

## 北京十二中 2016-2017 学年第二学期期中考试试题

## 初一数学

## 一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 下列计算正确的是（ ）.

- A.  $x^3 \cdot x^2 = x^6$       B.  $x^4 + x^4 = x^8$       C.  $(-x^3)^2 = x^6$       D.  $(-xy)^3 = x^3y^3$

2. 如果不等式组  $\begin{cases} x < 2 \\ x > m \end{cases}$  有解，则  $m$  的取值范围是（ ）.

- A.  $m > 2$       B.  $m \geq 2$       C.  $m < 2$       D.  $m \leq 2$

3. 若  $a > b$ ，则下列等式中一定成立的是（ ）.

- A.  $-3a > -3b$       B.  $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$       C.  $ac^2 > bc^2$       D.  $(m^2 + 1)a > (m^2 + 1)b$

4. 已知  $x + y = -4$ ， $xy = 3$ ，则  $x^2 + y^2 =$ （ ）.

- A. 22      B. 10      C. 13      D. 5

5. 已知  $2x - 3y + 1 = 0$  且  $m - 6x + 9y = 4$ ，则  $m$  的值为（ ）.

- A. 7      B. 3      C. 1      D. 5

6. 下列等式中，正确的有（ ）.

- ①  $(a-3)^2 = a^2 - 9$ ；      ②  $(a+2)^2 = a^2 + 2a + 4$ ；  
③  $(a+3)(3-a) = a^2 - 9$ ；      ④  $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ .

- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

7. 若  $(x-a)(x-b) = x^2 + kx + ab$ ，则  $k$  的值为（ ）.

- A.  $a+b$       B.  $-a-b$       C.  $a-b$       D.  $b-a$

8. 已知  $a^2 + 2ab = 13$ ， $3ab + 2b^2 = 21$ ，则  $2a^2 + 13ab + 6b^2 - 44$  的值为（ ）.

- A. 45      B. 66      C. 77      D. 55

9. 已知  $a$ 、 $b$  为常数，若  $ax + b > 0$  的解集是  $x < \frac{1}{4}$ ，则  $bx - a < 0$  的解集是（ ）.

- A.  $x > -4$       B.  $x < -4$       C.  $x > 4$       D.  $x < 4$

10. 已知  $a$ 、 $b$  满足等式  $x = a^2 + b^2 + 9$ ， $y = 2(a - 3b - 2)$ ，则  $x$ 、 $y$  的大小关系是（ ）.

- A.  $x < y$       B.  $x \leq y$       C.  $x > y$       D.  $x \geq y$

## 二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

11. 已知方程组  $\begin{cases} 2x+2y=10 \\ 3x+2y=15 \end{cases}$ , 则  $x+y=$  \_\_\_\_\_.
12. 若不等式  $(m-3)x > m-3$  的解集为  $x < 1$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
13. 若  $\frac{3}{4}x^{3m-1} + 5y^{7-3m} - 8 = 0$  是关于  $x$ 、 $y$  的二元一次方程, 则  $mn=$  \_\_\_\_\_.
14. 如果  $x^2 + (k-3)x + 16$  是完全平方式, 则  $k=$  \_\_\_\_\_.
15. 已知  $(x^2 + x - 3)(1 - kx)$  化简后不含  $x$  项, 则  $k=$  \_\_\_\_\_.
16. 不等式组  $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 2(x-1) - (x-3) > 0 \end{cases}$  的正整数解为\_\_\_\_\_.
17. 若  $a^m = 2$ ,  $a^n = 3$ , 则  $a^{3m+2n} =$  \_\_\_\_\_.
18. 已知  $a - \frac{1}{a} = 2$ , 则  $\frac{a^2}{a^4 - a^2 + 1} =$  \_\_\_\_\_.
19. 已知  $m^2 = m+1$ ,  $n^2 = n+1$ , 则  $m^3 + n^3 =$  \_\_\_\_\_.
20. 若  $(2x+1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , 则  $a_4 + a_2 =$  \_\_\_\_\_.

### 三、计算题（每小题 4 分，共 16 分）

21.  $2a(a-b+3c)$ .

22.  $109^2$ .

23.  $(2a-3b-1)(2a+3b+1)$ .

24.  $\left[(x+y)(x-y)-(x-y)^2+2y(x-y)\right]\div(-4y)$ .

四、解方程，不等式组（每小题 4 分，共 12 分）

25. 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} \\ 3(x-1) = y+1 \end{cases}.$$

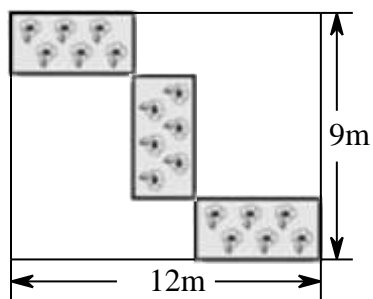
【答案】见解析

26. 
$$\begin{cases} 7(x-5)+2(x+1) > -15 \\ \frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} < 0 \end{cases}.$$

27.  $mx - 2 > x + 3$ .

五、解答题（28-32，每小题 5 分，33 小题 7 分，共 32 分）

28. 在长为 12m，宽为 9m 的长方形空地上，沿平行于长方形各边的方向分别割出三个大小完全一样的小长方形花圃，其示意图如图所示，求其中一个小长方形花圃的长和宽.



29. 已知  $\begin{cases} 2x+3y=4k \\ 3x+2y=3k+1 \end{cases}$  且  $-1 < y-x < 2$ , 求  $k$  的取值范围.

30. 已知  $x^2 + x - 10 = 0$ ，求代数式  $(x-1)^2 + (x+2)(x-2) - x(x-3)$  的值.

31. 已知  $a = \frac{1}{3}m + 2015$ ， $b = \frac{1}{3}m + 2016$ ， $c = \frac{1}{3}m + 2017$ ，求  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$  的值.

32. 阅读材料：若  $m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0$ ，求  $m$ ， $n$  的值.

解：∵  $m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0$ ，

$$\therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 4n + 4) = 0,$$

$$\therefore (m-n)^2 + (n-2)^2 = 0,$$

$$\therefore (m-n)^2 = 0, (n-2)^2 = 0,$$

$$\therefore n = 2, m = 2.$$

根据你的观察，探究下面的问题：

(1)  $a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10 = 0$ ，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 已知  $x^2 + 2y^2 - 2xy + 8y + 16 = 0$ ，求  $xy$  的值.

(3) 已知  $\triangle ABC$  的三边长  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都是正整数，且满足  $2a^2 + b^2 - 4a - 8b + 18 = 0$ ，求  $\triangle ABC$  的周长. (提示：三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边)

33. 某超市老板到批发中心选购甲、乙两种品牌的文具盒共 300 个，乙品牌的进货单价比甲品牌进货单价多 15 元，当购进甲品牌的文具盒 120 个时，购进甲、乙品牌文具盒共需 7200 元.

(1) 求甲、乙两种品牌的文具盒进货单价.

(2) 若该超市每销售 1 个甲种品牌的文具盒可获利 4 元，每销售 1 个乙种品牌的文具盒可获利 9 元，根据学生需求，超市老板决定，准备用不超过 6300 元购进甲、乙两种品牌的文具盒，且这两种品牌的文具盒全部售出后获得不低于 1795 元，问该超市有几种进货方案，分别是什么方案.

(3) 哪种方案能使获利最大，最大获得为多少元.

## 北京十二中 2016-2017 学年第二学期期中考试试题

## 初一数学

## 一、选择题（每题 2 分，共 20 分）

1. 下列计算正确的是（ ）.

A.  $x^3 \cdot x^2 = x^6$

B.  $x^4 + x^4 = x^8$

C.  $(-x^3)^2 = x^6$

D.  $(-xy)^3 = x^3y^3$

【答案】C

【解析】选项 A 应该是  $x^3 \cdot x^2 = x^5$ ,B 应该是  $x^4 + x^4 = 2x^4$ ,D 应该是  $(-xy)^3 = -x^3y^3$ ,

故选 C.

2. 如果不等式组  $\begin{cases} x < 2 \\ x > m \end{cases}$  有解, 则  $m$  的取值范围是（ ）.

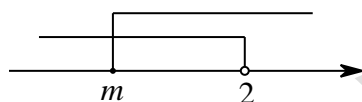
A.  $m > 2$

B.  $m \geq 2$

C.  $m < 2$

D.  $m \leq 2$

【答案】C

【解析】 $\because$  不等式有解, $\therefore$  根据数轴, $\therefore$  判断  $m < 2$ .3. 若  $a > b$ , 则下列等式中一定成立的是（ ）.

A.  $-3a > -3b$

B.  $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$

C.  $ac^2 > bc^2$

D.  $(m^2 + 1)a > (m^2 + 1)b$

【答案】D

【解析】 $\because a > b$ ,

根据不等式性质,

选项 A 应该是  $-3a < -3b$ ,B 应该是  $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$ ,C 应该是  $ac^2 \geq bc^2$ .

故选 D.

4. 已知  $x+y=-4$ ,  $xy=3$ , 则  $x^2+y^2=(\quad)$ .

A. 22

B. 10

C. 13

D. 5

【答案】B

【解析】 $\because x+y=4$ ,

$$\therefore (x+y)^2=16,$$

$$\therefore x^2+y^2+2xy=16,$$

$$\because xy=3,$$

$$\therefore x^2+y^2+6=16,$$

$$x^2+y^2=10.$$

5. 已知  $2x-3y+1=0$  且  $m-6x+9y=4$ , 则  $m$  的值为  $(\quad)$ .

A. 7

B. 3

C. 1

D. 5

【答案】C

【解析】 $\because 2x-3y+1=0$ ,

$$\therefore 2x-3y=-1,$$

$$\text{又} \because m-6x+9y=4,$$

$$m-3(2x-3y)=4,$$

$$m+3=4,$$

$$m=1.$$

6. 下列等式中, 正确的有  $(\quad)$ .

$$\textcircled{1} (a-3)^2=a^2-9;$$

$$\textcircled{2} (a+2)^2=a^2+2a+4;$$

$$\textcircled{3} (a+3)(3-a)=a^2-9;$$

$$\textcircled{4} (a-b)^2=(a+b)^2-4ab.$$

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】A

【解析】 $\textcircled{1} (a-3)^2=a^2-6a+9$  故 $\textcircled{1}$ 错;

$$\textcircled{2} (a+2)^2=a^2+4a+4, \text{ 故} \textcircled{2} \text{错};$$

$$\textcircled{3} (a+3)(3-a)=9-a^2 \text{ 故} \textcircled{3} \text{错};$$

$$\textcircled{4} (a-b)^2=a^2-2ab+b^2=(a+b)^2-4ab, \text{ 故} \textcircled{4} \text{对},$$

故选 A.



7. 若  $(x-a)(x-b)=x^2+kx+ab$ ，则  $k$  的值为 ( ).

A.  $a+b$

B.  $-a-b$

C.  $a-b$

D.  $b-a$

【答案】B

【解析】 $\because (x-a)(x-b)=x^2+kx+ab$ ,

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab,$$

$\therefore$  知  $k=-a-b$ .

8. 已知  $a^2+2ab=13$ ,  $3ab+2b^2=21$ , 则  $2a^2+13ab+6b^2-44$  的值为 ( ).

A. 45

B. 66

C. 77

D. 55

【答案】A

【解析】 $\because a^2+2ab=13$  ①,  $3ab+2b^2=21$  ②,

$$\text{①} \times 2 \text{ 得, } 2a^2+4ab=26 \text{ ③,}$$

$$\text{②} \times 3 \text{ 得 } 9ab+6b^2=63 \text{ ④,}$$

$$\therefore \text{③} + \text{④} \text{ 得 } 2a^2+13ab+6b^2=89,$$

$$\therefore 2a^2+13ab+6b^2-44=89-44=45.$$

9. 已知  $a$ 、 $b$  为常数, 若  $ax+b>0$  的解集是  $x<\frac{1}{4}$ , 则  $bx-a<0$  的解集是 ( ).

A.  $x>-4$

B.  $x<-4$

C.  $x>4$

D.  $x<4$

【答案】B

【解析】 $\because ax+b>0$  的解集  $x<\frac{1}{4}$ ,

$$\therefore x<-\frac{b}{a},$$

$$\text{则 } -\frac{b}{a}=\frac{1}{4}, \therefore a<0,$$

$$a=-4b, \therefore b>0,$$

$$\therefore bx-a<0,$$

$$bx+4b<0,$$

$$x+4<0,$$

$$x<-4.$$

10. 已知  $a$ 、 $b$  满足等式  $x = a^2 + b^2 + 9$ ， $y = 2(a - 3b - 2)$ ，则  $x$ 、 $y$  的大小关系是 ( )。

- A.  $x < y$                       B.  $x \leq y$                       C.  $x > y$                       D.  $x \geq y$

【答案】C

【解析】判断大小用作差法，

$$\begin{aligned} x - y &= a^2 + b^2 + 9 - 2a + 6b + 4 \\ &= (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 6b + 9) + 3 \\ &= (a - 1)^2 + (b + 3)^2 + 3. \\ \because (a - 1)^2 &\geq 0, (b + 3)^2 \geq 0, \\ \therefore (a - 1)^2 + (b + 3)^2 + 3 &> 0, \\ \therefore x - y &> 0, \\ \therefore x &> y. \end{aligned}$$

## 二、填空题（每题 2 分，共 20 分）

11. 已知方程组  $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 3x + 2y = 15 \end{cases}$ ，则  $x + y =$  \_\_\_\_\_。

【答案】5

【解析】 $\because \begin{cases} 2x + 2y = 10 \text{ ①} \\ 3x + 2y = 15 \text{ ②} \end{cases}$ ， $\therefore \text{①} + \text{②}$  得  $5x + 5y = 25$

$$x + y = 5.$$

12. 若不等式  $(m - 3)x > m - 3$  的解集为  $x < 1$ ，则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

【答案】 $m < 3$

【解析】 $\because$  解集为  $x < 1$ ，

$$\therefore m - 3 < 0,$$

$$\therefore m < 3.$$

13. 若  $\frac{3}{4}x^{3m-1} + 5y^{7-3m} - 8 = 0$  是关于  $x$ 、 $y$  的二元一次方程，则  $mn =$  \_\_\_\_\_。

【答案】 $mn = \frac{4}{3}$

【解析】根据题意， $3m - 1 = 1$ ， $\therefore m = \frac{2}{3}$ ，

$$7 - 3n = 1, \therefore n = 2,$$

$$\therefore mn = \frac{4}{3}.$$

14. 如果  $x^2 + (k-3)x + 16$  是完全平方式, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $k = 11$  或  $-5$

【解析】 根据题意  $k-3 = \pm 8$ ,  $\therefore k = 11$  或  $-5$ .

15. 已知  $(x^2 + x - 3)(1 - kx)$  化简后不含  $x$  项, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $k = -1$

【解析】  $(x^2 + x - 3)(1 - kx) = -kx^3 + (1-k)x^2 + (k+1)x - 3$ ,

$\therefore$  不含  $x$  项,

$\therefore k+1=0$ ,  $k=-1$ .

16. 不等式组  $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 2(x-1)-(x-3) > 0 \end{cases}$  的正整数解为 \_\_\_\_\_.

【答案】 1, 2

【解析】  $\because \begin{cases} x-2 \leq 0 \text{ ①} \\ 2(x-1)-(x-3) > 0 \text{ ②} \end{cases}$ , 解①得  $x \leq 2$ ,

②得  $x > -1$ ,

$\therefore -1 < x \leq 2$ ,

$\therefore$  正整数解 1, 2.

17. 若  $a^m = 2$ ,  $a^n = 3$ , 则  $a^{3m+2n} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 72

【解析】  $\because a^m = 2$ ,  $\therefore a^{3m} = (2)^3 = 8$ ,

$\therefore a^n = 3$ ,  $\therefore a^{2n} = (3)^2 = 9$ ,

$\therefore a^{3m+2n} = 8 \times 9 = 72$ .

18. 已知  $a - \frac{1}{a} = 2$ , 则  $\frac{a^2}{a^4 - a^2 + 1} =$  \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{1}{5}$

【解析】  $\because a - \frac{1}{a} = 2$ ,  $\therefore a^2 = 1 + 2a$ ,

$\therefore \frac{a^2}{a^4 - a^2 + 1} = \frac{1 + 2a}{(1 + 2a)^2 - (1 + 2a) + 1}$

$$\begin{aligned}&= \frac{1+2a}{1+4a+4a^2-1-2a+1} \\&= \frac{1+2a}{1+2a+4a^2} \\&= \frac{a^2}{5a^2} \\&= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

19. 已知  $m^2 = m+1$ ,  $n^2 = n+1$ , 则  $m^3 + n^3 =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 4

【解析】  $\because m^2 = m+1$ ,  $n^2 = n+1$ ,

$$\therefore m^3 + n^3 = m \cdot m^2 + n \cdot n^2$$

$$= m(m+1) + n(n+1)$$

$$= m^2 + n^2 + m + n$$

$$= m+1+n+1+m+n$$

$$= 2m+2n+2.$$

$$\text{又} \because m^2 - n^2 = m - n,$$

$$(m-n)(m+n) = m-n,$$

$$\therefore m-n \neq 0, \therefore m+n=1,$$

$$\therefore m^3 + n^3 = 2(m+n) + 2 = 4.$$

20. 若  $(2x+1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , 则  $a_4 + a_2 =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 120

【解析】 令  $x=0$  时,  $a_0=1$ ,

$$\text{令 } x=1 \text{ 时, } a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 243 \text{ ①,}$$

$$\text{令 } x=-1 \text{ 时, } -a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = -1 \text{ ②,}$$

$$\text{令 ①+② 得 } 2a_4 + 2a_2 + 2a_0 = 242$$

$$2a_4 + 2a_2 = 240$$

$$a_4 + a_2 = 120.$$

## 三、计算题（每小题 4 分，共 16 分）

21.  $2a(a-b+3c)$ .

【答案】见解析

【解析】 $2a(a-b+3c)$

$$= 2a^2 - 2ab + 6ac.$$

22.  $109^2$ .

【答案】见解析

【解析】 $109^2$

$$= (100+9)^2$$

$$= 10000 + 1800 + 81$$

$$= 11881.$$

23.  $(2a-3b-1)(2a+3b+1)$ .

【答案】见解析

【解析】 $(2a-3b-1)(2a+3b+1)$

$$= [2a-(3b+1)][2a+(3b+1)]$$

$$= (2a)^2 - (3b+1)^2$$

$$= 4a^2 - (9b^2 + 6b + 1)$$

$$= 4a^2 + 9b^2 - 6b - 1.$$

24.  $[(x+y)(x-y)-(x-y)^2+2y(x-y)] \div (-4y)$ .

【答案】见解析

【解析】 $[(x+y)(x-y)-(x-y)^2+2y(x-y)] \div (-4y)$

$$= \{(x-y)[(x+y)-(x-y)+2y]\} \div (-4y)$$

$$= [(x-y)(x+y-x+2y)] \div (-4y)$$

$$= [(x-y) \cdot 4y] \div (-4y)$$

$$= -(x-y)$$

$$= -x + y.$$

## 四、解方程，不等式组（每小题 4 分，共 12 分）

$$25. \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} \\ 3(x-1) = y+1 \end{cases}.$$

【答案】见解析

$$\text{【解析】} \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} \text{①} \\ 3(x-1) = y+1 \text{②} \end{cases}, \text{整理得} \begin{cases} 3x-2y=2 \text{③} \\ 3x-y=4 \text{④} \end{cases} \text{令③}-④} y=2y-2,$$

$$-y=-2,$$

$$y=2.$$

把  $y=2$  代入①得  $x=2$ ,

$$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

$$26. \begin{cases} 7(x-5)+2(x+1)>-15 \\ \frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}<0 \end{cases}.$$

【答案】见解析

$$\text{【解析】} \begin{cases} 7(x-5)+2(x+1)>-15 \text{①} \\ \frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}<0 \text{②} \end{cases}, \text{解①得} x>2,$$

$$\text{②得} x>1,$$

$$\therefore x>2.$$

$$27. mx-2>x+3.$$

【答案】见解析

$$\text{【解析】} mx-2>x+3,$$

$$mx-x>5,$$

$$(m-1)x>5,$$

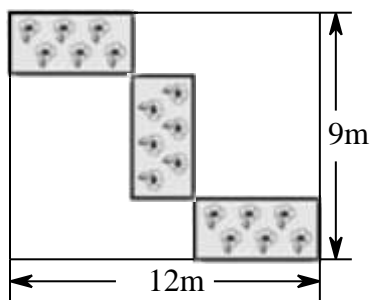
$$\text{①} m-1>0, \therefore x>\frac{5}{m-1},$$

$$\text{②} m-1<0, \therefore x<\frac{5}{m-1},$$

$$\text{③} m-1=0, \therefore x \text{ 无解.}$$

## 五、解答题（28-32，每小题 5 分，33 小题 7 分，共 32 分）

28. 在长为12m，宽为9m的长方形空地上，沿平行于长方形各边的方向分别割出三个大小完全一样的小长方形花圃，其示意图如图所示，求其中一个小长方形花圃的长和宽.



【答案】见解析

【解析】解：设小长方形长为  $x$ ，宽为  $y$ ，

根据题意可列方程  $\begin{cases} 2x + y = 12 \text{ ①} \\ 2y + x = 9 \text{ ②} \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ ，

答：小长方形长为5m，宽为2m.

29. 已知  $\begin{cases} 2x + 3y = 4k \\ 3x + 2y = 3k + 1 \end{cases}$  且  $-1 < y - x < 2$ ，求  $k$  的取值范围.

【答案】见解析

【解析】解：  $\because \begin{cases} 2x + 3y = 4k \text{ ①} \\ 3x + 2y = 3k + 1 \text{ ②} \end{cases}$  ① - ②  $y - x = k - 1$ ，

$\because -1 < y - x < 2$ ，

$\therefore -1 < k - 1 < 2$ ，

$\therefore 0 < k < 3$ .

30. 已知  $x^2 + x - 10 = 0$ ，求代数式  $(x-1)^2 + (x+2)(x-2) - x(x-3)$  的值.

【答案】见解析

【解析】解：代数式  $(x-1)^2 + (x+2)(x-2) - x(x-3)$

$$= x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4 - x^2 + 3x$$

$$= x^2 + x - 3$$

$$\because x^2 + x - 10 = 0$$

$$\therefore x^2 + x = 10$$

$$\therefore \text{原式} = 10 - 3 = 7$$

31. 已知  $a = \frac{1}{3}m + 2015$ ,  $b = \frac{1}{3}m + 2016$ ,  $c = \frac{1}{3}m + 2017$ , 求  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$  的值.

【答案】见解析

【解析】 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2],$$

$$\because a = \frac{1}{3}m + 2015, \quad b = \frac{1}{3}m + 2016, \quad c = \frac{1}{3}m + 2017,$$

$$\text{代入原式} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{3}m + 2015 - \frac{1}{3}m - 2016 \right)^2 + \left( \frac{1}{3}m + 2016 - \frac{1}{3}m - 2017 \right)^2 + \left( \frac{1}{3}m + 2015 - \frac{1}{3}m - 2017 \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}(1+1+4)$$

$$= 3.$$

32. 阅读材料：若  $m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0$ , 求  $m, n$  的值.

$$\text{解：} \because m^2 - 2mn + 2n^2 - 4n + 4 = 0,$$

$$\therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 4n + 4) = 0,$$

$$\therefore (m-n)^2 + (n-2)^2 = 0,$$

$$\therefore (m-n)^2 = 0, \quad (n-2)^2 = 0,$$

$$\therefore n = 2, \quad m = 2.$$

根据你的观察，探究下面的问题：

$$(1) \quad a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10 = 0, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}, \quad b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \quad \text{已知 } x^2 + 2y^2 - 2xy + 8y + 16 = 0, \text{ 求 } xy \text{ 的值.}$$

(3) 已知  $\triangle ABC$  的三边长  $a, b, c$  都是正整数，且满足  $2a^2 + b^2 - 4a - 8b + 18 = 0$ , 求  $\triangle ABC$  的周长. (提示：三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边)

【答案】见解析

$$\text{【解析】(1) } \because a^2 + b^2 + 6a - 2b + 10 = 0,$$

$$(a^2 - 6a + 9) + (b^2 - 2b + 1) = 0,$$

$$(a-3)^2 + (b-1)^2 = 0,$$

$$\therefore (a-3)^2 \geq 0, \quad (b-1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a-3=0, \quad a=3,$$

$$b-1=0, \quad b=1.$$



$$(2) \quad x^2 + 2y^2 - 2xy + 8y + 16 = 0,$$

$$(x^2 - 2x + y^2) + (y^2 + 8y + 16) = 0,$$

$$(x - y)^2 + (y + 4)^2 = 0,$$

$$\because (x - y)^2 \geq 0, \quad (y + 4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore x - y = 0, \quad x = y,$$

$$y + 4 = 0, \quad y = -4,$$

$$\therefore x = -4, \quad \therefore xy = 16.$$

$$(3) \quad 2a^2 + b^2 - 4a - 8b + 18 = 0,$$

$$2a^2 - 4a + 2 + b^2 - 8b + 16 = 0,$$

$$2(a - 1)^2 + (b - 4)^2 = 0,$$

$$\because (a - 1)^2 \geq 0, \quad (b - 4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a - 1 = 0, \quad a = 1,$$

$$b - 4 = 0, \quad b = 4,$$

$$\because a + b > c, \quad \therefore c < 5,$$

$$b - a < c, \quad \therefore c > 3,$$

$$\because a, b, c \text{ 为正整数},$$

$$\therefore c = 4,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 周长 } 1 + 4 + 4 = 9.$$

33. 某超市老板到批发中心选购甲、乙两种品牌的文具盒共 300 个，乙品牌的进货单价比甲品牌进货单价多 15 元，当购进甲品牌的文具盒 120 个时，购进甲、乙品牌文具盒共需 7200 元。

(1) 求甲、乙两种品牌的文具盒进货单价。

(2) 若该超市每销售 1 个甲种品牌的文具盒可获利 4 元，每销售 1 个乙种品牌的文具盒可获利 9 元，根据学生需求，超市老板决定，准备用不超过 6300 元购进甲、乙两种品牌的文具盒，且这两种品牌的文具盒全部售出后获得不低于 1795 元，问该超市有几种进货方案，分别是什么方案。

(3) 哪种方案能使获利最大，最大获得为多少元。

【答案】见解析

【解析】(1) 设甲文具盒进货单件为  $x$  元，乙为  $y$  元，

$$\begin{cases} y - x = 15 \\ 120x + (300 - 120)y = 7200 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \end{cases},$$

答：甲进货单件为 15 元，乙为 30 元。

(2) 解：设进甲  $x$  个，乙为  $300-x$  个，

$$\begin{cases} 4x + 9(300 - x) \geq 1795 \text{①} \\ 15x + 30(300 - x) \leq 6300 \text{②} \end{cases} \text{解①得 } x \leq 181,$$

②得  $x \geq 180$ ,

$$\therefore 180 \leq x \leq 181.$$

$\therefore$  有两种方案

1. 甲进180个，乙进120个.

2. 甲进181个，乙进119个.

(3) 根据乙种获利较大为9元，选第一种方案，

获利  $180 \times 4 + 120 \times 9 = 1800$  (元).