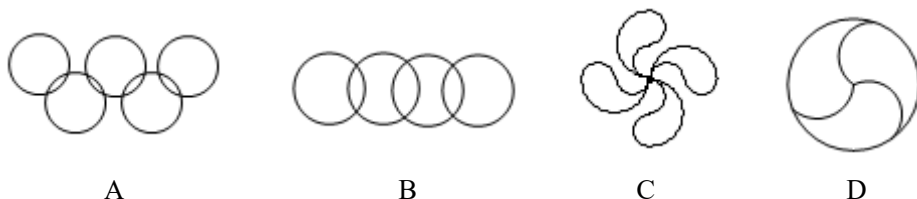


2015—2016 学年北京东城区汇文中学初二下学期期中数学试卷

一、选择题

1. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是



答案 B

解析属于轴对称图形的有 A、B 图，

属于中心对称图形的有 B、C 图，

故既是轴对称图形又是中心对称图形的是 B 图。

2. 一元二次方程 $x^2 - x + 2 = 0$ 的根的情况是

A. 有两个相等的实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

答案 C

解析 $\because \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$, \therefore 原方程无实数根。3. 一个三角形的两边长分别为 3 和 6，第三边的长是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的一个根，则此三角形的周长为

A. 9

B. 11

C. 13

D. 11 或 13

答案 C

解析方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的根， $x_1 = 2$ ， $x_2 = 4$ ，若第三边为 2， $\because 2 + 3 < 6$ ， \therefore 不是三角形，舍去，若第三边为 4， $\because 4 + 3 > 6$ ， \therefore 周长为 $4 + 3 + 6 = 13$ ，

故选 C。

4. 上海世博会的某纪念品原价 168 元，连续两次降价 $a\%$ 后售价为 128 元，下列所列方程中正确的是A. $168(1 + a^2) = 128$ B. $168(1 - a\%)^2 = 128$ C. $168(1 - 2a\%) = 128$ D. $168(1 - a^2\%) = 128$

答案 B

解析当商品第一次降价 $a\%$ 时，其售价为 $168 - 168 \times a\% = 168(1 - a\%)$ ；当商品第二次降价 $a\%$ 后，其售价为 $168(1 - a\%) - 168(1 - a\%)a\% = 168(1 - a\%)^2$ ， $\therefore 168(1 - a\%)^2 = 128$ 。故选 B。5. 若一次函数 $y = (3 - k)x - k$ 的图象经过第二、三、四象限，则 k 的取值范围是A. $k > 3$ B. $0 < k \leq 3$ C. $0 \leq k < 3$ D. $0 < k < 3$

答案 A

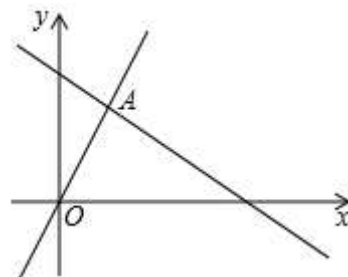
解析一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ ，经过第二、三、四象限，则 $k < 0$ ， $b < 0$ ，

$$\therefore 3-k < 0, \text{ 则 } k > 3,$$

$$-k < 0, \text{ 则 } k > 0,$$

综上所述 $k > 3$ ，故选 A.

6. 如图，函数 $y=2x$ 和 $y=ax+4$ 的图象相交于点 $A(m,3)$ ，则不等式 $2x \geq ax+4$ 的解集为



A. $x \geq \frac{3}{2}$

B. $x \leq 3$

C. $x \leq \frac{3}{2}$

D. $x \geq 3$

答案 A

解析把 $A(m,3)$ 代入 $y=2x$ ，

$$\text{得 } 2m=3,$$

$$\text{解得 } m=\frac{3}{2},$$

根据图象可得不等式 $2x \geq ax+4$ 的解集是 $x \geq \frac{3}{2}$.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，以 $M(3,4)$ 为圆心，半径为 5 的圆与 x 轴的位置关系是

A. 相离

B. 相交

C. 相切

D. 无法确定

答案 B

解析在平面直角坐标系 xOy 中，以 $M(3,4)$ 为圆心， M 点到 x 轴的距离 4，半径为 5 的圆与 x 轴的位置关系是相交.

8. 四边形 $ABCD$ 内接于圆， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度数比可能是

A. 1: 3: 2: 4

B. 7: 5: 10: 8

C. 13: 1: 5: 17

D. 1: 2: 3: 4

答案 C

解析 \because 圆内接四边形对角互补，

A. $1+2 \neq 3+4$ ，所以 A 选项不正确，

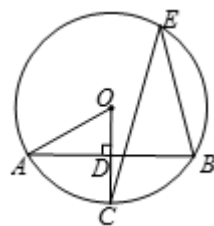
B. $7+10 \neq 5+8$ ， $7+10 \neq 5+8$ ，所以 B 选项不正确，

C. $13+5=1+17$ ，所以 C 选项正确.

D. $1+3 \neq 2+4$ ，所以 D 选项不正确.

故选 C.

9. 如图， A 、 B 、 E 为 $\odot O$ 上的点， $\odot O$ 的半径 $OC \perp AB$ 于点 D ，若 $\angle CEB = 30^\circ$ ， $OD=1$ ，则 AB 的长为



- A. $\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 6

答案 C

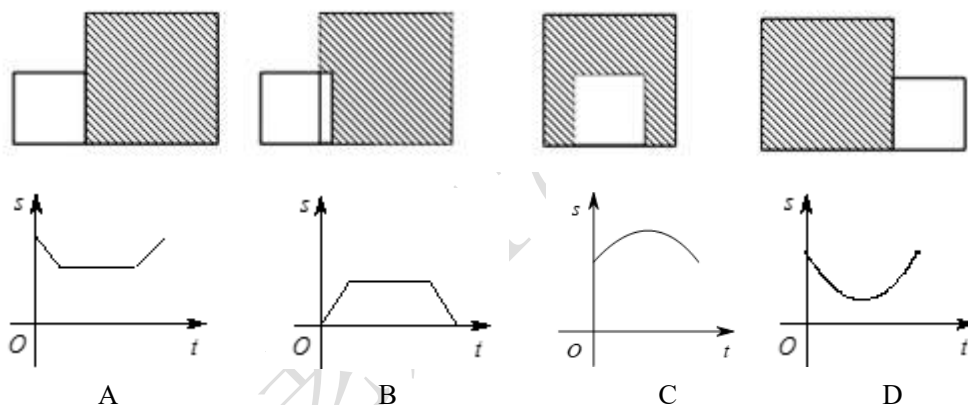
解析由垂径定理知 $AC = BC$ ， $AD = BD$ ，

又由圆角定理知 $\angle AOC = 2\angle CEB = 60^\circ$ ，

\therefore Rt $\triangle AOD$ 中， $AD = \sqrt{3}$ ， $OD = \sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = 2AD = 2\sqrt{3}$ ．

10. 边长为 1 和 2 的两个正方形，其一边在同一水平线上，小正方形沿该水平线自左向右匀速穿过大正方形，设穿过的时间为 t ，两正方形重叠部分的面积为 s ，则 s 与 t 的大致图象为



答案 B

解析选择 B，当小正方形完全进入大正方形中时，面积慢慢增大，当完全进入之后面积不变，后面重叠面积减小，一直减小到 0，故选 B．

二、填空题

11. 方程 $2x^2 + (k+1)x + 4 = 0$ 的一个根是 2，那么另一根是_____， $k =$ _____．

答案 1. 1

2. -7

解析把 $x = 2$ 代入 $2x^2 + (k+1)x + 4 = 0$ ，得 $2 \times 2^2 + (k+1) \times 2 + 4 = 0$ ，

$$\therefore 8 + 2k + 2 + 4 = 0, \quad k = -7,$$

原方程为 $2x^2 - 6x + 4 = 0$ ，

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (x-1)(x-2) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

\therefore 另一个根为 $x_1 = 1$ ．

12. 已知直线 $y = x - 3$ 与 $y = 2x + 2$ 的交点为 $(-5, -8)$ ，则方程组 $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ 的解是_____.

答案 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -8 \end{cases}$

解析方程组 $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ 的解是直线 $y = x - 3$ 与 $y = 2x + 2$ 的交点的横纵坐标.

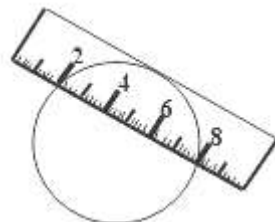
13. 已知直线 l 与直线 $y = 2x$ 平行，且与直线 $y = -x + m$ 交于点 $(2, 0)$ ，直线 l 的解析式为_____.

答案 $y = 2x - 4$

解析由直线 l 与直线 $y = 2x$ 平行，设直线 l 的解析式为： $y = 2x + b$.

\because 点 $(2, 0)$ 在直线 l 上， $\therefore 0 = 2 \times 2 + b$ ， $\therefore b = -4$ ，故直线 l 的解析式为 $y = 2x - 4$.

14. 如图，一宽为 2cm 的刻度尺在圆上移动，当刻度尺的一边与圆相切时，另一边与圆两个交点处的读数恰好为“2”和“8”（单位：cm），则该圆的半径为_____cm.



答案 $\frac{13}{4}$

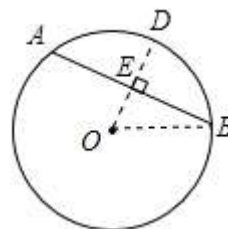
解析作 OE 垂直 AB 于 E ，交 $\odot O$ 于 D ，

设 $OB = r$ ，

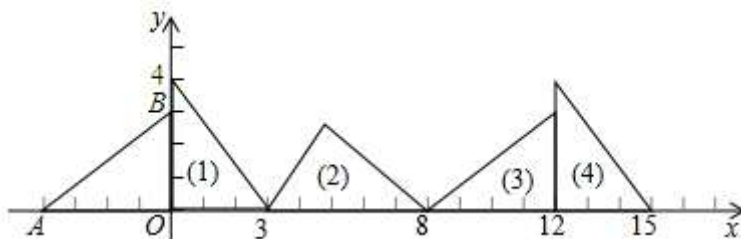
根据垂径定理， $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm，

根据题意列方程得： $(r - 2)^2 + 9 = r^2$ ，解得 $r = \frac{13}{4}$.

\therefore 该圆的半径为 $\frac{13}{4}$ cm.



15. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-4, 0)$ ， $B(0, 3)$ ，对 $\triangle AOB$ 连续作旋转变换，依次得到三角形 (1)、(2)、(3)、(4)、...，则第 (3) 个三角形的直角顶点的坐标是_____；第 (2016) 个三角形的直角顶点的坐标是_____.



答案 1. $(12, 0)$

2. $(8064, 0)$

解析：∵ 点 $A(-4,0)$ ， $B(0,3)$ ，

$$\therefore OA = 4, OB = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

三角形的周长为 $3 + 4 + 5 = 12$ ，

∴ 第 (3) 个三角形的直角顶点的坐标是 $(12, 0)$ ；

$$\therefore 2016 \div 3 = 672,$$

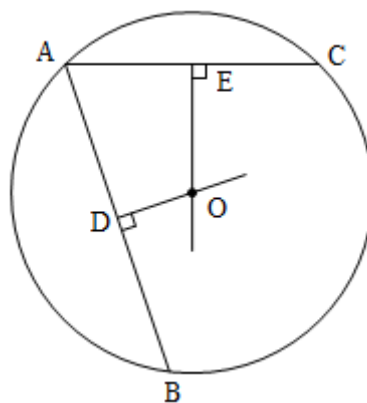
∴ 第 (2016) 个三角形是第 672 组的第三个直角三角形，

$$\therefore 672 \times 12 = 8064,$$

∴ 第 (2016) 个三角形的直角顶点的坐标是 $(8064, 0)$ 。

16. 同学们平时会经常遇到圆，有时圆中并没有标出圆心，那该如何找出圆的圆心呢？

如图所示，现在圆上任取三点 A 、 B 、 C ，然后连接 AB 、 AC ，并用标有刻度的直尺找出 AB 、 AC 的中点 D 、 E ，再用三角板分别过 D 、 E 作 AB 、 AC 的垂线，两条垂线的交点 O 就是圆心，作图依据是：_____。



答案①弦的垂直平分线必经过圆心，②两条直线相交于一点

解析①弦的垂直平分线必经过圆心

②两条直线相交于一点。

17. 用配方法解方程： $x^2 + 2x - 4 = 0$ 。

答案 $x_1 = \sqrt{5} - 1$ ， $x_2 = \sqrt{5} + 1$

解析整理得， $x^2 + 2x = 4$ ，

$$\text{配方得，} x^2 + 2x + 1 = 5,$$

$$(x+1)^2 = 5,$$

$$\text{开方得，} x+1 = \pm\sqrt{5},$$

$$x = \pm\sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{5} - 1, x_2 = \sqrt{5} + 1.$$

18. 用公式法解方程： $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 。

答案 $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ， $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

解析：∵ $a = 2$ ， $b = -4$ ， $c = 1$ ， $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 16 - 8 = 8$ 。

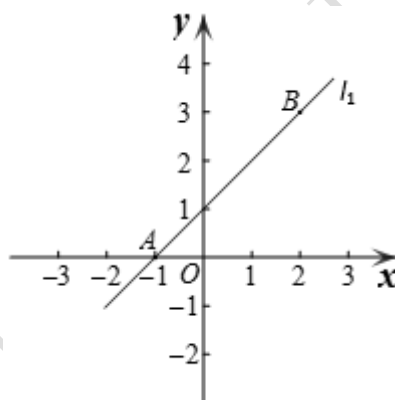
$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2},$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

三、解答题

19. 如图，已知直线 l_1 经过点 $A(-1,0)$ 和点 $B(2,3)$ ，另一条直线 l_2 经过点 B ，且与 x 轴相交于点 $P(m,0)$ 。



(1) 求直线 l_1 的解析式。

答案直线 l_1 的解析式为： $y = x + 1$ 。

解析设直线 l_1 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$

\because 直线 l_1 经过点 $A(-1,0)$ 与点 $B(2,3)$,

$$\therefore \begin{cases} -k + b = 0 \\ 3 = 2k + b \end{cases}$$

$$\text{解之得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases},$$

\therefore 直线 l_1 的解析式为： $y = x + 1$ 。

(2) 若 $\triangle APB$ 的面积为 3，求 m 的值。

答案 $m = 1$ 或 -3

解析 $\because B(2,3)$, $P(m,0)$, $\triangle APB$ 的面积为 3,

$$\therefore AP = 2,$$

$$\therefore P(1,0) \text{ 或 } P(-3,0)$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } -3.$$

20. 已知：关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2+m)x + 1(1+m) = 0$ 。

(1) 求证：方程有两个实数根。

答案证明见解析

解析 $\because \Delta = (2+m)^2 - 4(1+m) = m^2 \geq 0$,

∴ 方程有两个实数根.

(2) 设 $m < 0$, 且方程的两个实数根分别为 x_1, x_2 (其中 $x_1 < x_2$), 若 y 是关于 m 的函数,

且 $y = \frac{4x_2}{1-x_1}$, 求这个函数的解析式.

答案 $y = \frac{-4}{m} (m < 0)$

解析由 (1) 可知, 方程有两个实数根,

$$\therefore x = \frac{(2+m) \pm \sqrt{m^2}}{2} (m < 0),$$

$$\therefore x = \frac{2+m \pm m}{2},$$

$$\therefore x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 = 1+m, \quad x_2 = 1$$

$$\therefore y = \frac{4}{1-(1+m)},$$

$$\therefore y = \frac{-4}{m} (m < 0).$$

21. 当 a 取什么数时, 关于 x 的方程 $ax^2 + 4x - 1 = 0$ 只有正实数根.

答案 $-4 \leq a \leq 0$

解析①当 $a = 0$ 时, 方程为 $4x - 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{4}$.

②当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 4^2 - 4a(-1) = 16 + 4a \geq 0$, 解得 $a \geq -4$ 且 $a \neq 0$;

∵ 方程有两个实根, 则根据根与系数的关系可得

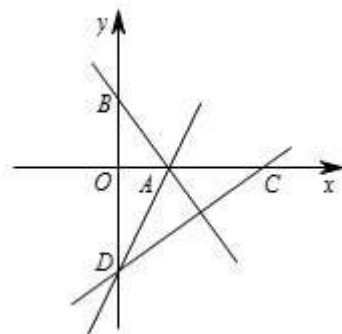
$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{a} > 0, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a} > 0,$$

∴ $a < 0$, 所以 $-4 \leq a < 0$ 时, 原方程有两个正实数根,

综上所述, $-4 \leq a \leq 0$ 时, 原方程只有正实数根.

22. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 8$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B ,

点 D 在 y 轴的负半轴上, 若将 $\triangle DAB$ 沿直线 AD 折叠, 点 B 恰好落在 x 轴正半轴上的点 C 处.



(1) 求 AB 的长和点 C 的坐标.

答案 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，点 C 的坐标 $C(16, 0)$

解析根据题意得 $A(6, 0)$ ， $B(0, 8)$ ，

在 $Rt\triangle OAB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = 6$ ， $OB = 8$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

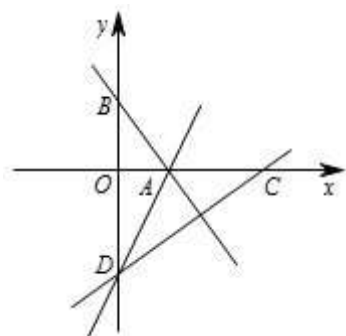
$\therefore \triangle DAB$ 沿直线 AD 折叠后的对应三角形为 $\triangle DAC$ ，

$$\therefore AC = AB = 10,$$

$$\therefore OC = OA + AC = OA + AB = 16,$$

\therefore 点 C 在 x 轴的正半轴上，

\therefore 点 C 的坐标为 $C(16, 0)$ 。



(2) 求直线 CD 的解析式。

答案直线 CD 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - 12$

解析设点 D 的坐标为 $D(0, y)$ ， $(y < 0)$

由题意可知 $CD = BD$ ， $CD^2 = BD^2$ ，

由勾股定理得 $16^2 + y^2 = (8 - y)^2$ 。

解得 $y = -12$ 。

\therefore 点 D 的坐标为 $D(0, -12)$ ，

可设直线 CD 的解析式为 $y = kx - 12$ ， $(k \neq 0)$

\therefore 点 $C(16, 0)$ 在直线 $y = kx - 12$ 上，

$$\therefore 16k - 12 = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{4},$$

\therefore 直线 CD 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - 12$ 。

23. 阅读并回答问题：

小亮是一位刻苦学习、勤于思考、勇于创新的同学。一天他在解方程 $x^2 = -1$ 时，突发奇想： $x^2 = -1$ 在实数范围内无解，如果存在一个数 i ，使 $i^2 = -1$ ，那么当 $x^2 = -1$ 时，有 $x = \pm i$ ，从而 $x = \pm i$ 是方程 $x^2 = -1$ 的两个根。

据此可知：

(1) i 可以运算，例如： $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \times i = -i$ ，则 $i^4 = \underline{\quad}$ ， $i^{2011} = \underline{\quad}$ ， $i^{2012} = \underline{\quad}$ 。

答案 1. 1

2. $-i$

3. 1

解析 $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ ，

$$i^{2011} = i^{2010} \cdot i = -1 \times i = -i,$$

$$i^{2012} = 1.$$

(2) 方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的两根为_____。(根用 i 表示)。

答案 $1+i$ 和 $1-i$

解析 $x^2 - 2x + 2 = 0$,

$$(x-1)^2 = -1,$$

$$x-1 = \pm i,$$

$$x_1 = 1+i, \quad x_2 = 1-i,$$

方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的两根为 $1+i$ 和 $1-i$ 。

24. 已知雅美服装厂现有 A 种布料 70 米, B 种布料 52 米, 现计划用这两种布料生产 M、N 两种型号的时装共 80 套。已知做一套 M 型号的时装需用 A 种布料 1.1 米, B 种布料 0.4 米, 可获利 50 元; 做一套 N 型号的时装需用 A 种布料 0.6 米, B 种布料 0.9 米, 可获利 45 元。设生产 M 型号的时装套数为 x , 用这批布料生产两种型号的时装所获得的总利润为 y 元。

(1) 求 y (元) 与 x (套) 的函数关系式, 并求出自变量的取值范围。

答案 $y = 5x + 3600$ ($x = 40, 41, 42, 43, 44$)

解析 $y = 50x + 45(80 - x) = 5x + 3600$,

$$\text{由题意得} \begin{cases} 1.1x + 0.6(80 - x) \leq 70 \\ 0.4x + 0.9(80 - x) \leq 52 \end{cases},$$

解不等式①得, $x \leq 44$,

解不等式②得, $x \geq 40$,

所以, 不等式组的解集是 $40 \leq x \leq 44$,

$\because x$ 为整数,

$\therefore x = 40, 41, 42, 43, 44$,

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式是 $y = 5x + 3600$ ($x = 40, 41, 42, 43, 44$)。

(2) 当 M 型号的时装为多少套时, 能使该厂所获利润最大? 最大利润是多少。

答案生产 M 型号的时装 44 套时, 该厂所获利润最大, 最大利润是 3820 元。

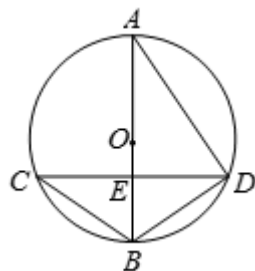
解析 $\because k = 5 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

\therefore 当 $x = 44$ 时, $y = 3820$,

即, 生产 M 型号的时装 44 套时, 该厂所获利润最大, 最大利润是 3820 元。

25. 已知: 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, 且 $AB \perp CD$, 垂足为 E 。



(1) 求证: $\angle CDB = \angle A$ 。

答案证明见解析

解析： $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ ，

$$\therefore BC = BD,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDB.$$

(2) 若 $BD = 5$ ， $AD = 12$ ，求 CD 的长.

$$\text{答案 } CD = \frac{120}{13}$$

解析： $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times DE = \frac{1}{2} \times AD \times BD,$$

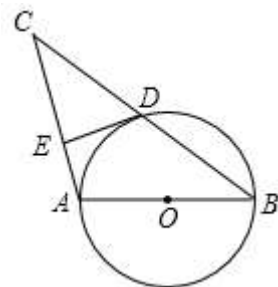
$$\therefore 13 \times DE = 12 \times 5,$$

$$\therefore DE = \frac{60}{13},$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ ，

$$\therefore CD = 2DE = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}.$$

26. 已知：如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\odot O$ 过 BC 的中点 D ，且 $DE \perp AC$ 于点 E 。



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线.

答案证明见解析

解析连结，

$\because AB$ 是直径，

$\therefore O$ 是 AB 的中点，

$\because D$ 是 BC 的中点，

$\therefore OD \parallel AC$ ，

$$\therefore \angle AED + \angle EDO = 180^\circ$$

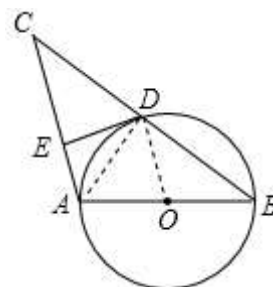
$\because DE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDO = 90^\circ,$$

$\because D$ 是 $\odot O$ 上一点，

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.



(2) 若 $\angle C = 30^\circ$ ， $CD = 12$ ，求 $\odot O$ 的直径.

答案 $\odot O$ 的直径为 $8\sqrt{3}$.

解析连结 AD ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形,

$\because \angle C = 30^\circ$, $CD = 12$,

$\therefore AD = CD \cdot \tan 30^\circ$,

$\therefore AD = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$,

$\because OD \parallel AC$,

$\therefore \angle C = \angle ODB = 30^\circ$,

$\because OB = OD$,

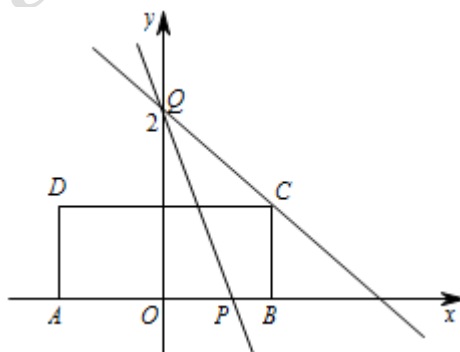
$\therefore \angle B = \angle ODB = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOD = 60^\circ$,

$\therefore OA = OD = AD = 4\sqrt{3}$,

$\therefore \odot O$ 的直径 $AB = 8\sqrt{3}$.

27. 如图, 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上, AB 的中点与原点 O 重合, $AB = 2$, $AD = 1$, 点 Q 的坐标为 $(0, 2)$.



- (1) 求直线 QC 的解析式.

答案直线 QC 的解析式为 $y = -x + 2$

解析由题意可知 C 的坐标为 $(1, 1)$,

设直线 QC 的解析式为 $y = kx + b$,

\because 点 Q 的坐标为 $(0, 2)$,

\therefore 可求直线 QC 的解析式为 $y = -x + 2$.

- (2) 点 $P(a, 0)$ 在边 AB 上运动, 若过点 P 、 Q 的直线将矩形 $ABCD$ 的周长分成 3: 1 两部分, 求出此时 a 的值.

答案满足题意的 a 的值为 1 或 -1

解析当点 P 在 OB 上时,

设 PQ 交 CD 于点 E , 可求点 E 的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, 1\right)$,

则 $AP + AD + DE = 2 + \frac{5}{2}a$, $CE + BC + BP = 3 - \frac{3}{2}a$,

由题意可知 $2 + \frac{5}{2}a = 3 - \frac{3}{2}a$,

$\therefore a = 1$,

由对称性可求当点 P 在 OA 上时, $a = -1$,

\therefore 满足题意的 a 的值为 1 或 -1 .

28. 已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 1，射线 AE 与射线 BC 交于点 E ，射线 AF 与射线 CD 交于点 F ， $\angle EAF = 45^\circ$.

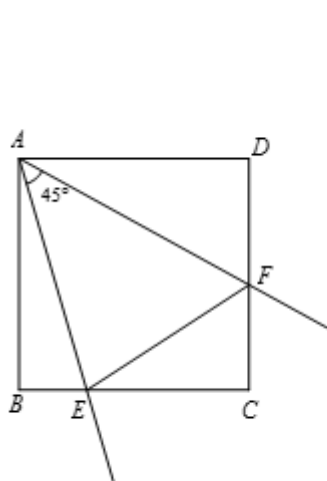


图1

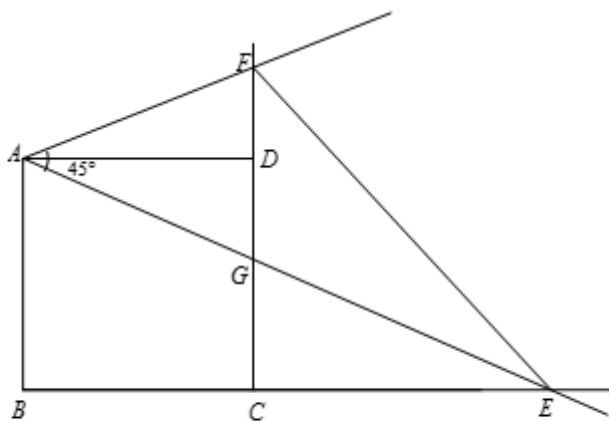


图2

- (1) 如图 1，当点 E 在线段 BC 上时，试猜想线段 EF 、 BE 、 DF 有怎样的数量关系？并证明你的猜想.

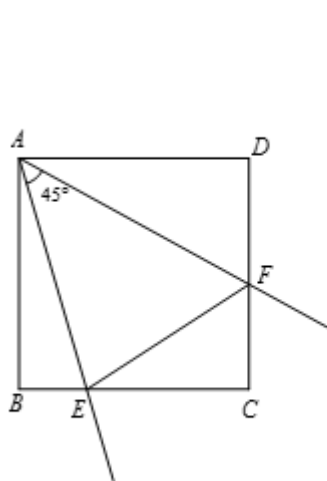


图1

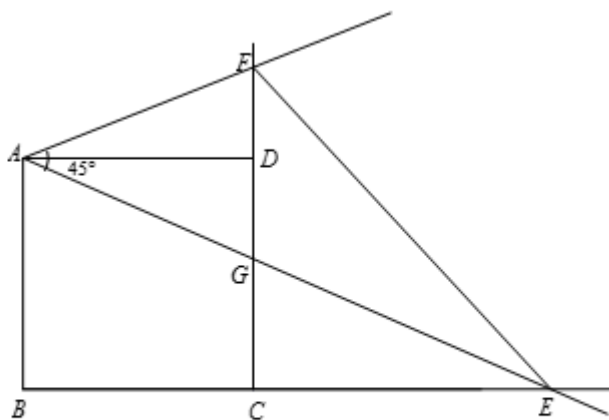


图2

答案 $EF = F'E = BE + DF$

解析猜想： $EF = BE + DF$,

证明：将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 按顺时针方向旋转 90° ，得 $\triangle ABF'$ ，

易知点 F' 、 B 、 E 在一直线上，

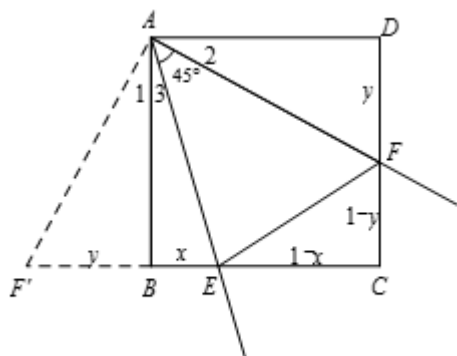


图1

$\because AF' = AF$, $\angle F'AE = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle EAF$,

又 $AE = AE$,

$\therefore \triangle AF'E \cong \triangle AFE$,

$\therefore EF = F'E = BE + DF$.

- (2) 设 $BE = x$, $DF = y$, 当点 E 在线段 BC 上运动时 (不包括点 B 、 C), 如图 1, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并指出 x 的取值范围.

答案 $y = \frac{1-x}{1+x} (0 < x < 1)$

解析 设 $BE = x$, $DF = y$ 由(1)得 $EF = x + y$,

又 $CF = 1 - y$, $EC = 1 - x$,

$$\therefore (1-y)^2 + (1-x)^2 = (x+y)^2$$

化简可得 $y = \frac{1-x}{1+x} (0 < x < 1)$.

- (3) 当点 E 射线 BC 上运动时 (不含端点 B), 点 F 在射线 CD 上运动, 试判断以 E 为圆心以 BE 为半径的 $\odot E$ 和以 F 为圆心以 FD 为半径的 $\odot F$ 之间的位置关系.

答案 答案见解析

解析 ① 当点 E 在点 B 、 C 之间时, 由(1)知 $EF = BE + DF$, 故此时 $\odot E$ 与 $\odot F$ 外切;

② 当点 E 在点 C 时, $DF = 0$, $\odot F$ 不存在;

③ 当点 E 在 BC 延长线上时, 将 $\triangle ADF$ 绕着点 A 按顺时针方向旋转 90° , 得 $\triangle ABF'$.

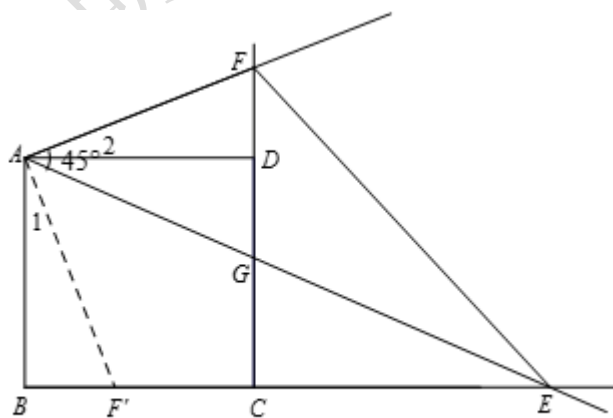


图2

有 $AF' = AF$, $\angle 1 = \angle 2$, $BF' = FD$,

$$\therefore \angle F'AF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F'AE = \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\text{又 } AE = AE,$$

$$\therefore \triangle AF'E \cong \triangle AFE,$$

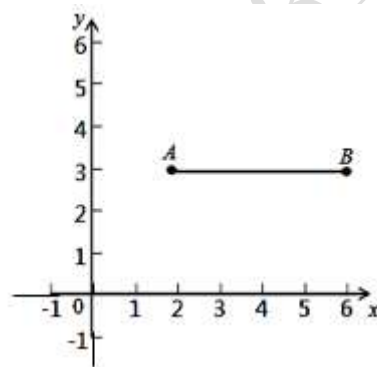
$$\therefore EF = EF' = BE - BF' = BE - FD,$$

\therefore 此时 $\odot E$ 与 $\odot F$ 内切,

综上所述, 当点 E 在线段 BC 上时, $\odot E$ 与 $\odot F$ 外切,

当点 E 在 BC 延长线上时, $\odot E$ 与 $\odot F$ 内切.

29. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, 连结 AB . 若对于平面内一点 P , 线段 AB 上都存在点 Q , 使得 $PQ \leq 1$, 则称点 P 是线段 AB 的“邻近点”.



- (1) 判断点 $D\left(\frac{7}{5}, \frac{19}{5}\right)$, 是否线段 AB 的“邻近点”_____ (填“是”或“否”).

答案是

解析点 D 是线段 AB 的“邻近点”.

- (2) 若点 $H(m, n)$ 在一次函数 $y = x - 1$ 的图象上, 且是线段 AB 的“邻近点”, 求 m 的取值范围.

答案 $3 \leq m \leq 5$

解析 \because 点 $H(m, n)$ 是线段 AB 的“邻近点”, 点 $H(m, n)$ 在直线 $y = x - 1$ 上,

$$\therefore n = m - 1,$$

直线 $y = x - 1$ 与线段 AB 交于 $(4, 3)$.

$$\textcircled{1} \text{ 当 } m \geq 4 \text{ 时, 有 } n = m - 1 \geq 3,$$

又 $AB \parallel x$ 轴,

\therefore 此时点 $H(m, n)$ 到线段 AB 的距离是 $n - 3$,

$$\therefore 0 \leq n - 3 \leq 1,$$

$$\therefore 4 \leq m \leq 5,$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } m \leq 4 \text{ 时,}$$

$$\text{有 } n = m - 1,$$

$$\therefore n \leq 3,$$

又 $AB \parallel x$ 轴,

\therefore 此时点 $H(m, n)$ 到线段 AB 的距离是 $3 - n$,

$$\therefore 0 \leq 3-n \leq 1,$$

$$\therefore 3 \leq m \leq 4,$$

综上所述, $3 \leq m \leq 5$.

(3) 若一次函数 $y = x + b$ 的图象上至少存在一个邻近点, 直接写出 b 的取值范围.

答案 $-3-\sqrt{2} \leq b \leq 1+\sqrt{2}$.

解析 $-3-\sqrt{2} \leq b \leq 1+\sqrt{2}$

