

# 夏令营面试数学部分复习

---

## 一、线性代数

**线性相关与线性无关：**向量组中的任一向量都不能被其它向量线性表示，就说向量组线性无关；否则就是线性相关。

**矩阵转置：**将矩阵的行和列互相交换

**矩阵求逆：**对于方阵A，若存在方阵B使得 $AB=BA=$ 单位方阵I，则方阵B为方阵A的逆矩阵，记为 $A^{-1}$

### 1. 线性代数中的初等行变换。

- a. 交换两行
- b. 用非零常数乘以某一行
- c. 用一行的倍数加到另一行上

### 2. 如何理解矩阵的秩。

矩阵的秩是指矩阵的列空间（或行空间）的维数，简而言之是矩阵中所有非零行（或列）向量构成的集合所组成的最大线性无关组的向量个数。

:::tip

宋浩八字：**非零子式的最高阶数**

任意矩阵的行秩都等于列秩。

:::

### 3. 矩阵的秩与线性方程组解的关系。

对于n元线性方程组而言：

- a. 当系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且秩等于n时，有唯一解
- b. 当系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且秩大于n时，有无穷多解
- c. 当系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩时，无解

:::tip

当系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩时，说明系数矩阵中的某一行向量（或行向量）可以被其他列向量（或行向量）线性表示，此时该行不能提供额外的线性独立信息

:::

### 4. 简述向量组线性无关的含义。

含义：若一个向量组是线性无关的，则该向量组中的每个向量都不能表示成其他向量的线性组合。

意义：如果一个向量组线性无关，那么该向量组所张成的空间就是一个最小维度的向量空间，并且该向量空间中的任何向量都可由这些向量线性组合表示。

判定方法：如果一个向量组中的所有向量都不可以由其他向量线性组合得到，则称该向量组为线性无关的。否则，如果存在某个向量可以表示成其他向量的线性组合，则该向量组就不是线性无关的。

#### 5. 解释正定矩阵以及半正定矩阵。

#### 6. 简述特征值的含义。

特征值描述了矩阵在特定方向（特征向量方向）上的缩放因子，特征向量表示矩阵在这个特定方向上的不变性。

#### 7. 简述矩阵分解的物理意义。

矩阵分解是将一个矩阵表示为一些特定形式的矩阵乘积的过程。

矩阵分解的种类以及物理意义：

- LU分解：将矩阵分解为一个下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积。物理意义包括解线性方程组、计算矩阵的行列式和逆矩阵等。
- QR分解：将矩阵分解为一个正交矩阵和一个上三角矩阵的乘积。物理意义包括最小二乘问题、矩阵的特征值计算等。
- 特征值分解：将矩阵分解为一个特征向量矩阵和一个对角矩阵的乘积。物理意义包括矩阵的幂、指数和对称矩阵的对角化等。
- 奇异值分解（SVD）：将矩阵分解为一个正交矩阵、一个对角矩阵和一个正交矩阵的乘积。物理意义包括降维、矩阵逼近和图像压缩等。

## 二、概率论

#### 1. 简述大数定理。

大数定理描述了大样本情况下随机变量的均值与其期望值之间的关系。对于**独立同分布**的随机变量序列，随着样本数量的增加，样本均值会以较高的概率接近其期望值。

#### 2. 简述中心极限定理。

当独立随机变量的数量足够大时，它们的和（或平均值）的分布会逐渐接近一个正态分布。**即使原始随机变量不服从正态分布**，但当样本容量足够大时，和（或平均值）的分布仍然呈现出正态分布的特征。

#### 3. 什么是全概率公式。

对于事件A而言，假设有一组**互斥且穷尽**的条件事件B，则事件A的概率等于事件A在每个条件事件下发生的概率与该条件事件发生概率的乘积和。

#### 4. 什么是最大似然估计。

基本思想是在已知观测数据的情况下，通过调整参数的取值，找到使得观测数据出现概率最大的参数值。

大致过程：

- a. 构建参数化的概率模型，即构建似然函数，表示在给定参数下观测数据出现的概率
- b. 取似然函数的对数，方便计算与优化
- c. 最大化似然函数，求解参数的最优值

## 5. 简述贝叶斯定理。

贝叶斯定理描述了在给定观测数据的条件下，计算事件的后验概率的方法。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}$$

其中：

- $P(A|B)$ 表示在观测到事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为后验概率
- $P(B|A)$ 表示在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为似然；
- $P(A)$ 和 $P(B)$ 分别是事件 A 和事件 B 独立发生的先验概率。

优点：它能够将主观先验知识与观测数据相结合，通过不断更新后验概率来进行推断和决策。

## 6. P问题、NP问题以及NP完全问题

:::tip

P stands for Polynomial

意为多项式

:::

P问题是可以在多项式时间内解决的问题

NP问题是可以在多项式时间内验证解的正确性的问题

NP完全问题是一类特殊的NP问题，没有已知的高效解决算法，并且可以在多项式时间内归约到任何其他NP问题