(0,025)$$

$$-150 = -6000\beta \quad -150 = -6000(0,025)$$

$$150 = \alpha + 6000\beta \quad 150 = 6000(0,025)$$

Assim, percebemos que o amortecimento é proporcional. Deste modo, podemos calcular os parâmetros modais apenas com as matrizes M e K.

Inicialmente, resolvemos os problema de autovalores e autovetores:

$$[M]\lambda^2 + [K] \{X\} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\lambda^2 + 12000 & -8000 & 0 \\ -8000 & 5\lambda^2 + 14000 & -6000 \\ 0 & -6000 & \lambda^2 + 6000 \end{vmatrix} = 0$$

$$50 s^6 + 1,48 \cdot 10^5 s^4 + 5,6 \cdot 10^8 s^2 + 1,92 \cdot 10^{11} = 0$$

↳ Fazendo $x = s^2$, e resolvendo, temos:

$$\chi_1 = s_1^2 = -6000 \rightarrow \omega_{n1} = 77,46$$

$$\chi_2 = s_2^2 = -8420 \rightarrow \omega_{n2} = 91,76$$

$$\chi_3 = s_3^2 = -380 \rightarrow \omega_{n3} = 19,49$$

Como o amortecimento é proporcional, podemos calcular os fatores de amortecimento com:

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_{ni}} + \frac{\beta\omega_{ni}}{2}$$

Logo:

$$\xi_1 = \frac{77,46(0,025)}{2} = 0,968$$

$$\xi_2 = \frac{91,76(0,025)}{2} = 1,147$$

$$\xi_3 = \frac{19,49(0,025)}{2} = 0,244$$

Podemos perceber que ξ_2 é superamortecido, que não vibra, ou seja, podemos desconsiderar sua frequência natural associada. Também constatamos que ξ_1 e ξ_3 são os mesmos obtidos pela matriz A.

Obtendo os modos de vibrar, usando as duas primeiras linhas da matriz $[[M]s^2 + [K]]$:

Modo 1 ($\lambda_1^2 = -6000$):

$$\begin{cases} (2s^2 + j2000)X_1 - 8000X_2 = 0 \rightarrow X_2 = 0 X_1 \\ -8000X_1 + (5s^2 + 14000)X_2 - 6000X_3 = 0 \\ \downarrow -8000X_1 - 6000X_3 = 0 \rightarrow X_3 = -\frac{4}{3}X_1 \end{cases}$$

$$\left\{ \Psi \right\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,6 \\ 0 \\ 0,8 \end{Bmatrix}$$

Modo 2 ($\lambda_3^2 = -380$):

$$\begin{cases} (2s^2 + j2000)X_1 - 8000X_2 = 0 \rightarrow X_2 = 1,405 X_1 \\ -8000X_1 + (5s^2 + 14000)X_2 - 6000X_3 = 0 \\ -8000X_1 + 17000X_1 = 6000X_3 \rightarrow X_3 = 3,5 X_1 \end{cases}$$

$$\left\{ \Psi \right\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,405 \\ 3,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,4369 \\ 0,6139 \\ 0,6554 \end{Bmatrix}$$

Constatou-se, então, que chegamos no mesmo resultado obtido pela matriz A.

Agora, realizando o problema de autovalores e autovetores, sem considerar que temos amortecimento proporcional:

$$[[M] \omega^2 + [C]\omega + [K]] \{x\} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega^2 + 300\omega + 12000 & -200\omega - 8000 & 0 \\ -200\omega - 8000 & 5\omega^2 + 350\omega + 14000 & -150\omega - 6000 \\ 0 & -150\omega - 6000 & \omega^2 + 150\omega + 6000 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o sistema, obtivemos:

$$\omega_{1,2} = -75 \pm 19,36 j$$

$$\omega_{3,4} = -4,75 \pm 18,91 j$$

$$\omega_5 = -53,70$$

$$\omega_6 = -156,80$$

Chegamos aos mesmos valores obtidos pela matriz A e realizando as mesmas operações da matriz A, chegaremos naqueles parâmetros modais, assim como pelo método que considera a matriz C como proporcional.

4.2 Análise por Lagrange

Analisando pelo método de Lagrange temos que:

$$L = T - V$$

Em que T é a energia cinética, V é a energia potencial.

Logo, temos que:

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2$$

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2$$

Considerando o termo de energia dissipativa E_d , temos que:

$$E_d(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2$$

Sabemos que o termo Q_i é usado para descrever os esforços externos neste caso:

$$Q_2 = F(t), \quad Q_1 = Q_3 = 0.$$

Aplicando a equação de Lagrange na coordenada x_1 , temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{d}{dx_1} \left(\frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 \right) = k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 x_1$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = \frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \right] = c_1 \underbrace{\dot{x}_1}_{x_1(c_1+c_2)} + c_2 \underbrace{\dot{x}_2}_{x_1(c_1+c_2)} - c_2 \dot{x}_2$$

Obtendo:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 (c_1 + c_2) - c_2 \dot{x}_2 + x_1 (k_1 + k_2) - k_2 x_2 = 0$$

De modo análogo, para x_2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{d}{dx_2} \left[\frac{1}{2} K \cancel{x_1^2} + \frac{1}{2} K_2 (\cancel{x_2 - x_1})^2 + \frac{1}{2} K_3 (\cancel{x_3 - x_2})^2 \right] -$$

$\cancel{x_2^2 + x_1^2 - 2x_2 x_1}$ $\cancel{x_3^2 + x_2^2 - 2x_2 x_3}$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = K_2 x_2 - K_2 x_1 + K_3 x_2 - K_3 x_3 = x_2 (K_2 + K_3) - K_2 x_1 - K_3 x_3$$

$$\frac{\partial Ed}{\partial \dot{x}_2} = \frac{d}{d\dot{x}_2} \left[\frac{1}{2} c_2 \cancel{x_1^2} + \frac{1}{2} c_2 (\cancel{\dot{x}_2 - \dot{x}_1})^2 + \frac{1}{2} c_3 (\cancel{\dot{x}_3 - \dot{x}_2})^2 \right]$$

$\cancel{\dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_2 \dot{x}_1}$ $\cancel{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_3 \dot{x}_2}$

$$\frac{\partial Ed}{\partial \dot{x}_2} = c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_3 \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 = \dot{x}_2 (c_2 + c_3) - c_2 \dot{x}_1 - c_3 \dot{x}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial Ed}{\partial \dot{x}_2} = F(t)$$

$$m \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - K_2 x_1 + (K_2 + K_3) x_2 - K_3 x_3 = F$$

Assim como para x_3 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_3 \ddot{x}_3 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0 \quad ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{d}{dx_3} \left[\frac{1}{2} K \cancel{x_1^2} + \frac{1}{2} K_2 (\cancel{x_2 - x_1})^2 + \frac{1}{2} K_3 (\cancel{x_3 - x_2})^2 \right] = K_3 x_3 - K_3 x_2$$

$\cancel{x_3^2 + x_2^2 - 2x_3 x_2}$

$$\frac{\partial Ed}{\partial \dot{x}_3} = \frac{d}{d\dot{x}_3} \left[\frac{1}{2} c_2 \cancel{x_1^2} + \frac{1}{2} c_2 (\cancel{\dot{x}_3 - \dot{x}_1})^2 + \frac{1}{2} c_3 (\cancel{\dot{x}_3 - \dot{x}_2})^2 \right] = c_3 \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2$$

$\cancel{\dot{x}_3^2 + \dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_3 \dot{x}_2}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_3} = 0$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + c_3 \dot{x}_3 - k_3 x_2 + k_3 x_3 = 0$$

Os resultados obtidos por Newton e por Lagrange foram iguais para a equação de movimento.

4.3 FRF do sistema

Considerando nosso sistema matricial:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F$$

Aplicando a transformada de Laplace e assumindo as condições nulas, obtemos:

$$[M s^2 + C s + K] X(s) = F(s)$$

Definindo $Z(s)$ como a matriz de impedância, assim como segue:

$$Z(s) = [M s^2 + C s + K]$$

Temos então:

$$Z(s) X(s) = F(s)$$

De modo que a solução seja:

$$X(s) = Z(s)^{-1} \cdot F(s)$$

Substituindo $j\omega$ por s , para escrever no domínio da frequência, temos:

$$Z(j\omega) \cdot X(j\omega) = F(j\omega)$$

Por fim, sabemos que a matriz da função resposta em frequência é dada por:

$$H(\omega) = Z(\omega)^{-1}$$

Portanto, temos:

$$Z(s) = s^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 300 & -200 & 0 \\ -200 & 350 & -150 \\ 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12000 & -8000 & 0 \\ -8000 & 14000 & -6000 \\ 0 & -6000 & 6000 \end{bmatrix}$$

$$Z(s) = \begin{bmatrix} 2s^2 + 300s + j2000 & -200s - 8000 & 0 \\ -200s - 8000 & 5s^2 + 350s + 14000 & -150s - 6000 \\ 0 & -150s - 6000 & s^2 + 150s + 6000 \end{bmatrix}$$

Com isso, resolvemos no Matlab seguindo os seguintes passos:

- Encontramos $Z(j\omega)$
- Encontramos $H(\omega) = \text{inv}(Z)$
- Plotamos os 9 gráficos de FRF

Podemos observar os gráficos na figura 1 e o resultado de $H(\omega)$ é dado por:

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & H_{13}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & H_{23}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) & H_{33}(\omega) \end{bmatrix}$$

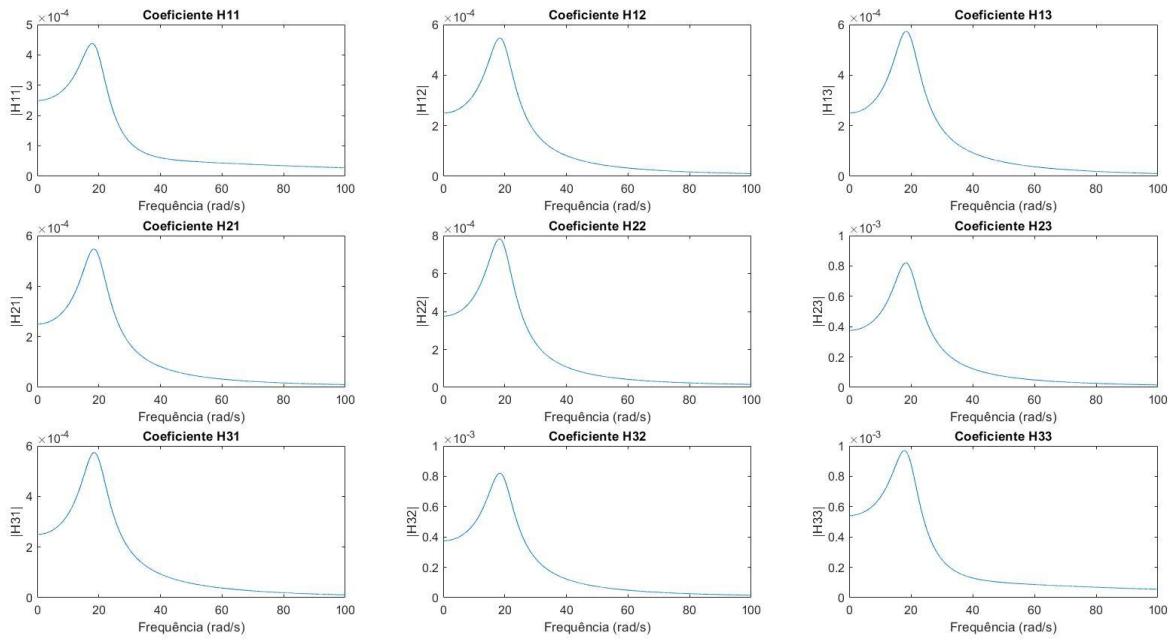


Figura 2. Apresenta os 9 gráficos plotados com o auxílio do Matlab.

Nota-se que só pode ser observado um pico na resposta em frequência, sendo ele na primeira frequência natural do nosso sistema. O segundo pico não é observado pois o fator de amortecimento associado àquela frequência natural, é muito próximo de 1, o que causa uma suavização muito grande do pico que seria visto.

4.4 Resposta temporal para vibração livre

Considerando as condições iniciais citadas abaixo e utilizando o Matlab (ode45), obtivemos os resultados presentes na figura 2.

Condições iniciais:

$$x_1(0) = 10\text{mm}; x_2(0) = x_3(0) = 5\text{mm}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = 0; \dot{x}_2(0) = 1\text{m/s}$$

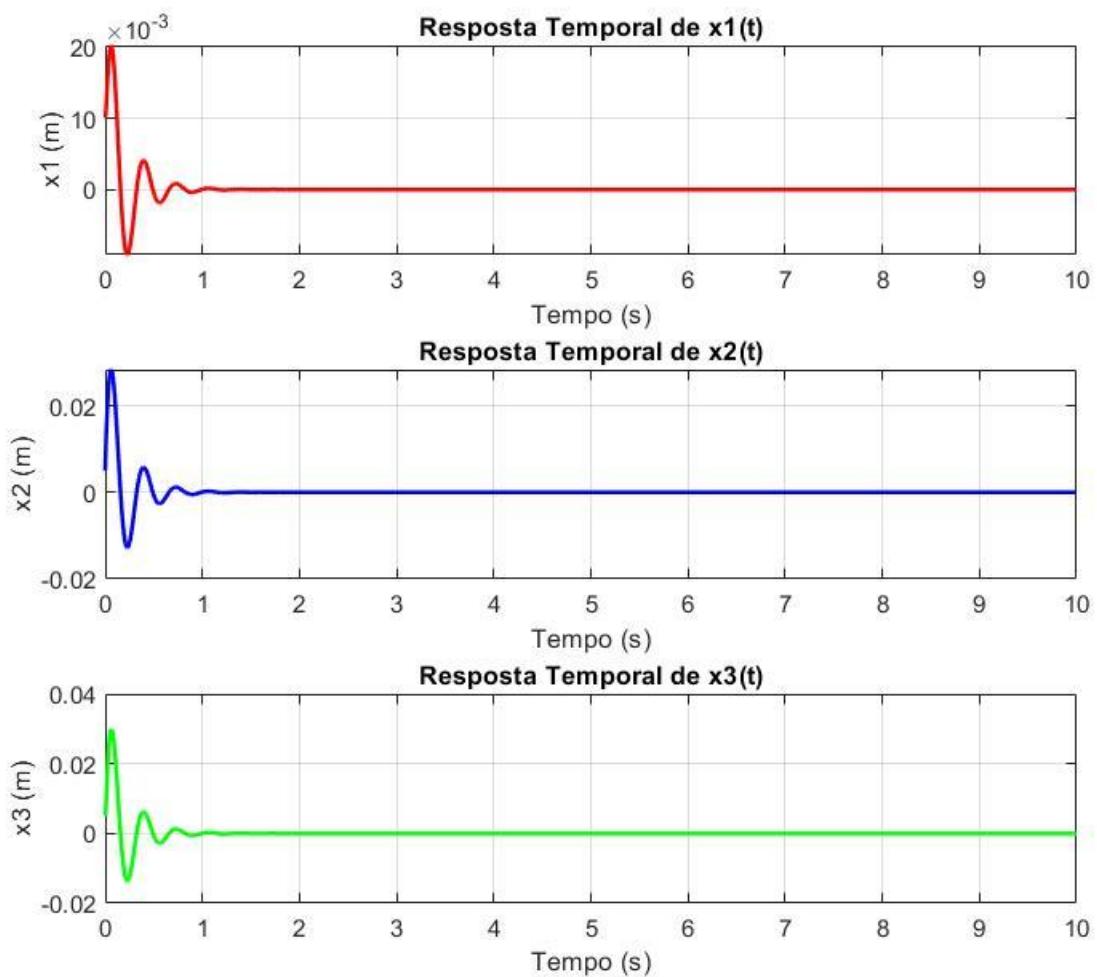


Figura 3. Apresenta a resposta temporal para o sistema de acordo com as condições iniciais.

Pela figura 3, podemos notar que a amplitude não se mantém oscilando, devido a condição livre o que demonstra que o modelamento está correto, uma vez que se fosse forçada, ou seja, tivesse uma força externa sendo aplicada constantemente, a amplitude deveria se manter oscilando na frequência de excitação.

4.5 Resposta temporal para vibração forçada

Considerando as condições iniciais nulas e variando a frequência de excitação e utilizando o Matlab (ode45), obtivemos os resultados presentes nas figuras a seguir.

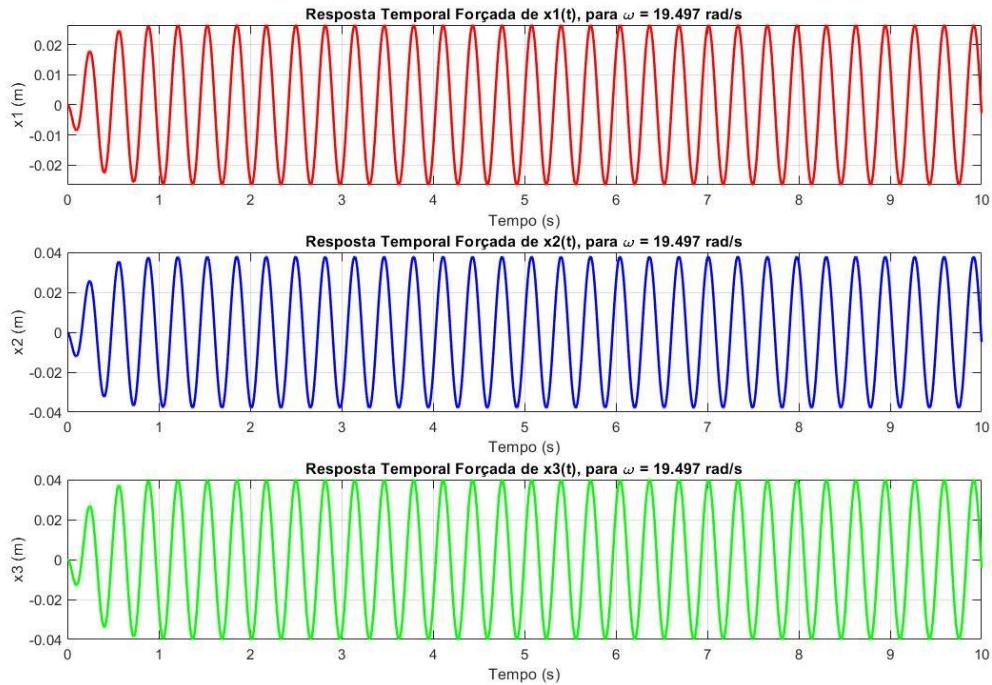


Figura 4. Resposta temporal do sistema para condições iniciais nulas e com frequência de excitação igual à primeira frequência natural.

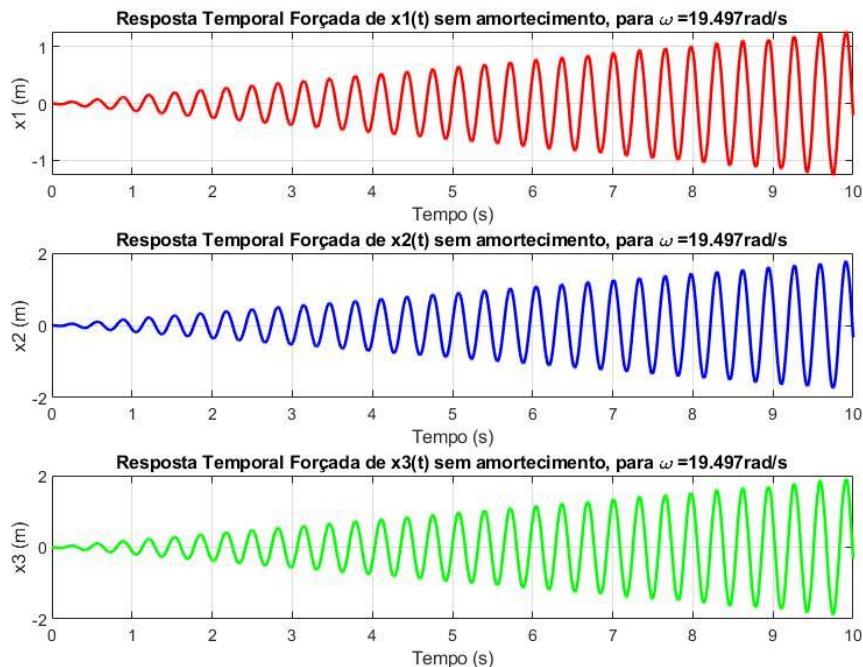


Figura 5. Resposta temporal do sistema sem amortecimento para condições iniciais nulas e com frequência de excitação igual à primeira frequência natural, observando fenômeno de ressonância.

Analisando as figuras 4 e 5, percebemos a influência do amortecimento no sistema, quando é excitado com sua primeira frequência natural $\omega_{n1} = 19,497 \text{ rad/s}$. O sistema sem amortecimento entra no fenômeno de ressonância e tem sua amplitude sendo aumentada indefinidamente à medida que o tempo passa.

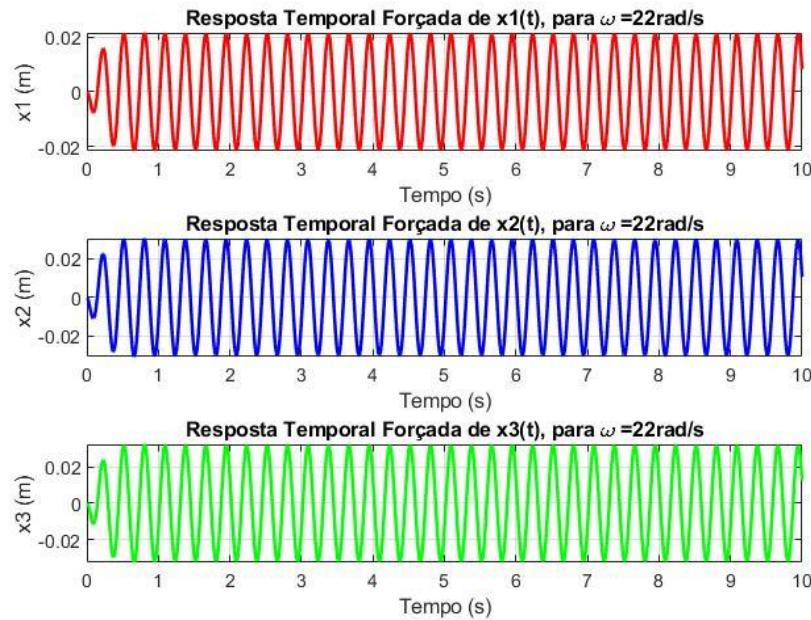


Figura 6. Resposta temporal do sistema para condições iniciais nulas e com frequência de excitação próxima à primeira frequência natural.

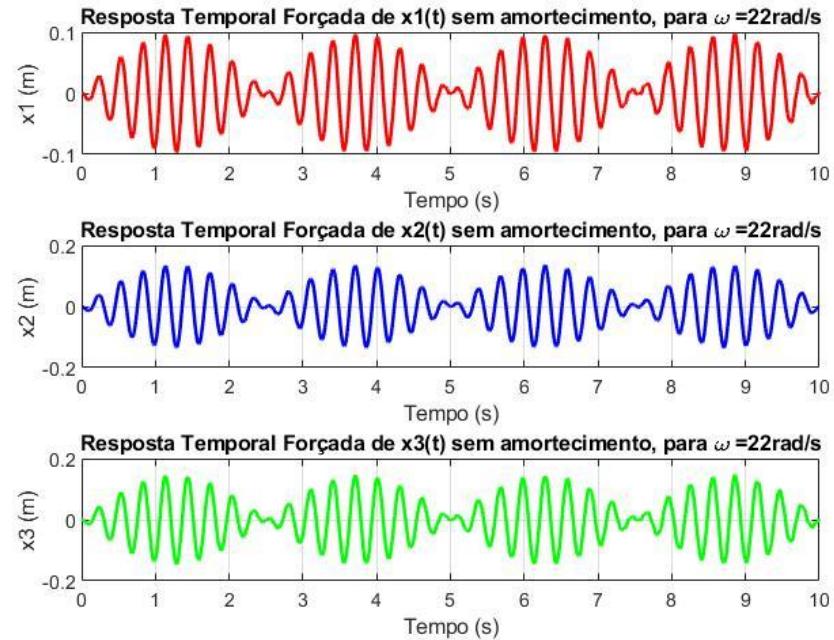


Figura 7. Resposta temporal do sistema sem amortecimento para condições iniciais nulas e com frequência de excitação próxima à primeira frequência natural, observando fenômeno de batimento.

Pelas figuras 6 e 7, notamos o fenômeno de batimento, característico de sistemas sem, ou com pouco, amortecimento, e excitados em frequência próxima, mas não igual, à frequência natural do sistema. Esse fenômeno é caracterizado por esse padrão na amplitude de resposta do sistema.

Agora, seguiremos com essa mesma abordagem para a segunda frequência natural do sistema $\omega_{n2} = 77,458 \text{ rad/s}$, plotando a resposta temporal com e sem amortecimento, para frequência de excitação igual e próxima à frequência natural.

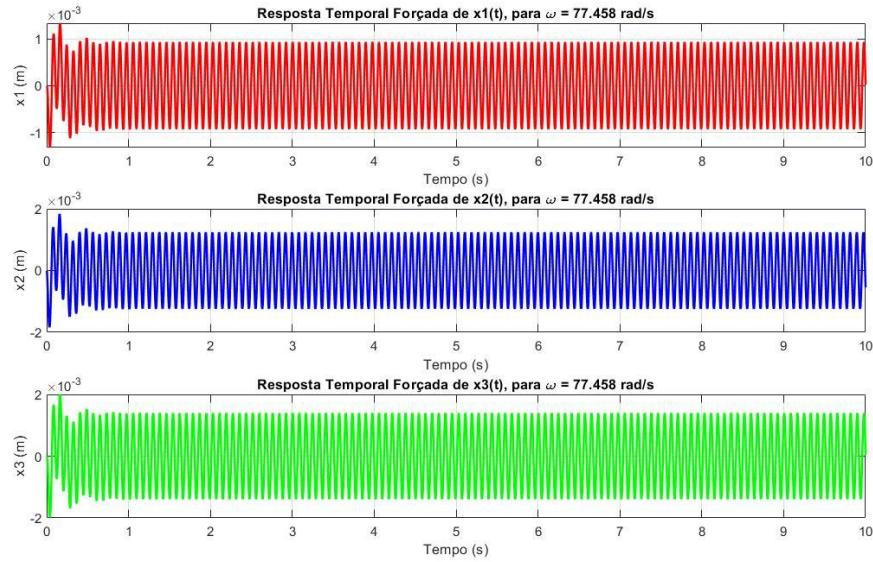


Figura 8. Resposta temporal do sistema para condições iniciais nulas e com frequência de excitação igual à segunda frequência natural.

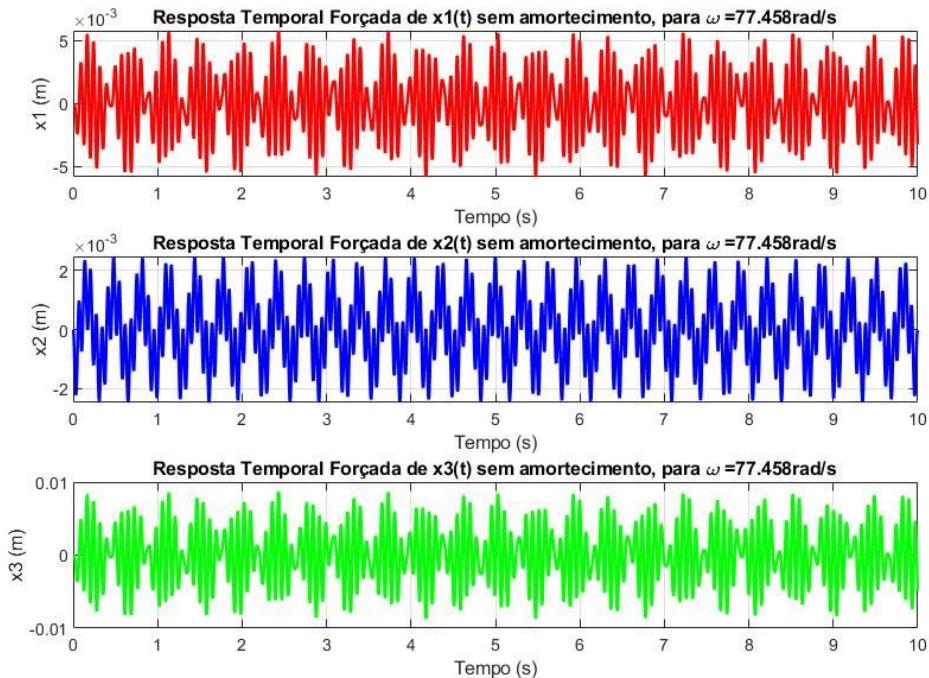


Figura 9. Resposta temporal do sistema sem amortecimento para condições iniciais nulas e com frequência de excitação igual à primeira frequência natural.

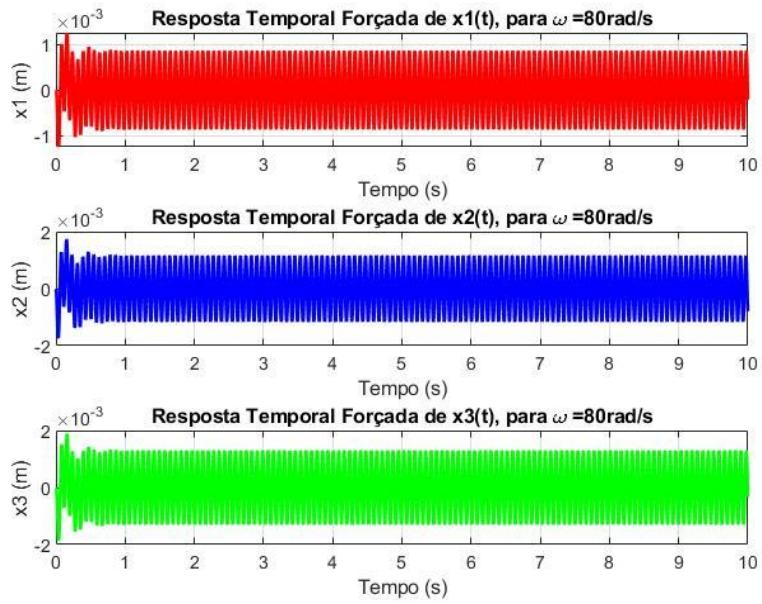


Figura 10. Resposta temporal do sistema para condições iniciais nulas e com frequência de excitação próxima à segunda frequência natural.

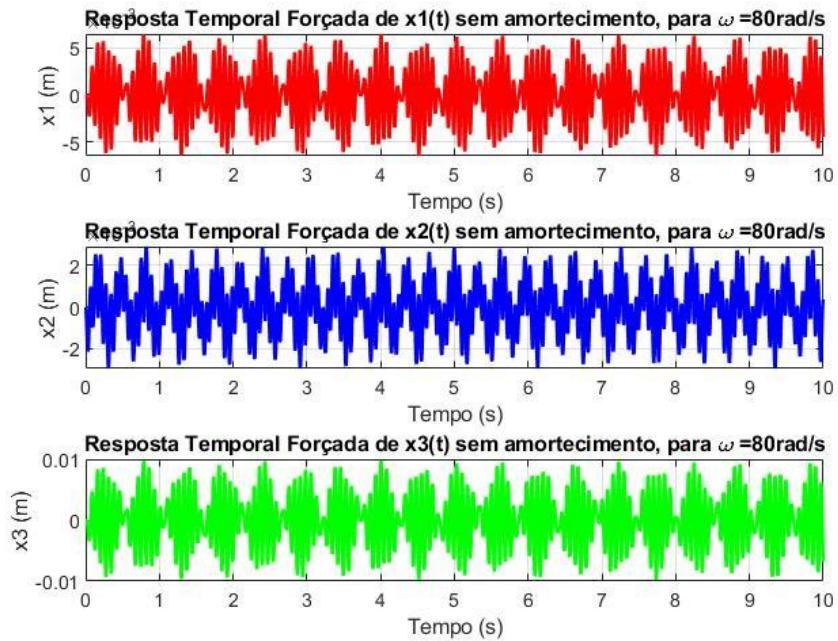


Figura 11. Resposta temporal do sistema sem amortecimento para condições iniciais nulas e com frequência de excitação próxima à primeira frequência natural.

Analizando as figuras 8, 9, 10 e 11 percebemos que os fenômenos que normalmente aconteceriam, assim como ocorreu com a primeira frequência natural, não puderam ser visualizados. Sugere-se que isso ocorreu pois, diferentemente do fator de amortecimento associado à primeira frequência natural ($\xi_1 = 0,244$), o segundo fator de amortecimento,

$(\xi_2 = 0,968)$, é muito próximo a 1, o que caracteriza um sistema muito amortecido, o que pode ter evitado os fenômenos esperados.

Por curiosidade, plotou-se a resposta temporal usando a frequência natural de 91,76 rad/s, obtida pelo método do amortecimento proporcional mas que foi descartada por ter fator de amortecimento associado maior que 1. Os resultados encontram-se nas figuras 12, 13, 14, 15.

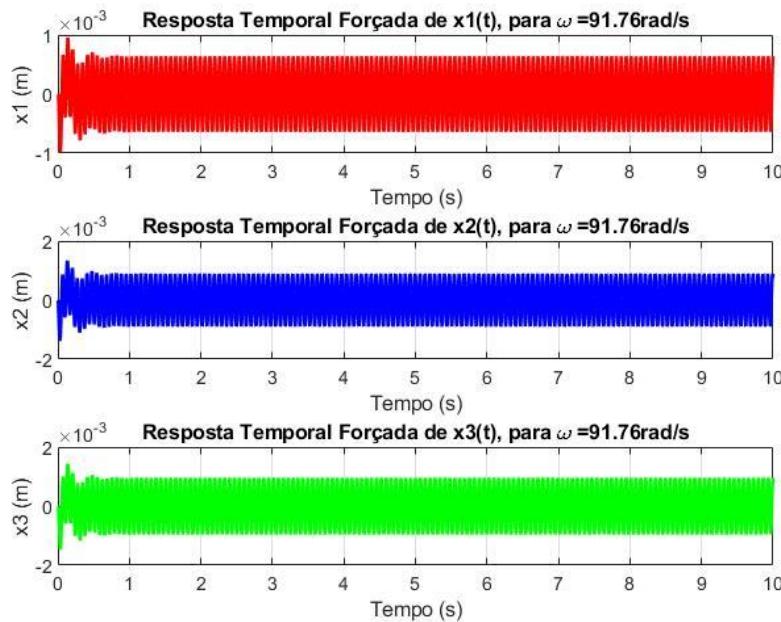


Figura 12. Resposta temporal do sistema para condições iniciais nulas e com frequência de excitação igual a 91,76 rad/s (frequência natural descartada).

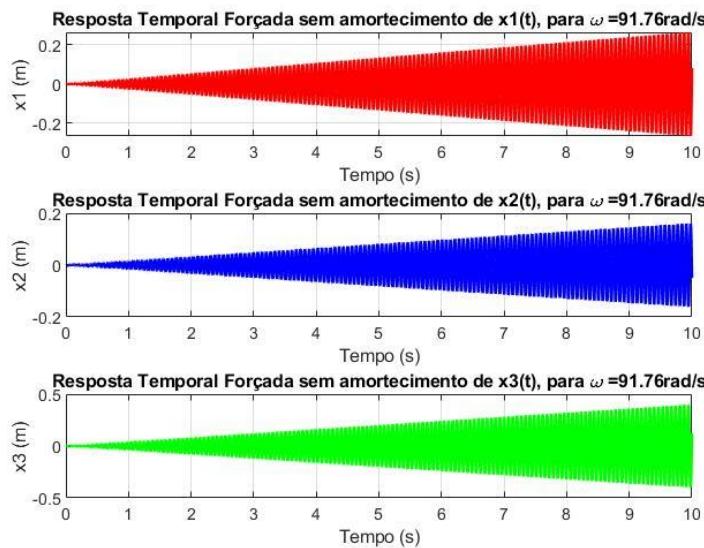


Figura 13. Resposta temporal do sistema sem amortecimento para condições iniciais nulas e com frequência de excitação igual a 91,76 rad/s (frequência natural descartada).

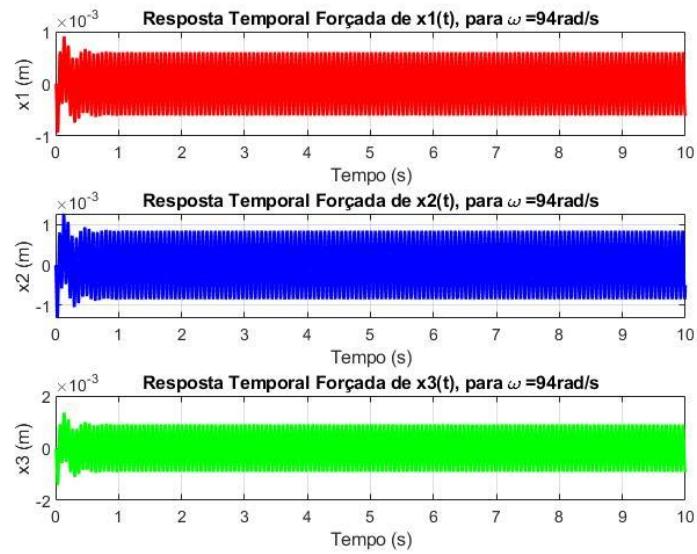


Figura 14. Resposta temporal do sistema para condições iniciais nulas e com frequência de excitação próxima à frequência natural descartada.

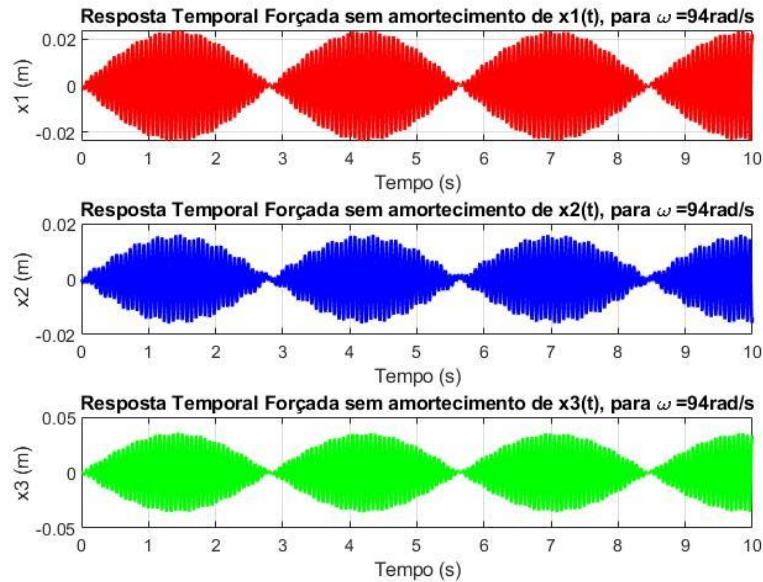


Figura 15. Resposta temporal do sistema sem amortecimento para condições iniciais nulas e com frequência de excitação próxima à frequência natural descartada.

Percebe-se pelas figuras 12, 13, 14, 15 que surgem os fenômenos de ressonância e batimento quando foi usada frequência de excitação igual, e próxima, respectivamente, à frequência natural descartada. O grupo considera esse comportamento contra intuitivo, visto que em teoria esses parâmetros foram descartados justamente por não haver oscilação.

5. Conclusão

Durante este trabalho, foram exploradas diferentes abordagens tanto para se obter as equações de movimento do sistema, quanto os parâmetros modais. Percebe-se que para este caso, em que temos um sistema simples de ser analisado, a abordagem de Newton se tornou menor. Porém, para sistemas com rotação, e mais complexos, torna-se mais vantajoso a análise pelo método de Lagrange.

Para determinar os parâmetros modais do sistema, foram utilizados dois métodos, o de espaços de estados (matriz A) e de Laplace (com amortecimento proporcional e sem amortecimento proporcional). O método da matriz A e o sem amortecimento proporcional chegaram em valores idênticos, sendo das 6 raízes, 2 pares complexos (cada um nos dá uma frequência natural), e 2 raízes reais (que, por não terem parte imaginária, não oscilam, portanto foram descartadas). Porém usando amortecimento proporcional, obtivemos uma frequência natural a mais, que foi descartada pois seu fator de amortecimento associado era maior que 1, identificando super amortecimento.

Então, plotou-se a FRF do sistema. Observou-se apenas um pico, pois o fator de amortecimento associado à segunda frequência natural é muito próximo de 1, o que atenua o pico.

Na resposta à vibração livre, obteve-se o gráfico esperado. A amplitude de cada um dos corpos tem uma oscilação inicial devido às condições iniciais, mas após um tempo, os gráficos oscilam em torno da posição zero e, em regime permanente, não se vê mais movimento algum.

Por fim, nas respostas à vibração forçada, obtivemos gráficos esperados, e outros contra intuitivos. Com a primeira frequência natural, conseguimos observar os fenômenos de batimento e de ressonância. Já com a segunda frequência natural, esses fenômenos não foram vistos, e o grupo sugere que isso ocorra devido ao seu fator de amortecimento ser muito próximo de 0. Com a frequência natural descartada, obtivemos comportamento semelhante à primeira frequência natural, sendo possível observar novamente os fenômenos de batimento e ressonância.

6. Fontes

- Slides da disciplina de EM607
- INMAN, Daniel J. Engineering Vibration. 3rd ed, Printice Hall, 2007
- RAO, SINGIRESU S. Vibrations Mechanical. 4 th ed., Printice Hall, New Jersey, 2003.
- Apostila de Vibrações PUC. Disponível no link: <https://www.puc-rio.br/ensinopesq/ccpg/pibic/relatorio_resumo2018/relatorios_pdf/ctc/MEC-Ricardo%20de%20Castro.pdf> data 20/11/2023