Projeto da Disciplina

Data de Entrega

O projeto deve ser entregue até às 23h59 do dia 01 de dezembro de 2024. Entregar no Moodle dois arquivos: um `mlx` com o MATLAB Live Script e um `pdf` (gerado a partir do Live Script), com o relatório, contendo os resultados e as discussões pedidas. Documentar os códigos.

Introdução

O projeto da disciplina estudará o carro-pêndulo. O sistema carro-pêndulo é composto por um carro, livre para transladar, e um pêndulo composto fixo ao carro, que pode transladar em torno de seu ponto de fixação, conforme mostra a figura abaixo.

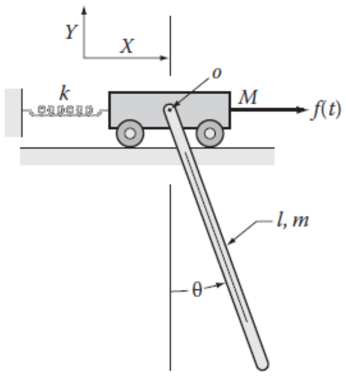

Figura 1 – Sistema carro-pêndulo, composto por um carro que translada e um pêndulo composto, preso ao carro (Childs D.W., Conkey, A.P., *Dynamics in Engineering Practice*, 11th ED, CRC Press)

Um pêndulo é um objeto que oscila em torno de um eixo de rotação perpendicular ao plano em que se movimenta. O pêndulo fixo ao carro é chamado de *pêndulo composto*, pois é um pêndulo cuja massa está distribuída ao longo do comprimento l do pêndulo, como ilustrado na Figura 2a (nessa figura, o ponto G indica o centro de massa do pêndulo). O pêndulo composto diferencia-se do pêndulo simples, composto por uma massa puntiforme presa a um fio inextensível que oscila em torno de um ponto fixo, conforme ilustrado na Figura 2b.

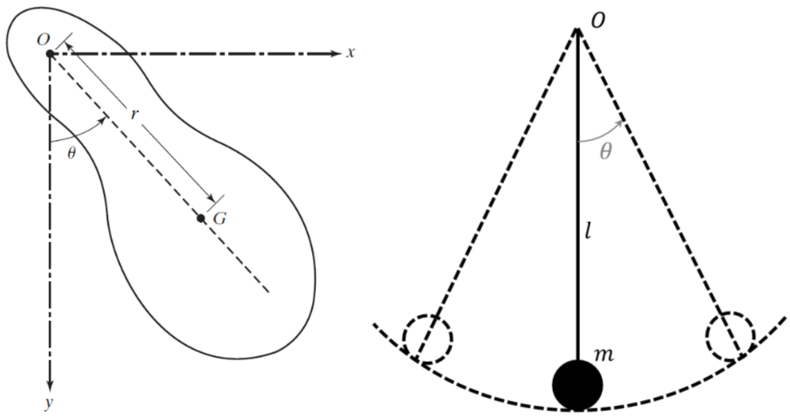

Figura 2 – (a) Pêndulo compost e (b) Pêndulo simples (Rao S.S., *Mechanical Vibrations*, 5th Ed, Pearson Education)

O sistema carro-pêndulo possui 2 graus de liberdade: a translação x do carro e a rotação θ do pêndulo. Portanto, possui duas equações de movimento. Assumindo que o carro possui massa M, está preso a uma mola de rigidez k (na posição $x = 0$, a mola está não deformada) e está sujeito à força $f(t)$, e o pêndulo é uma barra homogênea de massa m e comprimento l, preso ao carro por um pino liso, as equações de movimento desse sistema podem ser obtidas a partir das equações de Lagrange, resultando no sistema de equações acopladas:

$$
\begin{aligned}
&(m+M)\ddot{x} + \frac{ml}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta} - \frac{ml}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + kx = f(t) \\
&\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{ml}{2}\cos\theta\,\ddot{x} + \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0
\end{aligned}
$$

Que pode ser escrito na forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} m+M & \frac{ml}{2}\cos\theta \\ \frac{ml}{2}\cos\theta & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) - kx + \frac{ml}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 \\ -\frac{mgl}{2}\sin\theta \end{Bmatrix}
$$

As equações de movimento podem ser resolvidas numericamente, dadas condições iniciais $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

Esse projeto irá estudar soluções das equações de movimento e propriedades do sistema carro-pêndulo, comparando as soluções numéricas obtidas com soluções gerais da equação não linear do pêndulo.

Equações linearizadas

Soluções analíticas não podem ser obtidas, em virtude da não linearidade das equações de movimento, devido aos termos $\sin\theta$, $\cos\theta$ e $\dot{\theta}^2$. Entretanto, admitindo-se pequenas oscilações, para $\theta(t) \ll 1$, os termos $\sin\theta$ e $\cos\theta$ podem ser expandidos numa série de Taylor em torno de $\theta = 0$ como:

$$
\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots
$$

$$
\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots
$$

Introduzindo essa aproximação de pequenos ângulos, os termos de segunda ordem ou maiores em x e θ podem ser desprezados, de modo que a equação acima pode ser linearizada, obtendo:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} m+M & \frac{ml}{2} \\ \frac{ml}{2} & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{mgl}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Na forma linearizada, identificam-se as matrizes de massa $\mathbf{M}$ e de rigidez $\mathbf{K}$, e o vetor $\mathbf{q} = [x \quad \theta]^T$ agrupa as coordenadas generalizadas (deslocamento linear x do carro e deslocamento angular θ do pêndulo).

Energia cinética, potencial e mecânica

A integração numérica das equações de movimento fornece os deslocamentos x e θ e as velocidades $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$ dos graus de liberdade utilizados para descrição do sistema. Como o modelo é conservativo (não há nenhum amortecimento no sistema), então não há nenhum elemento no sistema que dissipe sua energia mecânica E, definida como

$$E = T + V$$

Em que T é a energia cinética do sistema e V é sua energia potencial (utilizando como referência um plano passando pelo centro do carro para definir a energia potencial gravitacional). Cada uma dessas energias pode ser calculada como:

$$\begin{aligned}
T_{carro} &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \\
T_{pêndulo} &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \\
T &= T_{carro} + T_{pêndulo} \\
V_{mola} &= \frac{1}{2}kx^2 \\
V_{grav} &= -\frac{mgl}{2}\cos\theta \\
V &= V_{mola} + V_{grav}
\end{aligned}$$

Em que v_G é a velocidade do centro de massa do pêndulo e I_G é seu momento de inércia em relação ao seu centro de massa. A localização do centro de massa do pêndulo é dada por

$$x_G = x + \frac{l}{2}\sin\theta \quad y_G = \frac{l}{2}\cos\theta$$

Portanto, sua velocidade é

$$\dot{x}_G = \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \quad \dot{y}_G = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

E, com $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ e $v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2$, sua energia cinética total é

$$T_{pêndulo} = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml}{2}\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

Assim, é possível determinar cada uma das parcelas de energia cinética e potencial de cada elemento que compõe o sistema analisado. Essas equações também podem ser usadas para formar o Lagrangeano $L = T - V$, que pode ser usado para obter as equações de movimento mostradas acima.

Solução exata do pêndulo

Se o carro for mantido parado, $x \equiv 0$, então reduzimos o sistema carro-pêndulo a um sistema de um único grau de liberdade, descrito somente pela equação do pêndulo:

$$\begin{gathered}
\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0 \\
I_O\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0
\end{gathered}$$

Na qual identificamos $I_O = \frac{ml^2}{3}$ como sendo o momento de inércia do pêndulo em torno do pivô e $d = \frac{l}{2}$, a localização do centro de massa do pêndulo. Devido ao termo $\sin\theta$, essa EDO é uma equação diferencial não linear. No entanto, é possível obter uma expressão exata para o período de oscilação do pêndulo, reescrevendo a equação diferencial como

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_O} \sin\theta = \ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin\theta = 0 \to \ddot{\theta} = -\omega_n^2 \sin\theta$$

Com $\omega_n^2 = \frac{mgd}{I_O} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$ a frequência natural da equação linearizada. Integrando a equação acima a partir de uma posição inicial correspondendo à máxima deflexão do pêndulo (isto é, $\theta = \theta_m$ e $\dot{\theta} = 0$), obtemos:

$$[a\,ds = v\,dv]: \int_{\theta_m}^{\theta} -\omega_n^2 \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta}$$

$$\omega_n^2(\cos\theta - \cos\theta_m) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \to \dot{\theta}^2 = 2\omega_n^2(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

A solução exata da equação é escrita na forma de uma integral, integrando a expressão acima como:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2\omega_n^2(\cos\theta - \cos\theta_m)} \to \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_n^2(\cos\theta - \cos\theta_m)}} = dt$$

Integrando sobre um quarto do período de oscilação, de $t = 0$, $\theta = 0$ até $t = T/4$, $\theta = \theta_m$,

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} = \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_n^2(\cos\theta - \cos\theta_m)}}$$

A equação acima fornece uma expressão para o período de oscilação do pêndulo em função da amplitude máxima de oscilação θ_m. A integral não pode ser expressa em termos das expressões algébricas ou trigonométricas usuais, mas pode ser reescrita substituindo $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ (e uma substituição análoga para θ_m) como:

$$T = \frac{2}{\omega_n} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_m/2) - \sin^2(\theta/2)}}$$

Embora a substituição acima não permita resolver a integral em termos de funções elementares, essa integral é conhecida como integral elíptica. Fazendo a substituição de variáveis

$$\sin(\theta/2) = \sin(\theta_m/2)\sin\phi$$

Pode-se escrever

$$T = \frac{4}{\omega_n} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_m/2)\sin^2\phi}}$$

Essa integral, denominada integral elíptica do primeiro tipo, é comumente denotada por K e pode ser determinada numericamente, em função do parâmetro $m = \sin^2(\theta_m/2)$:

$$K = K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - m\sin^2\phi}}$$

Seu valor pode ser determinado a partir de tabelas de integrais elípticas ou funções específicas das bibliotecas matemáticas, como a função ellipticK, para diversos valores de $\theta_m/2$.

O resultado exato da solução do pêndulo pode ser comparado com o valor obtido da equação linearizada, através da equação:

$$T = \frac{2K}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right)$$

A equação acima mostra que o valor verdadeiro do período de um pêndulo pode ser obtido multiplicando o valor aproximado obtido da solução da equação linear pelo fator $2K/\pi$. Esses fatores são mostrados na tabela abaixo, para vários valores da amplitude θ_m. Note que, para fins práticos de engenharia, o fator de correção pode ser omitido para oscilações do pêndulo com amplitude menores que 10°.

Tabela 1 – Fator de correção para o período de oscilação de um pêndulo simples

$\boldsymbol{\theta_m}$	**0°**	**10°**	**20°**	**30°**	**60°**	**90°**	**120°**	**150°**	**180°**
K	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	∞
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	∞

O projeto

O projeto consiste em estudar a resposta oscilatória do sistema carro-pêndulo. Estudaremos a variação da resposta com alguns parâmetros do pêndulo e a resposta temporal.

Parte 1 – Dados de Entrada (3,0 pontos)

Os parâmetros do problema necessários para as simulações serão dados em função do RA do aluno. Os parâmetros necessários são:

M: massa do carro (kg)

m: massa do pêndulo (kg)

l: comprimento do pêndulo (m)

k: rigidez da mola ($N{\cdot}m^{-1}$)

g: aceleração da gravidade ($m{\cdot}s^{-2}$)

Conhecidos esses valores fornecidos, é possível determinar todos os parâmetros que aparecem nas equações de movimento do sistema carro-pêndulo e, portanto, avaliar a resposta do sistema, para qualquer condição inicial e força de excitação.

As massas M do carro e m do pêndulo são quantidades fáceis de determinar, utilizando uma balança e medindo diretamente a massa de cada um dos componentes. As outras quantidades são mais difíceis, pois o comprimento efetivo l do pêndulo pode ser ligeiramente diferente de seu comprimento total, pois a distribuição verdadeira de massa do pêndulo pode alterar seu momento de inércia. A rigidez da mola pode ser determinada através de um teste de tração, mas pode ser alterada devido à pré-carga inserida na montagem do sistema.

Para determinar l e k, dois testes foram feitos. No primeiro experimento (`exp1`), o carro é mantido parado, e o pêndulo é liberado do repouso ($\dot{\theta} = 0$) a partir de uma posição inicial ($\theta = \theta_0$). A posição angular do pêndulo é medida com um sensor de deslocamento angular, calibrado em graus, com uma frequência de amostragem de 1 kHz. No segundo experimento (`exp2`), o pêndulo é removido do carro. Ao carro é imprimido uma velocidade inicial com uma martelada, e o deslocamento do carro é medido com um sensor de deslocamento, calibrado em milímetros, com uma frequência de amostragem de 1 kHz.

O experimento é repetido para cada par de carro-pêndulo respectivo a cada aluno da disciplina. As massas `m` e `M`, a gravidade `g`, e os dados dos experimentos `exp1` e `exp2`, são gravados num arquivo em MATLAB. Todos os resultados são compilados numa única variável `dados`, que contém o RA, as massas, e os resultados dos experimentos, disponibilizados aos alunos.

Escreva uma função que recebe os dados dos experimentos fornecidos, respectivo ao seu RA, e, com esses dados, identifique os valores de l e k.

Plote as respostas medidas, e respostas simuladas da equação de movimento do pêndulo e do carro separados, comparando os valores medidos fornecidos com as respostas simuladas, a fim de verificar se os parâmetros pedidos foram identificados corretamente. Discuta:

- Como você fez a busca e carregou os resultados dos experimentos, para identificar os parâmetros pedidos?
- Como fez a busca dos parâmetros pedidos?
- Como mediu a diferença entre a resposta simulada e medida? Os valores são aceitáveis?
- Para integração das equações de movimento, como as equações diferenciais de segunda ordem foram reduzidas para um sistema de primeira ordem?
- Qual integrador numérico foi utilizado? Por que você escolhe esse?

Parte 2 – Instabilidade do carro-pêndulo (3,0 pontos)

O carro-pêndulo é um exemplo comumente encontrado na literatura, principalmente na área de controle. Sua popularidade é devido ao fato de o pêndulo invertido ser instável, isto é, o pêndulo simplesmente cai se o carro não se mover para contrabalancear o movimento do pêndulo. Adicionalmente, a dinâmica do sistema é não linear. A instabilidade do pêndulo invertido pode ser verificada, calculando a resposta dinâmica do pêndulo para qualquer condição inicial $\theta_0 > 90°$, que faz o pêndulo cair. Também podemos verificar a instabilidade do carro–pêndulo para o sistema com dois graus de liberdade.

Para isso, obtenha respostas no tempo do carro-pêndulo, utilizando as equações de movimento gerais, não linearizadas, para diferentes condições iniciais, e observe que, sempre que o pêndulo inicia na posição invertida, o sistema é instável (isto é, o pêndulo sempre cai). Considere os casos (e outros que julgar interessante ou importante):

- Sistema parte de repouso, e $x = 0, \theta = 180° \pm \epsilon$ (posição angular do pêndulo com uma perturbação em torno da posição de equilíbrio instável);
- Sistema parte (quase) do repouso, com $x = 0$, $\theta = 180°$, $\dot{x} = \pm\epsilon$, $\dot{\theta} = 0$ (velocidade linear do carro com uma perturbação);
- Sistema parte (quase) do repouso, com $x = 0$, $\theta = 180°$, $\dot{x} = 0$, $\dot{\theta} = \pm\epsilon$ (velocidade angular do pêndulo com uma perturbação).

Plote o deslocamento linear x do carro no eixo y da esquerda e o deslocamento angular θ do pêndulo no eixo y da direita, ambos em função do tempo. Plote separadamente as energias cinética e potencial do sistema, verificando como há a troca de energia entre cinética e potencial durante o movimento do sistema. Plote também a energia total em função do tempo e verifique que esta se mantém constante, igual ao valor inicial (fornecido pelas condições iniciais da simulação). O que você espera que aconteça com cada termo de energia do sistema, na presença de alguma fonte de dissipação (atrito, resistência do ar, amortecedores etc)?

Discuta:

- Como a integração numérica foi realizada? Quais as diferenças entre a integração desse sistema com dois graus de liberdade, para o sistema consistindo somente do pêndulo, com um grau de liberdade?
- Como as energias são calculadas a partir das respostas numéricas obtidas da integração?
- Para pequenos deslocamentos (quando essa aproximação pode ser feita?), a resposta da equação linearizada condiz com a resposta não linear?
- Sua resposta condiz com os resultados esperados, para casos limites? Isto é, se $k \to \infty$, o carro não se move e temos somente o movimento pendular, que pode ser resolvido analiticamente. Além disso, se $m \to 0$ (ou se $M \gg m$, de modo que $\frac{m}{M} \to 0$), então a massa do pêndulo é desprezível e temos somente o movimento do carro apoiado na mola, que também possui solução analítica. Como sua resposta numérica se compara com as soluções analíticas esperadas?

Parte 3 – Visualização das respostas do carro-pêndulo (3,0 pontos)

Para verificar o significado físico das respostas obtidas na seção anterior, é interessante fazer animações, indicando como o sistema se move ao longo do tempo, para as condições iniciais dadas. A ideia para se fazer uma animação é plotar várias figuras, uma para cada frame da animação a ser gerada, e criar um vídeo salvando todos os frames na sequência. O help do MATLAB (indicado no link acima) pode ser útil nessa etapa.

Para a animação, plote uma caixa que represente o carro, com centro dado pela coordenada x, e uma linha, com início no centro da caixa, que represente o pêndulo, cujo ângulo com a vertical é dado pela coordenada θ. Para melhorar a sua animação, plote também a mola presa ao carro numa extremidade e presa a uma parede, em outra extremidade. Inclua na animação setas indicando as velocidades do carro e do centro de massa do pêndulo.

Na sua animação, divida a janela da figura em diferentes subplots ou tiledlayouts (o que preferir). Em uma janela, faça a animação do sistema se movendo, nas outras, plote o deslocamento do carro e o deslocamento do pêndulo (ou em um único gráfico, com dois eixos y). Faça cada um dos gráficos do instante inicial até o instante atual t_i da animação.

A mola pode ser trabalhosa de plotar, mas existem funções que podem ser usadas para isso. Uma delas encontra-se no File Exchange do matlab: é a função spring. Caso queira utilizar essa função, baixe o .m no site do MATLAB e inclua essa função na sua pasta de trabalho. Lembre-se de anexar esse arquivo no trabalho enviado. Para medidas não informadas, encontre valores adequados para criar uma animação que consiga ilustrar adequadamente os movimentos do carro e do pêndulo. Lembre-se também de ajustar os limites dos eixos x e y para valores constantes, para que a animação não atualize os eixos a cada frame da figura.

Relatório (1,0 ponto)

O relatório deve contar todos os resultados obtidos e uma discussão dos resultados, conforme solicitado em cada parte do projeto. Adicione ainda ao relatório uma discussão explicando brevemente cada algoritmo implementado e como escolheu as funções e os parâmetros utilizados. Gere o pdf do relatório a partir do seu Live Script. Atente-se para que nenhum trecho de código seja cortado ao gerar o pdf (leia atentamente a versão final do seu relatório antes de submetê-la). Inclua também no live script (ou num .m separado), o código para gerar a animação pedida e crie um arquivo .avi com a animação. Inclua o vídeo no arquivo zipado a ser entregue. O feedback do professor será dado em cima do relatório entregue no Moodle e do vídeo. Lembre-se de documentar todas as funções. Entregue também o script .mlx.

Avaliação do curso

Responda de forma anônima à avaliação do curso: https://forms.gle/vPkdbcA5bfbiC2Vz7