AI 기초

2019~2020

강봉주

단순 회귀 분석

회귀 분석

[개요]

- 선형회귀분석((linear regression analysis)는 1개의 종속변수(dependent variable, response variable, target variable)에 대하여 여러 개의 독립변수(independent variable, explanatory variable, predictor variable, input variable)와의 관련성을 선형으로 모형화하는 기법
- 1개의 독립변수만 있는 경우를 단순선형회귀(simple linear regression)

회귀 분석

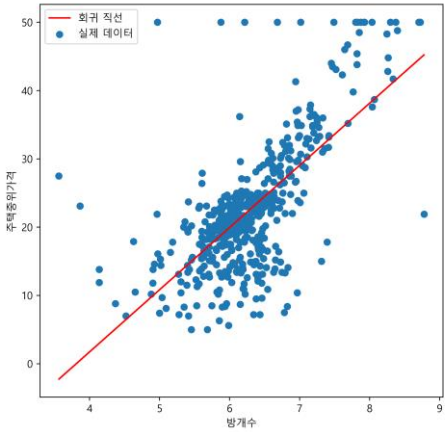
[필요한 패키지]

In
```
# 필요한 패키지
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import warnings

warnings.filterwarnings('ignore')

import scipy
from scipy import linalg as la
import scipy.stats as ss
import scipy.special

# 한글출력
plt.rcParams['font.family'] = 'Malgun Gothic'
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

# 필요한 패키지 2
import statsmodels.api as sm
import statsmodels.formula.api as smf
sm.__version__
```
Out
```
'0.10.1'
```

회귀 분석

[개요]

- $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$
- $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x = [1\ x]\begin{bmatrix}\beta_0 \\ \beta_1\end{bmatrix}$: 모형식
- β_0는 절편(intercept), β_1는 기울기 모수(parameter)
- 모수에 대한 1차식



회귀 분석

[모수의 추정]

- $\{(x_i, y_i)|i = 1, \dots, n\}$: 표본
- $y_i \approx \beta_0 + \beta_1 x_i = f(x_i)$가 되도록 모수를 추정
- $\epsilon_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$: 오차
- 오차 제곱합 $\sum_i \epsilon_i^2$ 이 최소가 되도록

$$\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_i \epsilon_i^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_i \big(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\big)^2$$

회귀 분석

[모수의 추정]

- $\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_i \epsilon_i^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_i \left(y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)\right)^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} (y - \mathrm{X}\beta)^T (y - \mathrm{X}\beta)$
- β_0, β_1에 대하여 미분한 후 정리
- 정규(수직)방정식(normal equation): $y - \mathrm{X}\beta \perp range(\mathrm{X})$

정규 방정식: $\begin{cases} n\beta_0 + \sum_i x_i \beta_1 = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i \beta_0 + \sum_i x_i^2 \beta_1 = \sum_i x_i y_i \end{cases} \rightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\beta = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} y \rightarrow \mathrm{X}^{\mathrm{T}}(y - \mathrm{X}\beta) = 0$

정규 행렬: $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{pmatrix}$

회귀 분석

[모수의 추정]

- $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$
- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$

```
In    # 단순 회귀 적합
      # 데이터 정의
      X = df["rm"]
      y = df["medv"]
      X = sm.add_constant(X)

      # 모델 정의
      model = sm.OLS(y, X)
      # 모델 적합
      fit = model.fit()
      # 모델 요약
      print(fit.summary())
```

회귀 분석

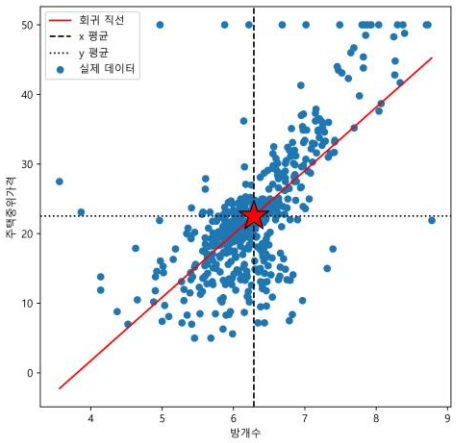
[모수의 추정]

```
Out         OLS Regression Results
            ==============================================================================
            Dep. Variable:                   medv   R-squared:                       0.484
            Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.483
            Method:                 Least Squares   F-statistic:                     471.8
            Date:                Fri, 10 Jan 2020   Prob (F-statistic):           2.49e-74
            Time:                        16:04:12   Log-Likelihood:                -1673.1
            No. Observations:                 506   AIC:                             3350.
            Df Residuals:                     504   BIC:                             3359.
            Df Model:                           1
            Covariance Type:            nonrobust
            ==============================================================================
                            coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
            ------------------------------------------------------------------------------
            const        -34.6706      2.650    -13.084      0.000     -39.877     -29.465
            rm             9.1021      0.419     21.722      0.000       8.279       9.925
            ==============================================================================
            Omnibus:                      102.585   Durbin-Watson:                   0.684
            Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):              612.449
            Skew:                           0.726   Prob(JB):                    1.02e-133
            Kurtosis:                       8.190   Cond. No.                         58.4
            ==============================================================================
```

회귀 분석

[모수의 추정]

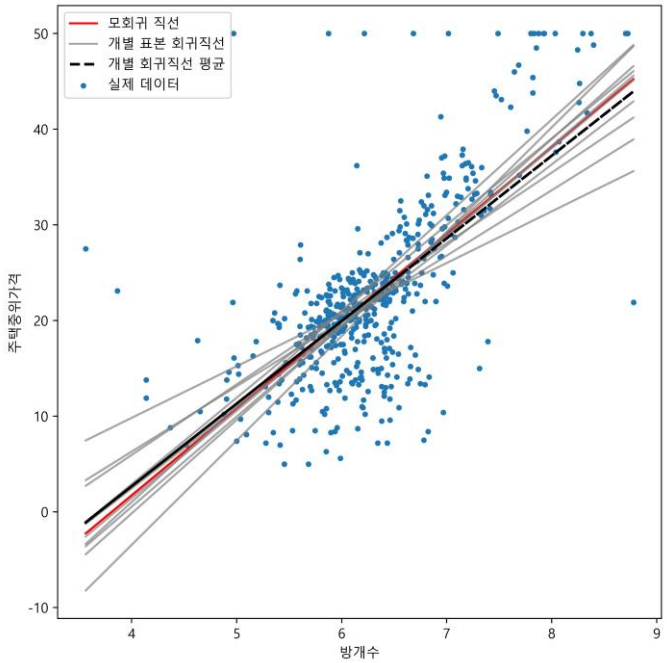
- $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$
- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$
- $\hat{y}_i = \bar{y} + \hat{\beta}_1 (x_i - \bar{x}) \Rightarrow \hat{y}_i - \bar{y} = \hat{\beta}_1 (x_i - \bar{x})$
- 추정된 직선은 반드시 $(\bar{x}, \bar{y})$를 통과하는 기울기가 $\hat{\beta}_1$인 직선



회귀 분석

[추정된 회귀 직선의 의미]

- 표본의 변화가 발생한 경우에 추정된 회귀 직선이 어떻게 변할까?
- 추정된 회귀 직선의 분포가 존재
- 중복허용, 표본크기 100, 10개의 표본



회귀 분석

[회귀직선의 분포에 대한 가정]

- 오차와 목표 변수만 확률 변수
- 모형에서 추정하고 하는 것은 $E(Y_i|x_i)$, Y_i 을 추정하는 것이 아님

순번	가정	비고
1	$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$	모형식
2	$E(\epsilon_i) = 0$	따라서 $E(Y_i|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ 이므로 모형식의 선형성 가정
3	$Var(\epsilon_i) = \sigma^2$	오차분산의 등분산성 가정
4	$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$은 서로 독립	오차의 독립성 가정

$$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \overset{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

회귀 분석

[회귀직선의 분포에 대한 가정]

- 오차와 목표 변수만 확률 변수
- 모형에서 추정하고 하는 것은 $E(Y_i|x_i)$, Y_i 을 추정하는 것이 아님
- $E(Y_i|x_i) = f(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i = [1\ x_i]\begin{bmatrix}\beta_0 \\ \beta_1\end{bmatrix}$: 모형식
- $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$: 최소 제곱법에 의한 추정
- 예측값의 계산

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 \\ \hat{y}_2 &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_2 \\ &\cdots \\ \hat{y}_n &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_n\end{aligned} = \mathrm{X}\hat{\beta}$$

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

- 회귀식에서 마지막 남은 모수에 대한 추정
- $r_i = Y_i - \hat{Y}_i$: 잔차(오차의 추정량)
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{SSE}{n-2} = \frac{SSE}{n-p} = MSE$, p: 추정되는 모수의 개수
- $\hat{\sigma} = \sqrt{MSE}$: 잔차 표준편차 또는 잔차 표준오차
- 추정 오차 분산의 계산식

$$\frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_i \left(Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)\right)^2}{n-2} = \frac{\sum_i \left(Y_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} + \hat{\beta}_1 x_i)\right)^2}{n-2}$$
$$= \frac{1}{n-2}\left(\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{(\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}))^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}\right)$$

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차의 표준편차를 구해보자.

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차의 표준편차를 구해보자.

In

```
# 데이터 구성
sample_size = 100

np.random.seed(123)
# 중복 허용
index = np.random.choice(np.arange(len(df)), size=sample_size)

X = df.loc[index, "rm"]
y = df.loc[index, "medv"]
X = sm.add_constant(X)
```

Out

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차의 표준편차를 구해보자.

In

```
#  모델 적합
fit = sm.OLS(y, X).fit()
pred = fit.predict(sm.add_constant(df.loc[index, "rm"]))

# RMSE 계산
MSE = np.sum((y-pred)**2) / (sample_size-2)
RMSE = np.sqrt(MSE)
RMSE.round(3)
```

Out

```
7.022
```

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차의 표준편차를 구해보자.

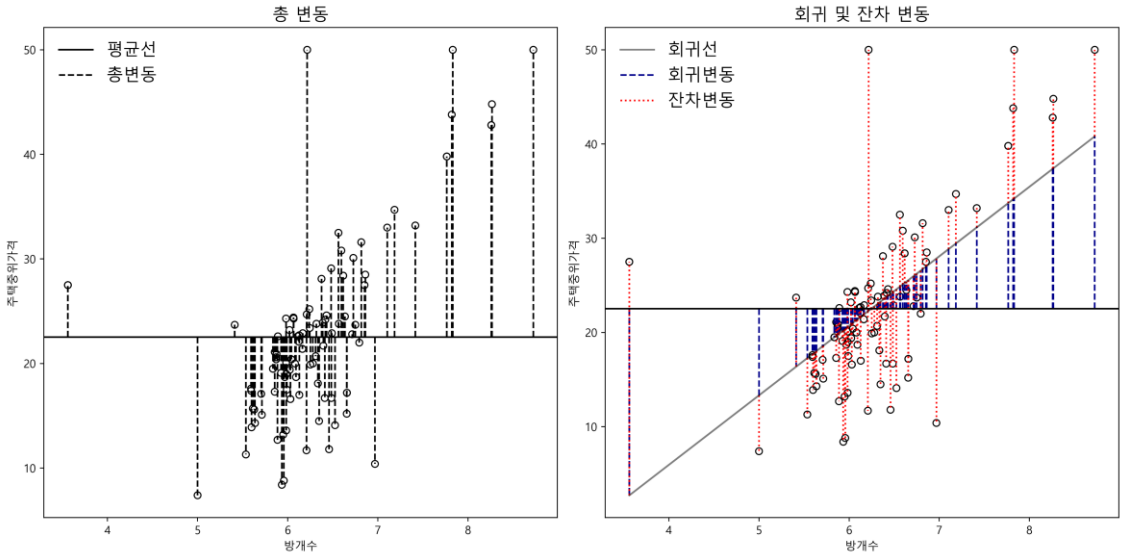
In	# 함수 결과와 확인
	np.sqrt(fit.mse_resid).round(3)

Out	7.022

회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

- $Y_i = \beta_0 + \epsilon_i$: 절편만 있는 모델(영 모델: null model), $\hat{\beta}_0 = \bar{Y}$
- $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$: 총 변동
- $Y_i - \bar{Y} = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y})$: 편차의 분해(잔차와 회귀직선)



회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

- $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 + \sum_i \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$
- $SST = SSE + SSR$
- 작 적합된 직선이면 잔차에 의한 변동이 작아야 함
- $R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$: 결정계수(coefficient of determination)
- $SSR = \sum_i \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\left(\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})\right)^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$
- $R^2 = \frac{\frac{\left(\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})\right)^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\left(\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})\right)^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2} = (R)^2$: 표본 상관계수의 제곱

회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

- 수정된 결정 계수: Adjusted R squared
- $1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{n-p}$
- R^2의 단점을 보완: 변수의 개수가 많아지면 R^2는 지속적으로 증가

회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 결정계수와 수정된 결정계수 값을 구해보자.

회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 결정계수와 수정된 결정계수 값을 구해보자.

In

```
#  모델 적합
fit = sm.OLS(y, X).fit()
pred = fit.predict(sm.add_constant(df.loc[index, "rm"]))

# R^2 계산
SST = np.sum((y-np.mean(y))**2)
SSE = np.sum((y-pred)**2)
SSR = SST - SSE
R2 = SSR/SST
R2.round(3)
```

Out

```
0.394
```

회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 결정계수와 수정된 결정계수 값을 구해보자.

```
In      # adj R^2 계산
        adjR2 = 1 - (1-R2)*(sample_size-1) / (sample_size - 2)
        adjR2.round(3)
Out     0.388
```

회귀 분석

[회귀직선 간의 비교와 변동의 분해]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 결정계수와 수정된 결정계수 값을 구해보자.

```
In    # 결과값 확인
      res = np.array([fit.rsquared, fit.rsquared_adj])
      res.round(3)
Out   array([0.394, 0.388])
```

회귀 분석

[모수의 추론]

- 추론의 대상: 회귀 계수, 회귀직선
- $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, \dots, n$: 분포에 대한 가정
- $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$ 의 분포는?
- $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \overset{let}{=} c$ (상수값)

$$E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$
$$Var(Y_i) = Var(\beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i) = Var(\epsilon_i) = \sigma^2$$
$$Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$$

회귀 분석

[모수의 추론]

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{c}\, E\left(\sum_i (x_i - \bar{x}) Y_i\right) = \frac{1}{c}\sum_i (x_i - \bar{x})\; E(Y_i)$$

$$= \frac{1}{c}\sum_i (x_i - \bar{x})\; (\beta_0 + \beta_1 x_i) = \frac{1}{c}\beta_1 c = \beta_1$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{c^2}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 Var(Y_i) = \frac{1}{c^2} c\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{c} = \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

회귀 분석

[모수의 추론]

- $\frac{\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}} \sim N(0,1)$: 오차의 분산을 아는 경우
- $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t(n-2)$: 오차 분산을 모르는 경우
- $\left(\hat{\beta}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}, \hat{\beta}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}\right)$: 신뢰 구간

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수에 대한 신뢰구간을 구해보자. 단, 신뢰수준은 95%로 한다.

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수에 대한 신뢰구간을 구해보자. 단, 신뢰수준은 95%로 한다.

In
```
# 적합된 모델 정보로 부터
# 추정된 회귀 직선의 기울기
beta = fit.params[1]

# t 분포의 분위수 계산
alpha = 0.05
t = ss.t.ppf(1-alpha/2, df=sample_size-2)

# 오차표준오차 계산
sigma = np.sqrt(fit.mse_resid)

# 데이터 제곱합 계산
x = X.iloc[:,1]
c = np.sum((x-np.mean(x))**2)

# 신뢰구간 계산
bse = sigma / np.sqrt(c)
conf = np.array([beta - t*bse, beta + t*bse])
conf.round(3)
```
Out
```
array([5.542, 9.211])
```

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수에 대한 신뢰구간을 구해보자. 단, 신뢰수준은 95%로 한다.

```
In      # 결과 확인
        fit.conf_int(alpha=0.05).loc['rm', :].round(3)
Out             0    5.542
                1    9.211
        Name: rm, dtype: float64
```

회귀 분석

[모수의 추론]

- 회귀 계수에 대한 가설 검증

- $t_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}} \sim t(n-2)$: 오차 분산을 모르는 경우

대립 가설	P값	영가설 기각
$H_1: \beta_1 > 0$	$p_0 = \Pr(T \geq t_0)$	$t_0 \geq t_\alpha(n-2)$
$H_1: \beta_1 < 0$	$p_0 = \Pr(T \geq t_0)$	$t_0 \geq t_{1-\alpha}(n-2)$
$H_1: \beta_1 \neq 0$	$p_0 = \Pr(\lvert T \rvert \geq \lvert t_0 \rvert)$	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수에 대한 유의성을 검증해보자. 단, 유의수준은 5%로 한다.

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수에 대한 유의성을 검증해보자. 단, 유의수준은 5%로 한다.

```
In    # 검정 통계량: t0 값 계산
      tvalue = beta / (sigma / np.sqrt(c))

      # p-value 계산: tvalue > 0 이므로
      pvalue = 2*(1 - ss.t.cdf(tvalue, df=sample_size-2))

      np.array([tvalue, pvalue]).round(3)
Out   array([7.98, 0.  ])
```

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수에 대한 유의성을 검증해보자. 단, 유의수준은 5%로 한다.

```
In    # 결과 확인
      np.array([fit.tvalues['rm'], fit.pvalues['rm']]).round(3)
Out   array([7.98, 0.  ])
```

회귀 분석

[모 회귀직선의 유 의미성에 대한 추론]

- 변동의 분해 기법 이용(분산분석표 이용): 일반적인 접근 방법
- $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 + \sum_i \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$
- $SST = SSE + SSR$
- $H_0: \beta_1 = 0 \Rightarrow F = \frac{\frac{SSR}{1}}{\frac{SSE}{n-2}} = \frac{MSR}{MSE} \sim F(1, n-2)$

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F값	P값
회귀	SSR	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$f_0 = \frac{MSR}{MSE}$	$\Pr(F \geq f_0)$
잔차	SSE	$n-2$	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$		
계	SST	$n-1$			

회귀 분석

[모 회귀직선의 유 의미성에 대한 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자. 단, 유의수준은 5%로 한다.

회귀 분석

[모 회귀직선의 유 의미성에 대한 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자. 단, 유의수준은 5%로 한다.

```
In      # f 통계량의 계산
        fvalue = fit.mse_model / fit.mse_resid

        # p-value의 계산
        pvalue = 1 - ss.f.cdf(fvalue, dfn=fit.df_model, dfd= fit.df_resid)

        np.array([fvalue, pvalue]).round(3)
Out     array([63.674,  0.   ])
```

회귀 분석

[모 회귀직선의 유 의미성에 대한 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자. 단, 유의수준은 5%로 한다.

```
In    # 결과 확인
      np.array([fit.fvalue, fit.f_pvalue]).round(3)
Out   array([63.674,  0.   ])
```

회귀 분석

[모 회귀직선 신뢰 구간]

- $\mathrm{E}(\hat{Y}_i) = \mathrm{E}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
- $\mathrm{var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right)$

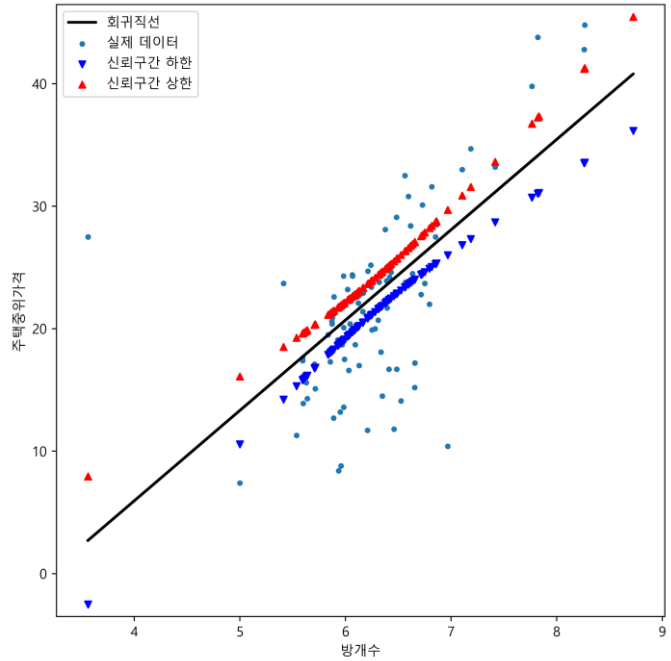
- $\frac{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)}{\hat{\sigma}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right)}} \sim t(n-2)$
- $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right)}, \quad \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right)}\right)$$

회귀 분석

[모 회귀직선의 신뢰 구간]

- $\mathrm{E}(\hat{Y}_i) = \mathrm{E}(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$
- $\mathrm{var}(\hat{Y}_i) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c} \right)$



- 독립변수의 평균값에서 멀어질 수록 분산이 커짐
- 독립변수의 평균값에서 분산이 제일 작음

회귀 분석

[잔차 분석]

- 회귀 분석의 각 종 가정에 대한 분석
- 잔차를 통하여 분석
- $\sum_i r_i = \sum_i \left(y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i\right)\right) = \sum_i \left(y_i - \left(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} + \hat{\beta}_1 x_i\right)\right) = 0$
- $E(r_i) = E\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \beta_0 + \beta_1 x_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i) = 0$
- $Var(r_i) = \sigma^2 \left(1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right)\right) = \sigma^2 \left(\frac{n-1}{n} - \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right), c = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$

✓ 잔차의 합은 0이다. 즉, 서로 간의 관련성이 있다.

✓ 잔차의 분산은 오차의 분산보다 항상 작다.

✓ 잔차의 분산은 독립변수의 평균에서 멀어질수록 작아진다. 즉 잔차의 위치에 따라 분산이 일정하지 않다.

회귀 분석

[잔차 분석]

- $Z_i = \frac{\epsilon_i - E(\epsilon_i)}{\sqrt{Var(\epsilon_i)}} = \frac{\epsilon_i}{\sigma} = \frac{Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)}{\sigma} \sim N(0,1)$: 관측되지 않는 값

- $T_i = \frac{Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)}{\sqrt{\widehat{Var(r_i)}}} = \frac{r_i}{\hat{\sigma}_i}$: 관측되는 버전으로 대치
- 내부 스튜던트화 잔차(internally Studentized residual), 표준화 잔차(standardized residual)

- $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{c}\right)\right)}$

  ✓ 표준화 잔차는 잔차의 위치에 무관하게 분산이 일정
  ✓ 즉, 평균과 분산은 각각 0과 1

회귀 분석

[잔차 분석]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 표준화 잔차 즉, 내부 스튜던트화 잔차를 구해보자.

회귀 분석

[잔차 분석]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 표준화 잔차 즉, 내부 스튜던트화 잔차를 구해보자.

In

```
# 표준화 잔차(내부 스튜던트화 잔차) 계산
import statsmodels.formula.api as smf

#  데이터 구성
sample_size = 100

np.random.seed(123)
index = np.random.choice(np.arange(len(df)), size=sample_size, replace=False)
sdf = df.loc[index]

# 회귀 직선 적합
res = smf.ols('medv ~ rm', data=sdf).fit()

# 결과 확인
print(res.summary())
```

회귀 분석

[잔차 분석]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 표준화 잔차 즉, 내부 스튜던트화 잔차를 구해보자.

In

```
# 표준화 잔차 또는 내부 스튜던트화 잔차 계산
x = sdf['rm']
x_centered = np.array(x - x.mean())**2
c = np.sum(x_centered)
ti = res.resid / np.sqrt((res.mse_resid)*(1-(1/res.nobs+x_centered/c)))
ti.head(3).round(3)
```

Out

```
410   -0.538
85     0.101
280    1.412
dtype: float64
```

회귀 분석

[잔차 분석]

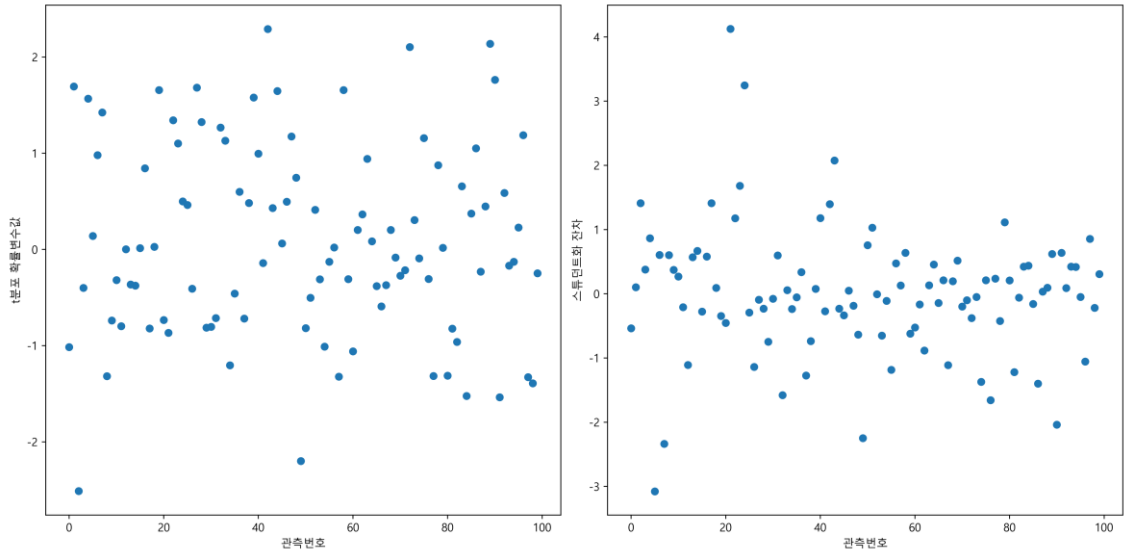
예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 방의 개수(rm)로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 표준화 잔차 즉, 내부 스튜던트화 잔차를 구해보자.

```
In      # 결과 확인
        infl = res.get_influence()
        r_standard = infl.resid_studentized
        r_standard[:3].round(3)
Out     array([-0.538,  0.101,  1.412])
```

회귀 분석

[잔차 분석]

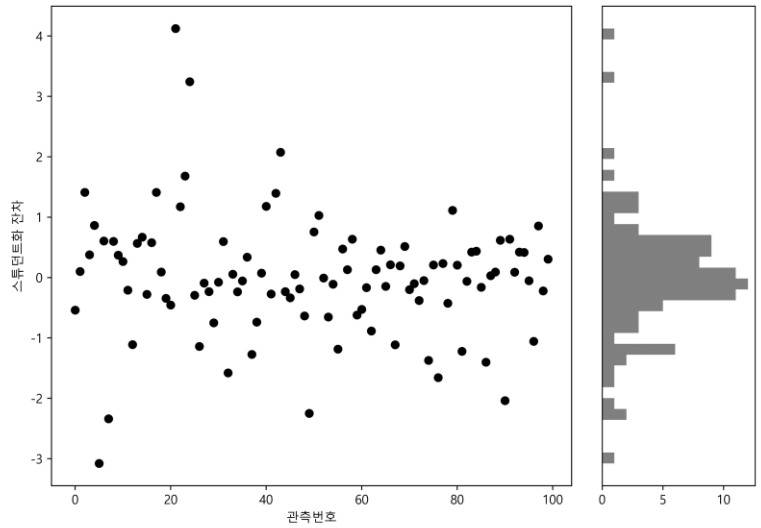
- 독립성에 대한 검증
- 관측 번호에 따른 오차들이 서로 독립: 어떠한 연관성도 없어야 함



회귀 분석

[잔차 분석]

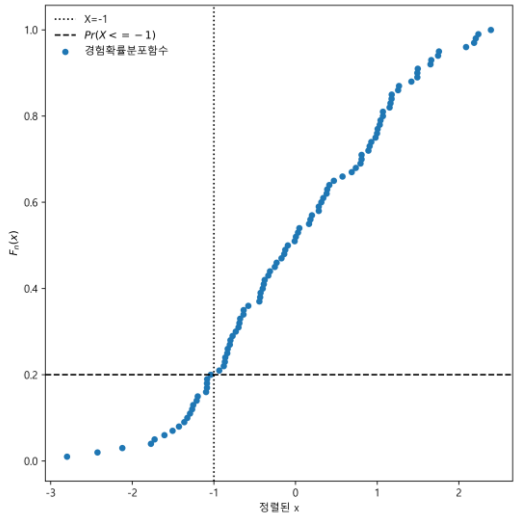
- 등분산성에 대한 검증
- 관측 번호에 따른 오차의 분산들이 일정



회귀 분석

[잔차 분석]

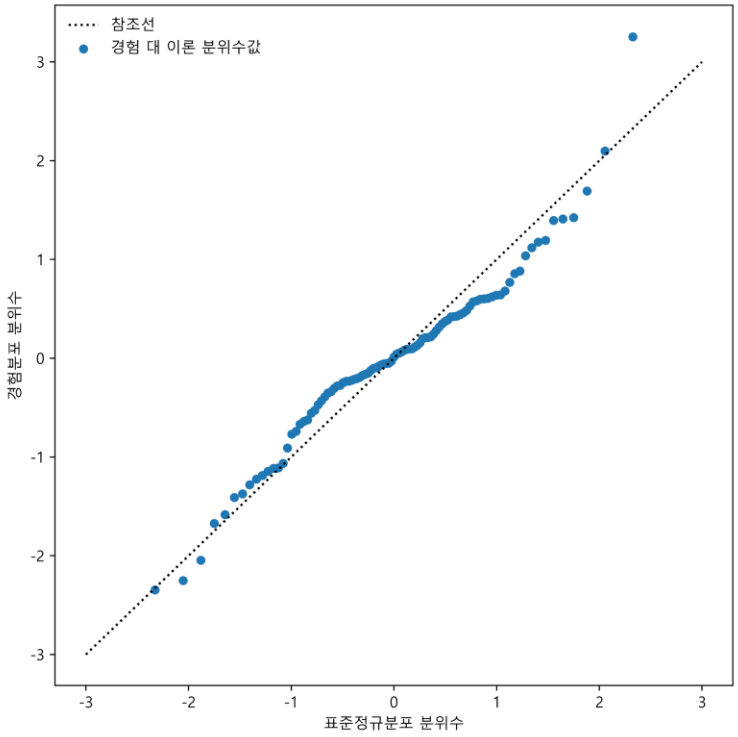
- 정규성에 대한 검증: 데이터의 건수가 많으면 그다지 문제가 안됨
- 경험 분포의 분포 함수 대 이론적 분포의 분포함수와의 비교
- $F_n(x) = \frac{x\text{보다 작은 데이터 개수}}{n} = \frac{1}{n}\sum_i 1_{x_i \le x}$



회귀 분석

[잔차 분석]

- 분위수-분위수 그림(QQ plot)



회귀 분석

[잔차 분석]

- 히스토그램