



12-1. 선형 회귀분석

chap12_1_LinearRegression 수업내용

1. 회귀분석 개요
2. 단순회귀분석
3. 다중회귀분석(다중공선성 문제)
4. 효과적인 변수 선택법
5. 기계학습



1. 회귀분석 개요

● 회귀분석(Regression Analysis)

- 특정 변수(독립변수)가 다른 변수(종속변수)에 어떠한 영향을 미치는가 (**인과관계 분석**)
- 예) 가격은 제품 만족도에 영향을 미치는가?
- 한 변수의 값으로 다른 변수의 값 예언

[참고] 인과관계(因果關係) : 변수A가 변수B의 값이 변하는 원인이 되는 관계(변수A : 독립변수, 변수B : 종속변수)

- ❖ 상관관계분석 : 변수 간의 관련성 분석
- ❖ 회귀분석 : 변수 간의 인과관계 분석



1. 회귀분석 개요

【회귀분석 중요사항】

- '통계분석의 **꽃**' → 가장 강력하고, 많이 이용
- 종속변수에 영향을 미치는 변수를 규명(변수 선형 관계 분석)
- 독립변수와 종속변수의 관련성 강도
- 독립변수의 변화에 따른 종속변수 변화 예측
- **회귀 방정식**($Y=a+\beta X \rightarrow Y$:종속변수, a :상수, β :회귀계수, X :독립변수)을 도출하여 회귀선 추정
- 독립변수와 종속변수가 모두 등간척도 또는 비율척도 구성

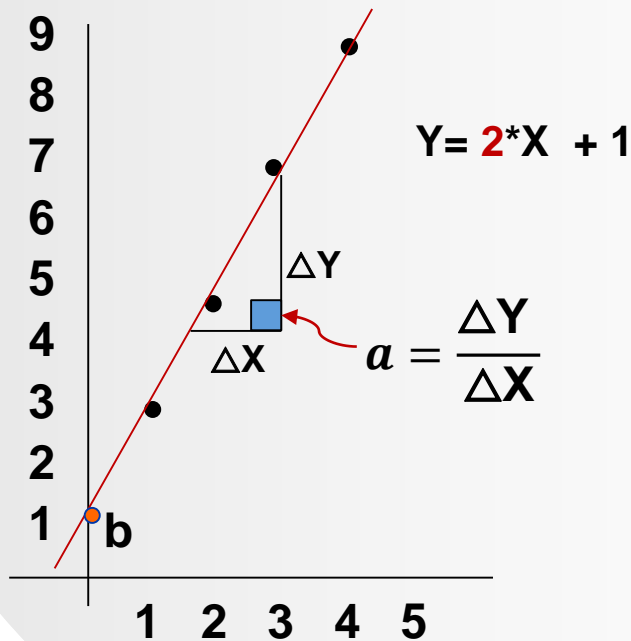


1. 회귀분석 개요

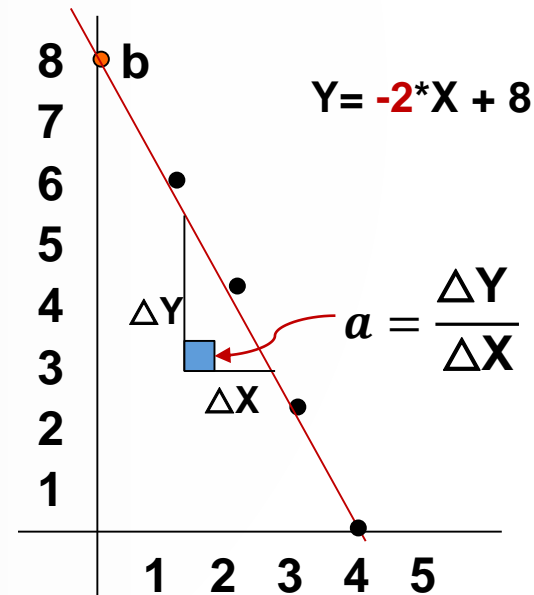
● 선형 회귀 방정식(1차 함수) : 회귀선 추정

$Y = a \cdot X + b$ (Y : 종속변수, a : 기울기, b : 절편, X : 독립변수)

양(+)의 관계



음(-)의 관계



회귀방정식에 의해서 x 가 10일 때 y 는 21 예측 -> 회귀분석은 **수치 예측**

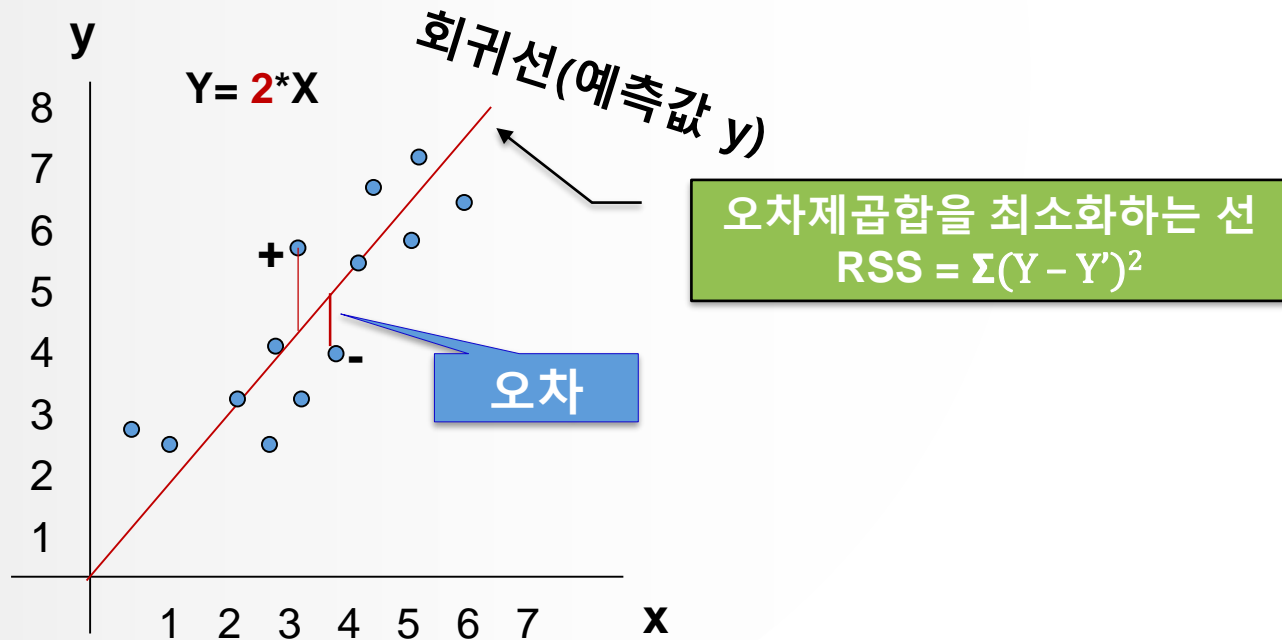


1. 회귀분석 개요

● 회귀선

회귀선 : 회귀방정식에 의해서 그려진 Y를 예측한 직선

최소제곱법 : 오차 제곱의 합이 최소가 되는 직선식을 구하는 방법
(모든 점의 정 중앙을 통과하는 직선)





1. 회귀분석 개요

【회귀분석의 기본 가정 충족】

- 선형성 : 독립변수와 종속변수가 선형적 이어야한다. 【회귀선 확인】
- 오차의 정규성 : 오차란 종속변수의 관측값과 예측값 간의 차이를 말하며, 오차의 기대값은 0이며, 정규분포를 이루어야한다. 【정규성 검정 확인】
- 오차의 독립성 : 오차들은 서로 독립적 이어야한다.【더빈-왓슨 값 확인 】
- 오차의 등분산성 : 오차들의 분산이 일정해야한다. 【표준잔차와 표준예측치 도표】
- 다중공선성 : 다중 회귀분석을 수행할 경우 3개 이상의 독립변수들 간의 강한 상관관계로 인한 문제가 발생되지 않아야 한다.【분산팽창요인(VIF) 확인】 ※ 회귀분석을 수행하기 위해서는 위와 같은 기본 가정이 충족되어야 분석이 가능하며, 이러한 기본 가정을 토대로 일반적인 회귀분석을 위한 절차는 다음과 같다.



2. 단순 회귀분석

● 단순 회귀분석

- 독립변수와 종속변수 각각 1개
- 독립변수가 종속변수에 미치는 인과관계 분석

【단순 회귀분석 가설】

음료수 제품의 당도와 가격수준을 결정하는 제품적질성(독립변수)은 제품만족도(종속변수)에 **정(+)**의 영향을 미칠 것이다.



2. 단순 회귀분석

단순회귀분석

형식) `lm(formula= y ~ x 변수, data)`

x:독립, y:종속, data=data.frame

`lm()` 함수 -> x변수를 대상으로 y변수 값 유추

`str(result)`

`y = result$만족도` # 종속변수

`x = result$적절성` # 독립변수

`result.lm <- lm(formula=y ~ x, data=result)`

단순선형회귀 분석 결과 보기

`summary(result.lm)`



2) 단순 회귀분석

summary(result.lm)

#Coefficients: 계수

```
#           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#(Intercept) 0.77886    0.12416   6.273 1.45e-09 ***
#x           0.73928    0.03823  19.340 < 2e-16 ***
```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

#Residual standard error: 0.5329 on 262 degrees of freedom

#Multiple R-squared: 0.5881, Adjusted R-squared: 0.5865

#F-statistic: 374 on 1 and 262 DF, p-value: < 2.2e-16

#####<회귀분석 결과 해석>#####

결정계수(Coefficients) : R-squared -> 0 ~ 1 사이의 값을 갖는다.

Multiple R-squared: 0.5881: 독립변수에 의해서 종속변수가 얼마만큼 설명되었는가?

설명력 -> 상관(결정)계수 : 58.8% 설명력

1에 가까울 수록 설명변수(독립변수)가 설명을 잘한다고 판단

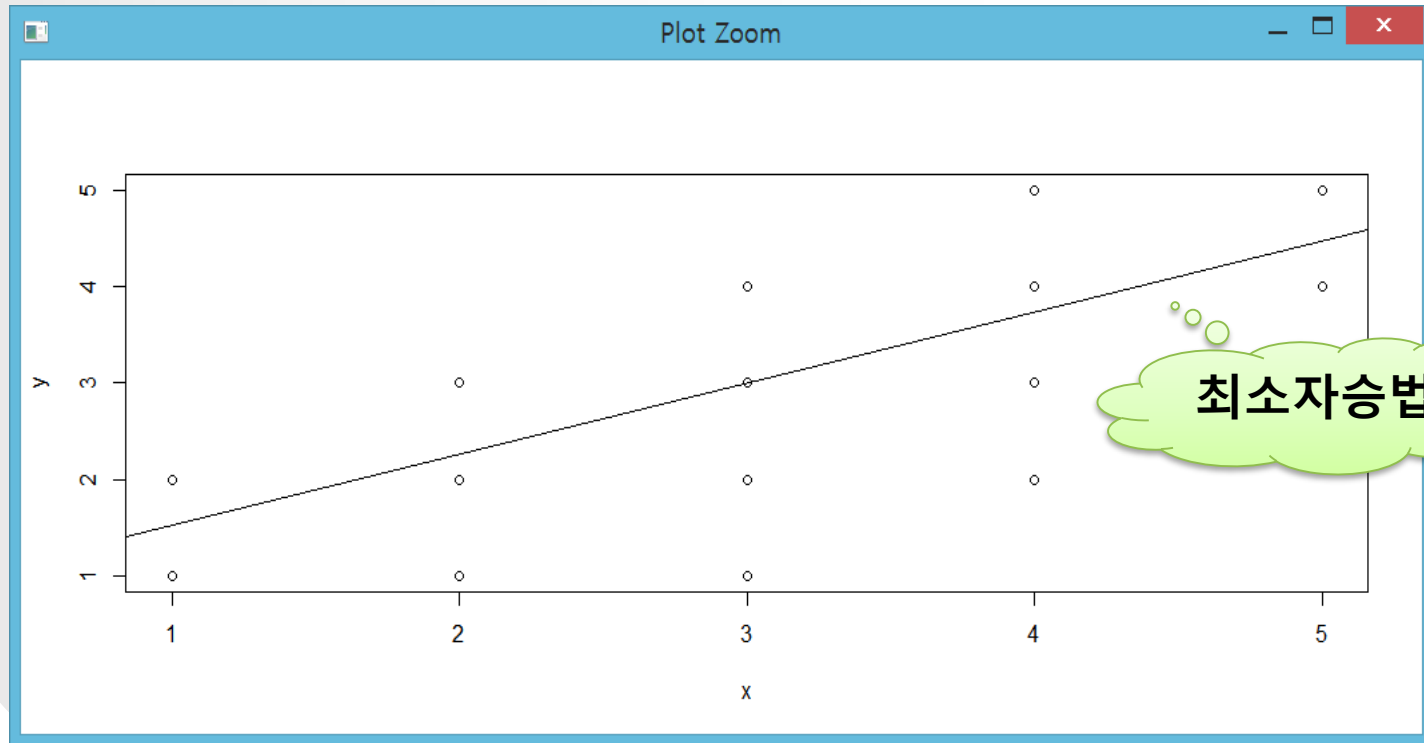
모형의 변수 선정이 우수하다는 의미.

Adjusted R-squared: 0.5865 : 조정된 R값(오차를 감안한 값)<- 이것으로 분석



2. 단순 회귀분석

- 회귀방정식에 의해서 회귀선 시각화
 - ✓ X,Y가 선형 관계를 나타냄





2. 단순 회귀분석

【논문에서 단순 회귀분석 결과 제시 방법】

종속변수	독립변수	표준오차 (Std.Error)	검정통계량(t)	유의확률 (p)
제품만족도	상수	0.124	6.273	1.45e-09 ***
	제품적절성	0.038	19.340	< 2e-16 ***
분석 통계량	Multiple R-squared: 0.5881, Adjusted R-squared: 0.5865 F - statistic: 374 on 1 and 262 DF, p-value: < 2.2e-16			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

분산분석 :
회귀모델 적합성
(유의확률 0.05이상
부적합)



2. 단순 회귀분석

【논문에서 단순 회귀분석 결과 제시 방법】

- ▶ 음료수 제품의 당도와 가격수준을 결정하는 제품 적절성은 제품 만족도에 정(正)의 영향을 미칠 것이라는 연구가설을 검정한 결과 **검정통계량 $t=19.340$, $p=0.05$** 미만으로 통계적 유의수준 하에서 영향을 미치는 것으로 나타났기 때문에 연구가설을 채택한다.
- ▶ 회귀모형은 **상관계수 $R=.767$** 로 두 변수 간에 다소 높은 상관관계를 나타내며, **$R^2=.587$** 로 제품 적절성 변수가 제품 만족도를 58.7% 설명하고 있다. 또한 회귀모형의 적합성은 $F=374.020$ (p-value : $< 2.2e-16$)으로 회귀선이 모형에 적합하다고 볼 수 있다.



2. 단순 회귀분석

【단순 회귀분석 결과 정리 및 기술】

▪ 가설 설정	연구가설(H_1) : 음료수 제품의 적절성은 제품 만족도에 정(正) 의 영향을 미친다.	
	귀무가설(H_0) : 음료수 제품의 적절성은 제품 만족도에 영향을 미치지 않는다.	
1. 회귀식 모델 적합성	1) 유의수준	$\alpha = 0.05$
	2) 검정통계량	$F = 374.020$
	3) 유의확률	P-value: $< 2.2e-16$
	4) 결과해석	유의수준 0.05에서 귀무가설이 기각되었다. 따라서 회귀선이 모델에 적합하다고 볼 수 있다.
2. 가설검정	1) 유의수준	$\alpha = 0.05$
	2) 검정통계량	$t = 19.340$
	3) 유의확률	$p = < 2.2e-16$
	4) 결과해석	유의수준 0.05에서 연구가설이 채택되었다. 따라서 제품 적절성이 높을 수록 제품 만족도가 높아지는 경향을 보이고 있다.



3. 다중 회귀분석

● 다중 회귀분석

- 여러 개 독립변수가 1개의 종속변수에 미치는 영향 분석

【다중 회귀분석 가설】

음료수 제품의 적절성과 친밀도가 높을 수록 제품 만족도(종속변수)도 높아질 것이다.



3. 다중 회귀분석

(1) 적절성 + 친밀도 -> 만족도

```
y <- result$만족도 # 종속변수
```

```
x1 <- result$적절성 # 독립변수
```

```
x2 <- result$친밀도 # 독립변수
```

```
result.lm <- lm(formula= y ~ x1 + x2, data=result)
```

```
summary(result.lm)
```



3. 다중 회귀분석

(2) 학습데이터와 검증데이터 분석

단계1 : 7:3비율 데이터 샘플링

```
t <- sample(1:nrow(result), 0.7*nrow(result))
```

단계2 : 학습데이터와 검정데이터 생성

```
train <- result[t, ] # result중 70%
```

train # 학습데이터

```
test <- result[-t, ] # result중 나머지 30%
```

test # 검정 데이터

단계3 : 데이터 분석

```
result.lm <- lm(formula=만족도 ~ 적절성 + 친밀도, data=train)
```

```
summary(result.lm) # 학습데이터 분석
```

```
result.lm <- lm(formula=만족도 ~ 적절성 + 친밀도, data=test)
```

```
summary(result.lm) # 검정데이터 분석
```




3. 다중 회귀분석

3) 다중공선성(Multicollinearity) 문제

- 독립변수 간의 강한 상관관계로 인해서 회귀분석의 결과를 신뢰할 수 없는 현상
- 생년월일과 나이를 독립변수로 갖는 경우
- 해결방안 : 강한 상관관계를 갖는 독립변수 제거

(1) 다중공선성 문제 확인

```
install.packages("car")
```

```
library(car)
```

```
fit <- lm(formula=Sepal.Length ~ Sepal.Width+Petal.Length+Petal.Width,  
          data=train)
```

```
vif(fit)
```

```
sqrt(vif(fit))>2 # root(VIF)가 2 이상인 것은 다중공선성 문제 의심
```



3. 다중 회귀분석

(2) iris 변수 간의 상관계수 구하기(단, Species제외)

```
cor(iris[,-5])
```

(3) 학습데이터와 검정데이터 분류

```
x <- sample(1:nrow(iris), 0.7*nrow(iris)) # 전체 70% 추출
```

```
train <- iris[x, ]
```

```
test <- iris[-x, ]
```

(4) Petal.Width 변수를 제거한 후 회귀분석

```
result.lm <- lm(formula=Sepal.Length ~ Sepal.Width+Petal.Length,  
data=train)
```

```
result.lm <- lm(formula=Sepal.Length ~ Sepal.Width+Petal.Length,  
data=test)
```

```
result.lm
```

```
summary(result.lm)
```



3. 다중 회귀분석

【논문에서 다중 회귀분석 결과 제시 방법】

종속변수	독립변수	표준오차 (Std.Error)	검정통계량(t)	유의확률 (p)
제품만족도	상수	0.130	5.096	6.65e-07 ***
	제품적절성	0.044	15.684	< 2e-16 ***
	제품친밀성	0.039	2.478	0.0138 *
분석 통계량	Multiple R-squared: 0.5975, Adjusted R-squared: 0.5945 F-statistic: 193.8 on 2 and 261 DF, p-value: < 2.2e-16			

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1



3. 다중 회귀분석

【논문에서 다중 회귀분석 결과 제시 방법】

- 연구가설1(H1) : '음료수 제품의 적절성은 제품 만족도에 정(正)의 영향을 미친다.'와 연구가설2(H1) : '음료수 제품의 친밀도는 제품 만족도에 정(正)의 영향을 미친다.'를 분석을 위해서 다중 회귀분석을 실시하였다. 분석 결과를 살펴보면 제품 적절성이 제품 만족도에 미치는 영향은 $t=15.684, p < 2e-16$ 으로 유의수준 하에서 연구가설1이 채택되었으며, 제품 친밀도가 제품 만족도에 미치는 영향은 $t=2.478, p=0.0138$ 로 유의수준하에서 연구가설2가 채택되었다.
- 회귀모형은 상관계수 $R=.0.702$ 으로 독립변수와 종속변수 간에 다소 높은 상관관계를 나타내며, $R^2=.594$ 로 독립변수가 종속변수를 59.4% 설명하고 있다. 회귀모형의 적합성은 $F=374.020(p\text{-value} : < 2.2e-16)$ 으로 나타나서 모형이 적합하다고 볼 수 있다.



3. 다중 회귀분석

【다중 회귀분석 결과 정리 및 기술】

▪ 가설 설정	연구가설1(H ₁) : 음료수 제품의 <u>적절성</u> 은 <u>제품 만족도</u> 에 정(正) 의 영향을 미친다.	
	연구가설2(H ₁) : 음료수 제품의 <u>친밀도</u> 는 <u>제품 만족도</u> 에 정(正) 의 영향을 미친다.	
1. 회귀식 모델 적합성	1) 유의수준	$\alpha = 0.05$
	2) 검정통계량	$F = 193.8$
	3) 유의확률	$P = < 2.2e-16$
	4) 결과해석	유의수준 0.05에서 귀무가설이 기각되었다. 따라서 회귀선이 모델에 적합하다고 볼 수 있다.
2. 가설검정	1) 유의수준	$\alpha = 0.05$
	2) 검정통계량	제품적절성(t=15.684), 제품친밀도(t=2.478)
	3) 유의확률	제품적절성(p < 2e-16), 제품친밀도(p=0.014)
	4) 결과해석	유의수준 0.05에서 연구가설이 채택되었다. 따라서 제품 적절성과 제품 친밀도가 높을 수록 제품 만족도가 높아지는 경향을 보이고 있다.



4. 효과적인 변수 선택법

1. 유효하지 않은 x 변수 제거

- ✓ 선형회귀분석에서 x변수의 유의성 검정 확인

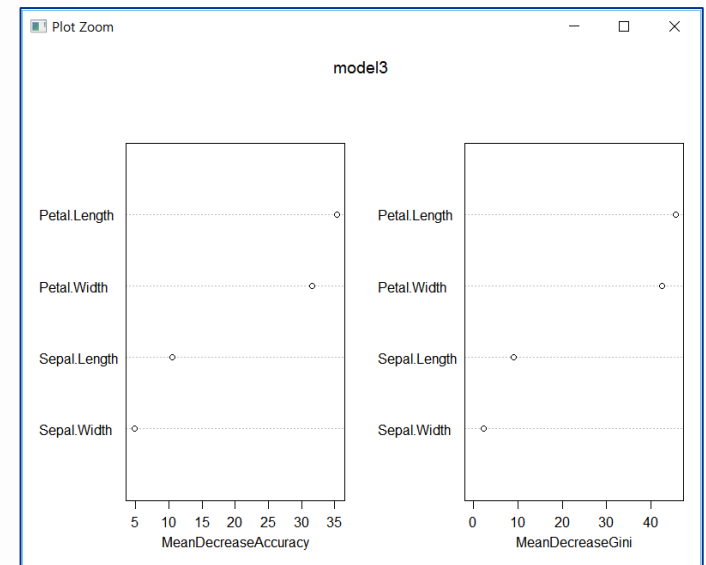
2. 변수 선택법 이용

- ✓ Stepwise : 전진선택법, 후진제거법, 단계선택법

3. 중요변수 제공 분류 알고리즘

- ✓ Random Forest : .장버전

```
from xgboost import  
XGBClassifier  
from xgboost import  
plot_importance
```





5. 기계학습

- Linear Regression model

- 연속형(0~100) : Liner regression

- 공부시간과 점수 관계

hours	score
10	90
9	80
5	50
3	30

Training data set

학습

Model

$x=7$

$50 < y < 80$

바둑 기보(16만)

learnin
g

알파고



이세돌



알파고



5. 기계학습

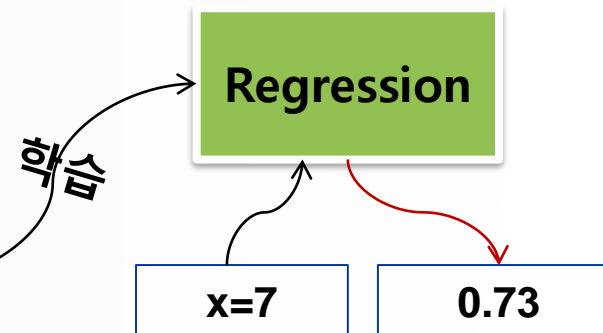
- Logistic regression(classification)

- 범주형(pass or fail) : Logistic regression

- 합격/불합격 분류

hours	score
10	pass
9	pass
5	fail
3	fail

Training data set





5. 기계학습

1. 홀드아웃 방식

- ✓ 7:3 또는 8:2 비율로 분류한 후 Training set으로 학습
- ✓ Test set으로 model 평가



2. 교차검증

- ✓ n개 균등 분할 후 Train과 Test set을 번갈아 가면서 model을 학습하고 평가하는 방식

	A	B	C	D	E
Cross Validation Iteration 1	Test	Train	Train	Train	Train
Cross Validation Iteration 2	Train	Test	Train	Train	Train
Cross Validation Iteration 3	Train	Train	Test	Train	Train
Cross Validation Iteration 4	Train	Train	Train	Test	Train
Cross Validation Iteration 5	Train	Train	Train	Train	Test