北京市西城区 2018 年九年级模拟测试

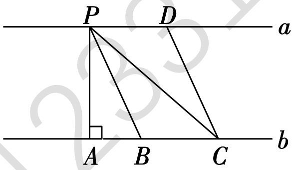
数学试卷

2018.5

考生须知	
	1.本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
	2.在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和学号。
	3.试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
	4.在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
	5.考试结束，将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

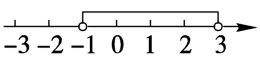


1. 如图所示，$a /\!/ b$，直线 a 与直线 b 之间的距离是

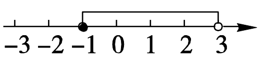
   A．线段 PA 的长度　　B．线段 PB 的长度

   C．线段 PC 的长度　　D．线段 CD 的长度

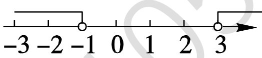
2. 将某不等式组的解集 $-1 \leqslant x < 3$ 表示在数轴上，下列表示正确的是



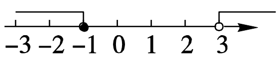
A



B



C



D

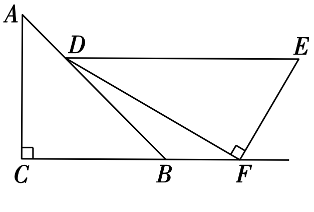
3. 下列运算中，正确的是

   A．$x^2 + 5x^2 = 6x^4$　　B．$x^3 \cdot x^2 = x^6$　　C．$(x^2)^3 = x^6$　　D．$(xy)^3 = xy^3$

4. 下列实数中，在 2 和 3 之间的是

   A．π　　B．$\pi - 2$　　C．$\sqrt[3]{25}$　　D．$\sqrt[3]{28}$

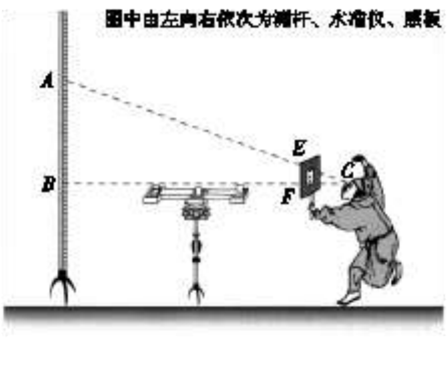
5. 一副直角三角板如图放置，其中$\angle C = \angle DFE = 90°$，$\angle A = 45°$，$\angle E = 60°$，点 F 在 CB 的延长线上.若 $DE /\!/ CF$，则$\angle BDF$ 等于



   A．35°　　B．30°

   C．25°　　D．15°

6. 中国古代在利用“计里画方”（比例缩放和直角坐标网格体系）的方法制作地图时，会利用测杆、水准仪和照板来测量距离．在如图所示的测量距离 AB 的示意图中，记照板“内芯”的高度为 EF. 观测者的眼睛（图中用点 C 表示）与 BF 在同一水平线上，则下列结论中，正确的是



   A．$\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{CF}{FB}$　　B．$\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{CF}{CB}$

   C．$\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{CF}{FB}$　　D．$\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{CF}{CB}$

7. 在一次男子马拉松长跑比赛中，随机抽取了 10 名选手，记录他们的成绩（所用的时间）如下：

选手	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
时间（min）	129	136	140	145	146	148	154	158	165	175

由此所得的以下推断不正确的是

A．这组样本数据的平均数超过 130

B．这组样本数据的中位数是 147

C．在这次比赛中，估计成绩为 130 min 的选手的成绩会比平均成绩差

D．在这次比赛中，估计成绩为 142 min 的选手，会比一半以上的选手成绩要好

8．如图 1 所示，甲、乙两车沿直路同向行驶，车速分别为 20 m/s 和 v(m/s)，起初甲车在乙车前 a (m)处，两车同时出发，当乙车追上甲车时，两车都停止行驶．设 x(s)后两车相距 y (m)，y 与 x 的函数关系如图 2 所示．有以下结论：

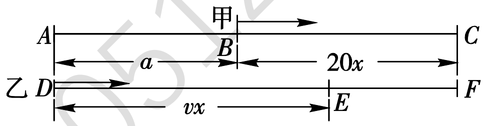


图1

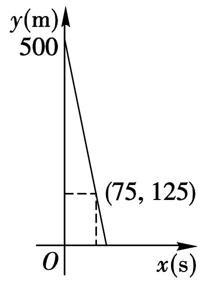


图2

①图 1 中 a 的值为 500；

②乙车的速度为 35 m/s；

③图 1 中线段 EF 应表示为 $500+5x$；

④图 2 中函数图象与 x 轴交点的横坐标为 100．

其中所有的正确结论是

A．①④　　　　B．②③

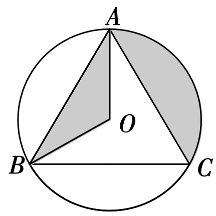
C．①②④　　　D．①③④

二、**填空题**（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 如果 $\sqrt{2-x}$ 有意义，那么 x 的取值范围是_______.

10. 不透明袋子中装有 5 个红色球和 3 个蓝色球，这些球除了颜色外没有其他差别.从袋子中随机摸出一个球，摸出蓝色球的概率为_______.

11. 如图，等边三角形 ABC 内接于⊙O，若⊙O 的半径为 2，则图中阴影部分的面积等于_______.



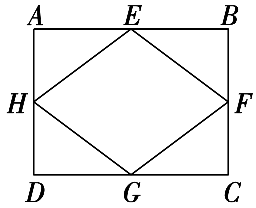
12.某校“百变魔方”社团为组织同学们参加学校科技节的“最强大脑”大赛，准备购买 A，B 两款魔方.社长发现若购买 2 个 A 款魔方和 6 个 B 款魔方共需 170 元，购买 3 个 A 款魔方和购买 8 个 B 款魔方所需费用相同．求每


A 款


B 款

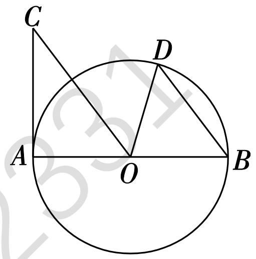
款魔方的单价.设 A 款魔方的单价为 x 元，B 款魔方的单价为 y 元，依题意可列方程组为_______.

13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，顺次连接矩形四边的中点得到四边形 $EFGH$. 若 AB=8，AD=6，则四边形 $EFGH$ 的周长等于_______.

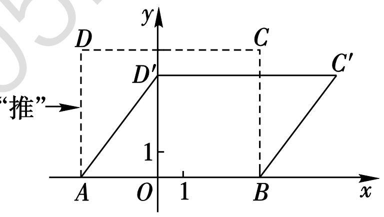


14. 在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $y=3(x+2)^2-1$ 平移后得到抛物线 $y=3x^2+2$. 请你写出一种平移方法. 答：______.

15. 如图，AB 为⊙O 的直径，AC 与⊙O 相切于点 A，弦 BD∥OC. 若 $\angle C=36°$，则 $\angle DOC$=______°.



16. 我们知道：四边形具有不稳定性.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，$A(-3,0)$，$B(4,0)$，边 AD 长为 5. 现固定边 AB，“推”矩形使点 D 落在 y 轴的正半轴上（落点记为 D'），相应地，点 C 的对应点 C' 的坐标为_______.

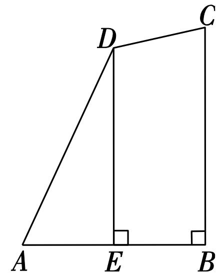


三、**解答题**（本题共 68 分，第 17~21 题每小题 5 分，第 22、23 题每小题 6 分，第 24 题 5 分，第 25、26 题每小题 6 分，第 27、28 题每小题 7 分）

17. 计算：$6\cos 60°-\sqrt{27}+(\pi-2)^0-\left|\sqrt{3}-2\right|$.

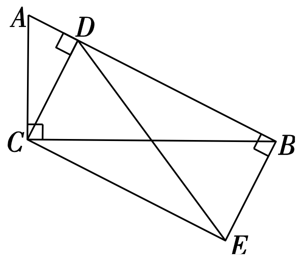
18. 解方程：$\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{2-x}=3$.

19. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，$DE\perp AB$ 于点 E，$\angle A=66°$，$\angle ABC=90°$，BC= AD，求 $\angle C$ 的度数.



20.先化简，再求值：$\left(1-\frac{5}{x+2}\right)\div\frac{x^2-6x+9}{x+2}$，其中 $x=-5$.

21.如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$BE\perp AB$ 于点 B，$BE=CD$，连接 CE，DE.



（1）求证：四边形 $CDBE$ 为矩形；

（2）若 $AC=2$，$\tan\angle ACD=\frac{1}{2}$，求 DE 的长.

22.阅读下列材料：

材料一：

早在 2011 年 9 月 25 日，北京故宫博物院就开始尝试网络预售门票，2011 年全年网络售票仅占 1.68%.2012 年至 2014 年，全年网络售票占比都在 2%左右.2015 年全年网络售票占 17.33%，2016 年全年网络售票占比增长至 41.14%.2017 年 8 月实现网络售票占比 77%.2017 年 10 月 2 日，首次实现全部网上售票.与此同时，网络购票也采用了“人性化”的服务方式，为没有线上支付能力的观众提供代客下单服务.实现全网络售票措施后，在北京故宫博物院的精细化管理下，观众可以更自主地安排自己的行程计划，获得更美好的文化空间和参观体验.

材料二：

以下是某同学根据网上搜集的数据制作的 2013-2017 年度中国国家博物馆参观人数及年增长率统计表.

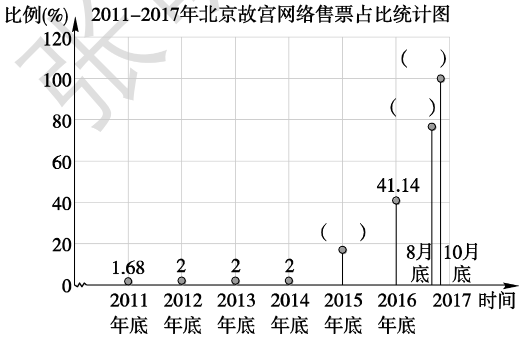
年度	2013	2014	2015	2016	2017
参观人数（人次）	7 450 000	7 630 000	7 290 000	7 550 000	8 060 000
年增长率（%）	38.7	2.4	-4.5	3.6	6.8

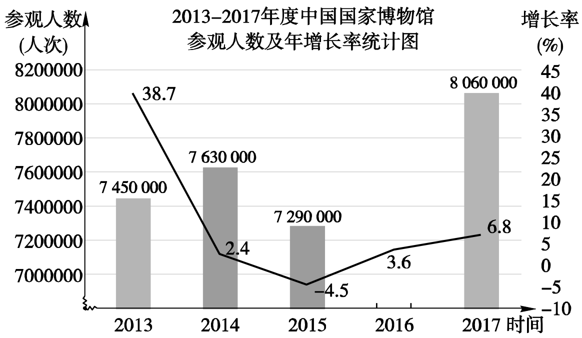
他还注意到了如下的一则新闻：2018 年 3 月 8 日，中国国家博物馆官方微博发文，宣布取消纸质门票，观众持身份证预约即可参观. 国博正在建设智慧国家博物馆，同时馆方工作人员担心的是：“虽然有故宫免（纸质）票的经验在前，但对于国博来说这项工作仍有新的挑战.参观故宫需要观众网上付费购买门票，他遵守预约的程度是不一样的.但（国博）免费就有可能约了不来，挤占资源，所以难度其实不一样.” 尽管如此，国博仍将积极采取技术和服务升级，希望带给观众一个更完美的体验方式.

根据以上信息解决下列问题：

（1）补全以下两个统计图；

（2）请你预估 2018 年中国国家博物馆的参观人数，并说明你的预估理由.

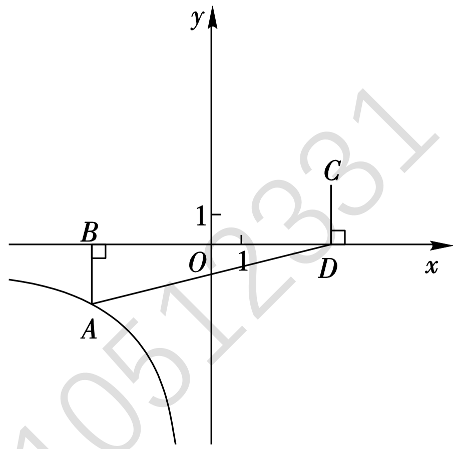




23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=\dfrac{m}{x}$（$x<0$）的图象经过点 $A(-4,n)$，$AB\perp x$ 轴于点 B，点 C 与点 A 关于原点 O 对称，$CD\perp x$ 轴于点 D，$\triangle ABD$ 的面积为 8.

（1）求 m，n 的值；

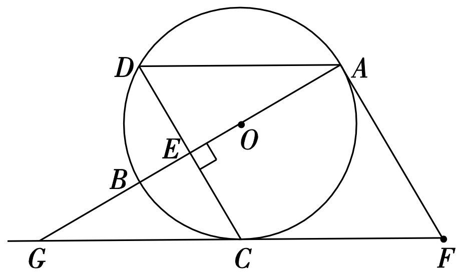
（2）若直线 $y=kx+b$（$k\neq0$）经过点 C，且与 x 轴，y 轴的交点分别为点 E，F，当 $CF=2CE$ 时，求点 F 的坐标．



24．如图，AB 是⊙O 的直径，C 是圆上一点，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，且 $DC=AD$．过点 A 作⊙O 的切线，过点 C 作 DA 的平行线，两直线交于点 F，FC 的延长线交 AB 的延长线于点 G.

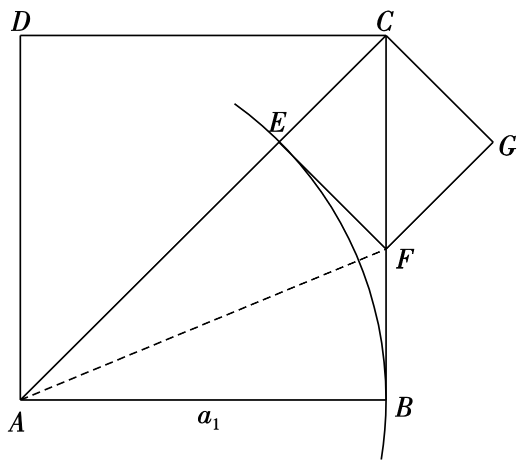
（1）求证：FG 与⊙O 相切；

（2）连接 EF，求 $\tan\angle EFC$ 的值.



25. **阅读下面材料：**

已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，边 $AB=a_1$．



按照以下操作步骤，可以从该正方形开始，构造一系列的正方形，它们之间的边满足一定的关系，并且一个比一个小.

操作步骤	作法	由操作步骤推断（仅选取部分结论）
第一步	在第一个正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上截取 $AE=a_1$，再作 $EF\perp AC$ 于点 E, EF 与边 BC 交于点 F, 记 $CE=a_2$；	(i)$\triangle EAF\cong\triangle BAF$（判定依据是①）； (ii) $\triangle CEF$ 是等腰直角三角形； (iii)用含 a_1 的式子表示 a_2 为②；
第二步	以 CE 为边构造第二个正方形 $CEFG$；	
第三步	在第二个正方形的对角线 CF 上截取 $FH=a_2$，再作 $IH\perp CF$ 于点 H，IH 与边 CE 交于点 I，记 $CH=a_3$；	(iv)用只含 a_1 的式子表示 a_3 为③；
第四步	以 CH 为边构造第三个正方形 $CHIJ$；	
这个过程可以不断进行下去. 若第 n 个正方形的边长为 a_n，用只含 a_1 的式子表示 a_n 为④.		

请解决以下问题：

（1）完成表格中的填空：

①__________ ；②__________ ；

③__________；④__________；

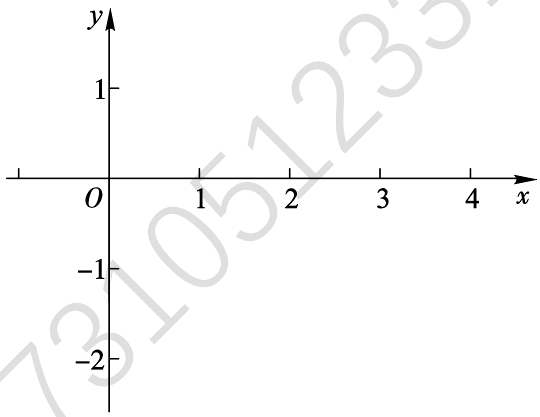
（2）根据以上第三步、第四步的作法画出第三个正方形 $CHIJ$（不要求尺规作图）.

26. 抛物线 M：$y=ax^2-4ax+a-1$ $(a\neq 0)$与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），抛物线的顶点为 D.

（1）抛物线 M 的对称轴是直线____________；

（2）当 AB=2 时，求抛物线 M 的函数表达式；

（3）在（2）的条件下，直线 l：$y=kx+b\,(k\neq 0)$经过抛物线的顶点 D，直线 $y=n$ 与抛物线 M 有两个公共点，它们的横坐标分别记为 x_1，x_2，直线 $y=n$ 与直线 l 的交点的横坐标记为 x_3（$x_3>0$），若当 $-2\leqslant n\leqslant -1$ 时，总有 $x_1-x_3>x_3-x_2>0$，请结合函数的图象，直接写出 k 的取值范围.



27. 如图 1，在等边三角形 ABC 中，CD 为中线，点 Q 在线段 CD 上运动，将线段 QA 绕点 Q 顺时针旋转，使得点 A 的对应点 E 落在射线 BC 上，连接 BQ，设$\angle DAQ=\alpha$（$0°<\alpha<60°$且 $\alpha\neq 30°$）.

（1）当 $0°<\alpha<30°$时，

①在图 1 中依题意画出图形，并求$\angle BQE$（用含 α 的式子表示）；

②探究线段 CE，AC，CQ 之间的数量关系，并加以证明；

（2）当 $30°<\alpha<60°$时，直接写出线段 CE，AC，CQ 之间的数量关系.

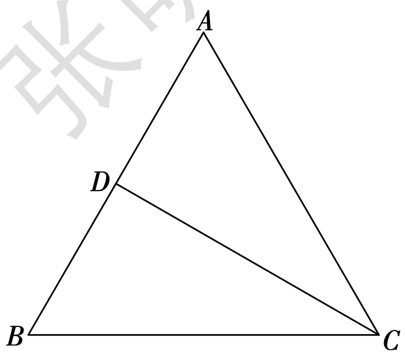
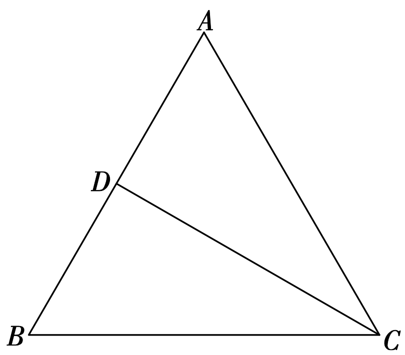


图 1



备用图

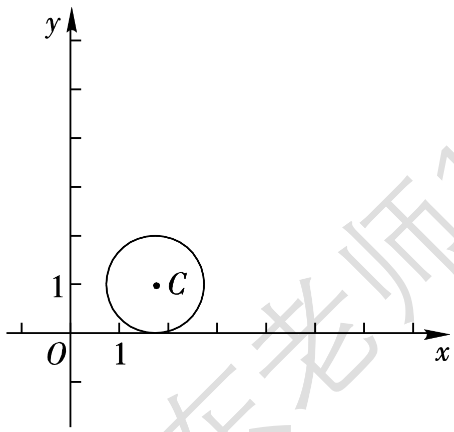
28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 $Q(x,y)$（$x\neq0$），将它的纵坐标 y 与横坐标 x 的比 $\dfrac{y}{x}$ 称为点 Q 的“理想值”，记作 L_Q.如 $Q(-1,2)$ 的“理想值” $L_Q=\dfrac{2}{-1}=-2$.

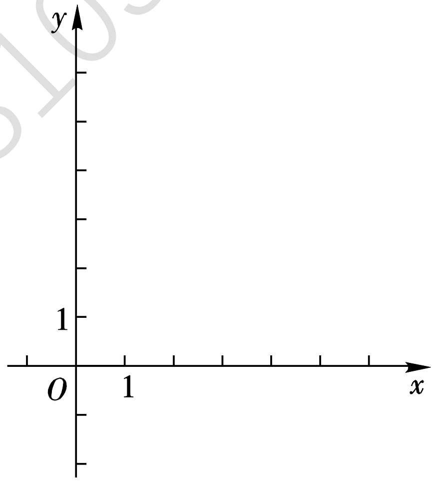
（1）①若点 $Q(1,a)$ 在直线 $y=x-4$ 上，则点 Q 的“理想值” L_Q 等于_________；

②如图，$C(\sqrt{3},1)$，⊙C 的半径为 1. 若点 Q 在⊙C 上，则点 Q 的“理想值” L_Q 的取值范围是___________.

（2）点 D 在直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 上，⊙D 的半径为 1，点 Q 在⊙D 上运动时都有 $0\leqslant L_Q\leqslant\sqrt{3}$，求点 D 的横坐标 x_D 的取值范围；

（3）$M(2,m)$（$m>0$），Q 是以 r 为半径的⊙M 上任意一点，当 $0\leqslant L_Q\leqslant2\sqrt{2}$ 时，画出满足条件的最大圆，并直接写出相应的半径 r 的值.（要求画图位置准确，但不必尺规作图）





北京市西城区 2018 年九年级模拟测试
数学试卷答案及评分标准

2018.5

一、　　选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	C	D	B	C	A

二、 填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. $x \leqslant 2$.　　10. $\frac{3}{8}$.　　11. $\frac{4}{3}\pi$.　　12. $\begin{cases}2x+6y=170,\\3x=8y.\end{cases}$　　13. 20.

14.答案不唯一，例如，将抛物线 $y=3(x+2)^2-1$ 先向右平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度得到抛物线 $y=3x^2+2$.

15. 54.　　16. $(7,4)$.

三、解答题（本题共 68 分，第 17~21 题每小题 5 分，第 22、23 题每小题 6 分，第 24 题 5 分，第 25、26 题每小题 6 分，第 27、28 题每小题 7 分）

17.解：　$6\cos 60°-\sqrt{27}+(\pi-2)^0-\left|\sqrt{3}-2\right|$

$=6\times\frac{1}{2}-3\sqrt{3}+1-(2-\sqrt{3})$ ………………………………………………… 4 分

$=3-3\sqrt{3}+1-2+\sqrt{3}$

$=2-2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………5 分

18．解方程：$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{2-x}=3$.

解：去分母，得 $x-1=3(x-2)$. ……………………………………………… 1 分

去括号，得 $x-1=3x-6$. ……………………………………………… 2 分

移项，得　$3x-x=6-1$.

合并同类项，得　$2x=5$. ……………………………………………… 3 分

系数化为 1，得 $x=\frac{5}{2}$. ……………………………………………… 4 分

经检验，原方程的解为 $x=\frac{5}{2}$. ……………………………………………5 分

19. 解：如图 1，连接 BD.

∵ E 为 AB 的中点，$DE\perp AB$ 于点 E，

∴ $AD=BD$， ……………………………………… 1 分

∴ $\angle 1=\angle A$.

∵ $\angle A=66°$，

∴ $\angle 1=66°$. ………………………………………2 分

∵ $\angle ABC=90°$，

∴ $\angle 2=\angle ABC-\angle 1=24°$. ………………………… 3 分

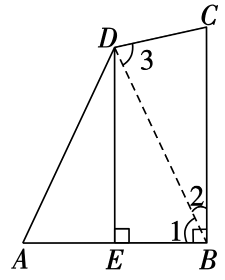


图 1

∵ $AD=BC$，

∴ $BD=BC$. ……………………………………………………………………4 分

∴ $\angle C=\angle 3$.

∴ $\angle C=\dfrac{180°-\angle 2}{2}=78°$. ……………………………………………… 5 分

20.解：$\left(1-\dfrac{5}{x+2}\right)\div\dfrac{x^2-6x+9}{x+2}$

$=\dfrac{x-3}{x+2}\times\dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ …………………………………………………… 3 分

$=\dfrac{1}{x-3}$. ……………………………………………………………………… 4 分

当 $x=-5$ 时，原式 $=-\dfrac{1}{8}$. ……………………………………………………5 分

21.（1）证明：如图 2.

∵ $CD\perp AB$ 于点 D，$BE\perp AB$ 于点 B，

∴ $\angle CDA=\angle DBE=90°$.

∴ $CD /\!/ BE$. ………………………………… 1 分

又∵ $BE=CD$，

∴ 四边形 $CDBE$ 为平行四边形. ……………2 分

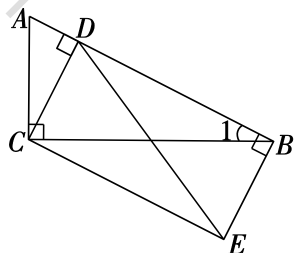


图 2

又∵ $\angle DBE=90°$，

∴ 四边形 $CDBE$ 为矩形. ………………………………………………… 3 分

（2）解：∵ 四边形 $CDBE$ 为矩形，

∴ $DE=BC$. ……………………………………………………………………… 4 分

∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，

可得 $\angle ACD=\angle 1$.

∵ $\tan\angle ACD=\dfrac{1}{2}$，

∴ $\tan\angle 1=\tan\angle ACD=\dfrac{1}{2}$.

∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，$\tan\angle 1=\dfrac{1}{2}$，

∴ $BC=\dfrac{AC}{\tan\angle 1}=4$.

∴ $DE=BC=4$. ……………………………………………………………… 5 分

22.解：（1）补全统计图如图 3.

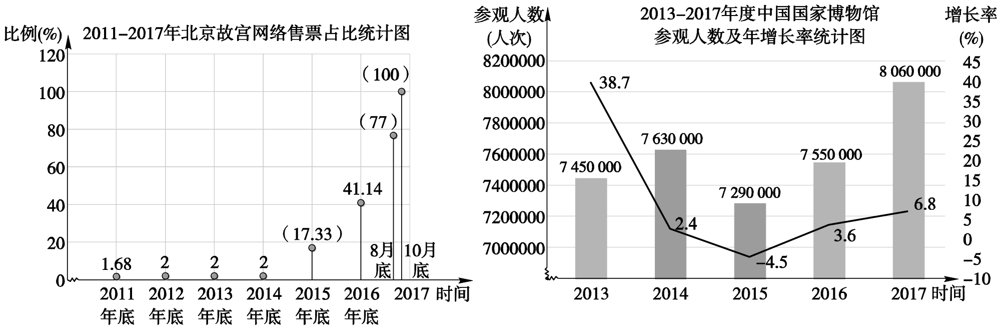


图 3

……………………………………………………………………… 4 分

（2）答案不唯一，预估理由合理，支撑预估数据即可．……………………… 6 分

23. 解：（1）如图 4.

∵ 点 A 的坐标为 $A(-4,n)$，点 C 与点 A 关于原点 O 对称，

∴ 点 C 的坐标为 $C(4,-n)$.

∵ $AB\perp x$ 轴于点 B，$CD\perp x$ 轴于点 D，

∴ B，D 两点的坐标分别为 $B(-4,0)$， $D(4,0)$.

∵ △ABD 的面积为 8，$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\times BD=\dfrac{1}{2}\times(-n)\times 8=-4n$，

∴ $-4n=8$.

解得 $n=-2$. ……………………………………………………………… 2 分

∵ 函数 $y=\dfrac{m}{x}$ （$x<0$）的图象经过点 $A(-4,n)$，

∴ $m=-4n=8$. ………………………………………………………………… 3 分

（2）由（1）得点 C 的坐标为 $C(4,2)$.

① 如图 4，当 $k<0$ 时，设直线 $y=kx+b$ 与 x 轴，

y 轴的交点分别为点 E_1， F_1 .

由 $CD\perp x$ 轴于点 D 可得 $CD\parallel OF_1$.

∴ △E_1CD∽△E_1F_1O.

∴ $\dfrac{DC}{OF_1}=\dfrac{E_1C}{E_1F_1}$.

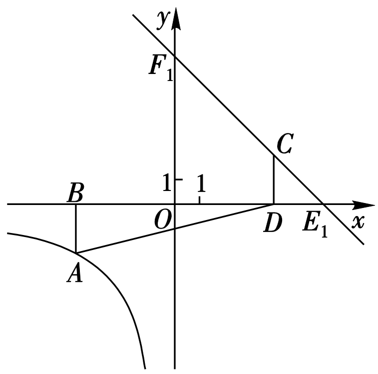


图 4

∵ $CF_1=2CE_1$，

∴ $\dfrac{DC}{OF_1}=\dfrac{1}{3}$.

∴ $OF_1=3DC=6$.

∴ 点 F_1 的坐标为 $F_1(0,6)$.

②如图 5，当 $k>0$ 时，设直线 $y=kx+b$ 与 x 轴，y 轴的交点分别为点 E_2， F_2.

同理可得 $CD∥OF_2$， $\dfrac{DC}{OF_2}=\dfrac{E_2C}{E_2F_2}$.

∵ $CF_2=2CE_2$，

∴ E_2 为线段 CF_2 的中点， $E_2C=E_2F_2$.

∴ $OF_2=DC=2$.

∴ 点 F_2 的坐标为 $F_2(0,-2)$. …………6 分

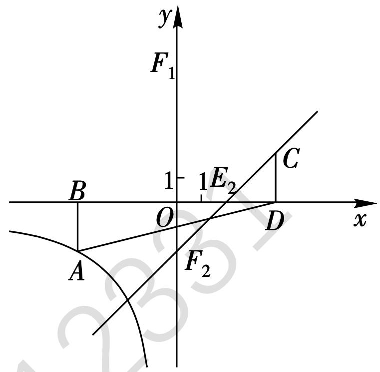


图 5

综上所述，点 F 的坐标为 $F_1(0,6)$， $F_2(0,-2)$.

24. （1）证明：如图 6，连接 OC，AC.

∵ AB 是⊙O 的直径，弦 $CD⊥AB$ 于点 E，

∴ $CE=DE$，$AD=AC$.

∵ $DC=AD$，

∴ $DC=AD=AC$.

∴ △ACD 为等边三角形.

∴ $\angle D=\angle DCA=\angle DAC=60°$.

∴ $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle DCA=30°$.

∵ $FG∥DA$，

∴ $\angle DCF+\angle D=180°$.

∴ $\angle DCF=180°-\angle D=120°$.

∴ $\angle OCF=\angle DCF-\angle 1=90°$.

∴ $FG⊥OC$.

∴ FG 与⊙O 相切. ………………………………………………………… 3 分

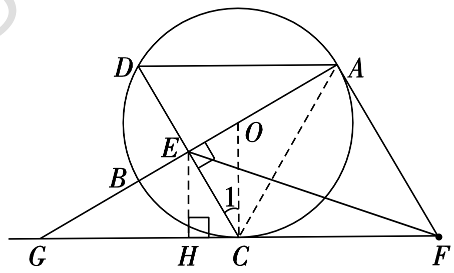


图 6

（2）解：如图 6，作 $EH⊥FG$ 于点 H.

设 $CE=a$，则 $DE=a$，$AD=2a$.

∵ AF 与⊙O 相切，

∴ $AF⊥AG$.

又∵ $DC⊥AG$，

可得 $AF∥DC$.

又∵ $FG∥DA$，

∴ 四边形 $AFCD$ 为平行四边形.

∵ $DC=AD$，$AD=2a$，

∴ 四边形 $AFCD$ 为菱形.

∴ $AF=FC=AD=2a$，$\angle AFC=\angle D=60°$.

由（1）得∠DCG= 60°，$EH=CE\cdot\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$CH=CE\cdot\cos 60°=\dfrac{1}{2}a$．

∴ $FH=CH+CF=\dfrac{5}{2}a$．

∵ 在 Rt△EFH 中，∠EHF= 90°，

∴ $\tan\angle EFC=\dfrac{EH}{FH}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{5}{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$． ………………………………………… 5 分

25．解：（1）①斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等．………………… 1 分

②$(\sqrt{2}-1)a_1$．…………………… 2 分

③$(\sqrt{2}-1)^2a_1$．……………………3 分

④$(\sqrt{2}-1)^{n-1}a_1$．…………………… 4 分

（2）所画正方形 $CHIJ$ 见图 7.

……………………………6 分

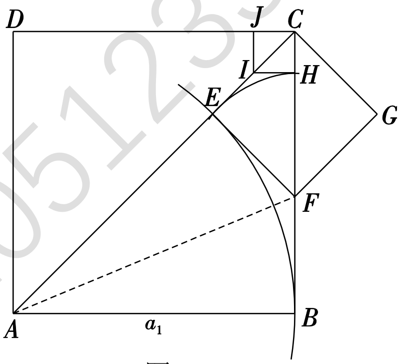


图 7

26.解：如图 8.

（1）$x=2$．………………………………… 1 分

（2）∵ 抛物线 $y=ax^2-4ax+a-1$ 的对称轴为直线 $x=2$，抛物线 M 与 x 轴的交点为点 A，B（点 A 在点 B 左侧），AB=2，

∴ A，B 两点的坐标分别为 $A(1,0)$，$B(3,0)$．……………………………… 2 分

∵ 点 A 在抛物线 M 上，

∴ 将 $A(1,0)$ 的坐标代入抛物线的函数表达式，得 $a-4a+a-1=0$．

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$．……………………………………………………………………… 3 分

∴ 抛物线 M 的函数表达式为

$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{3}{2}$．…………………… 4 分

（3）$k>\dfrac{5}{4}$．…………………… 6 分

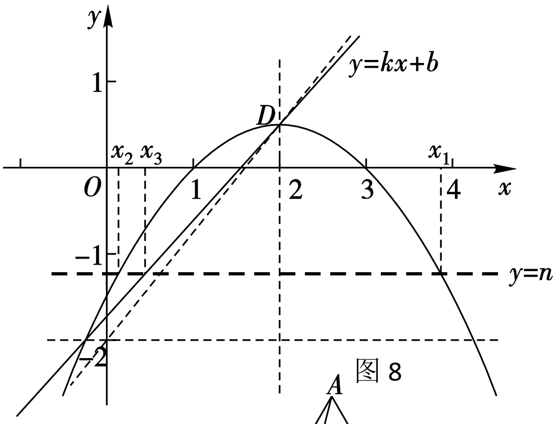
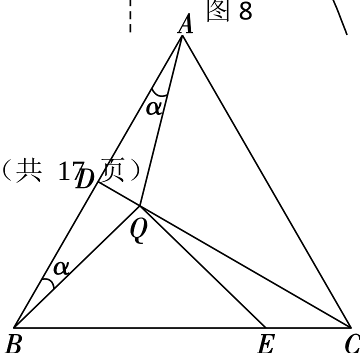


图 8

27．解：（1）当 0°<α<30°时，

①画出的图形如图 9 所示．………………… 1 分



∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴ $\angle ABC=60°$.

∵ CD 为等边三角形的中线，

　Q 为线段 CD 上的点，

由等边三角形的对称性得 $QA=QB$.

∵ $\angle DAQ=\alpha$，

∴ $\angle ABQ=\angle DAQ=\alpha$，$\angle QBE=60°-\alpha$.

∵ 线段 QE 为线段 QA 绕点 Q 顺时针旋转所得，　　　　图 9

∴ $QE = QA$.

∴ $QB=QE$.

可得 $\angle BQE=180°-2\angle QBE=180°-2(60°-\alpha)=60°+2\alpha$. ……… 2 分

② $CE+AC=\sqrt{3}CQ$. …………………………………………………… 3 分

证法一：如图 10，延长 CA 到点 F，使得 $AF=CE$，连接 QF，作 $QH\perp AC$ 于点 H.

∵ $\angle BQE=60°+2\alpha$，点 E 在 BC 上，

∴ $\angle QEC=\angle BQE+\angle QBE=(60°+2\alpha)+(60°-\alpha)=120°+\alpha$.

∵ 点 F 在 CA 的延长线上，$\angle DAQ=\alpha$，

∴ $\angle QAF=\angle BAF+\angle DAQ=120°+\alpha$.

∴ $\angle QAF=\angle QEC$.

又∵ $AF=CE$，$QA=QE$，

∴ $\triangle QAF\cong\triangle QEC$.

∴ $QF=QC$.

∵ $QH\perp AC$ 于点 H，

∴ $FH=CH$，$CF=2CH$.

∵ 在等边三角形 ABC 中，CD 为中线，

　点 Q 在 CD 上，

∴ $\angle ACQ=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$，

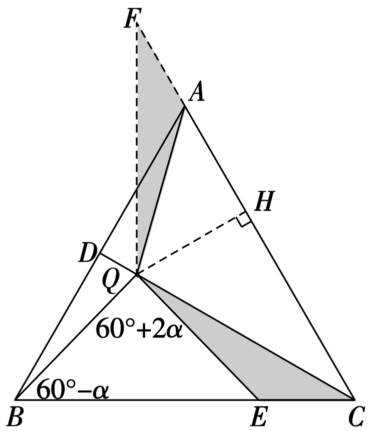


图 10

即 $\triangle QCF$ 为底角为 30°的等腰三角形.

∴ $CH=CQ\cdot\cos\angle HCQ=CQ\cdot\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}CQ$.

∴ $CE+AC=AF+AC=CF=2CH=\sqrt{3}CQ$.

即 $CE+AC=\sqrt{3}CQ$. ……………………………………………… 6 分

思路二：如图 11，延长 CB 到点 G，使得 $BG=CE$，连接 QG，可得 $\triangle QBG\cong\triangle QEC$，$\triangle QCG$ 为底角为 30°的等腰三角形，与证法一

同理可得 $CE+AC=BG+BC=CG=\sqrt{3}CQ$.

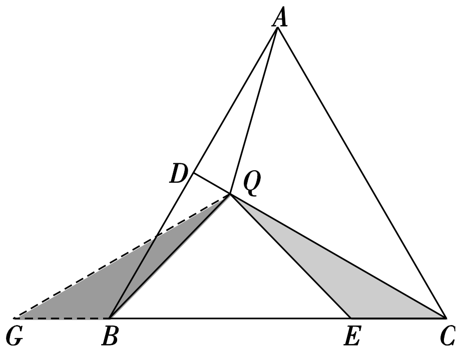


图 11

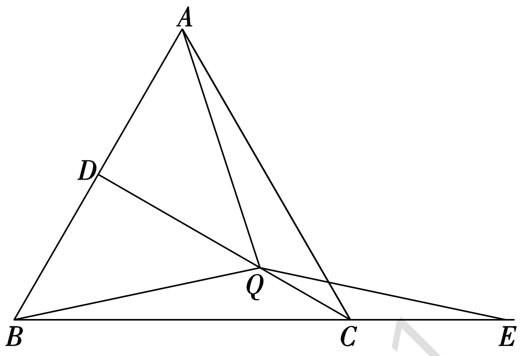


图 12

（2）如图 12，当 $30°<\alpha<60°$ 时，$AC-CE=\sqrt{3}CQ$. ………………………………… 7 分

28. 解：（1）① -3. ………………………………………………………………………………… 1 分

② $0\leqslant L_Q\leqslant\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………… 2 分

（2）设直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 与 x 轴，y 轴的交点分别为点 A，点 B，可得 $A(3\sqrt{3},0)$，

$B(0,3)$.

∴ $OA=3\sqrt{3}$，$OB=3$，$\angle OAB=30°$.

由 $0\leqslant L_Q\leqslant\sqrt{3}$，作直线 $y=\sqrt{3}x$.

①如图 13，当⊙D 与 x 轴相切时，相应的圆心 D_1 满足题意，其横坐标取到最大值．作 $D_1E_1\perp x$ 轴于点 E_1，

可得 $D_1E_1\parallel OB$，$\dfrac{D_1E_1}{BO}=\dfrac{AE_1}{AO}$.

∵ ⊙D 的半径为 1，

∴ $D_1E_1=1$.

∴ $AE_1=\sqrt{3}$，$OE_1=OA-AE_1=2\sqrt{3}$.

∴ $x_{D_1}=2\sqrt{3}$.

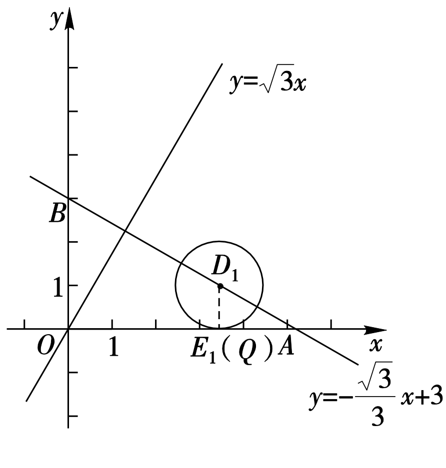


图 13

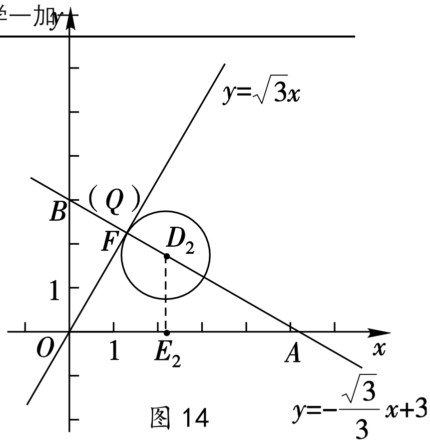


图 14

②如图 14，当⊙D 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 相切时，

相应的圆心 D_2 满足题意，其横坐标取到最小值．

作 $D_2E_2\perp x$ 轴于点 E_2，则 $D_2E_2\perp OA$．

设直线 $y=\sqrt{3}x$ 与直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ 的交点为 F．

可得 $\angle AOF=60^\circ$，$OF\perp AB$．

则 $AF=OA\cdot\cos\angle OAF=3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$．

∵ ⊙D 的半径为 1，

∴ $D_2F=1$．

∴ $AD_2=AF-D_2F=\frac{7}{2}$．

∴ $AE_2=AD_2\cdot\cos\angle OAF=\frac{7}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$，

$OE_2=OA-AE_2=\frac{5\sqrt{3}}{4}$．

∴ $x_{D_2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$．

由①②可得，x_D 的取值范围是 $\frac{5\sqrt{3}}{4}\leqslant x_D\leqslant 2\sqrt{3}$．

………………………………………… 5 分

（3）画图见图 15．

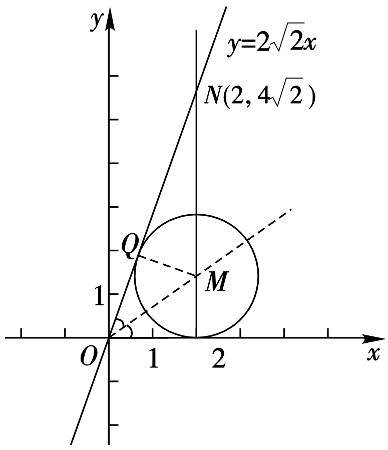


图 15

$\sqrt{2}$．………………………………………… 7 分