

北京十一学校 2016 级常规初一第 3 学段教与学质量诊断 (2017. 4)

数学 IIIA

一、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 二元一次方程 $4x + 3y = 20$, 用 x 表示 y , 方程可以写成_____.

2. 已知: $5\sqrt{x+y-3} = -(x-2y)^2$, 则可求得 x 、 y 的值是_____.

3. 用白铁皮做罐头盒, 每张铁皮可制盒身 16 个, 或制盒底 43 个, 一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒, 现有 150 张白铁皮, 用多少张制盒身, 多少张制盒底可正好制成整套罐头盒? 设用 x 张制盒身, y 张制盒底, 则可列方程组得: _____.

4. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是_____.

5. 下列结论正确的有_____ (填序号).

①如果 $a > b$, $c < d$; 那么 $a - c > b - d$ ②如果 $a > b$; 那么 $\frac{a}{b} > 1$ ③如果 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

④如果 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 那么 $a < b$.

6. 不等式 $\frac{|3x-2|-3}{2} + 3 > |3x-2|$ 的解集是_____.

7. 使 $\sqrt{2x+3} + \sqrt{1-3x}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

8. 比较大小: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ _____ 0.5.

9. 点 $A(m-4, 1-2m)$ 在第三象限, 则 m 的取值范围是_____.

10. 已知点 $P(0, a)$ 在 y 轴的负半轴, 则点 $Q(-a^2-2, -a+2)$ 在第_____象限.

二、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

11. 在关于 x , y 的二元一次方程 $(3x-2y+9) + m(2x+y-1) = 0$ 中, 当 m 变化时, 方程及其解都随之变化, 但无论如何变化, 上述方程总有一个固定不变的解, 这个解是_____.

12. 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} kx+4y=2 \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ 无解, 则系数 k 的值为_____.

13. 已知 $x+2y+3z=54$, $3x+y+2z=47$, $2x+3y+z=31$, 则代数式 $x+y+z$ 的值是_____.

14. 已知 $\begin{cases} 3x+2y=5k \\ 4x+y=2k+1 \end{cases}$, 且 $-2 < y-x < 5$, 则 k 的取值范围是_____.

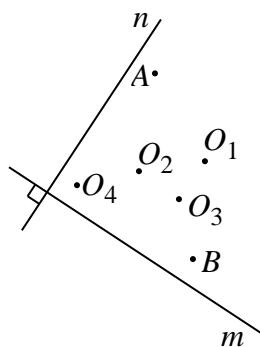
15. 不等式 $|x-3| - |x+1| > 2$ 的解集是_____.

16. 一个正整数的算术平方根是 a ，那么与这个正整数相连的下一个正整数的算术平方根是_____.

17. 观察下列各式： $\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ， $\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$ ， $\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$ ， \cdots 请你将发现的规律用含 n (n 为正整数) 的等式表示出来为_____.

18. 点 P 坐标为 $(2-a, 3a+6)$ ，且点 P 到两坐标轴的距离相等，则点 P 的坐标是_____.

19. 如图，直线 $m \perp n$ ，在某平面直角坐标系中， x 轴 $\parallel m$ ， y 轴 $\parallel n$ ，点 A 的坐标为 $(-3, 6)$ ，点 B 的坐标为 $(6, -3)$ ，则坐标原点为点_____.



20. 根据指令 $[S, A]$ ($S \geq 0, 0^\circ < A < 360^\circ$)，机器人在平面上完成如下动作：先原地逆时针旋转角度 A ，再朝其面对的方向沿直线行走距离 S ，现机器人在直角坐标系的坐标原点，且面对 x 轴的正方形.

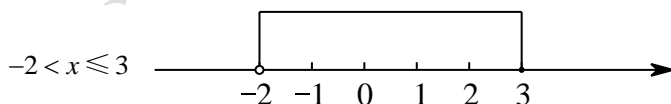
(1) 若给机器人下一个指令 $[2, 90^\circ]$ ，则机器人应移动到点_____.

(2) 由机器人在 (1) 的位置和面对方向开始，给机器人下一个指令_____，可使其移动到点 $(-3, 2)$.

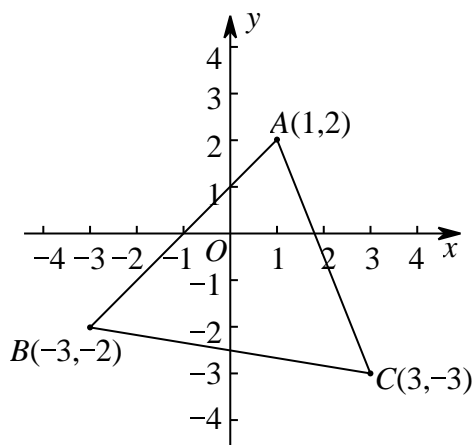
三、解答题 (第 21 题~24 题每题 5 分，共 20 分)

21. 解方程组： $\begin{cases} 3x+4y=16 \text{ ①} \\ 5x-6y=33 \text{ ②} \end{cases}$. 【答案】 $\begin{cases} x=6 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

22. 解不等式组： $\begin{cases} \frac{x-3}{3}+2 \geq x-1 \text{ ①} \\ 1-3(x-1) < 8-x \text{ ②} \end{cases}$ ，并在数轴上表示它的解集. 【答案】 $-2 < x \leq 3$



23. 已知：如图 $A(1, 2)$ ， $B(-3, -2)$ ， $C(3, -3)$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.



24. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x+y=a+3 \text{ ①} \\ x-y=3a-1 \text{ ②} \end{cases}$ 的解是一对正数. (1) 求 a 的取值范围.

(2) 化简: $\sqrt{(2a+1)^2} + \sqrt{(2-a)^2}$.

四、解答题 (第 25 题~28 题每题 5 分, 共 20 分)

25. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-4 < \frac{3x-3}{2} \\ x < m \end{cases}$ 的所有整数解的和是 -9 , 求 m 的取值范围.

26. 为了更好治理某湖水质, 保护环境, 市治污公司决定购买 10 台污水处理设备. 现有 A, B 两种型号的设备, 其中每台的价格, 月处理污水量如下表. 经调查: 购买一台 A 型设备比购买一台 B 型设备多 2 万元, 购买 2 台 A 型设备比购买 3 台 B 型设备少 6 万元.

	A 型	B 型
价格 (万元/台)	a	b
处理污水量 (吨/月)	240	180

(1) 求 a , b 的值.

(2) 经预算: 市治污公司购买污水处理设备的资金不超过 105 万元, 你认为该公司有哪几种购买方案.

(3) 在 (2) 问的条件下, 若每月要求处理该湖的污水量不低于 1860 吨, 为了节约资金, 请你为治污公司设计一种最省钱的购买方案.

27. 已知点 $A(1, a)$ 、 $B(1, b)$, a 、 b 分别为方程 $\frac{(x-1)^2-1}{2} = 4$ 的两个根, $a > b$, 直线 $CD \parallel x$ 轴, 且

点 D 的坐标为 $(0, 2)$, $S_{\triangle ABC} = 12$, 求点 C 的坐标.

28. 对于三个数 a , b , c , 用 $M\{a, b, c\}$ 表示这三个数的平均数, 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示这三个数中最小的数. 例如:

$$M\{-1, 2, 3\} = \frac{-1+2+3}{3} = \frac{4}{3}, \quad \min\{-1, 2, 3\} = -1; \quad \min\{-1, 2, a\} = \begin{cases} a(a \leq -1); \\ -1(a > -1). \end{cases}$$

解决下列问题：

(1) ① $\min\left\{-(-2), -|-2|, \frac{1}{(-2)^2}\right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

② 如果 $\min\{2, 2x+2, 4-2x\} = 2$ ，则 x 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}} \leq x \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) ① 如果 $M\{2, x+1, 2x\} = \min\{2, x+1, 2x\}$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

② 根据①，你发现了结论“如果 $M\{a, b, c\} = \min\{a, b, c\}$ ，那么 $\underline{\hspace{2cm}}$ (填 a, b, c 的大小关系)”.

③ 运用②的结论，填空：

若 $M\left\{\frac{x+y}{5}, \frac{y+z}{9}, \frac{z+x}{8}\right\} = \min\left\{\frac{x+y}{5}, \frac{y+z}{9}, \frac{z+x}{8}\right\}$ ，并且 $x+6y+5z=100$ ，则

$x+y+z = \underline{\hspace{2cm}}.$

北京十一学校 2016 级常规初一第 3 学段教与学质量诊断 (2017. 4)

数学 IIIA

一、填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 二元一次方程 $4x + 3y = 20$, 用 x 表示 y , 方程可以写成_____.

【答案】 $y = \frac{20-4x}{3}$

【解析】 $\because 4x + 3y = 20$,

$\therefore 3y = 20 - 4x$,

$\therefore y = \frac{20-4x}{3}$.

2. 已知: $5\sqrt{x+y-3} = -(x-2y)^2$, 则可求得 x 、 y 的值是_____.

【答案】 $x = 2$, $y = 1$

【解析】 $\because \sqrt{x+y-3} \geq 0$, $(x-2y)^2 \geq 0$,

$\therefore \begin{cases} x+y-3=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

3. 用白铁皮做罐头盒, 每张铁皮可制盒身 16 个, 或制盒底 43 个, 一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒, 现有 150 张白铁皮, 用多少张制盒身, 多少张制盒底可正好制成整套罐头盒? 设用 x 张制盒身, y 张制盒底, 则可列方程组得:_____.

【答案】 $\begin{cases} 2 \times 16x = 43y \\ x + y = 150 \end{cases}$

【解析】由题意列方程组得 $\begin{cases} 2 \times 16x = 43y \\ x + y = 150 \end{cases}$.

4. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \geq 2$

【解析】由 $\begin{cases} x < 2 \\ x > -1 \end{cases}$ 得 $-1 < x < 2$,

\therefore 不等式组无解,

$$\therefore a \geq 2.$$

5. 下列结论正确的有_____ (填序号).

①如果 $a > b$, $c < d$; 那么 $a - c > b - d$ ②如果 $a > b$; 那么 $\frac{a}{b} > 1$ ③如果 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

④如果 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 那么 $a < b$.

【答案】①④

【解析】① $\because c < d$,

$$\therefore -c > -d,$$

$$\because a > b,$$

$$\therefore a - c > b - d,$$

故①正确.

②当 $b < 0$ 时, $\frac{a}{b} < 1$,

故②错.

③若 $a = 2$, $b = -1$, 满足 $a > b$, 但 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

故③错.

④ $\because \frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$,

$$\therefore c^2 > 0,$$

$$\therefore a < b,$$

故④正确.

6. 不等式 $\frac{|3x-2|-3}{2} + 3 > |3x-2|$ 的解集是_____.

【答案】 $-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$

【解析】 $\frac{|3x-2|-3}{2} + 3 > |3x-2|$,

$$|3x-2| - 3 + 6 > 2|3x-2|,$$

$$|3x-2| < 3,$$

$$\therefore -3 < 3x-2 < 3,$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}.$$

7. 使 $\sqrt{2x+3} + \sqrt{1-3x}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$

【解析】由题意知 $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \end{cases}$,

解得 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

8. 比较大小: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ _____ 0.5 .

【答案】 >

【解析】 $\because 5 > 4$,

$\therefore \sqrt{5} > 2$,

$\therefore \sqrt{5}-1 > 1$,

$\therefore \frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0.5$.

9. 点 $A(m-4, 1-2m)$ 在第三象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{1}{2} < m < 4$

【解析】 $\because A$ 在第三象限,

$\therefore \begin{cases} m-4 < 0 \\ 1-2m < 0 \end{cases}$,

解得 $\frac{1}{2} < m < 4$.

10. 已知点 $P(0, a)$ 在 y 轴的负半轴, 则点 $Q(-a^2-2, -a+2)$ 在第_____象限.

【答案】 三

【解析】 $\because P(0, a)$ 在 y 轴负半轴,

$\therefore a < 0$,

$\therefore -a+2 > 0$,

$\therefore -a^2 < 0$,

$\therefore -a^2-2 < 0$,

$\therefore Q(-a^2-2, -a+2)$ 在第三象限.

二、填空题（每题3分，共30分）

11. 在关于 x, y 的二元一次方程 $(3x-2y+9)+m(2x+y-1)=0$ 中，当 m 变化时，方程及其解都随之变化，但无论如何变化，上述方程总有一个固定不变的解，这个解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

【解析】由题意得 $\begin{cases} 3x-2y+9=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$,

\therefore 这个固定解是 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$.

12. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} kx+4y=2 \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ 无解，则系数 k 的值为_____.

【答案】 $-\frac{12}{5}$

【解析】 \because 方程组无解，

$\therefore \frac{k}{3} = -\frac{4}{5} \neq \frac{2}{2}$,

$\therefore k = -\frac{12}{5}$.

13. 已知 $x+2y+3z=54$, $3x+y+2z=47$, $2x+3y+z=31$, 则代数式 $x+y+z$ 的值是_____.

【答案】 22

【解析】 $\begin{cases} x+2y+3z=54 \text{ ①} \\ 3x+y+2z=47 \text{ ②} \\ 2x+3y+z=31 \text{ ③} \end{cases}$,

①+②+③，得 $6x+6y+6z=132$,

$\therefore x+y+z=22$.

14. 已知 $\begin{cases} 3x+2y=5k \\ 4x+y=2k+1 \end{cases}$, 且 $-2 < y-x < 5$, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $-\frac{1}{3} < k < 2$

【解析】 $\begin{cases} 3x+2y=5k \text{ ①} \\ 4x+y=2k+1 \text{ ②} \end{cases}$, ①-②得 $y-x=3k-1$,

$$\because -2 < y - x < 5,$$

$$\therefore -2 < 3k - 1 < 5,$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < k < 2.$$

15. 不等式 $|x-3| - |x+1| > 2$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 0$

【解析】①当 $x \geq 3$ 时,

$$x - 3 - x - 1 > 2,$$

$$-x > 2,$$

\therefore 无解.

②当 $-1 \leq x < 3$ 时,

$$3 - x - x - 1 > 2,$$

$$-2x > 0,$$

$$x < 0,$$

$$\therefore -1 \leq x < 0.$$

③当 $x < -1$ 时,

$$3 - x + x + 1 > 2,$$

$$4 > 2,$$

$\therefore x < -1$ 时都成立,

综上, 不等式的解集是 $x < 0$.

16. 一个正整数的算术平方根是 a , 那么与这个正整数相连的下一个正整数的算术平方根是_____.

【答案】 $\sqrt{a^2 + 1}$

【解析】 \because 一个正整数的算术平方根是 a ,

\therefore 这个正整数是 a^2 ,

\therefore 与 a^2 相邻的下一个正整数是 $a^2 + 1$,

$\therefore a^2 + 1$ 的算术平方根是 $\sqrt{a^2 + 1}$.

17. 观察下列各式： $\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ， $\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$ ， $\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$ ，… 请你将发现的规律用含 n (n 为正整数) 的等式表示出来为_____.

【答案】 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$

【解析】由前三项观察可知，

第 n 个等式为 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

18. 点 P 坐标为 $(2-a, 3a+6)$ ，且点 P 到两坐标轴的距离相等，则点 P 的坐标是_____.

【答案】 $(3, -3)$ 或 $(6, -6)$

【解析】 $\because P(2-a, 3a+b)$ 到两坐标轴的距离相等，

$$\therefore |2-a|=|3a+b|,$$

$$\textcircled{1} 2-a=3a+b,$$

$$4a=-4,$$

$$a=-1.$$

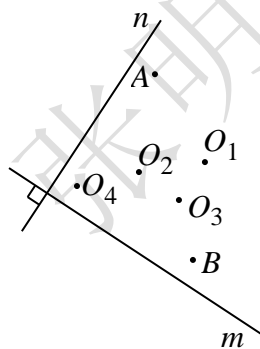
$$\textcircled{2} 2-a=-3a-6,$$

$$2a=-8,$$

$$a=-4.$$

$$\therefore P(3, -3) \text{ 或 } P(6, -6).$$

19. 如图，直线 $m \perp n$ ，在某平面直角坐标系中， x 轴 $\parallel m$ ， y 轴 $\parallel n$ ，点 A 的坐标为 $(-3, 6)$ ，点 B 的坐标为 $(6, -3)$ ，则坐标原点为点_____.



【答案】 O_2

【解析】 $\because A(-3, 6)$ ，

$\therefore A$ 在第二象限，

∴原点在点 A 的右方 3 个单位，下方 6 个单位处，

∴ $B(6, -3)$ ，

∴点 B 位于第四象限，

∴原点在点 B 的右方 6 个单位，上方 3 个单位处，

由此可知点 O_2 符合.

20. 根据指令 $[S, A]$ ($S \geq 0, 0^\circ < A < 360^\circ$)，机器人在平面上完成如下动作：先原地逆时针旋转角度 A ，再朝其面对的方向沿直线行走距离 S ，现机器人在直角坐标系的坐标原点，且面对 x 轴的正方形，

(1) 若给机器人下一个指令 $[2, 90^\circ]$ ，则机器人应移动到点_____.

(2) 由机器人在 (1) 的位置和面对方向开始，给机器人下一个指令_____，可使其移动到点 $(-3, 2)$.

【答案】(1) $(0, 2)$ (2) $[3, 90^\circ]$

【解析】(1) ∵指令为 $[2, 90^\circ]$ ，

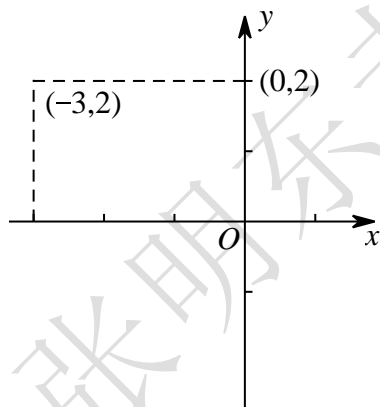
∴机器人应逆时针旋转 90° ，再向面对的方向走 2 个单位长度，

∴机器人在原点，且面对 x 轴的正方形，

∴机器人旋转后将面对 y 轴的正方形，向 y 轴正方向走 2 个单位，

∴机器人应移动到点 $(0, 2)$.

(2) 如图所示.



在 (1) 的基础上，机器人应逆时针旋转 90° ，再向其面对的方向走 3 个单位，

∴指令为 $[3, 90^\circ]$.

三、解答题（第 21 题~24 题每题 5 分，共 20 分）

21. 解方程组： $\begin{cases} 3x+4y=16 \textcircled{1} \\ 5x-6y=33 \textcircled{2} \end{cases}$. 【答案】 $\begin{cases} x=6 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

【解析】 $\begin{cases} 3x+4y=16 \textcircled{1} \\ 5x-6y=33 \textcircled{2} \end{cases}$,

$\textcircled{1} \times 3$, 得 $9x+12y=48 \textcircled{3}$,

$\textcircled{2} \times 2$, 得 $10x-12y=66 \textcircled{4}$,

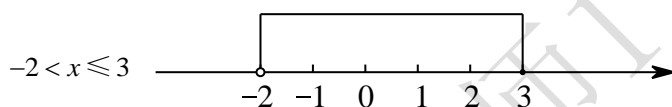
$\textcircled{3} + \textcircled{4}$, 得 $19x=114$,

$x=6$,

将 $x=6$ 代入 $\textcircled{1}$, 得 $y=-\frac{1}{2}$,

\therefore 方程组的解是 $\begin{cases} x=6 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

22. 解不等式组： $\begin{cases} \frac{x-3}{3}+2 \geq x-1 \textcircled{1} \\ 1-3(x-1) < 8-x \textcircled{2} \end{cases}$, 并在数轴上表示它的解集. 【答案】



【解析】解 $\textcircled{1}$ 得： $x-3+6 \geq 3x-3$,

$-2x \geq -6$,

$x \leq 3$,

解 $\textcircled{2}$ 得： $1-3x+3 < 8-x$,

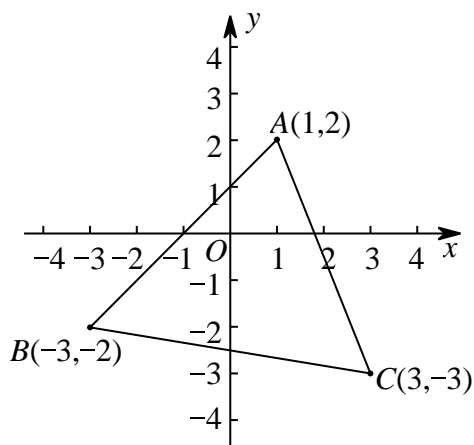
$-3x+x < 8-3-1$,

$-2x < 4$,

$x > -2$,

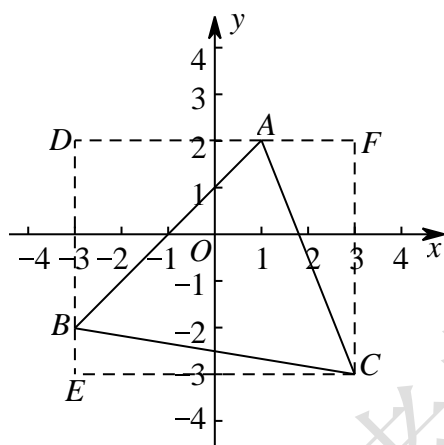
\therefore 不等式组的解集是 $-2 < x \leq 3$.

23. 已知：如图 $A(1,2)$, $B(-3,-2)$, $C(3,-3)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



【答案】 $S_{\triangle ABC} = 14$

【解析】如图，构造矩形 $DECF$ ，



$$\begin{aligned}
 S_{\triangle ABC} &= S_{\text{矩形}DECF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACF} - S_{\triangle BEC}, &= DF \cdot CF - \frac{1}{2}AD \cdot BD - \frac{1}{2}AF \cdot CF - \frac{1}{2}BE \cdot CE, \\
 &= 6 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 5 - \frac{1}{2} \times 1 \times 6, \\
 &= 30 - 8 - 5 - 3, \\
 &= 14.
 \end{aligned}$$

24. 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} x+y=a+3 \text{ ①} \\ x-y=3a-1 \text{ ②} \end{cases}$ 的解是一对正数. (1) 求 a 的取值范围.

(2) 化简: $\sqrt{(2a+1)^2} + \sqrt{(2-a)^2}$.

【答案】(1) $-\frac{1}{2} < a < 2$ (2) $a+3$

【解析】(1) ①+②, 得 $2x = 4a+2$,

$$x = 2a+1,$$

①-②, 得 $2y = -2a+4$,

$$y = -a+2,$$

∵方程组的解是一对正数,

$$\therefore x > 0, y > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} 2a+1 > 0 \\ -a+2 > 0 \end{cases},$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a < 2.$$

$$(2) \sqrt{(2a+1)^2} + \sqrt{(2-a)^2},$$

$$= |2a+1| + |2-a|,$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a < 2,$$

$$\therefore 2a+1 > 0,$$

$$2-a > 0,$$

$$\therefore \text{原式} = 2a+1+2-a,$$

$$= a+3.$$

四、解答题(第25题~28题每题5分,共20分)

25. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-4 < \frac{3x-3}{2} \\ x < m \end{cases}$ 的所有整数解的和是 -9 , 求 m 的取值范围.

【答案】 $-2 < m \leq -1$ 或 $1 < m \leq 2$

【解析】 $\begin{cases} x-4 < \frac{3x-3}{2} \text{ ①} \\ x < m \text{ ②} \end{cases}$, 由①得, $x > -5$,

∴不等式组的解集为 $-5 < x < m$,

∴不等式组的所有整数解的和为 -9 ,

∴整数解为 $-4, -3, -2$ 或 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$,

当整数解为 $-4, -3, -2$ 时,

$$-2 < m \leq -1,$$

当整数解为 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 时,

$$1 < m \leq 2.$$

26. 为了更好治理某湖水质, 保护环境, 市治污公司决定购买 10 台污水处理设备. 现有 A, B 两种型号的设备, 其中每台的价格, 月处理污水量如下表. 经调查: 购买一台 A 型设备比购买一台 B 型设备多 2 万元, 购买 2 台 A 型设备比购买 3 台 B 型设备少 6 万元.

	A 型	B 型
价格 (万元/台)	a	b
处理污水量 (吨/月)	240	180

(1) 求 a, b 的值.

(2) 经预算: 市治污公司购买污水处理设备的资金不超过 105 万元, 你认为该公司有哪几种购买方案.

(3) 在 (2) 问的条件下, 若每月要求处理该湖的污水量不低于 1860 吨, 为了节约资金, 请你为治污公司设计一种最省钱的购买方案.

【答案】(1) $a=12$ $b=10$ (2) 见解析 (3) 应选购 A 型设备 1 台, B 型设备 9 台

【解析】(1) 由题意得
$$\begin{cases} a-b=2 \\ 3b-2a=6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=12 \\ b=10 \end{cases}.$$

(2) 设购买 A 型设备 x 台, B 型设备 $(10-x)$ 台,

$$12x+10(10-x) \leq 105,$$

解得 $x \leq 2.5$,

$\because x$ 取非负整数,

$$\therefore x=0, 1, 2,$$

$$\therefore 10-x=10, 9, 8,$$

\therefore 有三种购买方案:

① A 型设备 0 台, B 型设备 10 台.

② A 型设备 1 台, B 型设备 9 台.

③ A 型设备 2 台, B 型设备 8 台.

(3) 由题意得, $240x+180(10-x) \geq 1860$,

$$\therefore x \geq 1,$$

$$\because x \leq 2.5,$$

$$\therefore x=1, 2.$$

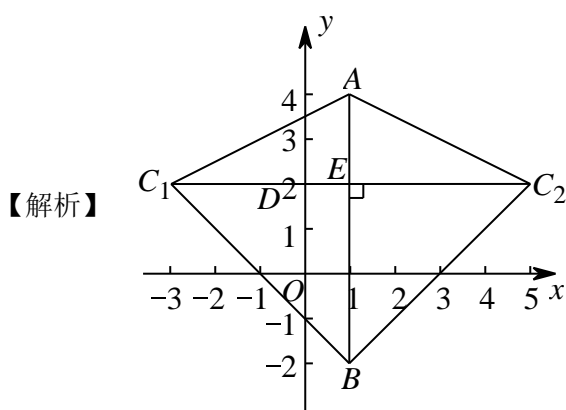
当 $x=1$ 时，购买资金为 $12 \times 1 + 10 \times 9 = 102$ （万元），

当 $x=2$ 时，购买资金为 $12 \times 2 + 10 \times 8 = 104$ （万元），

\therefore 为了节约资金，应选购 A 型设备 1 台，B 型设备 9 台。

27. 已知点 $A(1, a)$ 、 $B(1, b)$ ， a 、 b 分别为方程 $\frac{(x-1)^2 - 1}{2} = 4$ 的两个根， $a > b$ ，直线 $CD \parallel x$ 轴，且点 D 的坐标为 $(0, 2)$ ， $S_{\triangle ABC} = 12$ ，求点 C 的坐标。

【答案】 $C(5, 2)$ 或 $(-3, 2)$



$$\therefore \frac{(x-1)^2 - 1}{2} = 4,$$

$$\therefore (x-1)^2 = 9,$$

$$\therefore x = 4 \text{ 或 } x = -2,$$

$$\therefore a > b,$$

$$\therefore a = 4, \quad b = -2,$$

$$\therefore A(1, 4), \quad B(1, -2),$$

$$\therefore CD \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore C \text{ 的纵坐标与 } D \text{ 的纵坐标相等},$$

$$\therefore \text{设 } C(a, 2),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 12,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |a-1| = 12,$$

$$\therefore a = 5 \text{ 或 } -3,$$

$$\therefore C(5, 2) \text{ 或 } (-3, 2).$$

28. 对于三个数 a ， b ， c ，用 $M\{a, b, c\}$ 表示这三个数的平均数，用 $\min\{a, b, c\}$ 表示这三个数中最小的数。例如：

$$M\{-1, 2, 3\} = \frac{-1+2+3}{3} = \frac{4}{3}, \quad \min\{-1, 2, 3\} = -1; \quad \min\{-1, 2, a\} = \begin{cases} a(a \leq -1); \\ -1(a > -1). \end{cases}$$

解决下列问题：

(1) ① $\min\left\{-(-2), -|-2|, \frac{1}{(-2)^2}\right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

②如果 $\min\{2, 2x+2, 4-2x\} = 2$ ，则 x 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}} \leq x \leq \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) ①如果 $M\{2, x+1, 2x\} = \min\{2, x+1, 2x\}$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

②根据①，你发现了结论“如果 $M\{a, b, c\} = \min\{a, b, c\}$ ，那么 $\underline{\hspace{2cm}}$ (填 a, b, c 的大小关系)”.

③运用②的结论，填空：

若 $M\left\{\frac{x+y}{5}, \frac{y+z}{9}, \frac{z+x}{8}\right\} = \min\left\{\frac{x+y}{5}, \frac{y+z}{9}, \frac{z+x}{8}\right\}$ ，并且 $x+6y+5z=100$ ，则

$x+y+z = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】(1) ① -2 ② $0 \leq x \leq 1$ (2) ① 1 ② $a=b=c$ ③ 22

【解析】(1) ① $\because -(-2) = 2,$

$-|-2| = -2,$

$\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4},$

$\therefore \min\left\{-(-2), -|-2|, \frac{1}{(-2)^2}\right\} = -2.$

② $\because \min\{2, 2x+2, 4-2x\} = 2,$

$\therefore \begin{cases} 2x+2 \geq 2 \\ 4-2x \geq 2 \end{cases},$

$\therefore 0 \leq x \leq 1.$

(2) ① $M\{2, x+1, 2x\} = \frac{x+1+2+2x}{3} = x+1,$

$\therefore M\{2, x+1, 2x\} = \min\{2, x+1, 2x\},$

$\therefore \begin{cases} x+1 \leq 2 \\ x+1 \leq 2x \end{cases},$

$\therefore x = 1.$

②设 $\min\{a, b, c\} = a$ ，则 $b \geq a, c \geq a,$

$\therefore M\{a, b, c\} = \min\{a, b, c\},$

$\therefore \frac{a+b+c}{3} = a,$

$\therefore b+c-2a=0,$

$$\therefore (b-a) + (c-a) = 0,$$

$$\because b \geq a, \quad c \geq a,$$

$$\therefore b-a \geq 0, \quad c-a \geq 0,$$

$$\therefore b-a=0, \quad c-a=0,$$

$$\therefore a=b=c.$$

$$\textcircled{3} \because M\left\{\frac{x+y}{5}, \frac{y+z}{9}, \frac{z+x}{8}\right\} = \min\left\{\frac{x+y}{5}, \frac{y+z}{9}, \frac{z+x}{8}\right\},$$

$$\therefore \frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{9} = \frac{z+x}{8},$$

$$\text{设 } \frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{9} = \frac{z+x}{8} = k,$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=5k \\ y+z=9k \\ z+x=8k \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x=2k \\ y=3k \\ z=6k \end{cases},$$

$$\because x+6y+5z=100,$$

$$\therefore 2k+18k+30k=100,$$

$$\therefore k=2,$$

$$\therefore x+y+z=2k+3k+6k,$$

$$=11k,$$

$$=22.$$