Carro pêndulo

Bruno Monteiro Bonetti - 232488

Luis Paulo Siqueira Silva - 183045

Modelagem

```
clc; close all; clear all;

mc = 1.5; % mass of the cart
mp = 0.5; % mass of the pendulum
g = 9.82; % gravity
L = 1;    % length of the pendulum
d1 = 1e-2;  % damping of the cart displacement
d2 = 1e-2; % damping of the joint

A = [0,   0,   1,    0;
    0,   0,   0,    1;
    0,   g*mp/mc,   -d1/mc, -d2/(L*mc);
    0,   g*(mc+mp)/(L*mc),  -d1/(L*mc), -d2*(mc+mp)/(L^2*mc*mp)]
```

```
A = 4×4
        0         0    1.0000         0
        0         0         0    1.0000
        0    3.2733   -0.0067   -0.0067
        0   13.0933   -0.0067   -0.0267
```

```
B = [ 0; 0; 1/mc;  1/(L*mc)];

C = [0 1 0 0];

D = 0;

C_q1 = [1 0 0 0];

sys = ss(A, B, C, D)
```

```
sys =

  A =
             x1         x2         x3         x4
   x1         0          0          1          0
   x2         0          0          0          1
   x3         0      3.273  -0.006667  -0.006667
   x4         0      13.09  -0.006667   -0.02667

  B =
         u1
   x1       0
   x2       0
   x3  0.6667
   x4  0.6667
```

```
  C =
       x1  x2  x3  x4
   y1   0   1   0   0

  D =
       u1
   y1   0

Continuous-time state-space model.
Model Properties
```

Análise de estabilidade

```
poles = pole(sys)
```

```
poles = 4×1
   -3.6327
    3.6043
   -0.0050
         0
```

```
eigenvalues = eig(A)
```

```
eigenvalues = 4×1
         0
   -3.6327
    3.6043
   -0.0050
```

```
zeros = zero(sys)
```

zeros = 2×1

10^{-16} ×

```
    0.2473
         0
```

```
% como tem polo maior que 0, não é estavel (todos os polos têm
% que estar no semiplano esquerdo)
```

Funções de transferência

```
%% questao 1.2

[b, a] = ss2tf(A, B, C, D);
ft_q2 = tf(b, a)
```

```
ft_q2 =

    0.6667 s^2 + 2.333e-17 s + 3.186e-16
  ----------------------------------------
  s^4 + 0.03333 s^3 - 13.09 s^2 - 0.06547 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
[zeros, poles, gain] = zpkdata(ft_q2, 'v');

zeros(abs(zeros) < 1e-2) = 0;
poles(abs(poles) < 1e-2) = 0;

new_tf = zpk(zeros, poles, gain);
new_tf = tf(new_tf)
```

```
new_tf =

           0.6667 s^2
  -----------------------------
  s^4 + 0.02833 s^3 - 13.09 s^2

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
simplified_new_tf = minreal(new_tf)
```

```
simplified_new_tf =

          0.6667
  -----------------------
  s^2 + 0.02833 s - 13.09

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
[zeros, poles, gain] = zpkdata(simplified_new_tf, 'v');
```

Houve cancelamento de polos e zeros porque a simplificação considerou que os efeitos desses termos insignificantes (em magnitude) podem ser ignorados sem alterar significativamente o comportamento dinâmico do sistema. Isso resulta em uma função de transferência mais simples, mas que mantém as características essenciais do sistema em frequências relevantes.

Questão 1.3

```
[b_q1, a_q1] = ss2tf(A, B, C_q1, D);
ft_q1 = tf(b_q1, a_q1)
```

```
ft_q1 =

       0.6667 s^2 + 0.01333 s - 6.547
  ----------------------------------------
  s^4 + 0.03333 s^3 - 13.09 s^2 - 0.06547 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
ft_q2
```

```
ft_q2 =

    0.6667 s^2 + 2.333e-17 s + 3.186e-16
  -----------------------------------------
  s^4 + 0.03333 s^3 - 13.09 s^2 - 0.06547 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

Questão 1.4

```
[zeros, poles, gain] = zpkdata(ft_q1, 'v')
```

```
zeros = 2×1
   -3.1437
    3.1237
poles = 4×1
         0
   -3.6327
    3.6043
   -0.0050
gain =
0.6667
```

```
[zeros, poles, gain] = zpkdata(ft_q2, 'v')
```

```
zeros = 2×1 complex
```
10^{-7} ×
```
  -0.0000 + 0.2186i
  -0.0000 - 0.2186i
poles = 4×1
         0
   -3.6327
    3.6043
   -0.0050
gain =
0.6667
```

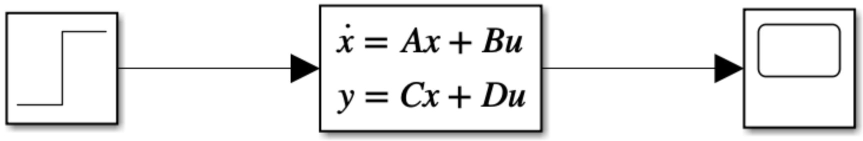
O polos são iguais pois dependem apenas da matriz A, como podemos ver no denominador da equação de função de transferencia a partir do espaço de estados:

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}}{\det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}$$

Já os zeros, dependerm de todas as matrizes, como se pode ver no numerador da mesma equação. Assim, variando C, varia-se os zeros da função.

Questão 2.1

Usando os valores passados das matrizes A, B, C, D, construimos o seguinte no Simulink:

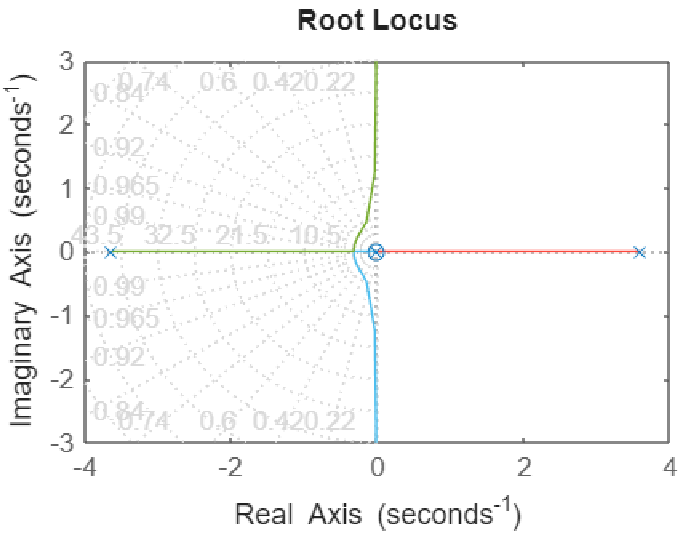


Plotando a resposta ao degrau, obtemos o seguinte:

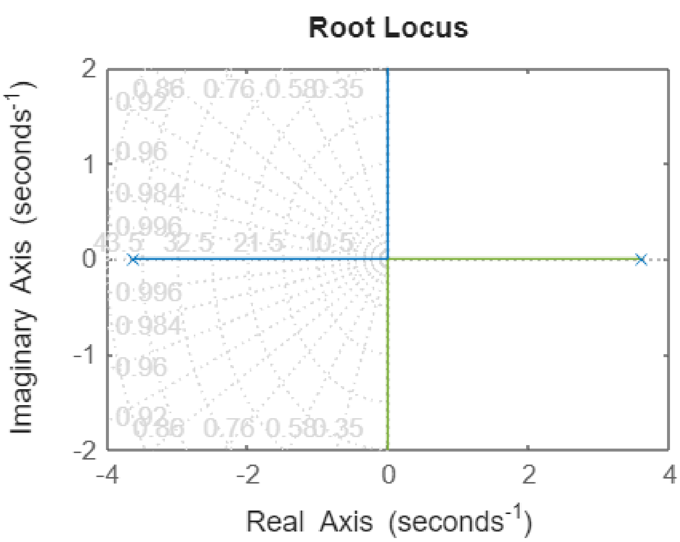
Verifica-se que o sistema é instável, com sua amplitude de resposta tendendo ao infinito.

Questão 2.2

```
rlocus(ft_q2)
grid on;
```




```
rlocus(simplified_new_tf)
grid on;
```

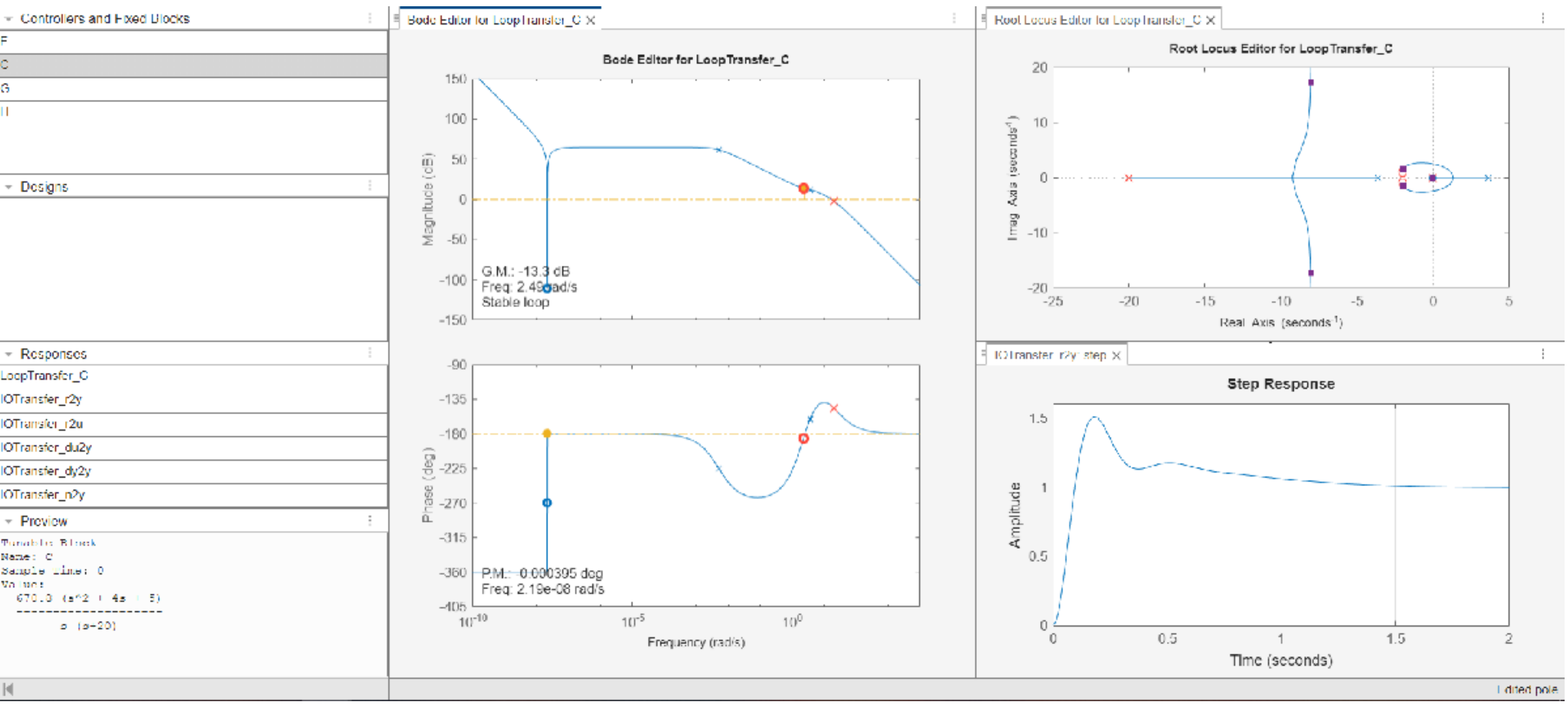


Com o plot do lugar das raízes das duas funções de tranferência (a primeira sendo o sistema original, e a segunda sendo a função em que primeiro aproximamos para zero os polos e zeros, e depois fizemos o cancelamento), fica notável a diferença entre as duas. Na primeira, temos mais polos e zeros, enquanto que na segunda eles foram reduzidos mas permanecem no semiplano direito.

Quanto à capacidade de um controlador P estabilizar a malha fechada, o grupo entende que não é possível pois os polos se encontram no semiplano direito, o que já indica instabilidade. O lugar das raízes indica que, para K>0, os polos dominantes permanecem no semiplano direito. Assim, um controlador proporcional simples P não é suficiente para estabilizar o sistema.

Questão 2.3

```
sisotool(ft_q2)
```



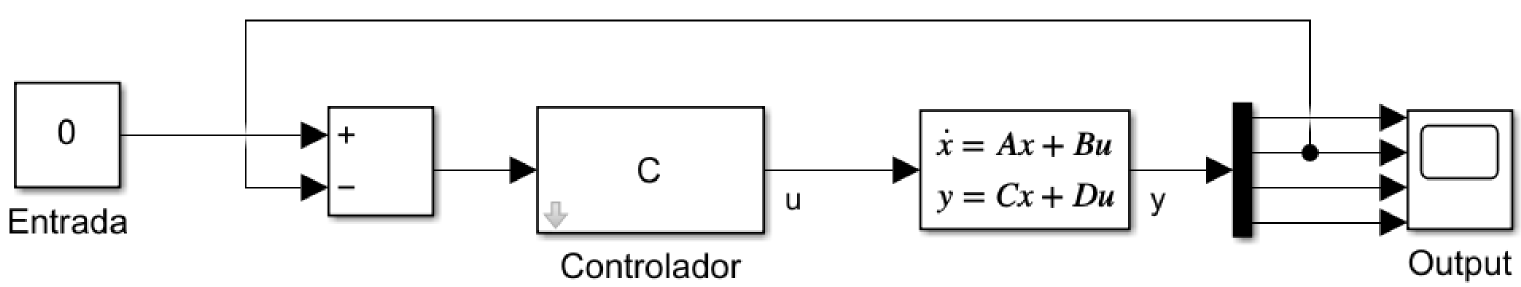
O controlador encontrado tem a seguinte função de transferência:

$$\frac{670.84(s^2 + 4s + 5)}{s(s + 20)}$$

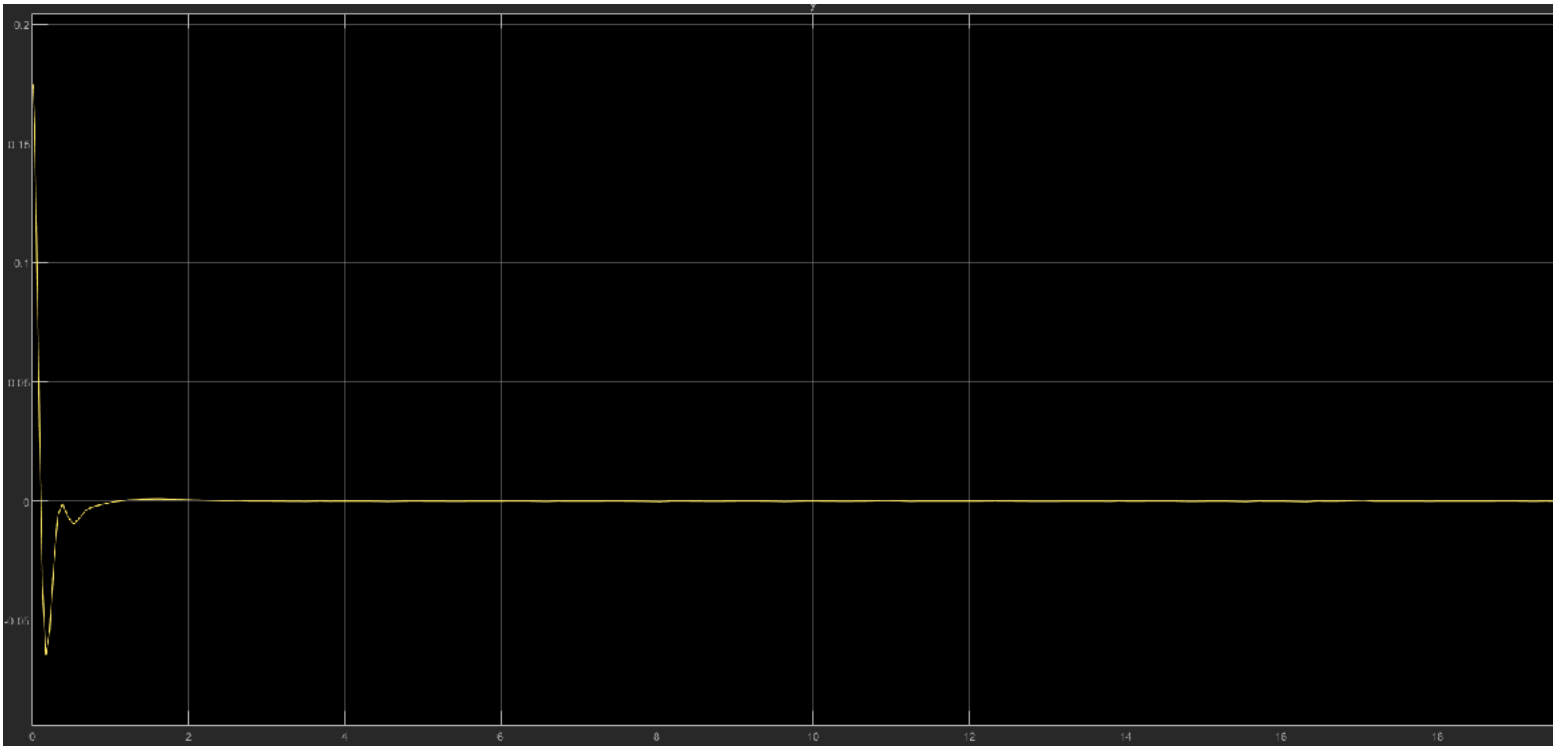
O ganho estabilizante encontrado foi, portanto, de 670.84.

Questão 2.4

Exportamos o controlador encontrado no item anterior para o simulink, e obtivemos o seguinte diagrama de blocos:

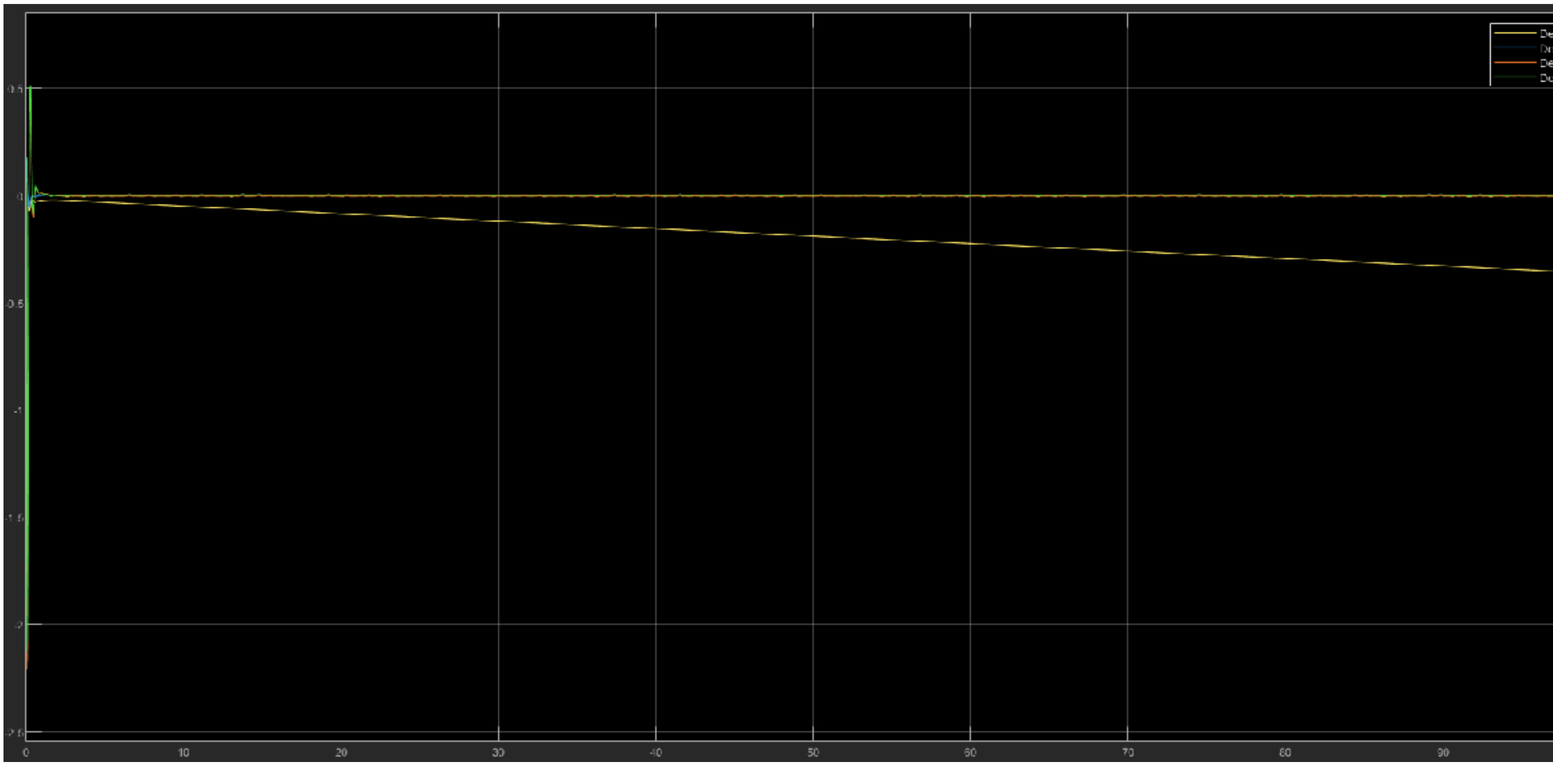


Então, a saída do estado q2 é mostrada abaixo.



Percebe-se que ela se estabiliza no set point de 0, mesmo com a condição inicial de 0.174533 rad (10°), como era esperado.

Simulando 100s, obtivemos o seguinte, mostrando todos os estados:



Aqui, observamos que não são todos os estados que convergem para zero. O estado q1 possui um decaimento linear com o passar do tempo, como pode ser visto na figura. Isso se deve por conta de não ter sido realizado o controle sobre a posição do carrinho, que é justamente o estado q1. Para evitar esse problema, basta realizar um controle, de forma similar à realizada para o pêndulo, só que para a posição do carrinho. Dessa forma, o estado q1 passaria a tender a zero também.

Questão 3.1

```
cont_q1 = ctrb(A,B)
```

```
cont_q1 = 4×4
         0    0.6667   -0.0089    2.1824
         0    0.6667   -0.0222    8.7295
    0.6667   -0.0089    2.1824   -0.1455
    0.6667   -0.0222    8.7295   -0.5383
```

```
rank(cont_q1)
```

```
ans =
4
```

```
obsv_q1 = obsv(A, C_q1)
```

```
obsv_q1 = 4×4
    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000         0
         0    3.2733   -0.0067   -0.0067
         0   -0.1091    0.0001    3.2736
```

```
rank(obsv_q1)
```

```
ans =
4
```

Por possuir o rank cheio, tanto para a controlabilidade quanto para a observabilidade, podemos afirmar que para a saída q1, o sistema é controlável e observável.

```
cont_q2 = ctrb(A,B)
```

```
cont_q2 = 4×4
         0    0.6667   -0.0089    2.1824
         0    0.6667   -0.0222    8.7295
    0.6667   -0.0089    2.1824   -0.1455
    0.6667   -0.0222    8.7295   -0.5383
```

```
rank(cont_q2)
```

```
ans =
4
```

```
obsv_q2 = obsv(A, C)
```

```
obsv_q2 = 4×4
         0    1.0000         0         0
         0         0         0    1.0000
```

```
         0   13.0933   -0.0067   -0.0267
         0   -0.3710    0.0002   13.0941
```

```
rank(obsv_q2)
```

```
ans =
3
```

Como a matriz A e B não mudam para a saída q2, o sistema continua sendo controlável. Porém, como a matriz C muda e o número de rank não é cheio, temos que, para essa saída, o sistema não é observável.