

## 北京市朝阳区九年级综合练习（二）

## 数 学 试 卷

2016.6

考  
生  
须  
知

1. 本试卷共 8 页，共三道大题，29 道小题，满分 120 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上认真填写学校名称、姓名和准考证号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束，请将本试卷、答题卡一并交回。

## 一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的。

1. 2015 年 6 月国家主席习大大和比利时国王菲利普，在人民大会堂共同见证了两国公司在集成电路方面进行合作研发的签约仪式，两国将共同着力研发 14 纳米量产技术，这标志着我国芯片制造能力将进入国际顶尖水平。14 纳米为 0.000 000 014 米，将 0.000 000 014 用科学记数法表示应为

A.  $0.14 \times 10^{-7}$       B.  $1.4 \times 10^{-8}$       C.  $0.014 \times 10^{-6}$       D.  $14 \times 10^{-9}$

2. 如图，在单位长度为 1 的数轴上，点 A、B 表示的两个数互为相反数，那么点 A 表示的数是

A. 2      B. -2      C. 3      D. -3



3. 在中国有很多吉祥的图案，比如“福”、“禄”、“寿”、“喜”，其中是轴对称图形，不是中心对称图形的为



A



B



C



D

4. 一个袋子中只装有黑、白两种颜色的球，这些球的形状、质地等完全相同，其中白色球有 2 个，黑色球有  $n$  个。在看不到球的条件下，随机地从袋子中摸出一个球，记录下颜色后，放回袋子中并摇匀。同学们进行了大量重复试验，发现摸出白球的频率稳定在 0.4 附近，则  $n$  的值为

A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

5. 如图，螺母的一个面的外沿可以看作是正六边形，这个正六边形  $ABCDEF$  的半径是  $2\sqrt{3}$  cm，则这个正

A.  $6\sqrt{3}$  cm

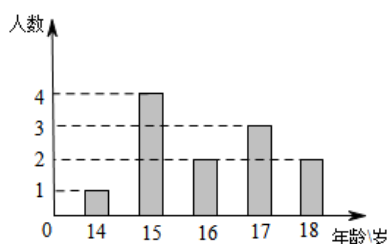
B. 12 cm

C.  $12\sqrt{3}$  cm

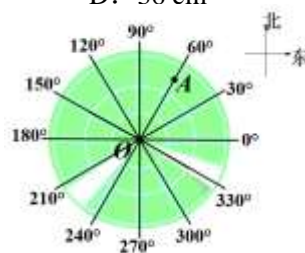
D. 36 cm



第 5 题图



第 6 题图



第 7 题图

6. 某篮球队 12 名队员的年龄统计如图所示，则该队队员年龄的众数和中位数分别是

A. 16, 15

B. 15, 15.5

C. 15, 17

D. 15, 16

7. 一艘海上搜救船借助雷达探测仪寻找到事故船的位置，雷达示意图如图所示，搜救船位于图中圆心  $O$  处，事故船位于距  $O$  点 40 海里的  $A$  处，雷达操作员要用方位角把事故船相对于搜救船的位置汇报给船长，以便调整航向，下列四种表述方式中正确的为

A. 事故船在搜救船的北偏东  $60^\circ$  方向

B. 事故船在搜救船的北偏东  $30^\circ$  方向

C. 事故船在搜救船的北偏西  $60^\circ$  方向

D. 事故船在搜救船的南偏东  $30^\circ$  方向

8. 现有  $A$ 、 $B$  两种商品，买 3 件  $A$  商品和 2 件  $B$  商品用了 160 元，买 2 件  $A$  商品和 3 件  $B$  商品用了 190 元。如果准备购买  $A$ 、 $B$  两种商品共 10 件，下列方案中费用最低的为

A.  $A$  商品 7 件和  $B$  商品 3 件

B.  $A$  商品 6 件和  $B$  商品 4 件

C.  $A$  商品 5 件和  $B$  商品 5 件

D.  $A$  商品 4 件和  $B$  商品 6 件

9. 把图 1 所示的正方体的展开图围成正方体（文字露在外面），再将这个正方体按照图 2，依次翻滚到第 1 格，第 2 格，第 3 格，第 4 格，此时正方体朝上一面的文字为

A. 富

B. 强

C. 文

D. 民

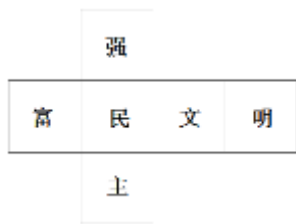


图 1

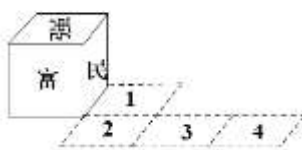
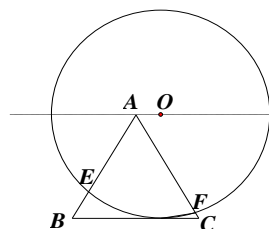


图 2

第 9 题图



第 10 题图

10. 如图， $\triangle ABC$  为等边三角形，点  $O$  在过点  $A$  且平行于  $BC$  的直线上运动，以  $\triangle ABC$  的高为半径的  $\odot O$  分别交线段  $AB$ 、 $AC$  于点  $E$ 、 $F$ ，则  $\widehat{EF}$  所对的圆周角的度数

A. 从  $0^\circ$  到  $30^\circ$  变化

B. 从  $30^\circ$  到  $60^\circ$  变化

C. 总等于  $30^\circ$

D. 总等于  $60^\circ$

二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

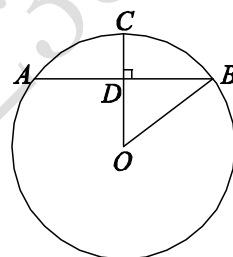
11. 分解因式： $3a^2 - 12 =$  \_\_\_\_\_.

12. 函数  $y = 2x + \frac{1}{x+1}$  的自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

13. 请写出一个开口向下，并且与  $y$  轴交于点  $(0, 2)$  的抛物线的表达式， $y =$ \_\_\_\_\_.

14. 将一元二次方程  $x^2 - 6x + 5 = 0$  化成  $(x-a)^2 = b$  的形式，则  $ab =$ \_\_\_\_\_.

15. 如图，在  $\odot O$  中， $AB$  为  $\odot O$  的弦，半径  $OC \perp AB$  于点  $D$ ，若  $OB$  的长为 10， $\sin \angle BOD = \frac{4}{5}$ ，则  $AB$  的长为\_\_\_\_\_.



16. 在数学活动课上，老师说有人根据如下的证明过程，得到“ $1=2$ ”的结论.

设  $a, b$  为正数，且  $a=b$ .

$\because a=b,$

$\therefore ab=b^2.$

①

$\therefore ab-a^2=b^2-a^2.$

②

$\therefore a(b-a)=(b+a)(b-a).$

③

$\therefore a=b+a.$

④

$\therefore a=2a.$

⑤

$\therefore 1=2.$

⑥

大家经过认真讨论，发现上述证明过程中从某一步开始出现错误，这一步是\_\_\_\_\_

(填入编号)，造成错误的原因是\_\_\_\_\_.

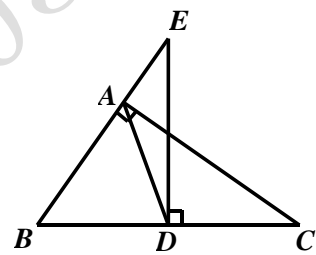
三、解答题（本题共 72 分，第 17-26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）

17. 计算： $\sqrt{12} + |-5| - (\frac{1}{2})^{-1} - 2 \tan 60^\circ$ .

18. 解方程组  $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

19. 已知  $a^2 - 2a - 2 = 0$ ，求代数式  $\frac{2}{a^2 - 1} \div \frac{a - 1}{a + 1}$  的值.

20. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD$  是  $BC$  边上的中线， $ED \perp BC$  于  $D$ ，交  $BA$  延长线于点  $E$ ，若  $\angle E = 35^\circ$ ，求  $\angle BDA$  的度数.

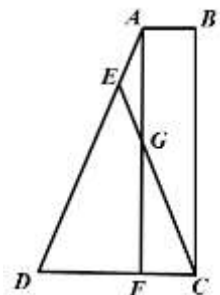


21. 每年的4月23日，是“世界读书日”. 据统计，“幸福家园小区”1号楼的住户一年内共阅读纸质图书460本，2号楼的住户一年内共阅读纸质图书184本，1号楼住户的人数比2号楼住户人数的2倍多20人，且两栋楼的住户一年内人均阅读纸质图书的数量相同. 求这两栋楼的住户一年内人均阅读纸质图书的数量是多少本？

22. 如图，四边形  $ABCD$  中， $AB \parallel DC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $F$  为  $DC$  上一点，且  $FC = AB$ ， $E$  为  $AD$  上一点， $EC$  交  $AF$  于点  $G$ 。

(1) 求证：四边形  $ABCF$  是矩形；

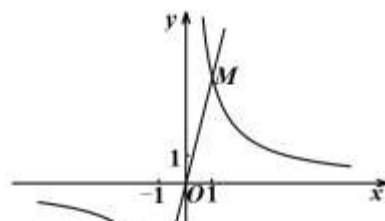
(2) 若  $ED = EC$ ，求证： $EA = EG$ 。



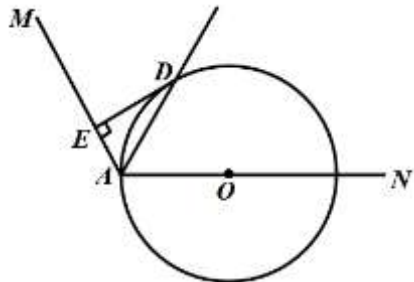
23. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，反比例函数  $y = \frac{4}{x}$  的图象与正比例函数  $y = kx$  的图象的一个交点为  $M(1, b)$ 。

(1) 求正比例函数  $y = kx$  的表达式；

(2) 若点  $N$  在直线  $OM$  上，且满足  $MN = 2OM$ ，直接写出点  $N$  的坐标。



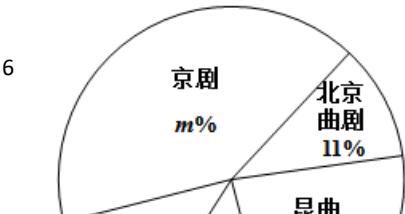
24. 如图， $O$  是  $\angle MAN$  的边  $AN$  上一点，以  $OA$  为半径作  $\odot O$ ，交  $\angle MAN$  的平分线于点  $D$ ， $DE \perp AM$  于  $E$ .
- (1) 求证： $DE$  是  $\odot O$  的切线；
- (2) 连接  $OE$ ，若  $\angle EDA = 30^\circ$ ， $AE = 1$ ，求  $OE$  的长.



25. 为弘扬中国传统文化，2016 年 4 月 30 日“北京戏曲文化周”在北京园博园开始举行，活动期间开展了丰富多样的戏曲文化互动体验活动，同时也推出了好戏连台园博看大戏的活动，主办方统计了前几天观看戏剧情况的部分相关数据，绘制统计图表如下：

前四天每天接待的观众人数统计图

5 月 3 日观看各种戏剧人数分布统计图



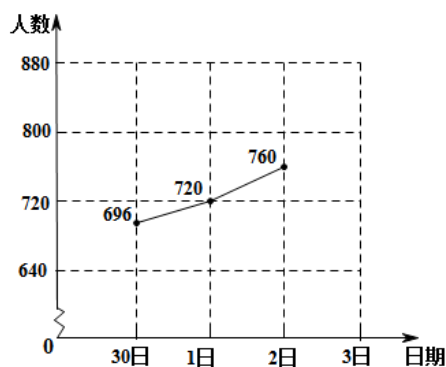


图 1

(1)  $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2) 若 5 月 3 日当天看豫剧的人数为 93 人，请你补全图 1；

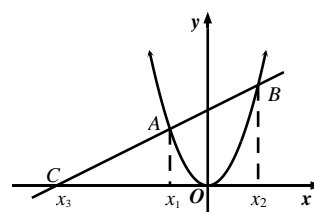
(3) 请你根据前四天接待观众人数，估计“北京戏曲文化周”活动在 5 月 4 日接待观众约为\_\_\_\_\_人. 5 月 4 日的戏曲活动，分别演出 “京剧”、“北京曲剧”、“沪剧”、“秦腔”、“粤剧”. 通过对 100 名观众的调查发现，有 12 人喜欢“沪剧”，5 人喜欢“秦腔”，8 人喜欢“粤剧”. 主办方希望把“沪剧”、“秦腔”、“粤剧”三种戏剧安排到以下五个园（如下表）中的三个园进行演出. 请你结合下表为这三种戏剧选择合适的演出地点，并说明理由.

	园中可以容纳人数
北京园	130 人
江苏园	100 人
岭南园	70 人
福建园	60 人
晋中园	30 人

26. (1) 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $y = \frac{1}{2}x + 3$  与抛物线  $y = x^2$  相交于点  $A$ 、 $B$ ，与  $x$  轴交于点

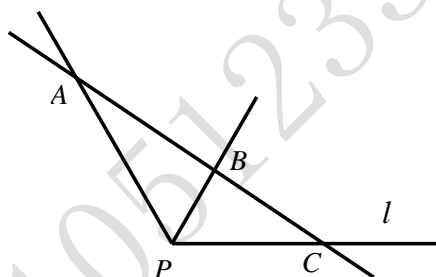
$C$ ， $A$  点横坐标为  $x_1$ ， $B$  点横坐标为  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ )， $C$  点横坐标为  $x_3$ . 请你计算  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  与  $\frac{1}{x_3}$  的值，并

判断它们的数量关系.

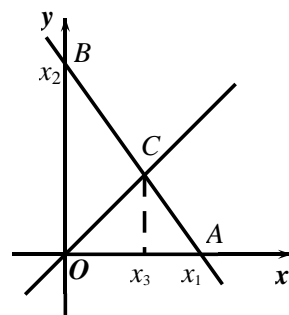


(2) 在数学的世界里，有很多结论的形式是统一的，这也体现了数学的美。请在下列两组条件中选择一组，证明  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  与  $\frac{1}{x_3}$  仍具有 (1) 中的数量关系。

①如图， $\angle APC = 120^\circ$ ， $PB$  平分  $\angle APC$ ，直线  $l$  与  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$  分别交于点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ， $PA = x_1$ ， $PC = x_2$ ， $PB = x_3$ 。



②如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，过点  $A(x_1, 0)$ 、 $B(0, x_2)$  作直线  $l$ ，与直线  $y = x$  交于点  $C$ ，点  $C$  横坐标为  $x_3$ 。



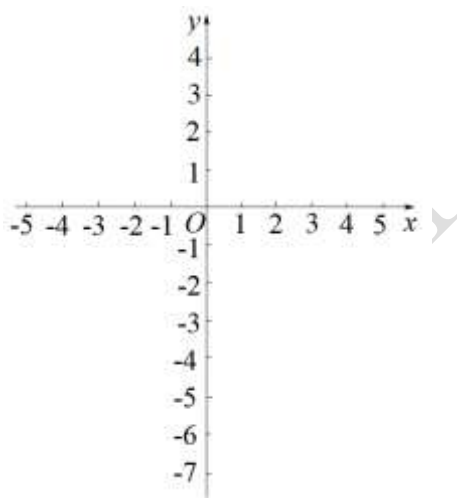
$l$

27. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = -2x^2 + (m+9)x - 6$  的对称轴是  $x = 2$ 。

- (1) 求抛物线表达式和顶点坐标；
- (2) 将该抛物线向右平移 1 个单位，平移后的抛物线与原抛物线相交于点  $A$ ，求点  $A$  的坐标；
- (3) 抛物线  $y = -2x^2 + (m+9)x - 6$  与  $y$  轴交于点  $C$ ，点  $A$  关于平移后抛物线的对称轴的对称点为



点  $B$ ，两条抛物线在点  $A$ 、 $C$  和点  $A$ 、 $B$  之间的部分（包含点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ）记为图象  $M$ 。将直线  $y = 2x - 2$  向下平移  $b$  ( $b > 0$ ) 个单位，在平移过程中直线与图象  $M$  始终有两个公共点，请你写出  $b$  的取值范围 \_\_\_\_\_。



28. 在  $\triangle ABC$  中，点  $D$ 、 $E$  分别在  $AB$ 、 $AC$  上， $BE$ 、 $CD$  相交于点  $O$ ，且  $\angle DCB = \angle EBC = \frac{1}{2} \angle A$ 。

- (1) 如图 1，若  $AB = AC$ ，则  $BD$  与  $CE$  的数量关系是 \_\_\_\_\_；
- (2) 如图 2，若  $AB \neq AC$ ，请你补全图 2，思考  $BD$  与  $CE$  是否仍然具有 (1) 中的数量关系，并说明理由；
- (3) 如图 3， $\angle BDC = 105^\circ$ ， $BD = 3$ ，且  $BE$  平分  $\angle ABC$ ，请写出求  $BE$  长的思路。（不用写出计算结果）

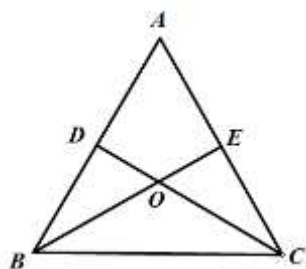


图 1

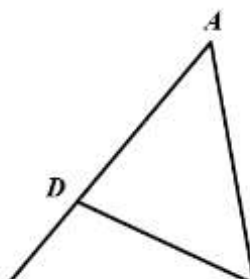
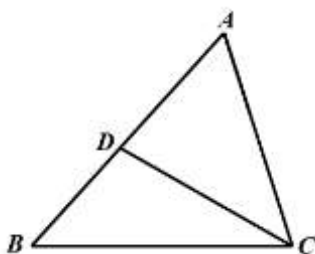


图 2

29.  $P$  是  $\odot O$  内一点，过点  $P$  作  $\odot O$  的任意一条弦  $AB$ ，我们把  $PA \cdot PB$  的值称为点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”.

(1)  $\odot O$  的半径为 5,  $OP = 3$ .

①如图 1，若点  $P$  恰为弦  $AB$  的中点，则点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”为\_\_\_\_\_；

②判断当弦  $AB$  的位置改变时，点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”是否为定值，若是定值，证明你的结论；若不是定值，求点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”的取值范围.

(2) 若  $\odot O$  的半径为  $r$ ,  $OP = d$ ，请参考 (1) 的思路，用含  $r$ 、 $d$  的式子表示点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”或“幂值”的取值范围\_\_\_\_\_；

(3) 在平面直角坐标系  $xOy$  中， $\odot O$  的半径为 4，若在直线  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$  上存在点  $P$ ，使得点  $P$  关于  $\odot O$

$O$  的“幂值”为 13，请写出  $b$  的取值范围\_\_\_\_\_.

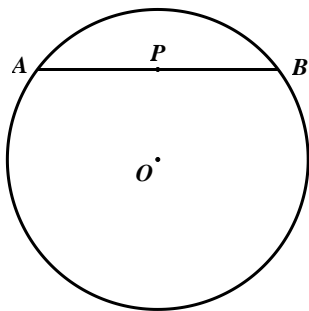
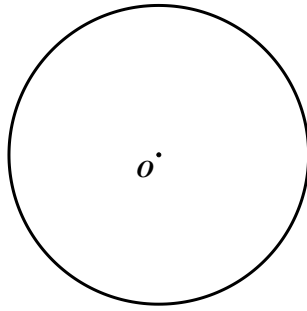
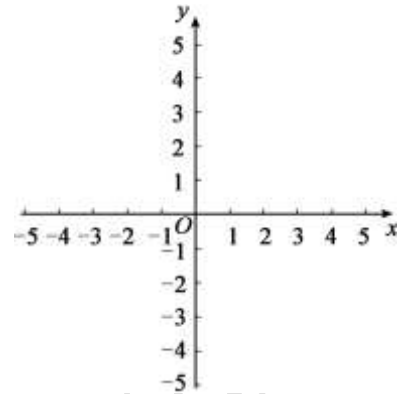


图 1



备用图



北京市朝阳区九年级综合练习（二）

数学试卷评分标准及参考答案

2016.6

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	B	C	D	B	A	A	C

二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

题号	11	12	13
答案	$3(a+2)(a-2)$	$x \neq -1$	$-x^2 + 2$ （答案不唯一）

题 号	14	15	16
答 案	12	16	④；等式两边除以值为零的式子，不符合等式性质.

## 三、解答题（本题共 72 分，第 17~26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）

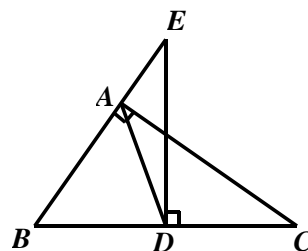
17. 解：原式 =  $2\sqrt{3} + 5 - 2 - 2\sqrt{3}$  ..... 4 分  
 $= 3$  . ..... 5 分

18. 解：  $\begin{cases} 2x + y = 1, & \text{①} \\ x - y = 2. & \text{②} \end{cases}$   
 ①+②，得  $3x = 3$ ，  
 $x = 1$  . ..... 2 分  
 把  $x = 1$  代入②，得  $1 - y = 2$ ，  
 $y = -1$  . ..... 4 分

所以这个方程组的解是  $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$  ..... 5 分

19. 解：原式 =  $\frac{2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{a-1}$  ..... 1 分  
 $= \frac{2}{(a-1)^2}$  ..... 3 分  
 $= \frac{2}{a^2 - 2a + 1}$ .  
 $\because a^2 - 2a - 2 = 0$ ，  
 $\therefore a^2 - 2a = 2$  . ..... 4 分  
 $\therefore$  原式 =  $\frac{2}{3}$  . ..... 5 分

20. 解：  $\because ED \perp BC$ ， $\angle E = 35^\circ$ ，  
 $\therefore \angle B = 55^\circ$  . ..... 1 分  
 $\because$  在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD$  是  $BC$  边上的中线，  
 $\therefore AD = BD$  . ..... 3 分  
 $\therefore \angle BAD = \angle B = 55^\circ$  . ..... 4 分  
 $\therefore \angle BDA = 70^\circ$  . ..... 5 分



21. 解：设这两栋楼的住户一年内人均阅读纸质图书的数量为  $x$  本. .... 1 分

由题意，得  $\frac{460}{x} = \frac{2 \times 184}{x} + 20$ . .... 3 分

解得  $x = 4.6$  . .....4 分

经检验,  $x = 4.6$  是原方程的解, 且符合题意. ....5 分

答: 这两栋楼的住户一年内人均阅读纸质图书的数量为 4.6 本.

22. 证明: (1)  $\because AB \parallel DC, FC = AB$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCF$  是平行四边形. ....1 分

$\because \angle B = 90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCF$  是矩形. ....2 分

(2) 由 (1) 可得,  $\angle AFC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle DAF = 90^\circ - \angle D, \angle CGF = 90^\circ - \angle ECD$ . ....3 分

$\because ED = EC$ ,

$\therefore \angle D = \angle ECD$ . ....4 分

$\therefore \angle DAF = \angle CGF$ .

$\because \angle EGA = \angle CGF$ ,

$\therefore \angle EAG = \angle EGA$ .

$\therefore EA = EG$ . ....5 分

23. 解: (1)  $\because$  双曲线  $y = \frac{4}{x}$  过点  $M(1, b)$ ,

$\therefore b = 4$ . ....1 分

$\because$  正比例函数  $y = kx$  的图象过点  $M(1, 4)$ ,

$\therefore k = 4$ . ....2 分

$\therefore$  正比例函数的表达式为  $y = 4x$ . ....3 分

(2)  $(-1, -4), (3, 12)$ . ....5

24. (1) 证明: 连接  $OD$ .

$\because AD$  平分  $\angle MAN$ ,

$\therefore \angle EAD = \angle OAD$ .

$\because OA = OD$ ,

$\therefore \angle ODA = \angle OAD$ .

$\therefore \angle EAD = \angle ODA$ . ....1 分

$\because DE \perp AM$  于  $E$ ,

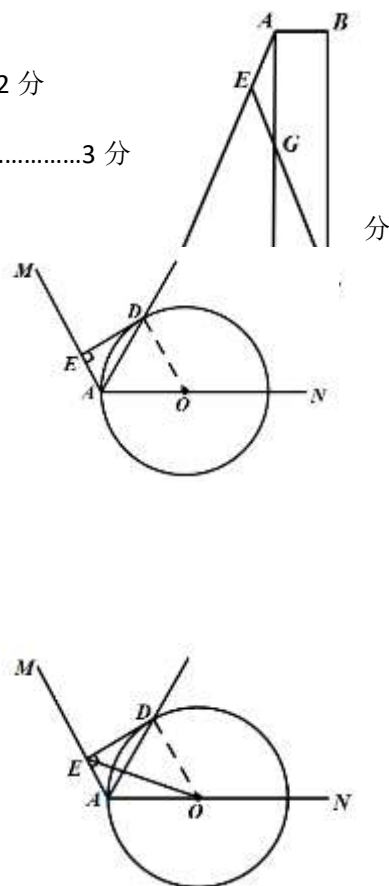
$\therefore \angle AED = 90^\circ$ .

$\therefore \angle EAD + \angle EDA = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ODA + \angle EDA = 90^\circ$ .

$\therefore OD \perp ED$ .

$\therefore DE$  是  $\odot O$  的切线. ....2 分



(2) 解：∵  $\angle EDA = 30^\circ$ ,

$$\therefore \angle ODA = 60^\circ.$$

$$\because OA = OD,$$

∴  $\triangle ADO$  为等边三角形. ....3 分

在  $\text{Rt} \triangle AED$  中,  $AE = 1$ , 可得  $AD = 2$ ,  $ED = \sqrt{3}$ . .... 4 分

$$\therefore OD = AD = 2.$$

在  $\text{Rt} \triangle ODE$  中, 由勾股定理可得  $OE = \sqrt{7}$ . .... 5 分

25. 解: (1) 41. ....1 分

(2) 补全图 1, 如图所示. ....2 分

前四天每天接待的观众人数统计图

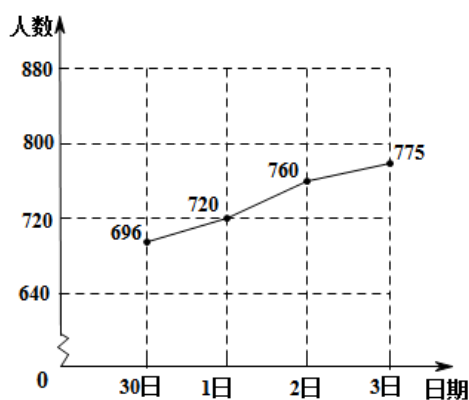


图 1

(3) 801; ....3 分

答: 预计观看“沪剧”、“秦腔”、“粤剧”的人数分别约为 96、40、64, ....4 分

所以演出应分别安排在江苏园、福建园、岭南园. ....5 分

26. (1) 解: 由题意可得  $x^2 = \frac{1}{2}x + 3$ .

$$\because x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = 2. \quad \dots \dots \dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{6}.$$

∵ 直线  $y = \frac{1}{2}x + 3$  与  $x$  轴交于点  $C$ ,  $C$  点横坐标为  $x_3$ ,

$$\therefore x_3 = -6. \quad \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}. \quad \dots \dots \dots 3 \text{ 分}$$

(2) ①证明: 如图, 过点  $B$  作  $BE \parallel PA$  交  $PC$  于点  $E$ .

$\therefore \triangle BEC \sim \triangle APC$  . . . . . 4 分  
由  $PB$  平分  $\angle APC$  ,  $\angle APC = 120^\circ$  , 可得  $\triangle PBE$  是等边三角形.

$$\therefore BE = PE = PB = x_3 .$$

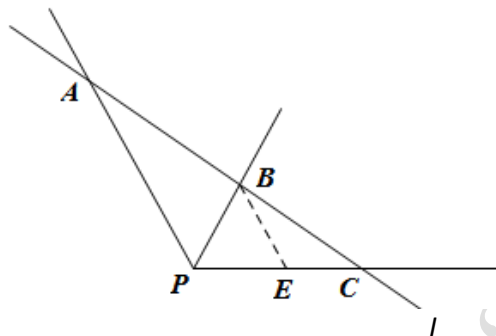
$$\therefore EC = x_2 - x_3 .$$

$$\therefore \frac{BE}{AP} = \frac{EC}{PC} ,$$

$$\therefore \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2 - x_3}{x_2} .$$

$$\therefore x_2 x_3 + x_1 x_3 = x_1 x_2 .$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3} . \quad \dots \dots \dots 5 \text{ 分}$$



②解：过点  $C$  作  $CD \perp x$  轴于点  $D$  ,  $CE \perp y$  轴于点  $E$  .

$\because$  点  $C$  在直线  $y = x$  上 , 且横坐标为  $x_3$  ,

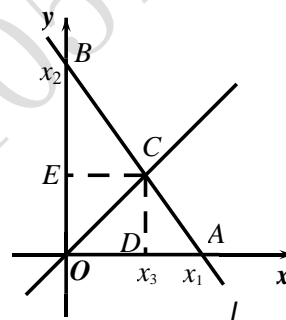
$\therefore$  点  $C(x_3, x_3)$  .

$$\therefore CE = CD = x_3 . \quad \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$

$$\because S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AOB} ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_1 x_3 = \frac{1}{2} x_1 x_2 .$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3} . \quad \dots \dots \dots 5 \text{ 分}$$



27. 解：(1)  $\because$  抛物线  $y = -2x^2 + (m+9)x - 6$  的对称轴是  $x = 2$  ,

$$\therefore -\frac{m+9}{2 \times (-2)} = 2 .$$

$$\therefore m = -1 . \quad \dots \dots \dots 1 \text{ 分}$$

$\therefore$  抛物线的表达式为  $y = -2x^2 + 8x - 6$  . . . . . 2 分

$$\therefore y = -2(x-2)^2 + 2 .$$

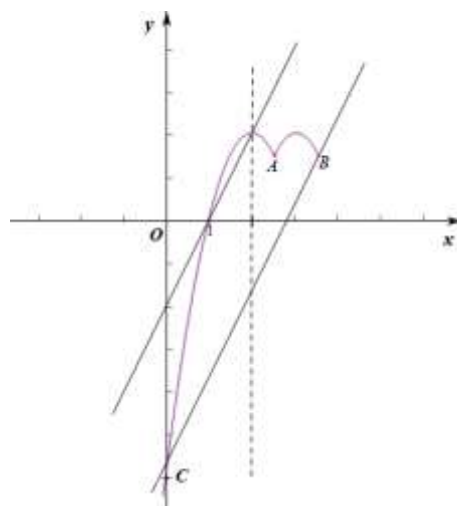
$\therefore$  顶点坐标为  $(2, 2)$  . . . . . 3 分

(2) 由题意得, 平移后抛物线表达式为

$$y = -2(x-3)^2 + 2 \quad \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$

$$\because -2(x-2)^2 = -2(x-3)^2 ,$$

$$\therefore x = \frac{5}{2} .$$



$$\therefore A\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(3) 0 < b \leq \frac{7}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

28. (1)  $BD = CE$ ;  $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

(2) 补全图形.  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

证明：如图 2，在  $BE$  上截取  $BF = CD$ ，连接  $CF$ 。

$$\because \angle DCB = \angle EBC = \frac{1}{2} \angle A,$$

$$\therefore \triangle DCB \cong \triangle FBC. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore BD = CF, \angle FCB = \angle DBC.$$

$$\therefore \angle CFE = \angle FBC + \angle FCB = 2\angle FBC + \angle ABE.$$

$$\because \angle CEF = \angle A + \angle ABE.$$

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore CF = CE.$$

$$\therefore BD = CE. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

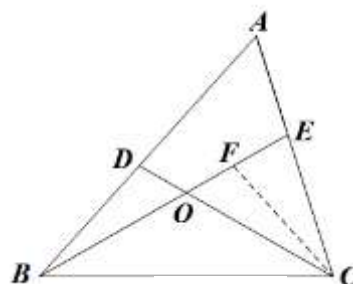


图 2

(3) 求解思路如下：

a. 如图 3，过点  $E$  作  $EM \perp BC$  于  $M$ ；

b. 由  $BE$  平分  $\angle ABC$ ，可得  $\angle ABC = \angle A$ ；

c. 由  $\angle BDC = 105^\circ$ ，可得  $\angle EBC = 25^\circ$ ，

$$\angle A = 50^\circ, \angle ACB = 80^\circ; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

d. 由 (2) 知  $CE = BD = 3$ ，在  $\text{Rt} \triangle CEM$  中，可求  $EM$  的长度；

e. 在  $\text{Rt} \triangle BEM$  中，由  $\angle EBM$  的度数和的  $EM$  的长度，可求  $BE$  的长度.  $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

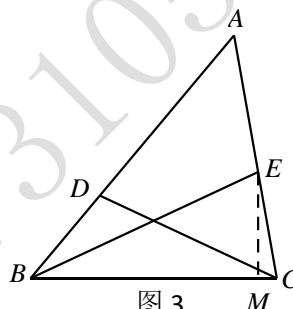


图 3

29. (1) ① 16.  $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

② 当弦  $AB$  的位置改变时，点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”为定值.  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

证明：如图， $AB$  为  $\odot O$  中过点  $P$  的任意一条弦，且不与  $OP$  垂直。

过点  $P$  作  $\odot O$  的弦  $A'B' \perp OP$ ，连接  $AA'$ 、 $BB'$ 。

$$\because \text{在 } \odot O \text{ 中, } \angle AA'P = \angle B'BP, \angle APA' = \angle BPB',$$

$$\therefore \triangle APA' \sim \triangle B'PB. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

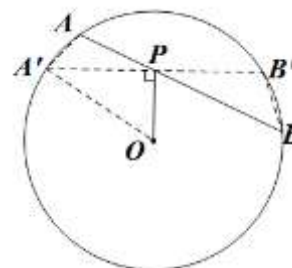
$$\therefore \frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}.$$

$$\therefore PA \cdot PB = PA' \cdot PB'. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because OP \perp A'B', OP = 3, \odot O \text{ 半径为 } 5.$$

$$\therefore A'P = B'P = 4.$$

$$\therefore PA \cdot PB = 16. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$





∴当弦  $AB$  的位置改变时，点  $P$  关于  $\odot O$  的“幂值”为定值.

( 2 )  $r^2 - d^2$  .      ... .. 6 分

( 3 )  $-2 \leq b \leq 2$  .      ... .. 8 分

张明东老师17310512331