

CSE URP CFD study homework #4

* 과제자료는 본 학과의 Basic of CFD 과제를 참고하였음을 밝힘.

Simulation of Baseball Dynamics

1) (Runge-Kutta Methods) Initial-value problem $x' = t + 2xt$ with $x(0) = 0$ 을 주어진 구간 $[0,2]$ 에서 Runge-Kutta 공식을 사용하여 계산하시오.

(1) Find $x(t)$ using the second-order Runge-Kutta method with $h=0.01$

(2) Find $x(t)$ using the fourth-order Runge-Kutta method with $h=0.01$

(3) (1)과 (2)의 solution을 exact solution $\frac{1}{2}(e^{t^2} - 1)$ 과 비교하여 각 RK method에 대한 order of accuracy를 분석하시오.

(4) step size h 의 영향을 4th order RK method를 사용하여 분석하시오. (Hint : $t=2$ 에서의 error 분석을 진행하면 되며, 다른 step size $h=0.01, 0.05, 0.1$ 에 대한 분석을 진행하도록 하시오.)

2) (Baseball dynamics) 야구공은 날아가는 도중 다음과 같은 힘을 받는다. 중력(gravity)에 의한 힘, 유동 저항에 의한 항력(drag force), 그리고 공을 Figure 1(a)에서 볼 수 있는 바와 같이 공을 휘게 하는 Magnus force. 좌표축 (x,y,z) 는 각각 투수에서 포수까지의 거리 축, 수평축, 그리고 수직축을 의미한다. 이 때, 야구공의 움직임에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \quad (3)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -F(V)Vv_x + B\omega(v_z \sin \phi - v_y \cos \phi) \quad (4)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -F(V)Vv_y + B\omega v_x \cos \phi \quad (5)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - F(V)Vv_z - B\omega v_x \sin \phi \quad (6)$$

이 때, v_x, v_y, v_z 는 야구공의 각 속도 벡터를 의미하며, $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ 로 공의 속력을 의미한다. B 는 Magnus force의 크기를 정의하는 특정 수이고, ω 는 야구공의 회전율(rotation rate) 그리고 ϕ 는 z 축에 대한 ω 의 방향(각도)를 나타낸다. g 는 중력가속도로 9.81m/s^2 을 의미한다. 본 시뮬레이션에서 $B=4.1 \times 10^{-4}$ 그리고 $\omega = 1800\text{rpm}$ 으로 상정하여 문제를 풀도록 한다. 공에 가해지는 항력 $F(V)$ 은 다음과 같이 가정된다.

$$F(V) = 0.0039 + \frac{0.0058}{1 + \exp[(V - 35)/5]}$$

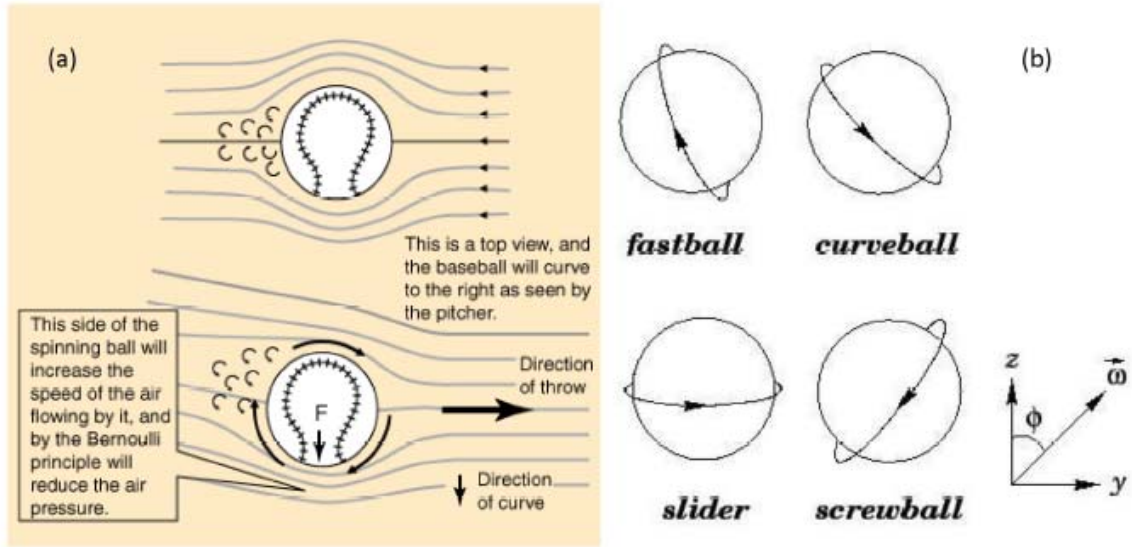


Figure 1: (a) Physics of baseball and (b) rotation direction for four pitches

(1) 4th order RK method를 사용하여 위 6개 방정식을 계산하는 코드를 만드시오. $t=0$ 일 때의 초기조건은 $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = h, v_x = v_0 \cos \theta, v_y = 0, v_z = v_0 \sin \theta$ 로 주어지며, v_0 는 투구의 초기 속도를 의미하며, θ 는 투구의 상승각도를 의미하고 h 는 지상에서 공을 놓는 위치까지의 수직 높이를 의미한다. 본 문제에서는 공이 포수의 위치인 $x(t) = 18.39\text{m}$ 까지 도달하도록 방정식을 계산하도록 한다. 코드를 만들어 나가는 과정에 대해서 서술하시오.

(2) 방정식을 Figure 1(b)에서 보인 4가지 투구에 대해서 계산하고, 야구공의 trajectories를 각 투구에 대하여 plot 하시오. 상승각도 $\theta = 1^\circ$ 이며, fastball은 $v_0 = 40\text{m/s}$, 나머지는 $v_0 = 30\text{m/s}$ 로 각각 주어진다. 회전 방향(각도) ϕ 는 fastball, curveball, slider 그리고 screwball에 대하여 각각 $225^\circ, 45^\circ, 0^\circ$ 그리고 135° 로 주어진다. 수직 높이 $h=1.7\text{m}$ 로 주어진다.