2015－2016学年北京海淀区人大附中初二下学期期中数学试卷

一、选择题

1．下列长度的三根木棒能组成直角三角形的是

A．3，4，6　　B．1，1，2　　C．1，$\sqrt{2}$，3　　D．6，8，10

答案D

解析勾股定理逆定理，只需验证两小边的平方和等于最长边的平方即可

$\because 6^2+8^2=10^2$，故可以组成直角三角形，故答案选D

2．下列式子为最简二次根式的是

A．$\sqrt{4}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{8}$　　D．$\sqrt{\frac{1}{2}}$

答案B

解析由最简二次根式的定义知，最简二次根式为$\sqrt{5}$，故答案为B

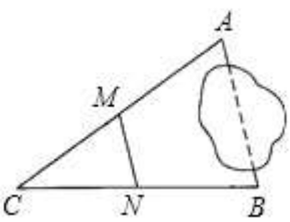
3．一次函数$y=-2x+1$的图象不经过下列哪个象限

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

答案C

解析在一次函数中，当$k<0$时图象过二、四象限，$b>0$时图象和y轴的交于正半轴，故图象过第一、二、四象限，不过第三象限，故答案选C

4．如图，平地上A、B两点被池塘隔开，测量员在岸边选一点C，并分别找到AC和BC的中点M、N，测量得$MN=16$米，则A、B两点间的距离为



A．30米　　B．32米　　C．36米　　D．48米

答案B

解析考察三角形中位线定理，$\therefore M$、N分别为AC、BC的中点

$\therefore MN=\frac{1}{2}AB$

$\therefore AB=2MN=2\times16=32$米，故答案选B

5．已知一次函数$y=kx+b$图象上两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，若$x_1<x_2$，则有$y_1>y_2$，由此判断下列不等式恒成立的是

A．$k>0$　　B．$k<0$　　C．$b>0$　　D．$b\leqslant0$

答案B

解析有一次函数性知，当$x_1<x_2$，$y_1>y_2$时，函数为减函数，图象过第二、四象限

$\therefore k<0$，与b值没关系，故答案选B

6．用配方法解方程$x^2-6x-7=0$时，原方程应变形为

A．$(x-3)^2=2$　　B．$(x+3)^2=2$　　C．$(x+3)^2=16$　　D．$(x-3)^2=16$

答案 D

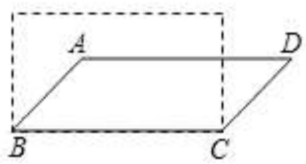
解析∵$x^2-6x-7=0$

$x^2-6x+9=7+9$

∴$(x-3)^2=16$

故答案选 D

7．如图，若将四根木条钉成的矩形木框变形为平行四边形 $ABCD$ 的形状，并使其最小内角为 $30°$，则下面说法正确的是

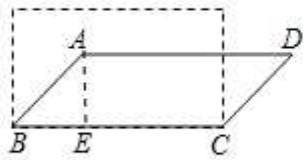


A．面积变为原来的一半，周长不变　　B．周长变为原来的一半，面积不变

C．周长和面积都变为原来的一半　　D．周长和面积都不变

答案 A

解析四边形的周长为四条边长度之和，变形后平行四边形的四条边与矩形边长分别相等，故周长不变



过点 A 作 AE 垂直于 BC 于点 E，∵$\angle ABE=30°$

∴$AE=AB\sin 30°=\dfrac{1}{2}AB$

∴$S_{平行四边形ABCD}=BC\cdot AE=\dfrac{1}{2}BC\cdot AB=\dfrac{1}{2}S_{矩形ABCD}$，

故面积变为原来的一半；故答案选 A

8．图 1 是我国古代著名的“赵爽弦图”的示意图，它是由四个全等的直角三角形围成的，若 $AC=6$，$BC=5$，将四个直角三角形中边长为 6 的直角边分别向外延长一倍，得到图 2 所示的“数学风车”，则这个风车的外围周长是

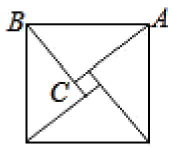


图1

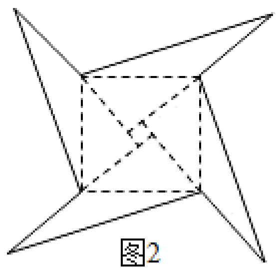


图2

A．76　　B．72　　C．52　　D．42

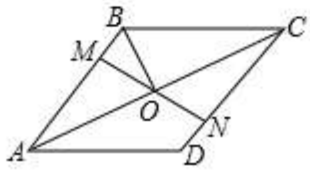
答案 A

解析依题意设“数学风车”的斜边长为 x

∴$x=\sqrt{5^2+(6+6)^2}=13$

∴这个风车的外围周长为$(13+6)\times 4=76$，故答案选 A

9．如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 M、N 分别在 AB、CD 上，$AM=CN$，MN 与 AC 交于点 O，连接 BO，若 $\angle BAC=29°$，则 $\angle OBC$ 为



A．29°　　B．58°　　C．61°　　D．71°

答案 C

解析考察菱形性质，∵四边形 $ABCD$ 为菱形

∴ $AB \parallel CD$，$AB = BC$

∴ $\angle MAO = \angle NCO$，$\angle AMO = \angle CNO$

在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle CNO$ 中 $\begin{cases} \angle MAO = \angle NCO \\ AM = CN \\ \angle AMO = \angle CNO \end{cases}$

∴ $\triangle AMO \cong \triangle CNO$

∴ $AO = CO$

∵ $AB = BC$

∴ $BO \perp AC$

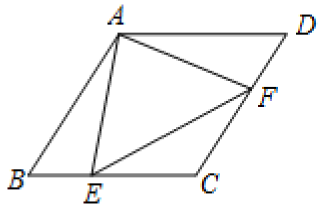
∴ $\angle BOC = 90°$

∵ $\angle DAC = 29°$

∴ $\angle OBC = 90° - 29° = 61°$

故答案选 C

10．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B = 60°$，点 E、F 分别从点 B、D 同时出发以同样的速度沿边 BC、DC 向点 C 运动，则以下结论：① $AE = AF$；② $\angle CEF = \angle CFE$；③当点 E 为 BC 边的中点时，$\triangle AEF$ 是等边三角形；④当点 E 为 BC 边的中点时，$\triangle AEF$ 的面积最大，正确的个数是



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案 C

解析∵点 E、F 分别从点 B、D 出发以同样的速度沿边 BC、DC 向点 C 运动

∴ $BE = DF$

∵ $AB = AD$，$\angle B = \angle D$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ADF$

∴ $AE = AF$，①正确

∴ $CE = CF$

∴ $\angle CEF = \angle CFE$，②正确

∵在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B = 60°$

∴ $AB = BC$

∴△ABC 是等边三角形

∴当点 E 、 F 分别为边 BC 、 DC 的中点时， $BE = \frac{1}{2}AB$ ， $DF = \frac{1}{2}AD$

∴△ABE 和△ADF 是直角三角形，且 $\angle BAE = \angle DAF = 30°$

∴ $\angle EAF = 120°$

∴△AEF 是等边三角形，③正确

∵ $S_{\triangle AEF} = S_{\text{菱形}ABCD} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ADF} - S_{\triangle CEF}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}AB^2 - \frac{1}{2}BE \cdot AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(AB - BE\right)^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}BE^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$$

∴△AEF 的面积是 BE 的二次函数

∴当 $BE = 0$ 时，△AEF 的面积最大，④错误

故正确的序号有①②③

二、填空题

11．在函数 $y = \sqrt{x-1}$ 中，自变量 x 的取值范围是________．

答案 $x \geqslant 1$

解析根据题意得 $x - 1 \geqslant 0$

解得 $x \geqslant 1$

故答案为 $x \geqslant 1$

12．方程 $2x^2 - 8 = 0$ 的解为__________．

答案 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -2$

解析解方程 $2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

∴ $x_1 = 2$ ， $x_2 = -2$

13．若一次函数 $y = -6x$ 图象沿 y 轴向下平移 5 个单位，则平移后图象的解析式为______．

答案 $y = -6x + 5$

解析一次函数的几何变换中，沿 y 轴平移常数项变换，且满足“上加下减”的规律，故答案为 $y = -6x + 5$.

14．若关于 x 的一元二次方程 $\left(m-1\right)x^2 + x + m^2 - 1 = 0$ 有一个根为 0，则 m 的值为_____．

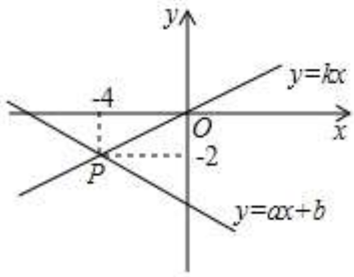
答案 $m = -1$

解析∵根据题意，将 $x = 0$ 带入方程得

$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m^2 - 1 = 0 \end{cases}$，解得 $m = -1$

15．如图，已知函数 $y = ax + b$ 和 $y = kx$ 的图象交于点 p ，则根据图象可得，二元一次方程组

$\begin{cases} y=ax+b \\ y=kx \end{cases}$ 的解是__________.



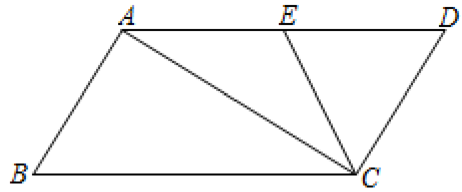
答案 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

解析图象交于 P 点 $(-4,-2)$，即 $x=-4$， $y=-2$ 同时满足两个一次函数的解析式，故方程组

$\begin{cases} y=ax+b \\ y=kx \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

故方程组的解为 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

16．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AC\perp CD$ ， E 为 AD 中点，若 $CE=3$，则 $BC=$____ .



答案 6

解析根据平行四边形和直角三角形的性质得

在 $ABCD$ 中， $AD=BC$

又∵ $AC\perp CD$ ， E 为 AD 中点

∴在 $Rt\triangle ACD$ 中， $CE=\frac{1}{2}AD$

∵ $CE=3$

∴ $BC=AD=6$

17．某地区积极倡导“清洁空气，绿色出行”，大力提升自行车出行比例，小颖收集了该地区近几年公共自行车的相关信息（如下表），发现利用公共自行车出行人数与公共自行车投放数量之间近似成正比例关系．

2013－2016 年公共自行车投放数量与公共自行车出行人数统计表

年份	公共自行车投放数量（万辆）	利用公共自行车出行人数（万人）
2013	2.5	约17.6
2014	4	约 27.6
2015	5	约 34.5
2016	6	约_______

根据小颖的发现，请估计，该地区 2016 年利用公共自行车出行人数为_____万人．（直接写出结果，精确到0.1）

答案 1． 42.0

2． 42.0

解析根据表格求出利用公共自行车出行人数与公共自行车投放数量之间的比值

∵$17.6\div 2.5\approx 7.04$，$27.6\div 4\approx 6.9$，$34.5\div 5\approx 6.9$

∴估计该地区 2016 年利用公共自行车出行的人数为：$6\times 7.0\approx 42.0$

18．为了保证铁路的两条直铺的铁轨互相平行，只要使互相平行的加载铁轨之间的枕木长相等就可以了，请你说出这样判断的数据依据___________．

答案两条平行线间的距离相等

解析根据平行和垂直的性质可知：两条平行线间的距离相等

19．联想等腰三角形的概念，给出定义，有一组邻边相等的凸四边形叫做等腰四边形，在直角坐标系下，已知$A(0,3)$，$B(0,7)$，$C(-4,0)$，D为x轴上的动点，若以A、B、C、D为顶点的四边形为等腰四边形，则点D的坐标为__________．

答案(-9.0)或$\left(-\sqrt{7},0\right)$

解析根据距离公式知，设凸四边形中点$D(x,0)$

① $AB=AD$，$AB=4$，$AD=\sqrt{(0-x)^2+(3-0)^2}=\sqrt{x^2+9}=4$

∴$x=\pm\sqrt{7}$

∵四边形为凸多边形

∴$x=-\sqrt{7}$

∴$D\left(-\sqrt{7},0\right)$

② $AC=CD$，$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$CD=5$

∴$D(-9,0)$

综上所述，D点坐标为$(-9,0)$或$\left(-\sqrt{7},0\right)$

三、解答题

20．计算：$\sqrt{27}-\sqrt{2}\times\sqrt{8}+\sqrt{(-4)^2}$．

答案$3\sqrt{3}$

解析原式$=3\sqrt{3}-\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}+4$

$=3\sqrt{3}-4+4$

$=3\sqrt{3}$

21．解方程：

（1）$x^2+3x-1=0$．

答案$x_1=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$， $x_2=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

解析$x^2+3x-1=0$，$a=1$，$b=3$，$c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=9+4=13$

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore x_1=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$， $x_2=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$

（2）$x(2x-3)=4x-6$

答案$x_1=\dfrac{3}{2}$， $x_2=2$

解析原方程可化为$2x^2-3x=4x-6$

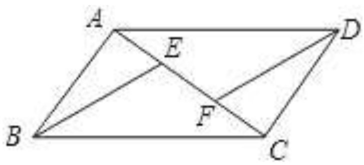
$2x^2-7x+6=0$

$(2x-3)(x-2)=0$

$\therefore x_1=\dfrac{3}{2}$， $x_2=2$

22．如图，E、F是平行四边形$ABCD$对角线AC上的两点，$AF=CE$．

求证：$BE=DF$．



答案证明见解析

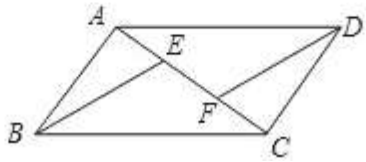
解析方法一：

$\because$四边形$ABCD$为平行四边形

$\therefore AD=BC$， $AD\parallel BC$

$\therefore \angle DAF=\angle BCE$

在$\triangle DAF$和$\triangle BCE$中



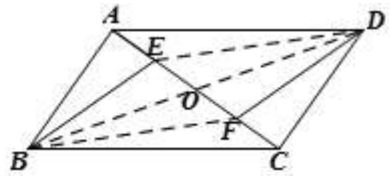
$$\begin{cases}AD=CB\\ \angle DAF=\angle BCE\\ AF=CE\end{cases}$$

$\therefore \triangle DAF\cong\triangle BCE$

$\therefore DF=BE$

方法二：

连接 BD 交 AC 于点 O，连接 DE 、 BF



∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形

∴ $AO=CO$， $BO=DO$

∵ $AF=CE$

∴ $AF-AO=CE-CO$，即 $OF=OE$

∴四边形 $EBFD$ 为平行四边形

∴ $BE=DF$

23．已知 $m^2-5m-24=0$，求 $(m-1)(2m-1)-(m+1)^2+1$ 的值.

答案 25

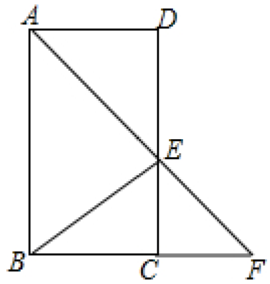
解析原式 $=2m^2-m-2m+1-m^2-2m-1+1$

$=m^2-5m+1$

∵ $m^2-5m=24$

∴原式 $=24+1=25$

24．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 CD 于点 E，交 BC 的延长线于点 F，连接 BE， $\angle F=45°$.



（1）求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

答案证明见解析

解析∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

∵ $AD \parallel BC$

∴ $\angle DAF=\angle F$

又∵ $\angle F=45°$， AF 平分 $\angle BAD$

∴ $\angle EAB=\angle DAE=45°$

∴ $\angle DAB=90°$

又∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

∴平行四边形 $ABCD$ 是矩形

（2）若 $AB=14$， $DE=8$，求 BE 的长.

答案 $BE=10$

解析在矩形 $ABCD$ 中， $AB=CD=14$

又∵ $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形

∴ $AD=DE=8$

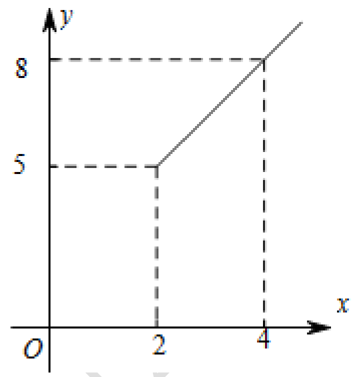
∴ $BC=8$， $CE=6$

在 $Rt\triangle BCE$ 中

$BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

$\therefore BE=10$

25．某地出租车计费方法如图，x(km)表示行驶里程，y(元)表示车费，请根据图象解答下列问题．



（1）该地出租车的起步价是_______元．

答案 5

解析根据图象知该地出租车的起步价是 5 元．

（2）当 $x>2$ 时，求 y 与 x 之间的函数关系式．

答案 $y=\dfrac{3}{2}x+2$

解析由图象知，y 与 x 的图象为一次函数，并且经过点 $(2,5)$、$(4,8)$

$\therefore$ 设该一次函数的解析式为 $y=kx=b$

则有 $\begin{cases}5=2k+b\\8=4k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{2}\\b=2\end{cases}$

故 $y=\dfrac{3}{2}x+2$

（3）若某乘客有一次乘出租车的里程为 10km，则这位乘客需付出租车车费_____元．

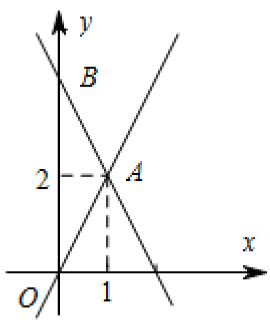
答案 17

解析将 $x=10$ 带入一次函数解析式，得 $y=\dfrac{3}{2}\times10+2=17$

故出租车费为 17 元．

四、解答题

26．如图，已知一次函数 $y=kx+4$ 图象交直线 OA 于点 $A(1,2)$，交 y 轴于点 B，点 C 为坐标平面内一点．



（1）求 k 值.

答案 $k=-2$

解析将点 $A(1,2)$ 带入一次函数 $y=kx+4$ 中

$2=k+4$，得 $k=-2$

（2）若以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形为菱形，则 C 点坐标为________.

答案 $(-1,2)$

解析 ∵ $k=-2$

∴一次函数解析式为 $y=-2x+4$

∴ B 点坐标为 $(0,4)$

∵以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形为菱形

∴存在 $OB\perp AC$，且 OB 、 AC 互相平分，由对称性得 C 点坐标为 $(-1,2)$

（3）在直线 AB 上找点 D，使 $\triangle OAD$ 的面积与(2)中菱形面积相等，则 D 点坐标为____.

答案 $(2,0)$ 或 $(0,4)$

解析已知 $OB=4$， $AC=2$，∴ $S_{菱形ABCO}=\dfrac{1}{2}OB\times AC=4$

一次函数 $y=-2x+4$ 与 x 轴的交点

令 $y=0$， $0=-2x+4$，∴ $x=2$

∴一次函数 $y=-2x+4$ 与 x 轴的交点为 $(2,0)$

∴当 D 点坐标为 $(2,0)$ 或 $(0,4)$ 时 $\triangle OAD$ 的面积与(2)中菱形面积相等

27．新定义：对于关于 x 的一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，我们称函数 $\begin{cases}y=kx+b(x\leqslant m)\\ y=-kx-b(x>m)\end{cases}$ 为一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的 m 变函数（其中 m 为常数）.

例如：对于关于 x 的一次函数 $y=x+4$ 的 3 变函数为 $\begin{cases}y=x+4(x\leqslant 3)\\ y=-x-4(x>3)\end{cases}$.

（1）关于 x 的一次函数 $y=-x+1$ 的 2 变函数为 y，则当 $x=4$ 时， $y=$_____ .

答案 3

解析根据 m 变函数定义，关于 x 的一次函数 $y=-x+1$ 的 2 变函数为

$$\begin{cases}y=-x+1,x\leqslant 2\\ y=x-1,x>2\end{cases}$$

∴$x=4$时，$y_1=4-1=3$

∴$y_1=3$

（2）关于x的一次函数$y=x+2$的 1 变函数为y_1，关于x的一次函数$y=-\frac{1}{2}x-2$的-1变函数为y_2，求函数y_1和函数y_2的交点坐标.

答案$\left(-\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$和$(0,2)$

解析根据定义得：$y_1=\begin{cases}y=x+2,x\leqslant 1\\y=-x-2,x>1\end{cases}$，$y_2=\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x-2,x\leqslant -1\\y=\frac{1}{2}x+2,x>-1\end{cases}$，

求交点坐标：①$\begin{cases}y=x+2,x\leqslant 1\\y=-\frac{1}{2}x-2,x\leqslant -1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\frac{8}{3}\\y=-\frac{2}{3}\end{cases}$；

②$\begin{cases}y=x+2,x\leqslant 1\\y=\frac{1}{2}x+2,x>-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$；

①$\begin{cases}y=-x-2,x>1\\y=-\frac{1}{2}x-2,x\leqslant -1\end{cases}$，无解；

②$\begin{cases}y=-x-2,x>1\\y=\frac{1}{2}x+2,x>-1\end{cases}$，无解；

综上所述函数y_1和函数y_2的交点坐标为$\left(-\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$和$(0,2)$.

（3）关于x的一次函数$y=2x+2$的 1 变函数为y_1，关于x的一次函数$y=-\frac{1}{2}x-1$的m变函数为y_2.

①当$-3\leqslant x\leqslant 3$时，函数y_1的取值范围是______（直接写出答案）

答案$-8\leqslant y_1\leqslant 4$

解析$-8\leqslant y_1\leqslant 4$

②若函数y_1和函数y_2有且仅有两个交点，则m的取值范围是_____（直接写出答案）

答案$-\frac{6}{5}\leqslant m<-\frac{2}{3}$

解析$-\frac{6}{5}\leqslant m<-\frac{2}{3}$

28．在正方形$ABCD$中，点E是直线BC上一动点（不包含B点和C点），点F是线段AE上一点，过点F作直线MN垂直AE分别交直线AB、CD于点M、N.

（1）如图 1，当点E在线段BC上时，求证：$AE=MN$.

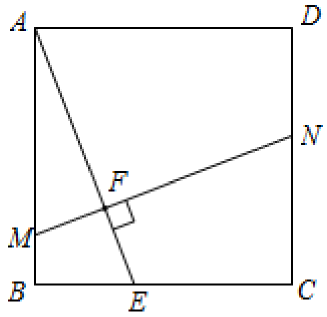


图1

答案证明过程见解析

解析过点 N 作 $NH\perp AB$ 于点 H

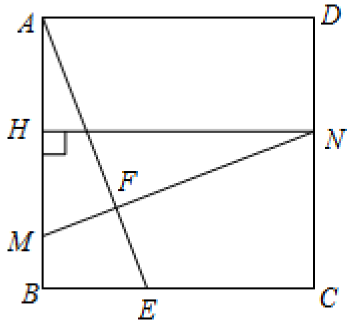
在正方形 $ABCD$ 中，$NH=AB$，$\angle NHB=\angle ABC=90^{\circ}$

又∵ $MN\perp AE$

∴ $\angle AMF+\angle MAF=90^{\circ}$

∵ $\angle AMF+\angle MNH=90^{\circ}$

∴ $\angle MAF=\angle MNH$



在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle NHM$ 中

$$\begin{cases} NH=AB \\ \angle NHB=\angle ABC=90^{\circ} \\ \angle MAF=\angle MNH \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle NHM$

∴ $AE=MN$

（2）如图 2，当点 E 在线段 BC 上时，且满足 $AF=EF$，直线 MN 交直线 BD 于点 G，请猜想线段 MF，FG，GN 之间的数量关系，并证明.

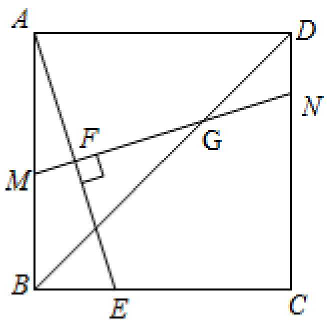


图2

答案 $MF+GN=FG$

解析如图 2，过 E 作 $EJ\parallel AB$ 交 MN 于 J，过 G 作 $QP\parallel AB$ 交 BC 于 Q，交 AD 于 P，连接 AG、GE

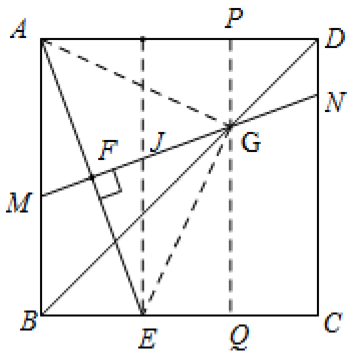
∵ $MN\perp AE$，$AF=EF$

∴ $AG=GE$

∵ $EJ\parallel AB$

∴ $\angle BAE=\angle AEJ$

在 $\triangle AMF$ 和 $\triangle EJF$ 中



$$\begin{cases}\angle BAE=\angle AEJ\\ AF=EF\\ \angle AFM=\angle EFJ\end{cases}$$

$\therefore \triangle EJF \cong \triangle AMF$

$\therefore MF=JF$

$\because \angle PDG=\angle GBC=45°$

$\therefore PD=PG$， $GQ=BQ$

$\because$ 四边形 $ABQP$ 是矩形

$\therefore AP=BQ$

$\therefore AP=GQ$

在 $Rt\triangle GEQ$ 和 $Rt\triangle AGP$ 中

$$\begin{cases}AP=GO\\ AG=GE\end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle GEQ \cong Rt\triangle AGP$

$\therefore PG=EQ$

$\therefore EQ=PD$

$\because$ 四边形 $PDCQ$ 是矩形

$\therefore EQ=QC$

$\because EJ \parallel PQ \parallel DC$

$\therefore GJ=GN$

$\therefore FJ+JG=FG$

$\therefore MF+GN=FG$

（3）当点 E 是直线 BC 上运动时（不包含 B 点和 C 点），在(2)的其他条件下，(2)的结论还成立吗？若成立请直接写成立；若不成立，请直接写出线段 MF 、 FG 、 GN 之间的数量关系.

答案成立

解析成立