2015－2016 学年北京海淀区北大附中初二下学期期中数学试卷

一、选择题

1．下列各点中，在直线 $y=-2x+3$ 上的点是

A．$(-2,1)$　　B．$(2,-1)$　　C．$(-1,2)$　　D．$(1,-2)$

答案 B

解析当 $x=-2$ 时，$y=7$，经过点 $(-2,7)$；

当 $x=2$ 时，$y=-1$，经过点 $(2,-1)$；

当 $x=-1$ 时，$y=5$，经过点 $(-1,5)$；

当 $x=1$ 时，$y=2$，经过点 $(1,2)$．

故在直线 $y=-2x+3$ 上的点是 $(2,-1)$．

2．下列各组数据中能作为直角三角形的三边长的是

A．1，2，2　　B．1，1，$\sqrt{3}$　　C．4，5，6　　D．1，$\sqrt{3}$，2

答案 D

解析∵ $1^2+2^2\neq 2^2$，

∴1，2，2 不能构成直角三角形；

∵ $1^2+1^2\neq\left(\sqrt{3}\right)^2$，

∴1，1，$\sqrt{3}$ 不能构成直角三角形；

∵ $4^2+5^2\neq 6^2$，

∴4，5，6 不能构成直角三角形；

∵ $1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=2^2$，

∴1，$\sqrt{3}$，2 能构成直角三角形．

3．方程 $x^2=x$ 的根是

A．$x=0$　　B．$x=1$

C．$x_1=1,x_2=0$　　D．$x_1=-1,x_2=0$

答案 C

解析 $x^2=x$，

$x^2-x=0$，

$x(x-1)=0$

解得 $x_1=1,x_2=0$．

4．下列关于反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的说法中，正确的是

A．它的图象在第二、四象限　　B．点$\left(-2,1\right)$在它的图象上

C．当$x>0$时，y随x的增大而减小　　D．当$x<0$时，y随x的增大而增大

答案 C

解析选项 A，反比例函数$y=\dfrac{2}{x}$，

∵$k=2>0$，

∴它的图象在第一、三象限；

选项 B，

∵$-2\times1\neq2$，

∴点$\left(-2,1\right)$不在它的图象上；

选项 C，当$x>0$时，y随x的增大而减小，正确；

选项 D，当$x<0$时，反比例函数$y=\dfrac{2}{x}$，y随x的增大而减小，故错误．

5．若一个直角三角形两边的长分别为 6 和 8，则第三边的长为

A．10　　B．$2\sqrt{7}$　　C．10 或$2\sqrt{7}$　　D．10 或$\sqrt{7}$

答案 C

解析当 8 为直角边时，第三边长为$\sqrt{6^2+8^2}=10$；

当 8 为斜边时，第三边长为$\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$．

6．将一元二次方程$x^2-6x-5=0$化成$\left(x-3\right)^2=b$的形式，则b等于

A．4　　B．-4　　C．14　　D．-14

答案 C

解析∵$x^2-6x-5=0$，

∴$x^2-6x=5$，配方得$x^2-6x+9=5+9$，

∴$\left(x-3\right)^2=14$，

∴$b=14$．

7．若一元二次方程$x^2+2x+m=0$有实数解，则m的取值范围是

A．$m\leqslant-1$　　B．$m\leqslant\dfrac{1}{2}$　　C．$m\leqslant1$　　D．$m\leqslant4$

答案 C

解析∵一元二次方程$x^2+2x+m=0$有实数解，

∴$\Delta=4-4m\geqslant0$，

解得$m\leqslant1$．

8．甲、乙两同学近期 5 次百米跑测试成绩的平均数相同，甲同学成绩的方差$S_{甲}^2=4$，乙同

学成绩的方差 $S_{乙}^2=3.1$，则对他们测试成绩的稳定性判断正确的是

A．甲的成绩较稳定　　　　B．乙的成绩较稳定

C．甲、乙成绩的稳定性相同　　　　D．甲、乙成绩的稳定性无法比较

答案 B

解析∵方差越小波动越小，成绩越稳定，∴乙的成绩较稳定．

9．王刚同学在解关于 x 的方程 $x^2-3x+c=0$ 时，误将 $-3x$ 看作 $+3x$，结果解得 $x_1=1$，$x_2=-4$，则原方程的解为

A．$x_1=-1, x_2=-4$　　　　B．$x_1=1, x_2=4$

C．$x_1=-1, x_2=4$　　　　D．$x_1=2, x_2=3$

答案 C

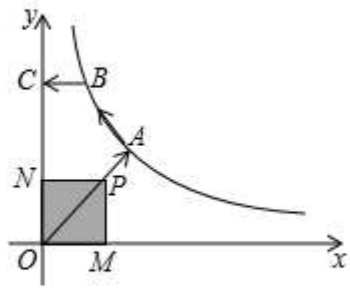
解析由题意可知，$x_1=1$ 是方程 $x^2+3x+c=0$ 的解，

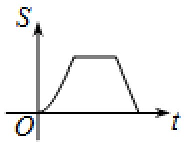
代入可得，$1+3+c=0$，解得 $c=-4$，

∴原方程为 $x^2-3x-4=0$，

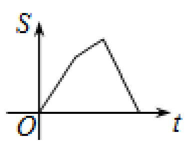
解得 $x_1=-1$，$x_2=4$．

10．如图，已知 A、B 是反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k>0$，$x>0$）图象上的两点，$BC\,//\,x$ 轴，交 y 轴于点 C，动点 P 从坐标原点 O 出发，沿 $O\to A\to B\to C$ 匀速运动，终点为 C．过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，$PN\perp y$ 轴，垂足分别为 M、N．设四边形 $OMPN$ 的面积为 S，点 P 运动的时间为 t，则 S 关于 t 的函数图象大致为

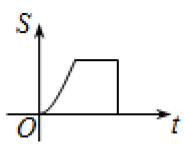




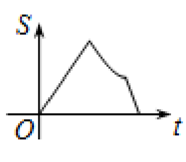
A



B



C



D

答案 A

解析解法一：

当点 P 在 OA 上运动时，此时 S 随 t 的增大而增大，

当点 P 在 AB 上运动时，S 不变，

当点 P 在 BC 上运动时，S 随 t 的增大而逐渐减小．

故选 A．

解法二：

①点 P 在 AB 上运动时，此时四边形 $OMPN$ 的面积 $S=K$，保持不变，故排除 B、D．

②点 P 在 BC 上运动时，设路线 $O\to A\to B\to C$ 的总路程为 l，点 P 的速度为 a，

则 $S=OC\times CP=OC\times\left(l-at\right)$，因为 l，OC，a 均是常数，

所以 S 与 t 成一次函数关系，故排除 C．

二、填空题

11．函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是______________．

答案 $x\geqslant 2$

解析根据题意得 $x-2\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 2$．

12．已知 $x=2$ 是一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个解，则 m 的值是________．

答案 2

解析将 $x=2$ 代入 $x^2+mx-8=0$，

得 $4+2m-8=0$，

解得 $m=2$．

13．写出一个一次函数，使该函数图象经过第一、二、四象限和点（0，2），则这个一次函数可以是________．

答案答案不唯一，如 $y=-x+2$

解析设所求一次函数为 $y=kx+b$，

∵函数经过第一、二、四象限，

∴$k<0$，$b>0$，

∵函数经过点(0,2)，

∴$b=2$，

∴该一次函数为 $y=kx+2$，$k<0$．

如 $y=-x+2$，$y=-2x+2$ 等．

14．对于反比例函数 $y=-\dfrac{6}{x}$，当 $-3<x<2$ 时且 $x\neq 0$ 时，y 的取值范围是_____．

答案 $y<-3$ 或 $y>2$

解析当 $-3<x<0$ 时，$y>2$；

当 $0<x<2$ 时，$y<-3$．

∴y 的取值范围是 $y<-3$ 或 $y>2$．

15．近视眼镜的度数 y（单位：度）与镜片焦距 x（单位：米）成反比例．如果 400 度近视

眼镜镜片的焦距为 0.25 米，那么眼镜度数 y 与镜片焦距 x 之间的函数关系是_________.（不要求写出自变量 x 的取值范围）.

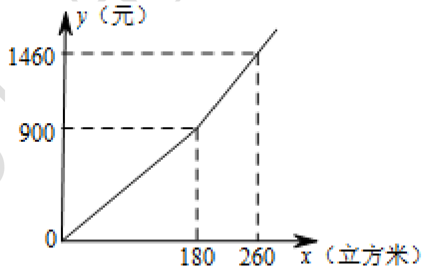
答案 $y=\dfrac{100}{x}$

解析设反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，

把 $(0.25,400)$ 代入得 $k=100$，

眼镜度数 y 与镜片焦距 x 之间的函数关系式是 $y=\dfrac{100}{x}$.

16．为增强居民的节水意识，某市自 2015 年实施“阶梯水价”，按照“阶梯水价”的收费标准，居民家庭每年应缴消费 y（元）与用水量 x（立方米）的函数关系的图象如图所示．如果某个家庭 2015 年全年上缴水费 1180 元，那么该家庭 2015 年用水的总量是______立方米．



答案 220

解析当 $x\geqslant 180$ 时，设 $y=kx+b$，

将点 $(180,900)$，$(260,1460)$ 代入可得：

$\begin{cases}900=180k+b\\1460=260k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=7\\b=-360\end{cases}$，

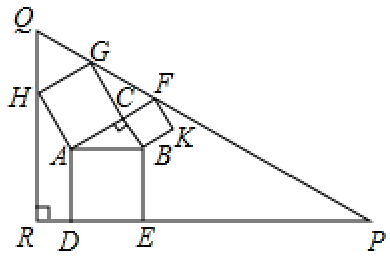
故 $y=7x-360$.

令 $7x-360=1180$，

解得 $x=220$，

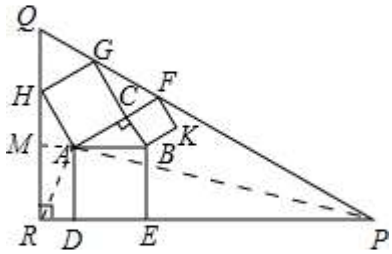
答：该家庭 2015 年用水的总量是 220 立方米．

17．如图，$Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$AB=4$，分别以 AB、BC、AC 为边作正方形 $ABED$、$BCFK$、$ACGH$，再作 $Rt\triangle PQR$，使 $\angle R=90°$，点 H 在边 QR 上，点 D、E 在边 PR 上，点 G、F 在边 PQ 上，则 $\triangle RPQ$ 的周长为_________.



答案 $27+13\sqrt{3}$

解析延长 BA 交 QR 于点 M ，连接 AR,AP .



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle GFC$ 中，

$$\begin{cases} AC=GC \\ \angle ACB=\angle GCF, \\ BC=FC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle GFC$ （SAS）

$\therefore \angle CGF=\angle BAC=30°$ ，

$\therefore HGQ=60°$ ，

$\because \angle HAC=\angle BAD=90°$ ，

$\therefore \angle BAC+\angle DAH=180°$ ，

又 $\because AD \,//\, QR$ ，

$\therefore \angle RHA+\angle DAH=180°$ ，

$\therefore \angle RHA=\angle BAC=30°$ ，

$\therefore \angle QHG=60°$

$\therefore \angle Q=\angle QHG=\angle QGH=60°$ ，

$\therefore \triangle QHG$ 是等边三角形，

$\because AC=AB\cdot\cos 30°=2\sqrt{3}$

$\therefore QH=HA=HG=AC=2\sqrt{3}$ ，

在 $Rt\triangle HAM$ 中， $HM=AH\cdot\sin 60°=3$ ， $AM=AH\cdot\cos 60°=\sqrt{3}$ ，

在 $Rt\triangle AMR$ 中， $MR=AD=AB=4$

$\therefore QR=2\sqrt{3}+3+4=7+2\sqrt{3}$

$\therefore PQ=2QR=14+4\sqrt{3}$, $PR=\sqrt{3}QR=6+7\sqrt{3}$

$\therefore \triangle RPQ$ 的周长 $=QR+PQ+PR=27+13\sqrt{3}$．

三、解答题

18．解一元二次方程：$x^2+4x-2=0$．

答案 $x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$．

解析 $x^2+4x-2=0$，

$\because a=1,b=4,c=-2$，

$\therefore \Delta=16+8=24$，

$\therefore x=\dfrac{-4\pm\sqrt{24}}{2}=-2\pm\sqrt{6}$，

$\therefore x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$，

19．已知 $x^2-5x+3=0$，求代数式 $(x+2)(x-2)-(2x-1)(x-2)$ 的值．

答案 -3

解析 $(x+2)(x-2)-(2x-1)(x-2)$

$=x^2-4-(2x^2-4x-x+2)$

$=x^2-4-2x^2+5x-2$

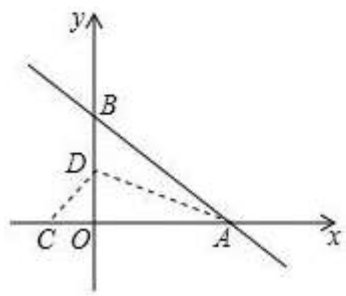
$=-x^2+5x-6$

$\because x^2-5x+3=0$，

$\therefore x^2-5x=-3$，

$\therefore$ 原式 $=3-6=-3$．

20．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，将 $\triangle AOB$ 沿过点 A 的直线折叠，使点 B 落在 x 轴负半轴，记作点 C，折痕与 y 轴交于点 D．



（1）求 A、B 两点坐标．

答案 $A(4,0)$，$B(0,3)$．

解析令 $y=0$，解得 $x=4$，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4,0)$．

令 $x=0$，解得 $y=3$，

∴点 B 的坐标为 $(0,3)$，

（2）求线段 CD 所在直线的解析式．

答案 $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$．

解析由折叠性质可知，$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，

∴ $AC=AB$，$BD=CD$．

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$，

∴ $AC=5$，

∴ $OC=AC-OA=5-4=1$，

∴点 C 的坐标为 $(-1,0)$

设 $OD=m$，则 $CD=BD=3-m$，

在 $Rt\triangle COD$ 中，$OC^2+OD^2=CD^2$，

即 $1^2+m^2=(3-m)^2$，

解得 $m=\frac{4}{3}$，

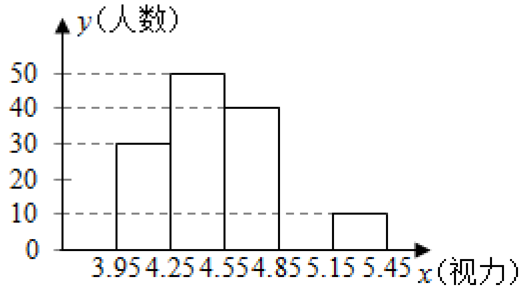
∴ $OD=\frac{4}{3}$

∴点 D 的坐标为 $\left(0,\frac{4}{3}\right)$，

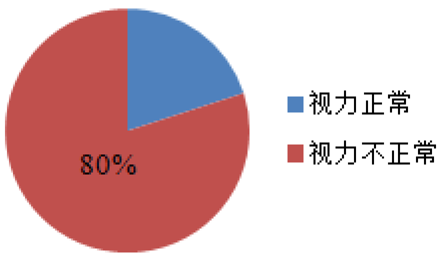
∴线段 CD 所在直线的解析式 $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$．

21．当今，青少年视力水平下降已引起全社会的关注，为了了解某市 30000 名学生的视力情况，从中抽取一部分学生进行了一次抽样调查，利用所得数据绘制的频数分布直方图和扇形图如下所示：（视力分为 4.0，4.1，4.2，4.3，4.4，4.5，4.6，4.7，4.8，4.9，5.0，5.1，5.2 这几种情况，其中视力为 4.9 及以上为正常）

视力情况分布统计图



视力情况分类统计图



解答下列问题：

（1）本次抽样调查共抽测了_________名学生．

答案 150

解析由频数分布直方图可知，视力不正常的人数为$30+40+50=120$人，

由扇形统计图可知视力不正常所占的比例为 80%，

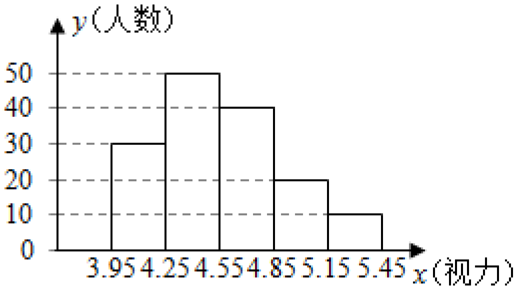
所以本次抽样调查共抽测了$120\div80\%=150$名.

（2）根据条件补全频数分布直方图.

答案补全图见解析

解析在$4.85-5.15$的人数为 150－30－40－50－10＝20 人，

补全频数分布直方图如下：



（3）参加抽测的学生的视力的众数在_______范围内；中位数在_______范围内.

答案 1．$4.25-4.55$

2．$4.25-4.55$

解析由补全的频数分布直方图可知，人数出现最多的有 50 人，在$4.25-4.55$范围内；

抽查的人数为 150 人，第 75 和 76 个数的平均数为中位数，在$4.25-4.55$范围内；

故众数和中位数都在$4.25-4.55$范围内.

（4）试估计该市学生视力正常的人数约为____人.

答案 6000

解析∵视力正常所占的百分比为 20%，

∴该市学生视力正常的人数约为$30000\times20\%=6000$人.

22．在$\triangle ABC$中，AB、BC、AC三边的长分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$，求这个三角形的面积.

小宝同学在解答这道题时，先建立一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点$\triangle ABC$（即$\triangle ABC$三个顶点都在小正方形的顶点处），如图 1 所示，这样不需求$\triangle ABC$的高，而借用网格就能计算出它的面积.

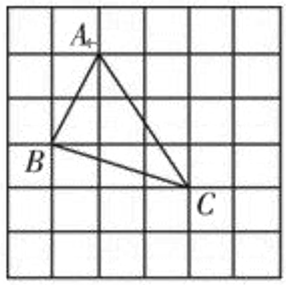


图 1

（1）请你将△ABC 的面积直接填写在横线上______.

答案 $\frac{7}{2}$

解析 △ABC 的面积为 $\frac{7}{2}$.

（2）思维拓展：我们把上述求△ABC 面积的方法叫做构图法．若△ABC 三边的长分别为 $\sqrt{2}a$、$\sqrt{13}a$、$\sqrt{17}a$（$a>0$），请利用图 2 的正方形网格（每个小正方形的边长为 a）画出相应的△ABC，并求出它的面积填写在横线上________.

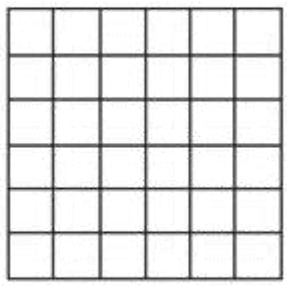


图 2

答案 $\frac{5}{2}a^2$

解析 △ABC 的面积为 $\frac{5}{2}a^2$，

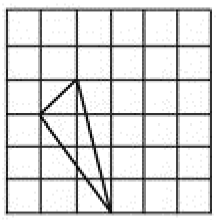


图2

（3）若△ABC 中有两边的长分别为 $\sqrt{2}a$、$\sqrt{10}a$（$a>0$），且△ABC 的面积为 $2a^2$，试运用构图法在图 3 的正方形网格（每个小正方形的边长为 a）中画出所有符合题意的△ABC（全等的三角形视为同一种情况），并求出它的第三条边长填写在横线上________.

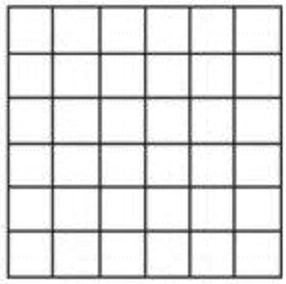


图 3

答案 $4a$ 或 $2\sqrt{2}a$

解析图中三角形为符合题意的三角形.

第三边的长度为 $4a$ 或 $2\sqrt{2}a$.

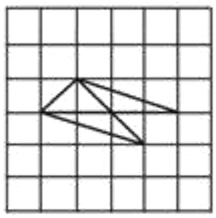


图3

23．已知关于 x 的方程 $(m+1)x^2-(m-1)x-2=0$，

（1）求证：不论 m 为任何实数，此方程总有实数根.

答案证明见解析.

解析 $\Delta=\left[-(m-1)\right]^2-4\times(-2)\times(m+1)$

$=m^2-2m+1+8m+8$

$=m^2+6m+9$

$=(m+3)^2$，

$\therefore \Delta \geqslant 0$ 恒成立.

$\therefore$ 不论 m 为任何实数，此方程总有实数根.

（2）若方程 $(m+1)x^2-(m-1)x-2=0$ 有两个不同的整数根，且 m 为正整数，求 m 的值.

答案 $m=1$ 或 $m=0$ 或 $m=-2$

解析解 $(m+1)x^2-(m-1)x-2=0$，

得 $x_1=1$， $x_2=-\dfrac{2}{m+1}$，

$\because$ 方程有两个不同的整数根，且 m 为正整数，

$\therefore m+1=2$ 或 $m+1=1$ 或 $m+1=-1$，

解得 $m=1$ 或 $m=0$ 或 $m=-2$.

24．已知 $\angle ABC=90°$，点 P 为射线 BC 上任意一点（点 P 与点 B 不重合），分别以 AB 、AP

为边在 $\angle ABC$ 的内部作等边 $\triangle ABE$ 和 $\triangle APQ$，连接 QE 并延长交 BP 于点 F．

（1）如图 1，若 $AB=2\sqrt{3}$，点 A、E、P 恰好在一条直线上时，求此时 EF 的长（直接写出结果）.

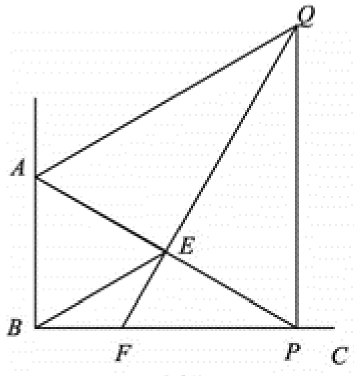


图 1

答案 $EF=2$．

（2）如图 2，当点 P 为射线 BC 上任意一点时，猜想 EF 与图中的哪条线段相等（不能添加辅助线产生新的线段），并加以证明．

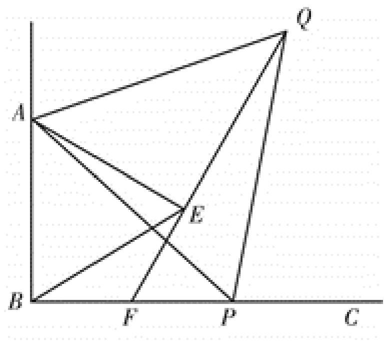


图 2

答案 $EF=BF$．

解析 $\because \angle BAP=\angle BAE-EAP=60°-\angle EAP$，

$\angle EAQ=\angle QAP-\angle EAP=60°-\angle EAP$，

$\therefore \angle BAP=\angle EAQ$，

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle AEQ$ 中，

$AB=AE$，$\angle BAP=\angle EAQ$，$AP=AQ$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle AEQ$

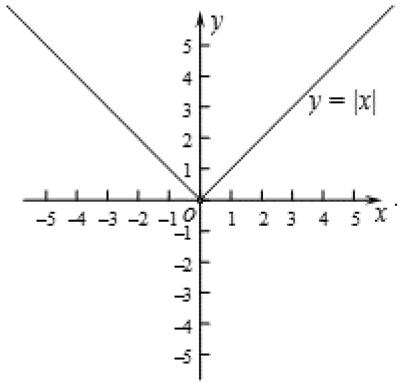
$\therefore \angle AEQ=\angle ABP=90°$．

$\angle BEF=180°-\angle AEQ-\angle AEB=180°-90°-60°=30°$，

又 $\because \angle EBF=90°-60°=30°$，

$\therefore EF=BF$．

25．阅读下面材料：小明研究了这样一个问题：求使得等式 $kx+2-|x|=0\ (k>0)$ 成立的 x 的个数．小明发现，先将该等式转化为 $kx+2=|x|$，再通过研究函数 $y=kx+2$ 的图象与函数 $y=|x|$ 的图象（如图）的交点，使问题得到解决．



（1）当 $k=1$ 时，使得原等式成立的 x 的个数为____________．

答案 1

解析当 $k=1$ 时，使得原等式成立的 x 的个数为 1．

（2）当 $0<k<1$ 时，使得原等式成立的 x 的个数为________．

答案 2

解析当 $0<k<1$ 时，使得原等式成立的 x 的个数为 2．

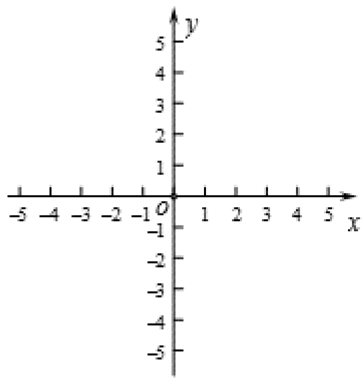
（3）当 $k>1$ 时，使得原等式成立的 x 的个数为_______．

答案 1

解析当 $k>1$ 时，使得原等式成立的 x 的个数为 1．

（4）参考小明思考问题的方法，解决问题：

关于 x 的不等式 $x^2+a-\dfrac{4}{x}<0\ (a>0)$ 只有一个整数解，求 a 的取值范围．



答案 $0<a<3$

解析将不等式 $x^2+a-\dfrac{4}{x}<0(a>0)$ 转化为 $x^2+a<\dfrac{4}{x}(a>0)$，

研究函数 $y=x^2+a(a>0)$ 与函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象的交点.

∵函数 $y=\dfrac{4}{x}$ 的图象经过点 $A(1,4)$，$B(2,2)$，

函数 $y=x^2$ 的图象经过点 $C(1,1)$，$D(2,4)$，

若函数 $y=x^2+a(a>0)$ 经过点 $A(1,4)$，则 $a=3$，

结合图象可知，当 $0<a<3$ 时，关于 x 的不等式 $x^2+a<\dfrac{4}{x}\ (a>0)$ 只有一个整数解.

也就是当 $0<a<3$ 时，关于 x 的不等式 $x^2+a-\dfrac{4}{x}<0$ 只有一个整数解.

26．对于平面直角坐标系 xOy 中的点 $P(a,b)$，若点 P' 的坐标为 $\left(a+\dfrac{b}{k},ka+b\right)$（其中 k 为常数，且 $k\neq 0$），则称点 P' 为点 P 的"K 属派生点".

例如：$P(1,4)$ 的"2 属派生点"为 $P'\left(1+\dfrac{4}{2},2\times 1+4\right)$．即 $P'(3,6)$.

（1）点 $P(-1,-2)$ 的"2 属派生点"P' 的坐标为________.

答案 $(-2,-4)$

解析根据派生点的定义可以求出.

（2）若点 P 的"k 属派生点"P' 的坐标为（3，3），请写出一个符合条件的点 P 的坐标___.

答案答案不唯一，如（1，2）

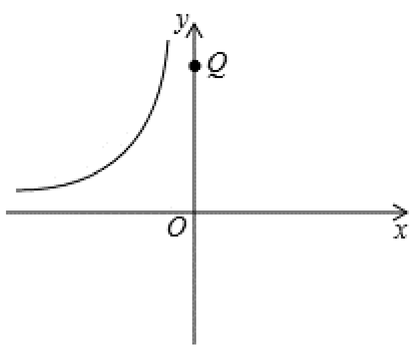
解析答案不唯一，只需横、纵坐标之和为 3 即可，如（1，2）.

（3）若点 P 在 x 轴的正半轴上，点 P 的"k 属派生点"为 P' 点，且△OPP' 为等腰直角三角形，则 k 的值为____________.

答案 ± 1

解析设点 $P(m,0)$，$P'(m,km)$，△OPP' 为等腰直角三角形，所以 $k=\pm 1$.

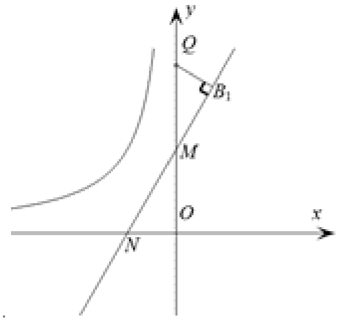
（4）如图，点 Q 的坐标为 $(0,4\sqrt{3})$，点 A 在函数 $y=-\dfrac{4\sqrt{3}}{x}(x<0)$ 的图象上，且点 A 是点 B 的"$-\sqrt{3}$ 属派生点"，当线段 BQ 最短时，求 B 点坐标.



答案 $B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$.

解析设 $B(a,b)$.

$\because B$ 的"$-\sqrt{3}$ 属派生点"是 A，



$\therefore A\left(a-\frac{b}{\sqrt{3}},-\sqrt{3}a+b\right)$，

$\because$ 点 A 还在反比例函数 $y=-\frac{4\sqrt{3}}{x}$ 的图象上，

$\therefore \left(a-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(-\sqrt{3}a+b\right)=-4\sqrt{3}$，

$\therefore \left(b-\sqrt{3}a\right)^2=12$，

$\because b-\sqrt{3}a>0$，

$\therefore b-\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$.

$\therefore b=\sqrt{3}a+2\sqrt{3}$，

$\therefore B$ 在直线 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 上

过 Q 作 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 的垂线 QB_1，垂足为 B_1，

$\because Q\left(0,4\sqrt{3}\right)$，且线段 BQ 最短，

$\therefore B_1$ 即为所求的 B 点，

$\therefore$ 易求得 $B\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$.