# 北京市西城区 2015— 2016 学年度第二学期期末试卷

# 八年级数学

2016.7

**试卷满分：100 分，考试时间：100 分钟**

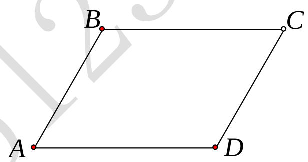
## 一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

1．下列二次根式中，是最简二次根式的是（　　）.

A．$\sqrt{15}$　　B．$\sqrt{12}$　　C．$\sqrt{\frac{1}{3}}$　　D．$\sqrt{9}$

2．平行四边形 $ABCD$ 中，若$\angle B=2\angle A$，则$\angle C$ 的度数为（　　）.




A．$120°$　　B．$60°$

C．$30°$　　D．$15°$

3．甲、乙、丙、丁四人进行射击测试，每人测试 10 次,平均成绩均为 9.2 环，方差如下表所示：

| 选手 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
|---|---|---|---|---|
| 方差 | 0.56 | 0.60 | 0.50 | 0.45 |

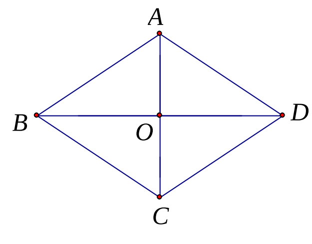
则在这四个选手中，成绩最稳定的是（　　）.

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

4．若 $A(1,y_1)$，$B(2,y_2)$ 两点都在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，则 $y_1$ 与 $y_2$ 的大小关系是（　　）.

A．$y_1<y_2$　　B．$y_1=y_2$　　C．$y_1>y_2$　　D．无法确定

5．如图，菱形 $ABCD$ 的两条对角线 $AC$，$BD$ 相交于点 $O$，若 $AC=4$，$BD=6$，则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）.




A．16　　B．24

C．$4\sqrt{13}$　　D．$8\sqrt{13}$

6．下列命题中，正确的是（　　）.

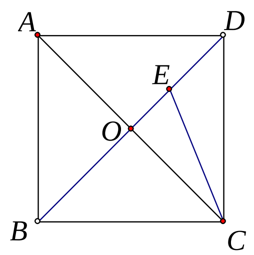
A．有一组邻边相等的四边形是菱形

B．对角线互相平分且垂直的四边形是矩形

C．两组邻角相等的四边形是平行四边形

D．对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形

7．如图，正方形 $ABCD$ 的两条对角线 $AC$，$BD$ 相交于点 $O$，点 $E$ 在 $BD$ 上，且 $BE=CD$，则$\angle BEC$ 的度数为（　　）.




A．$22.5°$　　B．$60°$

C．$67.5°$　　D．$75°$

8．关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个实数根，则实数 $k$ 的取值范围是（　　）．

A．$k\le 1$　　B．$k>1$　　C．$k=1$　　D．$k\ge 1$

9．已知正比例函数 $y=kx$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象交于 $A$，$B$ 两点，若点 $A$ 的坐标为（－2，1），则关于 $x$ 的方程 $\dfrac{m}{x}=kx$ 的两个实数根分别为（　　）．

A．$x_1=-1$，$x_2=1$　　B．$x_1=-1$，$x_2=2$

C．$x_1=-2$，$x_2=1$　　D．$x_1=-2$，$x_2=2$

10．中国数学史上最先完成勾股定理证明的数学家是公元 3 世纪三国时期的赵爽，他为了证明勾股定理，创制了一副“弦图”，后人称其为“赵爽弦图”（如图 1）．图 2 由“弦图”变化得到，它是由八个全等的直角三角形拼接而成．将图中正方形 $MNKT$，正方形 $EFGH$，正方形 $ABCD$ 的面积分别记为 $S_1$，$S_2$，$S_3$，若 $S_1+S_2+S_3=18$，则正方形 $EFGH$ 的面积为（　　）．

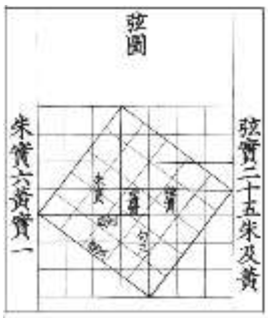



**图 1**

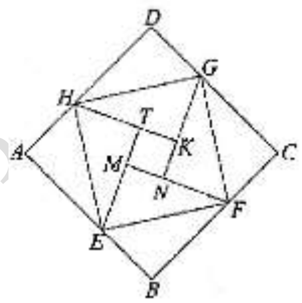


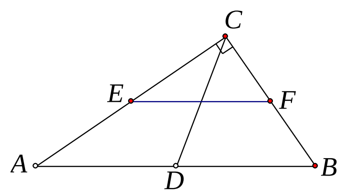

**图 2**

A．9　　B．6　　C．5　　D．$\dfrac{9}{2}$

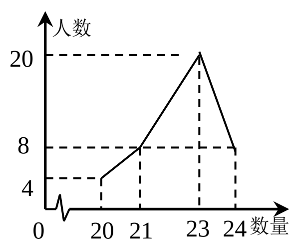
**二、填空题（本题共 20 分，第 11～14 题，每小题 3 分，第 15～18 题，每小题 2 分）**

11．关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-6x+m=0$ 有一个根为 2，则 $m$ 的值为__________．

12．如图，在直角三角形 $ABC$ 中，$\angle BCA=90°$，$D$，$E$，$F$ 分别是 $AB$，$AC$，$BC$ 的中点，若 $CD=5$，则 $EF$ 的长为____________．

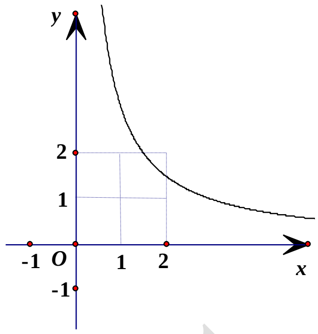



13．某校开展了“书香校园”的活动，小腾班长统计了本学期全班 40 名同学课外图书的阅读数量（单位：本），绘制了拆线统计图（如图所示）．在这 40 名学生的图书阅读数量中，中位数是_______．

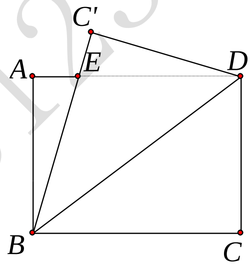



14．将一元二次方程 $x^2+4x+1=0$ 化成 $(x+a)^2=b$ 的形式，其中 $a$，$b$ 是常数，则 $a+b=$____________________．

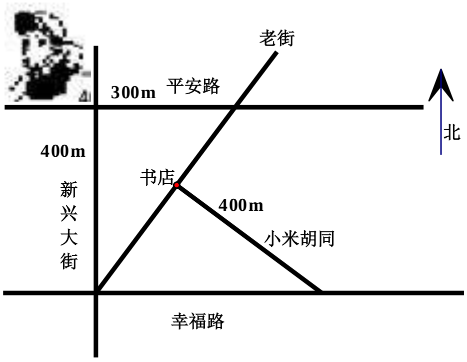
15．反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 在第一象限的图象如图，请写出一个满足条件的 $k$ 值，$k$=___________.




16．如图，将矩形 *ABCD* 沿对角线 *BD* 所在直线折叠，点 *C* 落在同一平面内，落点记为 *C*′，*BC*′ 与 *AD* 交于点 *E*，若 *AB*=3，*BC*＝4，则 *DE* 的长为_____________.




17．如图，平安路与幸福路是两条平行的道路，且与新兴大街垂直，老街与小米胡同垂直，书店位于老街与小米胡同的交口处．如果小强同学站在平安路与新兴大街的交叉路口，准备去书店，按图中的街道行走，最近的路程为______ m.




18．如图 1，在△*ABC* 中，点 *P* 从点 *A* 出发向点 *C* 运动，在运动过程中，设 *x* 表示线段 *AP* 的长，*y* 表示线段 *BP* 的长，*y* 与 *x* 之间的关系如图 2 所示．则线段 *AB* 的长为_______，线段 *BC* 的长为____________.

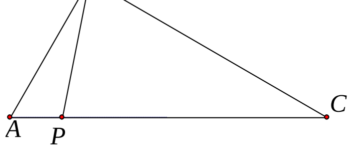



图 1

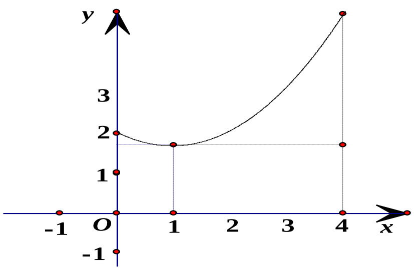



图 2

**三、解答题（本题共 16 分，第 19 题 8 分，第 20 题 8 分）**

19．计算：

（1）$\sqrt{18}-\sqrt{8}+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$；　　（2）$\sqrt{12}\times\dfrac{\sqrt{32}}{3}\div\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

解：　　解：

20．解方程：

（1）$x^2-6x+5=0$；　　（2）$2x^2-3x-1=0$．

解：　　解：

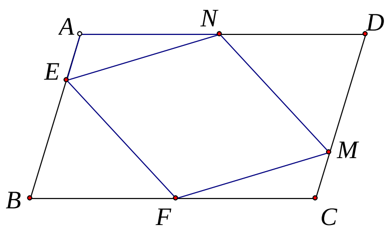
**四、解答题（本题共 34 分，第 21～22 题，每小题 7 分，第 23 题 6 分，第 24～25 题，每小题 7 分）**

21．如图，在▱*ABCD* 中，点 *E*，*M* 分别在边 *AB*，*CD* 上，且 *AE*=*CM*．点 *F*，*N* 分别在边 *BC*，*AD* 上，且 *DN* = *BF*．

（1）求证：△*AEN*≌△*CMF*;

（2）连接 *EM*，*FN*，若 *EM*⊥*FN*，求证：*EFMN* 是菱形．

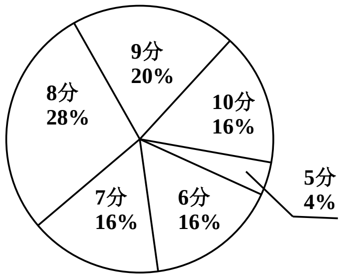
证明：（1）



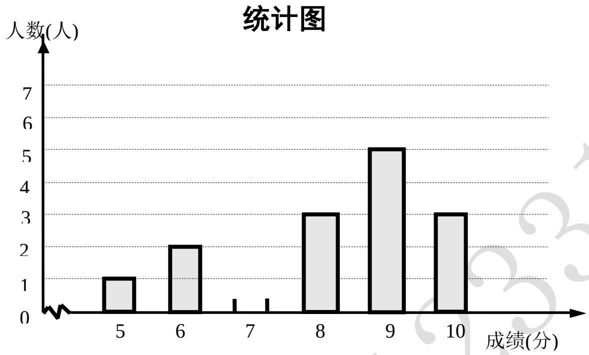

（2）

22．为了让同学们了解自己的体育水平，初二 1 班的体育康老师对全班 45 名学生进行了一次体育模拟测试（得分均为整数），成绩满分为 10 分，成绩达到 9 分以上（包含 9 分）为优秀，成绩达到 6 分以上（包含 6 分）为合格．1 班的体育委员根据这次测试成绩，制作了统计图和分析表如下：

**初二 1 班全体女生体育模拟成绩分布统计图**




**初二 1 班全体男生体育模拟测试成绩统计图**




**初二 1 班体育模拟测试成绩分析表**

| | 平均分 | 方差 | 中位数 | 众数 | 合格率 | 优秀率 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 男生 | | 2 | 8 | 7 | 95% | 40% |
| 女生 | 7.92 | 1.99 | 8 | | 96% | 36% |

根据以上信息，解答下列问题：

（1）在这次测试中，该班女生得 10 分的人数为 4 人，则这个班共有女生________人；

（2）补全初二 1 班男生体育模拟测试成绩统计图，并把相应的数据标注在统计图上；

（3）补全初二 1 班体育模拟测试成绩分析表；

（4）你认为在这次体育测试中，1 班的男生队、女生队哪个表现更突出一些？并写出一条支持你的看法的理由；

（5）体育康老师说，从整体看，1 班的体育成绩在合格率方面基本达标，但在优秀率方面还不够理想，因此他希望全班同学要继续加强体育锻炼，争取在期末考试中，全班的优秀率达到 60%. 若男生优秀人数再增加 6 人，则女生优秀人数再增加多少人才能完成康老师提出的目标？

解：（1）这个班共有女生________人；

（2）补全条形图；

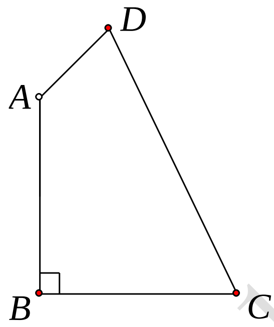
（3）补全分析表；

（4）

（5）

23．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90^{\circ}$，$AB=BC=2$，$AD=1$，$CD=3$． 求$\angle DAB$ 的度数．

解：



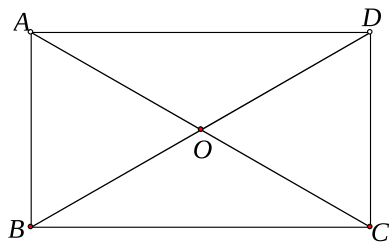

24． 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC$，$BD$ 相交于点 $O$，点 $E$，$F$，$M$，$N$ 分别 $OA$，$OB$，$OC$，$OD$ 的中点，连接 $EF$，$FM$，$MN$，$NE$．

（1）依题意，补全图形；

（2）求证：四边形 $EFMN$ 是矩形；

（3）连接 $DM$，若 $DM\perp AC$ 于点 $M$，$ON=3$，求矩形 $ABCD$ 的面积．

（1）补全图形；




（2）证明：

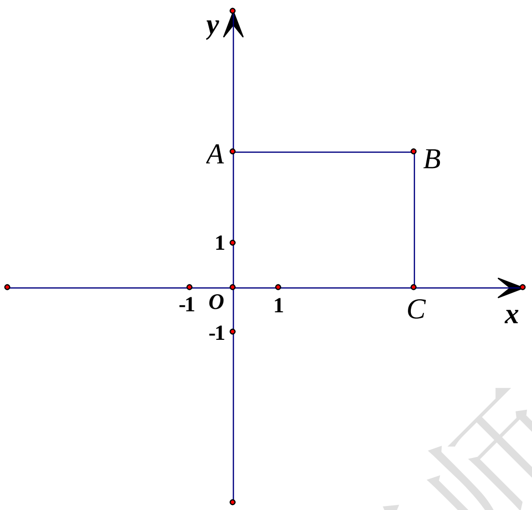
（3）解：

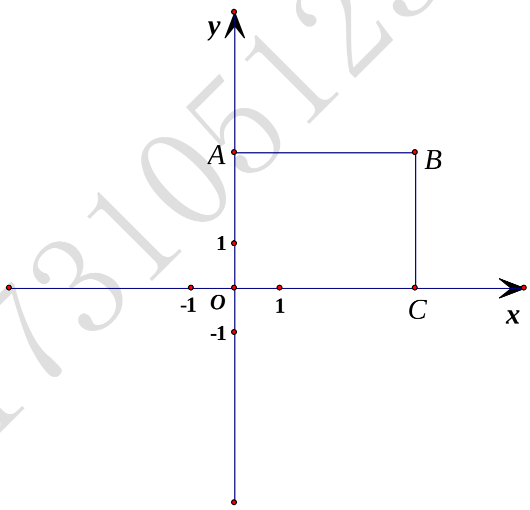
25．在平面直角坐标系 $xOy$ 中， 四边形 $OABC$ 是矩形，点 $B$ 的坐标为(4，3)，反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象经过点 $B$.

（1）求反比例函数的解析式;

（2）一次函数 $y=ax-1$ 的图象与 $y$ 轴交于点 $D$，与反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象交于点 $E$．且△$ADE$ 的面积等于 6．求一次函数的解析式;

（3）在（2）的条件下，直线 $OE$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 交于第一象限的点 $P$，将直线 $OE$ 向右平移 $\dfrac{21}{4}$ 个单位后，与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 交于点 $Q$，与 $x$ 轴交于点 $H$，若 $QH=\dfrac{1}{2}OP$，求 $k$ 的值.




备用图

解：(1)

（2）

（3）

# 北京市西城区 2015— 2016 学年度第二学期期末试卷

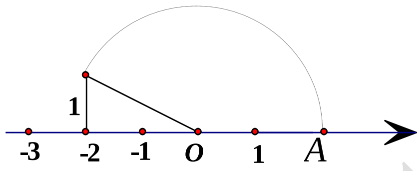
# 八年级数学附加题

2016.7

**试卷满分：20 分**

**一、填空题（本题 6 分）**

1．如图，在数轴上点 $A$ 表示的实数是__________．




**2.**我们已经学习了反比例函数，在生活中，两个变量间具有反比例函数关系的实例有许多，例如：在路程 $s$ 一定时，平均速度 $v$ 是运行时间 $t$ 的反比例函数．其函数关系式可以写为：

$v=\dfrac{s}{t}$（$s$ 为常数，$s\neq 0$）．

请你仿照上例，再举一个在日常生活、学习中，两个变量间具有反比例函数关系的实例：______________________________________；

并写出这两个变量之间的函数解析式：____________________．

**二、解答题（本题共 14 分，每小题 7 分）**

3．已知：关于 $x$ 的一元二次方程 $mx^2-3(m-1)x+2m-3=0(m>3)$．

（1）求证：方程总有两个不相等的实数根；

（2）设方程的两个实数根分别为 $x_1$，$x_2$，且 $x_1<x_2$．

①求方程的两个实数根 $x_1$，$x_2$（用含 $m$ 的代数式表示）；

②若 $mx_1<8-4x_2$，直接写出 $m$ 的取值范围．

（1）证明：

解：（2）①

②

4．四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 $AC$，　$BD$ 相交于点 $O$．

（1）如图 1，点 $P$ 是正方形 $ABCD$ 外一点，连接 $OP$，以 $OP$ 为一边，作正方形 $OPMN$，且边 $ON$ 与边 $BC$ 相交，连接 $AP$，$BN$．

①依题意补全图 1；

②判断 $AP$ 与 $BN$ 的数量关系及位置关系，写出结论并加以证明；

（2）点 $P$ 在 $AB$ 延长线上，且 $\angle APO=30^{\circ}$，连接 $OP$，以 $OP$ 为一边，作正方形 $OPMN$，且边 $ON$ 与 $BC$ 的延长线恰交于点 $N$，连接 $CM$，若 $AB$=2，求 $CM$ 的长（不必写出计算结果，简述求 $CM$ 长的过程）．

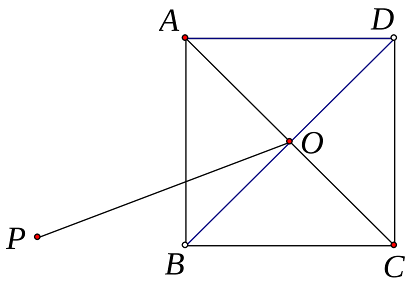



图 1

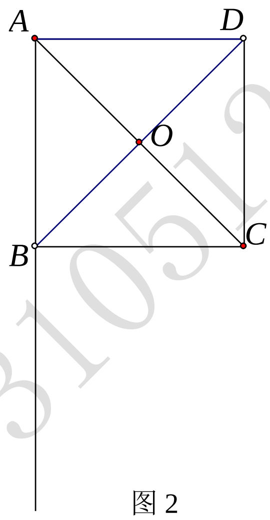



图 2

解：（1）①补全图形；

②$AP$ 与 $BN$ 的数量关系____________，位置关系_____________；

证明：

（2）

# 北京市西城区 2015— 2016 学年度第二学期期末试卷

# 八年级数学参考答案及评分标准 2016.7

**一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | B | D | C | C | D | C | A | D | B |

**二、填空题（本题共 20 分，第 11～14 题，每小题 3 分；第 15～18 题，每小题 2 分）**

| 题号 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | 8 | 5 | 23 | 5 | 答案不唯一，如：$k$=3 | $\dfrac{25}{8}$ | 500 | 2，$2\sqrt{3}$ |

**三、解答题（本题共 16 分，每小题 8 分）**

19.（1）解：$\sqrt{18}-\sqrt{8}+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$；

$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+(3-1)$ ……3 分

$=\sqrt{2}+2$ ……4 分

（2）解：$\sqrt{12}\times\dfrac{\sqrt{32}}{3}\div\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ ……3 分

$=8\sqrt{2}$ ……4 分

20.（1）解：$x^2-6x+5=0$

移项，得 $x^2-6x=-5$．

配方，得 $x^2-6x+9=-5+9$， ……1 分

所以，$(x-3)^2=4$． ……2 分

由此可得 $x-3=\pm2$，

所以，$x_1=5$，$x_2=1$． ……4 分

（2）解：$a=2$，$b=3$，$c=-1$． ……1 分

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times(-1) = 17 > 0$． ........................................2 分

方程有两个不相等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4},$$

$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$， $x_2=-\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$． ....................................................4 分

**四、解答题（本题共 34 分，第 21～22 题，每小题 7 分，第 23 题 6 分，第 24～25 题 7 分）**

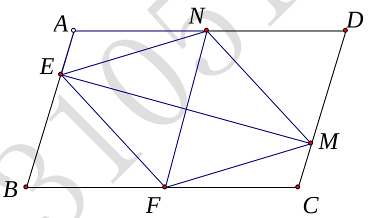
21．证明：(1)∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD=BC$，$\angle A=\angle C$． ..........................................................................1 分

∵$ND=BF$，

∴$AD-ND=BC-BF$．

即 $AN=CF$． .................................... 2 分




在△$AEN$ 和△$CMF$ 中，

$$\begin{cases}AN=CM,\\ \angle A=\angle C,\\ AN=CF,\end{cases}$$

∴△$AEN$≌△$CMF$． ..................................................................................3 分

(2) 由（1）△$AEN$≌△$CMF$

∴$EN=FM$． ..................................................................................................4 分

同理可证：△$EBF$≌△$MDN$.

∴$EF=MN$． ..................................................................................................5 分

∵$EN=FM$，$EF=MN$.

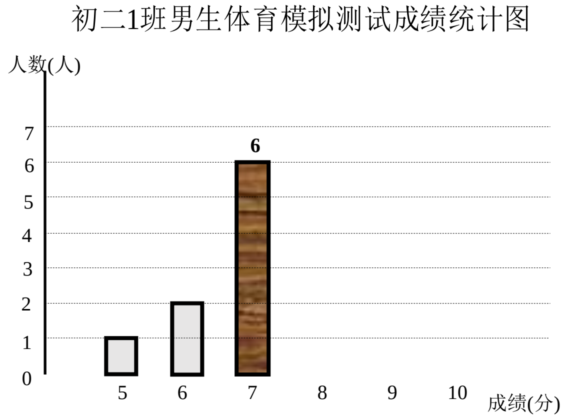
∴四边形 $EFMN$ 是平行四边形． .........................................................6 分

∵$EM\perp FN$，

∴四边形 $EFMN$ 是菱形． .......................................................................7 分

22．解：（1）25；……………………………………………………………………1 分

（2）




……………………………………………………………………………………………2 分

（3）

**初二 1 班体育模拟测试成绩分析表**

| | 平均分 | 方差 | 中位数 | 众数 | 合格率 | 优秀率 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 男生 | 7.9 | | | | | |
| 女生 | | | | 8 | | |

……………………………………………………………………………………………4 分

（4）答案不唯一，如：从众数看，女生队表现更突出．………………………………5 分

（5）$45\times60\%-(5+3+6)-25(20\%+16\%)=4$．

女生优秀人数再增加 4 人，才能完成康老师提出的全班优秀率达到 60%的目标．

……………………………………………………………………………………7 分

23．解：连接 $AC$，……………………………………………………………………1 分

在 Rt△$ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=BC=2$，

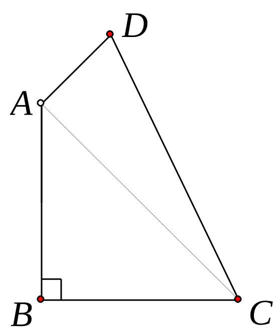
∴$\angle BAC=\angle ACB=45^\circ$，………………………2 分

∴ $AC^2=AB^2+BC^2$．

∴ $AC=2\sqrt{2}$．………………………………3 分

∵$AD=1$，$CD=3$，

∴ $AC^2+AD^2=CD^2$．……………………………4 分




在△$ACD$ 中，$AC^2+AD^2=CD^2$，

∴△$ACD$ 是直角三角形，即$\angle DAC=90^\circ$．……………………………………5 分

∵$\angle BAD=\angle BAC+\angle DAC$，

∴$\angle BAD=135^\circ$．……………………………………………………………………6 分

24.（1）依题意，补全图形，如图所示；……………………………………………………1 分

（2）证明：∵点 $E$，$F$ 分别 $OA$，$OB$ 的中点，

∴$EF /\!/ AB$，$EF=\frac{1}{2}AB$.

同理，$NM /\!/ DC$，$NM=\frac{1}{2}DC$. ……………………………………………………2 分

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

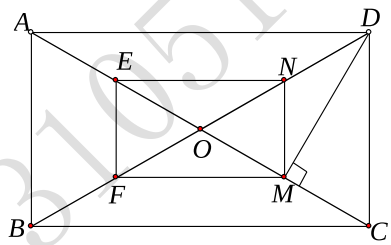
∴$AB /\!/ DC$，$AB=DC$，$AC=BD$.

∴$EF /\!/ NM$，$EF=NM$.

∴四边形 $EFMN$ 是平行四边形. ……………………………………………………3 分

∵点 $E$，$F$，$M$，$N$ 分别 $OA$，$OB$，$OC$，$OD$ 的中点，

∴ $OE=\frac{1}{2}OA$，$OM=\frac{1}{2}OC$.




在矩形 $ABCD$ 中，

$OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，

∴$EM=OE+OM=\frac{1}{2}AC$.

同理可证 $FN=\frac{1}{2}BD$.

∴$EM=FN$.

∴四边形 $EFMN$ 是矩形. ……………………………………………………4 分

（3）解：∵$DM\perp AC$ 于点 $M$，

由（2）$OM=\frac{1}{2}OC$

∴$OD=CD$.

在矩形 $ABCD$ 中，

$OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$.

∴$OA=OB=OC=OD$.

∴△$COD$ 是等边三角形. ……………………………………………………5 分

∴ $\angle ODC=60°$.

∵$NM /\!/ DC$，

∴ $\angle FNM=\angle ODC=60°$.

在矩形 $EFMN$ 中，$\angle FMN=90°$.

$\therefore \angle NFM = 90° - \angle FNM = 30°$.

$\because ON=3$，

$\therefore FN=2ON=6$，$FM=3\sqrt{3}$，$MN=3$． ..............................................6 分

$\because$点 $F$，$M$ 分别 $OB$，$OC$ 的中点，

$\therefore BC=2FM=6\sqrt{3}$．

$\therefore$矩形 $ABCD$ 的面积为 $BC\cdot CD=36\sqrt{3}$． ..............................................7 分

25．解：（1）$\because$反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图象经过点 $B(4，3)$**错误!未指定书签。**，

$\therefore \dfrac{m}{4}=3$．

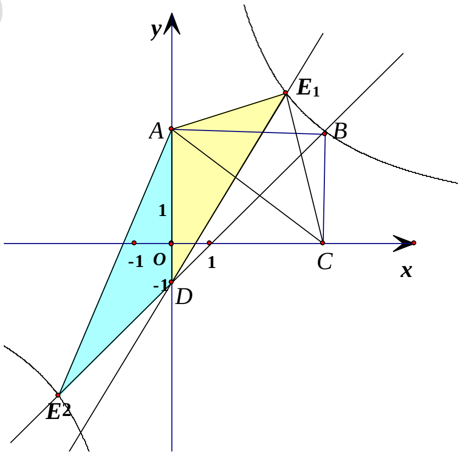
解得　$m=12$．

$\therefore$反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{12}{x}$． ......................................................1 分

（2）$\because$四边形 $OABC$ 是矩形，点 $B(4，3)$**错误!未指定书签。**，

$\therefore A(0，3)$**错误!未指定书签。**，$C(4，0)$**错误!未指定书签。**．

......................................................2 分




一次函数与 $y$ 轴交于点 $D$，

$\therefore$点 $D(0，-1)$，**错误!未指定书签。**$AD=4$．**错误!未指定书签。**

设点 $E$ 的坐标为 $D(x_E，\ y_E)$．

$\because\triangle ADE$ 的面积等于 6，

$\therefore \dfrac{1}{2}AD\cdot|x_E|=6$．

$\therefore x_E=\pm3$． ..............................3 分

$\because$点 $E$ 在反比例函数 $y=\dfrac{12}{x}$ 的图象上，

$\therefore E(3，4)$或 $E(-3，-4)$．

当点 $E(3，4)$在一次函数 $y=ax-1$ 的图象上时，

$\therefore 4=3a-1$．

解得 $a=\dfrac{5}{3}$．

$\therefore$一次函数的解析式为：$y=\dfrac{5}{3}x-1$.

当点(－3，－4)在一次函数$y=ax-1$的图象上时，

此时一次函数的解析式为：$y=x-1$.

综上，一次函数的解析式为：$y=\dfrac{5}{3}x-1$或$y=x-1$. ................5 分

（3）由（2）可知，直线 $OE$ 的解析式为 $y=\dfrac{4}{3}x$.

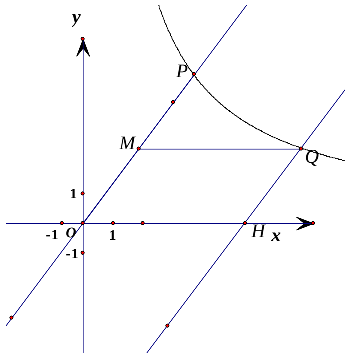
设点 $P(x_P，\dfrac{4}{3}x_P)$，

取 $OP$ 的中点 $M$，则$OM=\dfrac{1}{2}OP$.

$\therefore M(\dfrac{1}{2}x_P，\dfrac{2}{3}x_P)$.

$\therefore Q(\dfrac{1}{2}x_P+\dfrac{21}{4}，\dfrac{2}{3}x_P)$. ..............................................................................6 分

$\therefore H(\dfrac{21}{4}，0)$.




点 $P$，$Q$ 均在反比例函数$y=\dfrac{k}{x}(x>0)$上，

$\therefore x_P\cdot\dfrac{4}{3}x_P=(\dfrac{1}{2}x_P+\dfrac{21}{4})\dfrac{2}{3}x_P$.

$\therefore x_P=\dfrac{7}{2}$.

$\therefore P(\dfrac{7}{2}，\dfrac{14}{3})$，

$\therefore k=\dfrac{49}{3}$. ..................................................................................................... 7 分

# 北京市西城区 2015— 2016 学年度第二学期期末试卷

# 八年级数学附加题参考答案及评分标准 2016.7

## 一、填空题（本题 6 分）

1．$\sqrt{5}$；........................................................................................................3 分

2．答案不唯一，如：当三角形的面积 $S$ 一定时，三角形的一边长 $a$ 是这边上的高 $h$ 的反比例函数，........................................................................................................1 分

$a=\dfrac{2S}{h}$（$S$ 是常数，$S\neq 0$）．..............................................................................3 分

## 二、解答题（本题共 14 分，每小题 7 分）

3．（1）证明：$\because mx^2-3(m-1)x+2m-3=0(m\neq 0)$ 是关于 $x$ 的一元二次方程，

$\therefore \Delta=[-3(m-1)]^2-4m(2m-3)$ ................................................1 分

$=m^2-6m+9$

$=(m-3)^2$．..........................................................................2 分

$\because m>3$，

$\therefore (m-3)^2>0$，即 $\Delta>0$．

$\therefore$方程总有两个不相等的实数根．................................................3 分

（2）①解：由求根公式，得 $x=\dfrac{3(m-1)\pm(m-3)}{2m}$．

$\therefore x=1$ 或 $x=\dfrac{2m-3}{m}$．

$\because m>3$，

$\therefore \dfrac{2m-3}{m}=2-\dfrac{3}{m}>1$．

$\because x_1<x_2$，

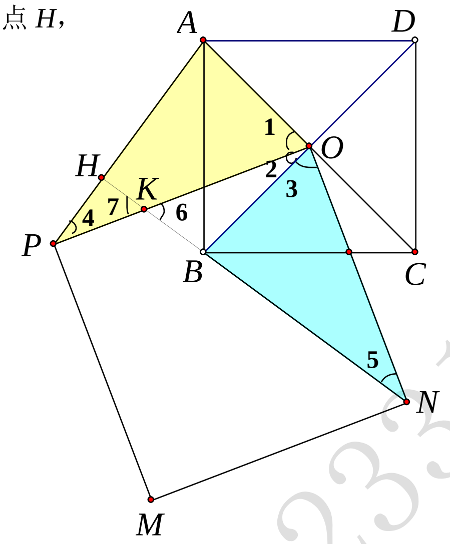
$\therefore x_1=1$，$x_2=\dfrac{2m-3}{m}=2-\dfrac{3}{m}$．..........................................................5 分

②$3<m<2\sqrt{3}$．......................................................................7 分

4．解：（1）①补全图形，如图所示．..............................................................................1 分

②$AP=BN$，$AP\perp BN$．..............................................................................2 分

证明：延长 $NB$ 交 $OP$ 于点 $K$，交 $AP$ 于点 $H$，




∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AO=BO$，$AO\perp BO$．

∴$\angle 1+\angle 2=90°$．

∵四边形 $OPMN$ 是正方形，

∴$OP=ON$，$\angle PON=90°$．

∴$\angle 2+\angle 3=90°$．

∴$\angle 1=\angle 3$．

∴$\triangle APO\cong\triangle BNO$．

∴$AP=BN$．……………………………………………………………………4 分

∴$\angle 4=\angle 5$．

在$\triangle OKN$ 中，$\angle 5+\angle 6=90°$．

∴$\angle 4+\angle 7=90°$．

∴$AP\perp BN$．……………………………………………………………………5 分

（2）求解思路如下：

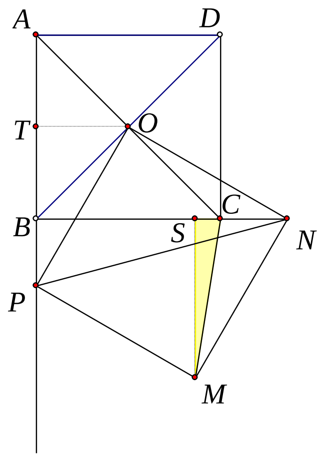
*a*. 类比（1）②可证$\triangle APO\cong\triangle BNO$，$AP=BN$，$\angle POT=\angle MNS$．

*b*. 作 $OT\perp AB$ 于点 $T$，作 $MS\perp BC$ 于点 $S$，如图所示．

由 $AB=2$，可得 $AT=BT=OT=1$．

*c*. 由$\angle APO=30^{\circ}$，可得 $PT=\sqrt{3}$，$BN=AP=\sqrt{3}+1$，

可得$\angle POT=\angle MNS=60^{\circ}$．




*d*. 由$\angle POT=\angle MNS=60^{\circ}$，$OP=MN$，

可证$\triangle OTP\cong\triangle NSM$．

∴$PT=MS=\sqrt{3}$．

∴$CN=BN-BC=\sqrt{3}-1$．

∴$SC=SN-CN=2-\sqrt{3}$．

在 Rt$\triangle MSC$ 中，$CM^2=MS^2+SC^2$，

∴$MC$ 长可求．……………………………………………………………………7 分