

CSE URP CFD study homework #5

* 과제자료는 본 학과의 Basic of CFD 과제를 참고하였음을 밝힘.

Stokes second problem

무한하게 펼쳐진 평평한 벽이 주기적인 진동을 한다고 가정한다(See Figure 1). 이 때, 점착조건(No-slip condition)으로 벽에서의 속도 $u(0, t) = U_0 \cos(nt)$ 를 만족한다.

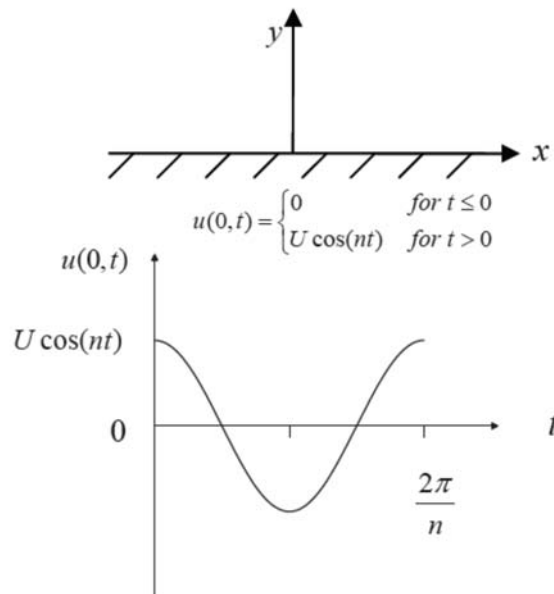


Figure 1 Schematic diagram of Stokes second problem

1. (Analytic solution)

(1) 3차원 나비에-스톡스 방정식에서, Stokes second problem을 풀기 위한 간소화 된 지배방정식을 유도하시오. 유도 과정에서 사용되는 가정들 또한 서술하시오.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(2) 위에 주어진 Stokes second problem의 해가 다음과 같음을 보이시오.

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta_s y} \cos(nt - \eta_s), \text{ where } \eta_s = \sqrt{\frac{n}{2\nu}} y.$$

2. (Numerical analysis)

무한하게 펼쳐진 두 개의 평판이 각각 $y=0$ 과 $y=L$ 에 위치한다고 가정한다. 바닥에 있는 평판($y=0$)은 $u(0, t) = \cos(nt)$ 로 진동하는 반면에, 위에 있는 평판($y=L$)은 고정되어있다. 주어진 조건 하에서 Stokes second problem의 지배방정식을 사용하여 다음 조건 하에 속도profile $u(y, t)$ 를 구하시오. $\nu = 1, n = 2, U_0 = 1$, 그리고 $L = 10$.

(1) 주어진 방정식을 first-order forward difference in time 그리고 second-order central difference in space(FTCS scheme)으로 계산하시오. 속도 profile은 $nt = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ 일 때에 대하여 그리시오. 또한

quasi-steady state velocity profile을 $(nt - T) = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ 에 대하여 구하시오. T는 일종의 quasi-steady state 해를 얻기 위한 transient period로서 $T = 10\pi$ 로 주어진다.

(2) 위 문제를 시간에 대하여 Crank-Nicolson scheme을 사용하여 계산하시오

(3) 각각 다른 두개의 scheme에 대하여 시간의 변화에 따른 해의 수렴율을 구하시오 ($\log(\Delta t)$ vs $\log(l_2\text{norm})$). FTCS는 시간에 대한 1차, Crank-Nicolson은 2차의 수렴율을 보여야 하며, 오차계산에 사용되는 exact solution은

$$u(y, t) = U_0 e^{-\eta_s} \cos(nt - \eta_s), \text{ where } \eta_s = \sqrt{\frac{n}{2\nu}} y.$$

을 사용하여 구하시오.

(4) (2)번 문제를 $L=2$ 의 조건에 대하여 다시 진행하고, 두 평판의 거리가 속도 profile에 미치는 영향을 서술하시오.