SIMULACIÓN DE UN SISTEMA MM1

Juan Cruz Lombardo Bonino
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
Rosario, Argentina
juanbonino97@gmail.com

Joaquin Suarez
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
Rosario, Argentina
joaquin8123@gmail.com

German Birchner
Ingeniería en Sistemas de Información
Universidad Tecnológica Nacional
Rosario, Argentina
birchnerg@gmail.com

July 29, 2020

ABSTRACT

En este trabajo práctico tiene como objeto de estudio la simulación de un sistema MM1 en lenguaje Python e implementación en el software Anylogic para luego comparar los resultados obtenidos con los valores teóricos esperados y concluir acerca de la simulación realizada.

1 Introducción

Para estudiar un modelo, si es suficientemente simple, es posible usar modelos matemáticos (álgebra, cálculo o la teoría de la probabilidad) para obtener la información exacta de objetos de interés; a esto se le llama solución analítica. Sin embargo, la mayoría de los sistemas del mundo real son muy complejos para permitir que los modelos reales sean evaluados analíticamente. Estos modelos son, entonces, estudiados por medios de simulación. En una simulación usamos una computadora para evaluar un modelo numéricamente, y la información obtenida de la simulación nos permite estimar las verdaderas características deseadas del modelo. Es por ello que hablaremos un poco sobre lo que es un modelo, y las distintas formas de simulación para entender mejor el trabajo que realizaremos.

1.1 Modelos de simulación

El modelado de una simulación es una disciplina que trata de explicar cómo funciona algo construyendo una réplica de ese algo.

Una de los principales beneficios del enfoque de simulación es que podemos simular nuestros modelos cuantas veces lo creamos necesario. Las salidas de nuestros experimentos nos muestran un montón de posibilidades. Esto es extremadamente útil para tomar decisiones en la práctica. Estos experimentos virtuales y libres de riesgo también nos pueden ayudar a evaluar las ventajas y desventajas de uno o varios escenarios. Existen varios tipos y categorías de los modelos de simulación.

1.1.1 Físicos vs Digitales

La réplica que representa cómo funciona algo, puede ser físico o digital, es decir, dentro de una computadora. Un buen ejemplo de una réplica física es el testeo de la aerodinámica de un auto, que en vez de examinarlo en su escala real, se usa un modelo más pequeño para montarlo en un túnel con viento y probar así sus características aerodinámicas.

En cambio, un modelo digital rara vez usa alguna componente física. Es un programa computarizado que crea una réplica virtual del comportamiento de un objeto.

1.1.2 Estáticos vs Dinámicos

Podemos crear un modelo que use o ignore el tiempo. El modelo de una simulación estática no utiliza el tiempo, sino que primero realiza todos los cálculos y tareas y luego retorna la salida. En cambio un modelo dinámico sí se basa en el tiempo.

1.1.3 Determinista vs Estocástico

Si la simulación tiene siempre los mismos resultados frente a condiciones idénticas, se dice que el modelo es determinista. Pero si se comporta diferente con condiciones idénticas, se llama estocástico (o random).

1.1.4 Continuo vs Discreto

Podemos categorizar las simulaciones dinámicas en discretas o continuas depende de como incorporemos los efectos del tiempo en el modelo.

La simulación discreta los cambios ocurren sólo en tiempos específicos o en intervalos. Podemos decir que se trata de un sistema de eventos discretos. El concepto de sistema de evento discreto tiene por finalidad identificar a sistemas en los que los eventos que cambian el estado del mismo ocurren en instantes espaciados en el tiempo

En cambio, la simulación continua trabaja con eventos continuos, quiere decir que es una acción constante en el sistema ligada al reloj simulador que presenta eventos continuos por lo cual las variables cambian ininterrumpidamente con respecto al tiempo.

2 Marco teórico y conceptual

2.1 Modelo de colas poissonianos

Existen varios modelos de simulación pero en este experimento nos centraremos en los modelos de cola poissonianos, más especificamente los modelos con un sólo servidor denominados MM1. A continuación haremos una breve introducción de estos modelos para entender mejor el experimento que vamos a realizar.

Las colas poissonianas (o exponenciales o markovianas) son modelos del tipo M/M, con llegadas de Poisson y servicio exponencial, que son las más estudiadas analíticamente. Las llegadas de clientes y su servicio demandado son completamente aleatorios en el sentido de que la evolución del sistema depende sólo de su estado actual, y no de su pasado. Los procesos de nacimiento y muerte introducidos sirven para describir muchos modelos de colas. Asociaremos el término nacimiento con la llegada de un cliente al sistema y el término muerte con la salida de un cliente del sistema después de completado su servicio. El número de clientes en el sistema en el instante t, $N(t)$, indica el estado del mismo.

2.1.1 Modelo de colas poissonianos con un servidor MM1

En este modelo se dispone de un sólo servidor, capacidad infinita y la disciplina de la cola es FIFO (*First in first out*). Se trata de un proceso de nacimiento y muerte con tasa de nacimiento $_n =, n \geq 0$ y tasa de muerte $\mu_n = \mu, n \geq 0$

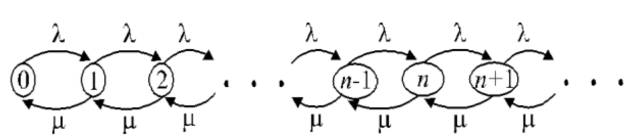

Figure 1: Diagrama de transición de modelo de cola MM1

En la siguiente tabla mostraremos las fórmulas de las medidas de rendimiento que utilizaremos para calcular los valores teóricos del experimento.

2.2 Medidas de rendimiento

- Tiempo promedio de espera en cola (W_q): tiempo promedio que tiene que esperar un cliente desde que llega a la cola y comienza a ser atendido
- Tiempo promedio en el sistema (W): tiempo promedio que tiene que estar en el sistema un cliente desde que arriba al sistema y se va, luego de ser atendido.

Medida de rendimiento	**Fórmula**
Utilización del servidor	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Promedio de clientes en sistema	$L = \frac{\rho}{1-\rho}$
Promedio de clientes en cola	$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
Tiempo promedio en sistema	$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$
Tiempo promedio en cola	$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
Probabilidad de n clientes en cola	$Q = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T Q(t)dt}{T}$
Probabilidad de denegación de servicio	$P(N) = 1 - \sum_{i=0}^{n} P_i$

- Longitud media de la cola (L_q): número promedio de clientes que se encuentran en la cola esperando para ser atendidos.
- Número medio de clientes en el sistema (L): número promedio de clientes que se encuentran en el sistema.
- Probabilidad de bloqueo (P_w): probabilidad de que un cliente que llega tenga que esperar para ser atendido.
- Utilización del servidor (U): Porcentaje del tiempo total en la cual el servidor se encuentra prestando servicio.
- Distribución de probabilidad de estado: probabilidad de que se encuentren n clientes en el sistema, cuando el mismo esta estable.
- Probabilidad de negación del servicio (P_i): probabilidad de que llegue un cliente y no pueda entrar debido a que la cola esta llena.

3 Desarrollo

Para realizar este experimento, como mencionamos al principio de este trabajo, vamos a simular una cola MM1. Calcularemos los valores teóricos esperados y los compararemos con los valores observados de la simulación en Python y en Anylogic. Para ello tenemos 5 casos de estudio con diferentes tasas de arribo respecto de la tasa de servicio.

- Caso de estudio 1: cuando la tasa de arribo es un 25% de la tasa de servicio.
- Caso de estudio 2: cuando la tasa de arribo es un 50% de la tasa de servicio.
- Caso de estudio 3: cuando la tasa de arribo es un 75% de la tasa de servicio.
- Caso de estudio 4: cuando la tasa de arribo es un 100% de la tasa de servicio.
- Caso de estudio 5: cuando la tasa de arribo es un 125% de la tasa de servicio.

3.1 Componentes de la simulación

En esta sección se detallaran los componentes que se encuentran en un nuestra simulación de eventos discretos sin explicitar en explicaciones de código o algoritmos. Siguiendo los lineamientos del libro SIMULATION MODELING ANALYSIS By $Kelton$ and Law estos son los diferentes componentes que programamos para llevar a cabo la simulación en Python

- Estado del sistema: Es la colección de las variables de estado necesarias para describir el sistema en un tiempo especifico
- Reloj de simulación: variable que nos proporciona el tiempo actual de la simulación
- Contadores estáticos: variables usadas para almacenar información estática sobre el rendimiento del sistema.
- Rutina de inicialización: función cuyo objetivo es inicializar el modelo de simulación en el tiempo cero.
- Rutina de tiempo: función que determina cual es el siguiente evento de la lista de eventos y avanza el reloj al tiempo en el cual ocurre el evento.
- Rutina de evento: función que actualiza el estado del sistema cuando un evento particular ocurre. Se utiliza una rutina de evento diferente para cada tipo de evento.
- Rutina de librerías: un conjunto de funciones utilizadas para generar valores aleatorios de distintas distribuciones de probabilidad.
- Generador de reportes: función que computa estimadores de las medidas de desempeño esperadas y produce un reporte cuando finaliza una simulación
- Programa principal: subprograma que invoca las rutinas mencionadas anteriormente.

3.2 Caso de estudio número 1

Los supuestos que tomaremos en este caso son los siguientes:

- μ =1
- λ =0.25
- Disciplina de cola FIFO

Los valores esperados de las medidas de rendimiento son:

- Utilización del servidor $\rho = \frac{0.25}{1} = 0.25$
- Promedio de clientes en sistema $L = \frac{0.25}{1-0.25} = 0.\widehat{3}$
- Promedio de clientes en cola $L_q = \frac{0.25^2}{1-0.25} = 0.0833$
- Tiempo promedio en sistema $W = \frac{1}{1(1-0.25)} = 1.\widehat{3}$
- Tiempo promedio en cola $W_q = \frac{0.25}{1(1-0.25)} = 0.\widehat{3}$

3.2.1 Python

Primero realizamos las 10 corridas de nuestro programa, obtenemos:

Medidas de rendimiento	SIM 1	SIM 2	SIM 3	SIM 4	SIM 5	SIM 6	SIM 7	SIM 8	SIM 9	SIM 10	Promedio	Diferencia Absoluta Teorico
Utilizacion del servidor (ρ)	0.315	0.235	0.267	0.286	0.215	0.304	0.241	0.352	0.203	0.228	0.265	0.015
Promedio de clientes en sistema (L)	0.432	0.305	0.381	0.364	0.327	0.456	0.297	0.375	0.369	0.311	0.361	0.027
Promedio de clientes en cola (L_q)	0.095	0.103	0.086	0.084	0.088	0.087	0.097	0.093	0.089	0.088	0.091	0.007
Tiempo promedio en sistema (W)	1.453	1.245	1.543	1.434	1.332	1.148	1.448	1.278	1.586	1.119	1.358	0.247
Tiempo promedio en cola (W_q)	0.279	0.354	0.298	0.315	0.376	0.342	0.329	0.279	0.356	0.343	0.327	0.006

3.2.2 Anylogic

Tras correr 10 simulaciones para el caso de estudio en cuestion, obtenemos los siguientes valores:

Medida de rendimiento	SIM 1	SIM 2	SIM 3	SIM 4	SIM 5	SIM 6	SIM 7	SIM 8	SIM 9	SIM 10	Promedio	Diferencia absoluta Teórico
Utilización del servidor (ρ)	0.25	0.25	0.25	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.23	0.27	0.224	0.026
Promedio de clientes en sistema (L)	0.332	0.348	0.348	0.317	0.333	0.344	0.342	0.354	0.324	0.372	0.3414	0.008
Promedio de clientes en cola (L_q)	0.08	0.092	0.096	0.07	0.085	0.092	0.089	0.099	0.086	0.096	0.0885	0.005
Tiempo promedio en sistema (W)	1.3	1.38	1.33	1.27	1.34	1.38	1.4	1.39	1.38	1.38	1.355	0.021
Tiempo promedio en cola (W_q)	0.32	0.36	0.37	0.28	0.34	0.37	0.36	0.39	0.36	0.36	0.351	0.017

Al concluir la simulación obtenemos estas gráficas como complemento a los datos proporcionados en la tabla:

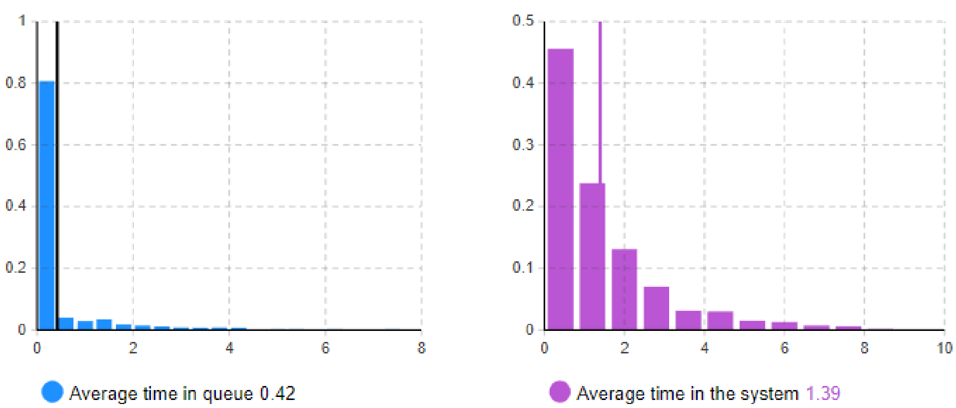

Figure 2: Gráficas de medidas de rendimiento para el caso de estudio 1

3.2.3 Denegación de servicio

A efecto de estudiar la denegación de servicio acotamos el tamaño de la cola hasta un numero determinado de clientes. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

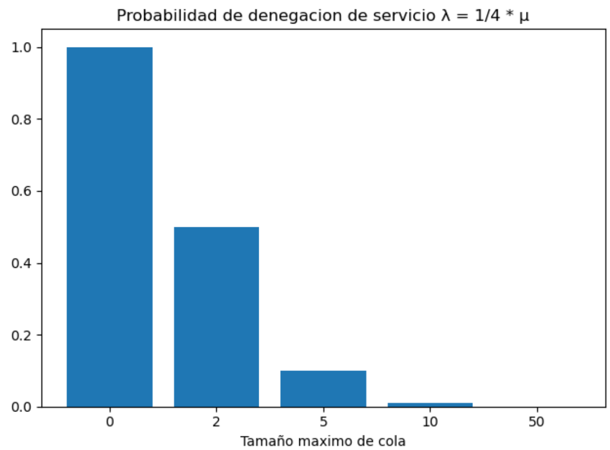

Figure 3: Histograma de denegación de servicio para el caso de estudio 1

3.3 Caso de estudio número 2

Los supuestos que tomaremos en este caso son los siguientes:

- μ =1
- λ =0.5
- Disciplina de cola FIFO

Los valores esperados de las medidas de rendimiento son:

- Utilización del servidor $\rho = \frac{0.5}{1} = 0.5$
- Promedio de clientes en sistema $L = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$
- Promedio de clientes en cola $L_q = \frac{0.5^2}{1-0.5} = 0.5$
- Tiempo promedio en sistema $W = \frac{1}{1(1-0.5)} = 2$
- Tiempo promedio en cola $W_q = \frac{0.5}{1(1-0.5)} = 1$

3.3.1 Python

Repetimos el mismo procedimiento que en el anterior caso pero esta vez variando la tasa de arribo.

Medidas de rendimiento	**SIM 1**	**SIM 2**	**SIM 3**	**SIM 4**	**SIM 5**	**SIM 6**	**SIM 7**	**SIM 8**	**SIM 9**	**SIM 10**	**Promedio**	**Diferencia Absoluta Teorico**
Utilizacion del servidor (p)	0.472	0.513	0.506	0.548	0.573	0.526	0.592	0.605	0.546	0.507	0.5388	0.038
Promedio de clientes en sistema (L)	1.204	1.17	1.156	1.163	1.148	1.184	1.083	1.048	1.095	1.07	1.132	0.132
Promedio de clientes en cola (Lq)	0.49	0.48	0.683	0.705	0.667	0.591	0.474	0.707	0.504	0.659	0.596	0.096
Tiempo promedio en sistema (W)	2.089	2.002	1.98	1.817	1.909	1.795	1.854	1.899	1.772	1.943	1.906	0.094
Tiempo promedio en cola (Wq)	1.097	1.184	1.2	0.813	1.07	1.15	1.112	1.079	0.915	0.888	1.0508	0.050

3.3.2 Anylogic

Luego, lo realizamos en Anylogic para ver si los valores son similares:

Medida de rendimiento	SIM 1	SIM 2	SIM 3	SIM 4	SIM 5	SIM 6	SIM 7	SIM 8	SIM 9	SIM 10	Promedio	Diferencia absoluta Teórico
Utilización del servidor (ρ)	0.5	0.48	0.54	0.52	0.49	0.5	0.48	0.53	0.47	0.5	0.501	0.001
Promedio de clientes en sistema (L)	1.127	0.873	1.139	1.022	1.109	1.094	0.985	1.223	0.776	1.055	1.04	0.04
Promedio de clientes en cola (L_q)	0.618	0.389	0.597	0.495	0.614	0.584	0.5	0.691	0.301	0.546	0.533	0.033
Tiempo promedio en sistema (W)	2.2	1.78	2.18	1.87	2.24	2.06	2.02	2.34	1.6	2.1	2.039	0.039
Tiempo promedio en cola (W_q)	1.2	0.79	1.14	0.91	1.24	1.09	1.03	1.32	0.62	1.09	1.043	0.043

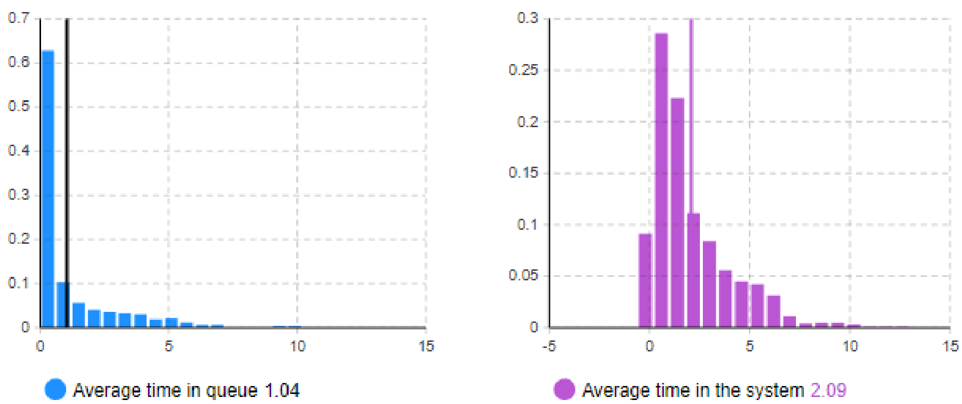

Figure 4: Gráficas de medidas de rendimiento para el caso de estudio 2

3.3.3 Denegación de servicio

Para cerrar este caso de estudio calculamos la probabilidad de denegación de servicio cuando la tasa de arribo es mayor que el caso de estudio 1:

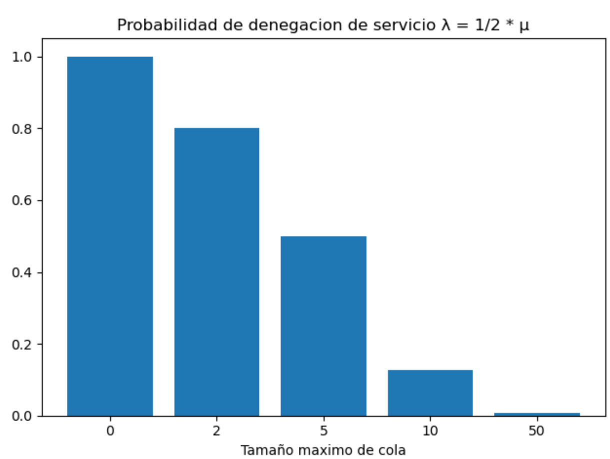

Figure 5: Histograma de denegación de servicio para el caso de estudio 2

3.4 Caso de estudio número 3

Los supuestos que tomaremos en este caso son los siguientes:

- μ =1
- λ =0.5
- Disciplina de cola FIFO

Los valores esperados de las medidas de rendimiento son:

- Utilización del servidor $\rho = \frac{0.75}{1} = 0.75$
- Promedio de clientes en sistema $L = \frac{0.75}{1-0.75} = 3$
- Promedio de clientes en cola $L_q = \frac{0.75^2}{1-0.75} = 2.25$
- Tiempo promedio en sistema $W = \frac{1}{1(1-0.75)} = 4$
- Tiempo promedio en cola $W_q = \frac{0.75}{1(1-0.75)} = 3$

3.4.1 Python

Para finalizar, hacemos las diez simulaciones para la tasa de arribo del caso 3, los resultados son:

Medidas de rendimiento	**SIM 1**	**SIM 2**	**SIM 3**	**SIM 4**	**SIM 5**	**SIM 6**	**SIM 7**	**SIM 8**	**SIM 9**	**SIM 10**	**Promedio**	**Diferencia Absoluta Teorico**
Utilizacion del servidor (p)	0.942	0.755	0.939	0.795	0.964	0.79	0.946	0.932	0.971	0.79	0.882	0.132
Promedio de clientes en sistema (L)	2.792	2.752	2.956	2.671	3.072	2.865	2.852	2.94	2.784	2.918	2.86	0.14
Promedio de clientes en cola (Lq)	2.413	2.497	2.302	2.071	2.437	2.062	2.483	2.164	2.214	2.293	2.294	0.044
Tiempo promedio en sistema (W)	4.232	4.265	3.626	3.54	3.34	3.489	3.749	3.682	3.531	3.367	3.682	0.318
Tiempo promedio en cola (Wq)	2.835	3.285	3.117	3.395	3.351	3.341	3.289	3.262	3.044	3.213	3.213	0.213

3.4.2 Anylogic

Verificamos que los valores en Anylogic coincidan con los de Python, los resultados son:

Medida de rendimiento	SIM 1	SIM 2	SIM 3	SIM 4	SIM 5	SIM 6	SIM 7	SIM 8	SIM 9	SIM 10	Promedio	Diferencia absoluta Teórico
Utilización del servidor (ρ)	0.75	0.73	0.69	0.72	0.77	0.7	0.76	0.73	0.76	0.75	0.736	0.014
Promedio de clientes en sistema (L)	2.646	2.692	1.819	2.71	3.35	2.201	2.598	2.701	2.793	3.068	2.66	0.34
Promedio de clientes en cola (L_q)	1.887	1.959	1.128	1.985	2.572	1.49	1.83	1.966	2.024	2.308	1.915	0.335
Tiempo promedio en sistema (W)	3.52	3.57	2.52	3.58	4.32	3.06	3.5	3.7	3.75	4.09	3.561	0.433
Tiempo promedio en cola (W_q)	2.51	2.6	1.56	2.62	3.32	2.07	2.46	2.69	2.72	3.08	2.563	0.437

Vemos reflejados los mismos datos pero ahora de forma gráfica:

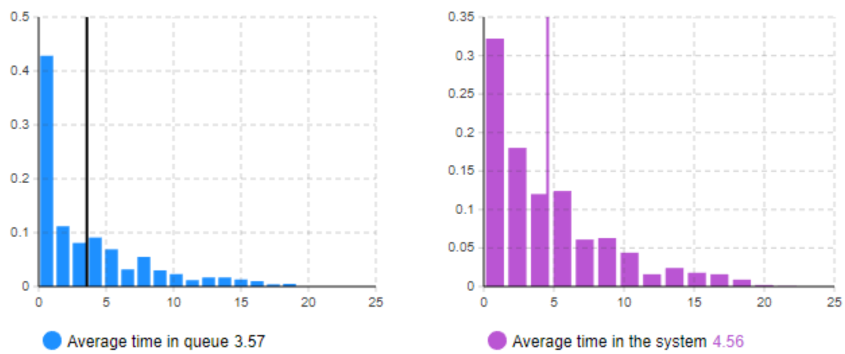

Figure 6: Gráficas de medidas de rendimiento para el caso de estudio 3

3.4.3 Denegación de servicio

Con todos estos datos obtenidos realizamos el histograma de denegación de servicio, en el cual podemos observar que la denegación fue incrementando a medida que aumentamos la tasa de arribo caso de estudio tras caso de estudio (manteniendo constante la tasa de servicio).

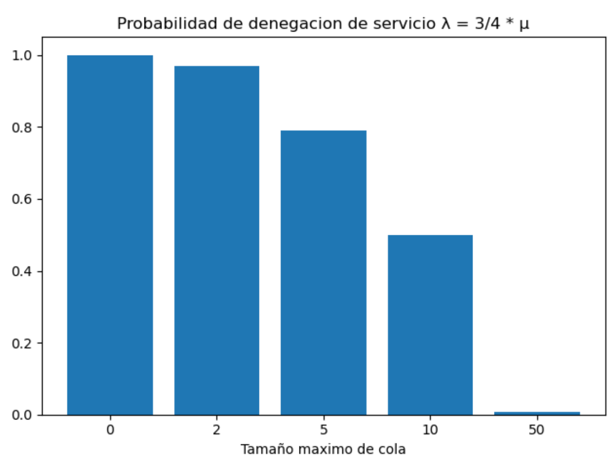

Figure 7: Histograma de denegación de servicio para el caso de estudio 2

3.5 Caso de estudio número 4 y 5

Los supuestos que tomaremos en este caso son los siguientes:

- μ =1
- λ =1
- Disciplina de cola FIFO

Estamos frente a un caso donde la tasa de arribo es el 100% de la tasa de servicio Los valores esperados de las medidas de rendimiento son:

- Utilización del servidor $\rho = \frac{1}{1} = 1$
- Promedio de clientes en sistema $L = \frac{1}{1-1} = \infty$
- Promedio de clientes en cola $L_q = \frac{1^2}{1-1} = \infty$
- Tiempo promedio en sistema $W = \frac{1}{1(1-1)} = \infty$
- Tiempo promedio en cola $W_q = \frac{1}{1(1-1)} = \infty$

Para estos dos casos de estudio podemos llegar a la mismas observaciones tanto en Anylogic como en la simulación en Python. Al comenzar la simulación se empieza a formar una extensa cola que continua incrementándose a medida que pasa el tiempo. Esto se debe a que el servidor puede atender a los clientes a un ritmo mucho menor de lo que un cliente llega al sistema. La única diferencia entre el caso 4 y 5 es que en el caso numero 5, al ser mayor la tasa de arribo, el fenómeno se ve intensificado y notamos que el sistema se satura de forma mas rápida, pero el resultado terminara siendo el mismo.

4 Conclusiones

Lo que logramos con las simulaciones y las comparativas realizadas es demostrar que el modelo analítico dado por los valores teóricos esperados condicen con los valores obtenidos en las distintas simulaciones.
La finalidad es similar a la del trabajo de distribuciones de probabilidad la cual es tener una base solida para realizar experimentos posteriores, la conclusión del trabajo mencionado nos llevo a poder realizar este trabajo, y a su vez, las conclusiones de este trabajo nos permitirán tener un mayor abanico de posibilidades a la hora de realizar simulaciones más complejas.
En resumen, tras obtener los resultados de las simulaciones, podemos decir que existe una similitud entre el modelo analítico y el modelo simulado, por ende afirmamos que nuestro modelo simulado tiende reflejar la realidad.

References

[1] Averill M. Law, W David Kelton. Capítulo 1. *Simulation modeling & analysis*, pags. 0-72.

[2] *The Art of Process-Centric Modeling with Anylogic*, pags. 69-99.

[3] M/M/1 Queue
`https://en.wikipedia.org/wiki/M/M/1queue`