

---

# MODELIZACIÓN DE UNA COLA M/M/1

---

**Randisi Lucas**

Legajo: 45479

Universidad Tecnológica Nacional Rosario

**Aguirre Gabriel**

Legajo:

Universidad Tecnológica Nacional Rosario

July 9, 2020

## ABSTRACT

En el presente trabajo se procederá a realizar la simulación de un sistema de cola tipo M/M/1 mediante el uso del lenguaje de programación python y la herramienta de simulación Anylogic. Durante el mismo se recabará la variación de las distintas medidas de rendimiento del sistema ante alteraciones de los parámetros que constituyen al modelo y se procederá a compararlos con los valores teóricos esperados.

## 1 Introducción

El uso de computadoras para la simulación de varios tipos de procesos que se dan en el mundo real viene ganando cada vez una mayor popularidad debido a la posibilidad de plantear y comparar distintos escenarios sin costo o riesgo alguno. El proceso de interés es usualmente llamado *sistema* y para su estudio es necesario el planteo de una serie de supuestos acerca de su funcionamiento. Estas consideraciones suelen plantearse en forma matemática y son lo que constituyen el *modelo*. Si las relaciones que componen el modelo son lo suficientemente simples, puede resultar posible el uso de métodos matemáticos como álgebra, cálculo o teoría de probabilidad para obtener la información que nos interesa. Sin embargo, la mayoría de los sistemas que tienen origen en el mundo real son demasiado complicados para ser analizados de forma analítica y deberán ser estudiados mediante la simulación. En estos casos, una computadora realiza una evaluación numérica y recolecta los datos necesarios para estimar las características del modelo.

## 2 Marco Teórico

El estudio de un determinado tipo de sistema necesita de la recolección de variables apuntadas al objeto de estudio que definen lo que se conoce como *estado* del sistema. Las mismas pueden ser *discretas*, si su cambio se produce de forma instantánea de un valor a otro, o bien *continuas* si su variación es acorde al tiempo.

La simulación de un modelo puede ser *estático* si se trata de la representación del sistema en un momento en particular, o bien *dinámico* si presenta una evolución conforme transcurre el tiempo.

Por última clasificación, si el modelo de simulación no posee ningún componente probabilístico, es decir que ante una misma entrada la salida no se alterará, se dice que se trata de un modelo *determinístico*. En cambio, de haber dicho factor de aleatoriedad, recibe el nombre de *estocástico*.

La simulación del sistema de colas a presentar se distingue como *discreto*, *dinámico* y *estocástico*.

En cuanto al avance del tiempo respecta, existen 2 alternativas: la primera consiste en avanzar el reloj en un incremento fijo del tiempo y la segunda a la posición indicada por el evento más próximo. En este trabajo procederemos con esta última donde tras realizar el adelanto, se actualiza el estado del sistema y se calculan los eventos futuros. El proceso se repite indefinidamente hasta la satisfacción de condición preestablecida que merca el final.

Como bien dijimos, la variación de las variables que constituyen el modelo se producen de forma instantánea en determinados momentos. Dichos puntos en el tiempo se los define como *eventos* y pueden producir la alteración del estado del sistema.

### 3 Modelo de un sistema de colas M/M/1

El modelo de colas puede ser ejemplificado como la atención de clientes en un supermercado donde es de interés conocer el tiempo promedio de espera en cola. En el caso de que el cajero se encuentre libre, el cliente pasa a ser atendido de forma inmediata, de lo contrario se posiciona en la última posición de la cola. Una vez atendido, el cajero demora cierto tiempo en atender al mismo y al finalizar este se retira del sistema. A continuación, de existir cola, el siguiente cliente pasa a ser atendido o de no haber el cajero (o en forma general el servidor) se vuelve inactivo.

#### 3.1 Formalización de variables

Las variables que se utilizarán para especificar el estado del servidor en todo momento son las siguientes:

- $t_i$  : el tiempo de arribo del cliente  $i$
- $A_i = t_i - t_{i-1}$ : tiempo entre los arribos del cliente  $(i - 1)$  y el  $i$
- $S_i$ : tiempo que el server demora atendiendo al cliente  $i$
- $D_i$ : tiempo de espera en cola del cliente  $i$
- $c_i = t_i + D_i + S_i$  : tiempo en el reloj en el que el cliente  $i$  se retira del sistema
- $e_i$  : tiempo de ocurrencia del evento  $i$

Donde tanto como los tiempos entre arribos  $A_i$  y el de atención  $S_i$  son determinados a partir de un generador de números con distribución exponencial

#### 3.2 Flujo del programa

El programa de simulación se encuentra dividido en distintas subrutinas:

- *Initialization routine*: subprograma cuya función es la de inicializar todos las variables del modelo al comienzo de la simulación.
- *Timing routine*: subprograma que determina el siguiente evento a partir de la lista de eventos y avanza el reloj de la simulación al momento del mismo
- *Event routine*: subprograma que actualiza el estado del servidor cuando ocurre un tipo particular de evento
- *Report generator*: subprograma que a partir de los contadores estadísticos se encarga de generar la estimación de las medidas de rendimiento.
- *Main program*: subprograma encargado de invocar el timing routine para determinar el siguiente evento y luego transferir el control a la event routine correspondiente. Luego se encarga de verificar si se ha cumplido la condición de finalización, y de ser así invoca al report generator.

La simulación comienza con el reloj en 0 donde el *Main program* se encarga de llamar la *Initialization Routine* para asignar los valores correspondientes los contadores estadísticos. Vuelto el control al programa principal, éste llama a la *Timing routine* que le informará a partir de la lista de eventos cuál es el más próximo. A partir de su conocimiento, encargará al *Event routine* correspondiente realizar los cambios de estados que correspondan y tras finalizar, el *Main program* verificará la condición de finalización. De verificarse, llamará al *Report generator* para dar como finalizada la simulación y visualizar los datos obtenidos, o de lo contrario, repetirá el ciclo *Timing routine*, *Event routine* hasta que lo haga.

#### 3.3 Medidas de rendimiento

Para medir el rendimiento del sistema, estimaremos tres cantidades. Primero el tiempo esperado promedio en cola de  $n$  clientes y lo denotaremos como  $d^1(n)$ . Es necesario hacer remarcar el uso de la palabra esperado debido a que el resultado obtenido puede variar de una simulación a otra a causa de los distintos tiempos entre arribos y de servicio que se generen.

$$d^1(n) = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$

El segundo estimador se trata del número promedio esperado de clientes en cola a lo largo del tiempo en atender  $n$  clientes y queda denotado como  $q^1(n)$ . A diferencia del anterior, este es tomado sobre la variable continua del tiempo y

no discreta como en el caso anterior de los clientes. En base a esto, si definimos como  $Q(t)$  al número de clientes en el tiempo  $t$ , y a  $T(n)$  al tiempo en atender a  $n$  clientes, podemos plantear nuestro estimador como una integral resultando:

$$q^1(n) = \frac{\int_0^{T(n)} Q(t) dt}{T(n)}$$

Nuestro tercer y último medidor de desempeño nos estima el nivel de uso del servidor entre el tiempo 0 y  $T(n)$ . Nuevamente al situarnos sobre una variable continua, resulta de mayor facilidad plantearlo como la integral de una función  $B(t)$  que adopta valores 1 o 0 dependiendo si el servidor está en uso o inactivo.

$$u^1(n) = \frac{\int_0^{T(n)} B(t) dt}{T(n)}$$

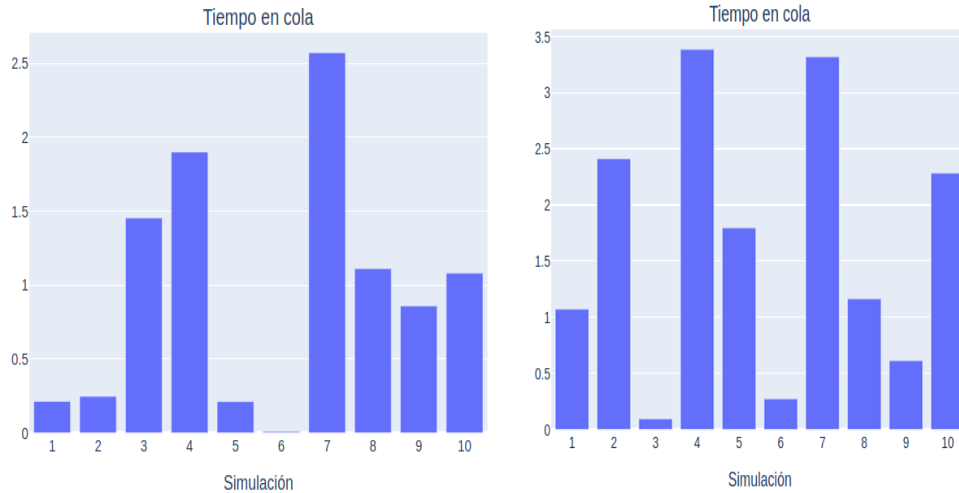
## 4 Simulaciones

A la hora de realizar la simulación, recolectamos un conjunto de medidas de desempeño del sistema tras variar la media de tiempos entre arribos y partidas. Tales parámetros se establecieron para el primer caso una relación 1:1, mientras que para el segundo 1:4. A su vez, cada caso cuenta con un total de 10 simulaciones para hacer énfasis en que nos encontramos trabajando con un estimador, es decir una variable aleatoria.

### 4.1 Tiempo promedio en cola

Para realizar el cálculo del tiempo en cola, es necesario obtener la suma de demoras de cada cliente hasta que fue atendido. Para esto, debemos mantener un contador dentro del *departure event* donde en caso de que exista una cola, calcular la diferencia entre el tiempo actual y el del cliente a punto de ser atendido. Una vez obtenida la sumatoria, dividimos por el total de clientes atendidos.

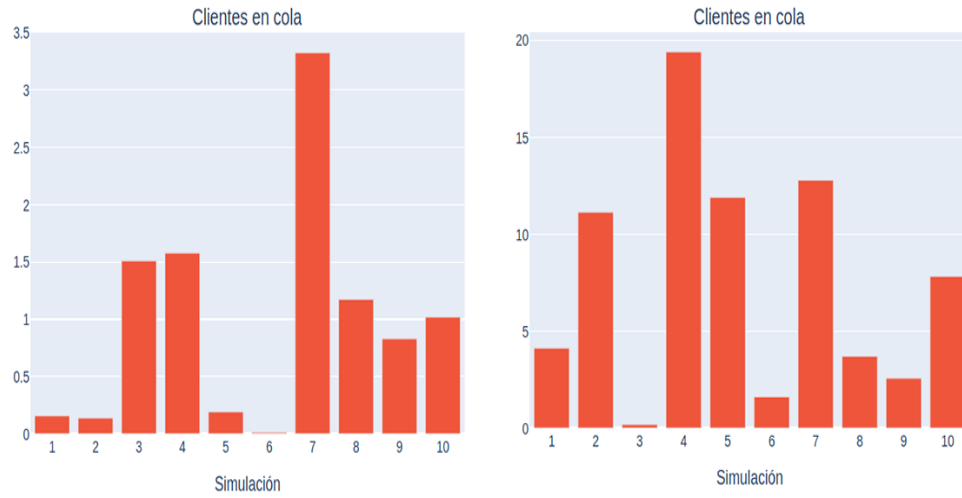
Figure 1: Tiempo promedio en cola



### 4.2 Clientes promedio en cola

Como explicamos previamente, al tratarse de una variable aleatoria continua, la misma es tratada en forma teórica como la integral del número de clientes a lo largo del tiempo de la simulación. De forma equivalente, aquí nos limitamos a multiplicar la diferencia entre el tiempo actual y el del último evento por el número de clientes en cola en cada evento. Tras sumar el total de los mismos, los dividimos por el tiempo de simulación y obtenemos el promedio esperado.

Figure 2: Clientes promedio en cola



### 4.3 Uso del servidor

Una medida de desempeño de gran utilidad es la del uso del servidor, ya que nos permite conocer si nos encontramos con un exceso de servidores. En forma similar al caso anterior, nos valemos de almacenar tiempo desde el último evento y multiplicamos la diferencia entre el tiempo actual y éste por un valor que indique si el servidor se encuentra en uso. Nuevamente, tras obtener la sumatoria total, dividimos por el tiempo de simulación.

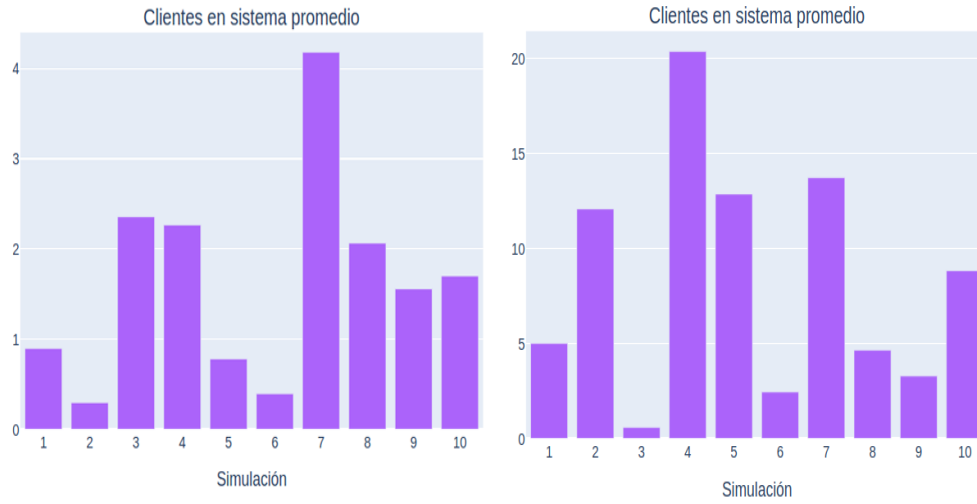
Figure 3: Uso promedio del servidor



### 4.4 Clientes promedio en el sistema

Contabilizando los clientes que ingresan en cada arribo y descontando los mismos cuando se retiran del sistema, este valor nos permite tomar una dimensión de los clientes en promedio que se encuentran tanto siendo atendidos como en espera. Es necesario remarcar el hecho de que este valor se divide por el total de clientes atendidos tras finalizar la simulación, es decir la condición de finalización. Por ende, podemos observar un número bastante elevado ya que muchos habrán ingresado pero no habrán sido atendidos.

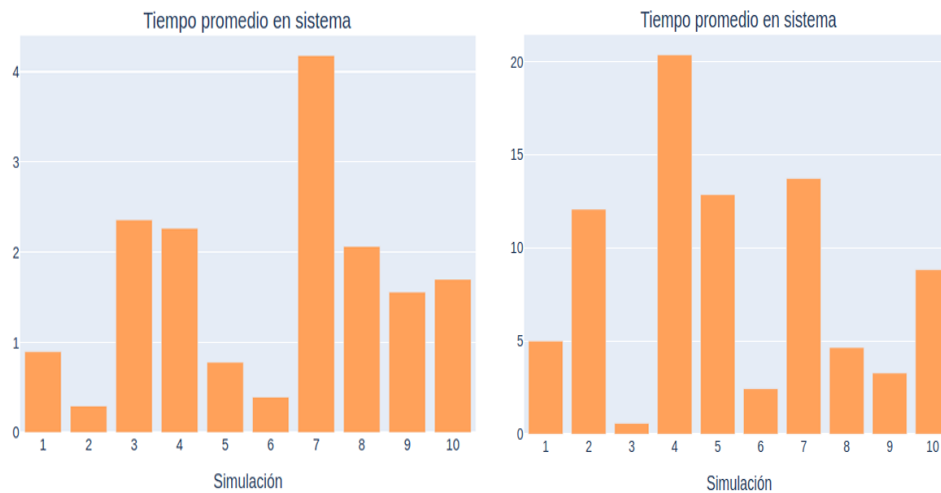
Figure 4: Clientes promedio en el sistema



#### 4.5 Tiempo promedio en el sistema

Consideramos importante esta medida de desempeño ya que engloba tanto el tiempo en servicio como en espera de atención. En este caso, a diferencia del anterior, consideramos el tiempo de espera de cada uno de los clientes que fueron estrictamente atendidos y no que hayan quedado en cola tras finalizar la simulación.

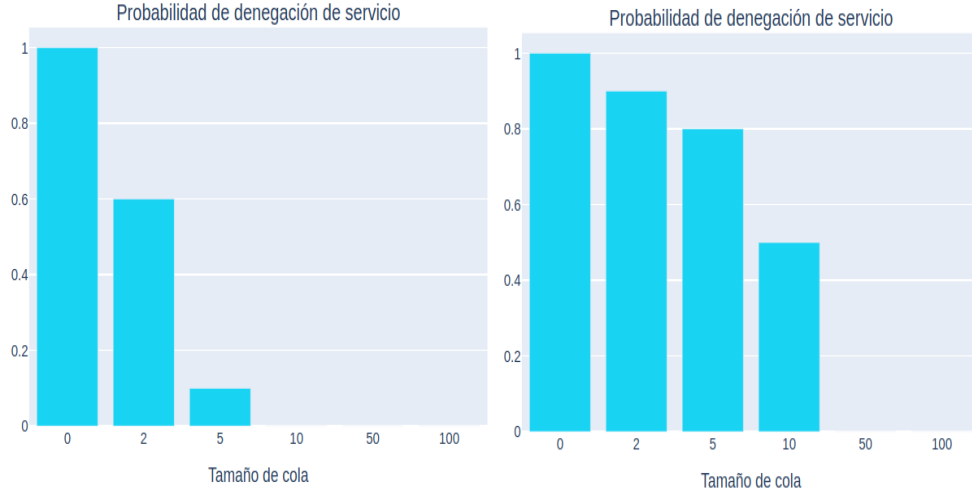
Figure 5: Tiempo promedio en el sistema



#### 4.6 Probabilidad de denegación de servicio

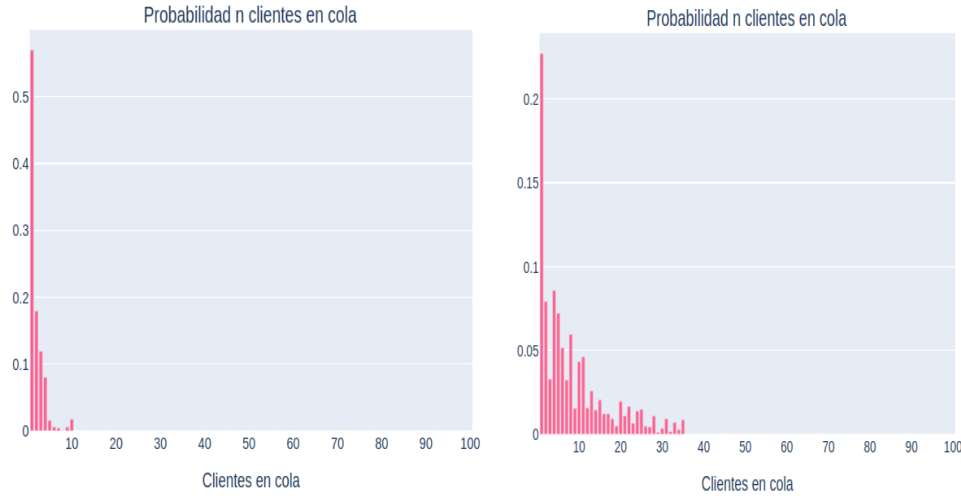
Para el cálculo del mismo, consideramos en principio un valor máximo de cola y lo comparamos con el total alcanzado en cada simulación. La proporción de simulaciones cuya cola excedió el primero, tiende a la probabilidad de denegación de servicio.

Figure 6: Probabilidad promedio de denegación de servicio



#### 4.7 Probabilidad de $n$ clientes en cola

Para cada simulación que no haya sido interrumpida por alcanzar el máximo número de clientes permitidos, contabilizamos el tiempo total en que hayan habido exactamente  $n$  clientes esperando a ser atendidos. Dicha proporción podemos interpretarla como la probabilidad de que se encuentren  $n$  clientes en cola. Por último, dividimos cada uno de estos valores por el total de simulaciones para obtener un valor promedio esperado más acertado.

Figure 7: Probabilidad promedio de  $n$  clientes en cola

#### 4.8 Valores teóricos

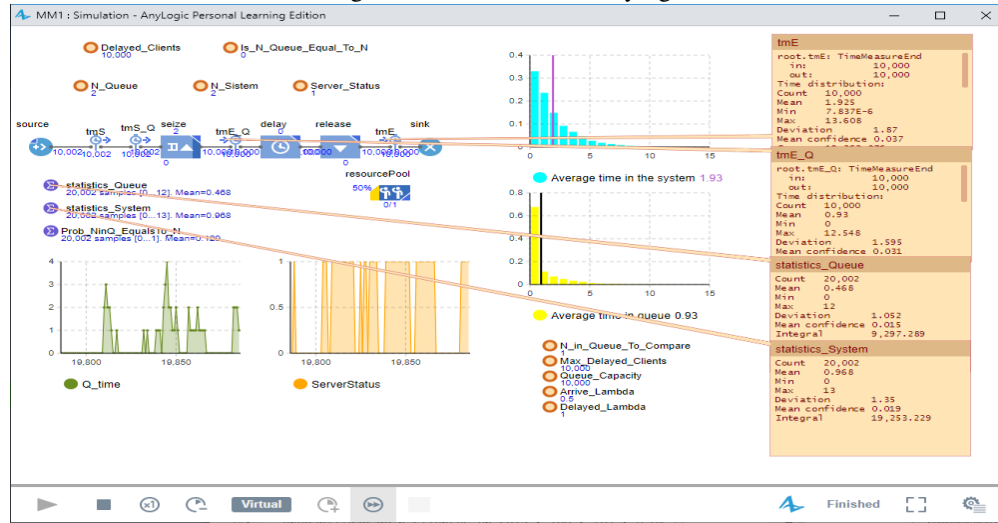
Para calcular el valor teórico y así compararlo con el obtenido mediante simulaciones usaremos las siguientes formulas:

- $\lambda$ : tasa de arribo
- $\mu$ : tasa de partidas
- Promedio de clientes en el sistema:  $\frac{\rho}{1-\rho}$
- Promedio de clientes en cola:  $\frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Tiempo promedio en el sistema:  $\frac{1}{\mu*(1-\rho)}$



Tasa de arribo = 0.50 de la tasa de servicio

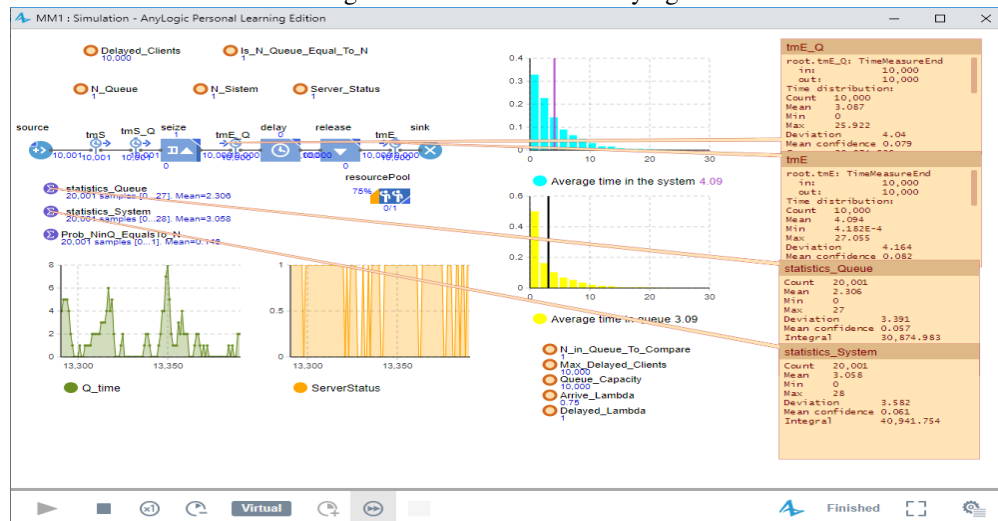
Figure 9: Simulacion en Anylogic



Medidas de Rendimiento	valor teórico	Valor Anylogic
Promedio de clientes en el sistema	1	0.968
Promedio de clientes en cola.	0.5	0.468
Tiempo promedio en sistema	2	1.925
Tiempo promedio en cola	1	0.93
Utilización del servidor	50%	50%

Tasa de arribo = 0.75 de la tasa de servicio

Figure 10: Simulacion en Anylogic

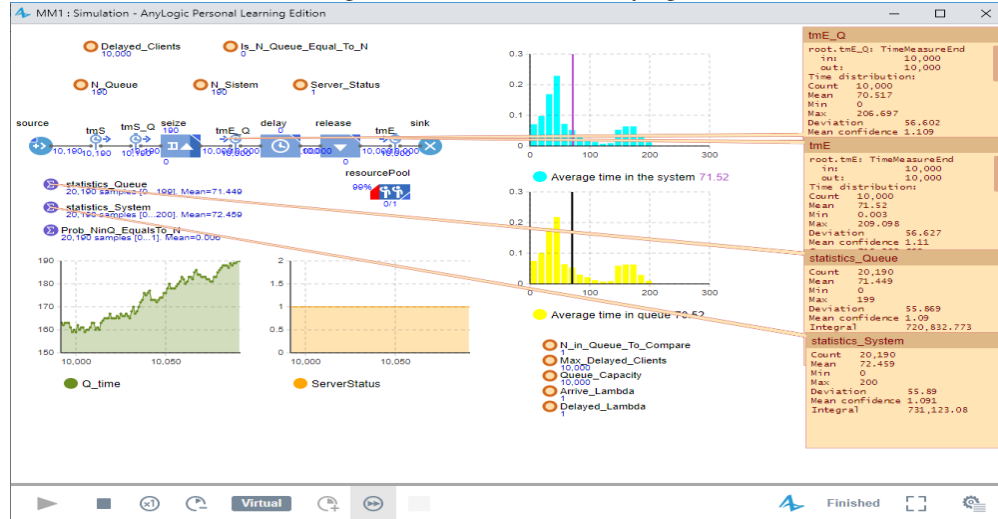




Medidas de Rendimiento	valor teórico	Valor Anylogic
Promedio de clientes en el sistema	3	3.058
Promedio de clientes en cola.	2.25	2.306
Tiempo promedio en sistema	4	4.94
Tiempo promedio en cola	3	3.087
Utilización del servidor	75%	75%

Tasa de arribo = tasa de servicio

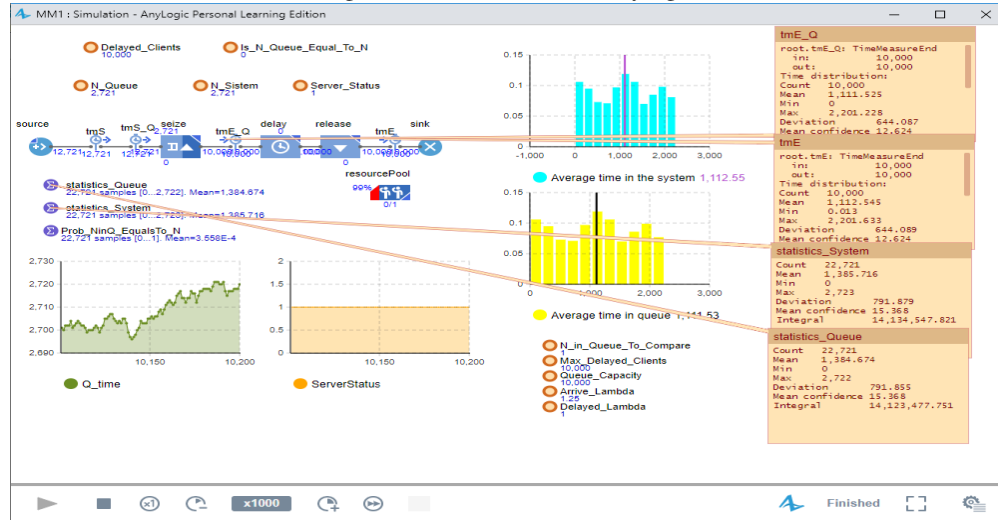
Figure 11: Simulacion en Anylogic



Medidas de Rendimiento	valor teórico	Valor Anylogic
Promedio de clientes en el sistema	-	72.489
Promedio de clientes en cola.	-	71.449
Tiempo promedio en sistema	-	71.52
Tiempo promedio en cola	-	70.519
Utilización del servidor	-	99%

Tasa de arribo = 1.25 de la tasa de servicio

Figure 12: Simulacion en Anylogic



Medidas de Rendimiento	valor teórico	Valor Aylogic
Promedio de clientes en el sistema	-	1384
Promedio de clientes en cola.	-	1383
Tiempo promedio en sistema	-	1112
Tiempo promedio en cola	-	1111
Utilización del servidor	-	99%

Como vemos en las comparaciones, cuando  $\lambda < \mu$  los valores son casi idénticos a los teóricos, sin embargo en los últimos dos casos no se puede calcular de forma teórica las medidas de rendimiento, no obstante podemos obtenerlo mediante simulaciones ya que anteriormente fueron bastante aproximados. Los resultados cambian bastante entre cada corrida de la simulación, por lo que en este caso no tienden a estabilizarse en algún número a medida que pasa el tiempo, sino que dependen más del número máximo de clientes y del azar en sí. Por lo tanto, los números obtenidos solo se podrán tomar como estimaciones que podrían discrepar bastante con la realidad.

## 5 Conclusión

Podemos observar la gran cantidad de simulaciones que hemos podido realizar durante el trabajo gracias a la velocidad de procesamiento que nos proveen las computadoras en la actualidad. Las mismas generan un entorno libre de riesgos y costos, lo cual nos permitió generar diferentes comparativas. El tamaño de cola máxima jugó un papel muy importante a lo largo de las mismas debido a que la interrupción del servicio es el peor de los escenarios en los que podemos encontrar. La misma no solo debe ser acorde a la cantidad de clientes que se desean ser atendidos, sino también teniendo en consideración que la diferencia entre parámetros de tiempos entre arribos y partidas provoca la acumulación de clientes en espera.