2015－2016 学年北京西城区北京四中初二下学期期中数学试卷（含附加）

一、选择题

1．若代数式 $\sqrt{2x-4}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是

A． $x\geqslant 2$　　B． $x>2$　　C． $x\neq 2$　　D． $x\geqslant \frac{1}{2}$

答案 A

解析根据题意，使二次根式 $\sqrt{2x-4}$ 有意义，即 $2x-4\geqslant 0$ ，解得 $x\geqslant 2$ ；故答案为 A.

2．下列各组数中，以它们为边长的线段不能构成直角三角形的是

A．2，2，3　　B．3，4，5　　C．5，12，13　　D．1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$

答案 A

解析 $\because 2^2+2^2\neq 3^2$，

$\therefore$ 以 2，2，3 为边长的线段不能构成直角三角形.

3．下列计算中，正确的是

A． $\sqrt{(-3)^2}=-3$　　B． $\sqrt{3^2+4^2}=7$

C． $\sqrt{4\frac{1}{4}}=2\frac{1}{2}$　　D． $\sqrt{(-4)\times(-9)}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}=6$

答案 D

解析考察二次根式的计算化简和计算，根据平方根的定义知 $\sqrt{(-3)^2}=3$ 、$\sqrt{3^2+4^2}=5$ 、

$\sqrt{4\frac{1}{4}}=1$，故答案为 D.

4．下列二次根式中，不是最简二次根式的是

A． $\sqrt{5}$　　B． $\sqrt{a^2+b^2}$　　C． $\sqrt{\frac{1}{x}}$　　D． $\sqrt{2a}$

答案 C

解析根据最简二次根式的定义知，最简二次根式为 $\sqrt{2a}$ ，故答案为 C.

5．下列命题中正确的是

A．对角线相等的四边形是矩形

B．对角线互相垂直的四边形是菱形

C．对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形

D．一组对边相等，另一组对边平行的四边形是平行四边形

答案 C

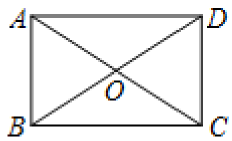
解析对角线相等的平行四边形是矩形，A 错误；

对角线互相垂直的平行四边形是菱形，B 错误；

一组对边相等，另一组对边平行的四边形还可能是等腰梯形，D 错误.

故选 C.

6．如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ．若 $\angle AOB=60°$ ， $BD=8$ ，则 AB 的长为



A． 4　　B． $4\sqrt{3}$　　C． 3　　D． 5

答案 A

解析∵四边形 $ABCD$ 为矩形， $BD=8$ ，

∴ $AC=BD=8$ ，

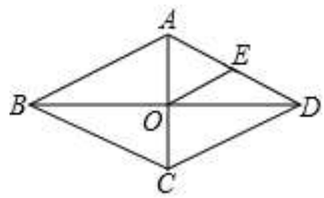
∴ $AO=BO=4$ ，

∵ $\angle AOB=60°$ ，

∴ $\triangle AOB$ 为等边三角形，

∴ $AB=AO=4$ ．

7．如图，菱形中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， E 为 AD 边中点，菱形 $ABCD$ 的周长为 28，则 OE 的长等于



A． 3.5　　B． 4　　C． 7　　D． 14

答案 A

解析∵菱形 $ABCD$ 的周长为 28，

∴ $AB=28\div 4=7$ ， $OB=OD$ ，

∵ E 为 AD 的中点，

∴ OE 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

∴ $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 7=3.5$ ．

8．矩形具有而菱形不具有的性质

A．两组对边分别平行　　B．对角线相等

C．对角线互相平分　　D．两组对角分别相等

答案 B

解析根据平行四边形的性质得：

张明东老师17310512331

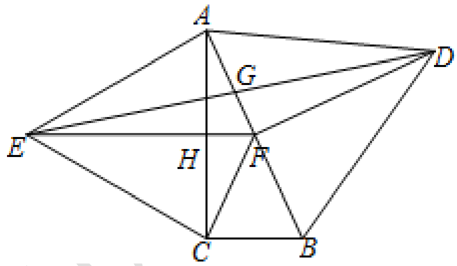
A．平行四边形的公共性质；

B．矩形的特殊性质；

C．菱形的特殊性质；

D．平行四边形的公共性质，故答案选 D．

9．如图，分别以直角三角形$\triangle ABC$的斜边AB，直角边AC为边向$\triangle ABC$外作等边$\triangle ABD$和等边$\triangle ACE$，F为AB边的中点，DE与AB交于点G，EF与AC交于点H，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$．给出如下结论：①$EF\perp AC$，②四边形$ADFE$为菱形，③$AD=4AG$，④$FH=\frac{1}{4}BD$，其中成立的个数为



A．1 个　　　B．2 个　　　C．3 个　　　D．4 个

答案 C

解析∵F为AB边的中点，$\angle ACB=90^\circ$，

∴在$Rt\triangle ACB$中$AF=CF$，又∵$\triangle ACE$为等边三角开，

∴$AE=CE$，在$\triangle AEF$和$\triangle CEF$中$\begin{cases}AE=CE\\EF=EF\\AF=CF\end{cases}$，

∴$\triangle AEF\cong\triangle CEF$，

∴点H为AC中点，$AH=CH$，

∴在等边$\triangle ACE$中$EF\perp AC$，故①正确；

在四边形$ADEF$中，$AE=AC$，$AD=AB$，

∴$AE\neq AD$，

∴四边形$ADFE$不是菱形，故②错误；

在四边形$ADEF$中，

∵$\angle BAC=30^\circ$，$\angle BAD=60^\circ$，

∴$\angle HAD=90^\circ$，

∴$\angle AHE=\angle HAD=90^\circ$，$AD\parallel EF$，

∵$\angle EAD=150^\circ$，$\angle ADF=30^\circ$，

∴$\angle EAD+\angle ADF=180^\circ$，$AE\parallel DF$，

∴四边形$ADFE$是平行四边形，∴G为AF中点，

∴ $AD=4AG$，故③错误；

在 $Rt\triangle ACB$ 中，点 H 为 AC 中点，F 为 AB 边的中点，

∴ $HF\parallel CB$，$HF=\frac{1}{2}CB$，

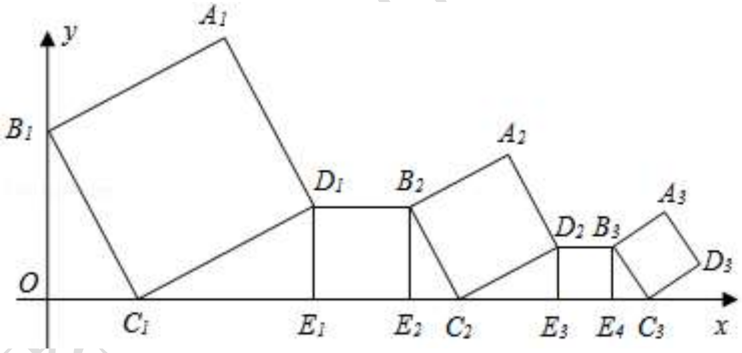
又∵ $\angle ACB=90°$ $\angle BAC=30°$，$AB=BD$．

∴ $CB=\frac{1}{2}AB$，

∴ $FH=\frac{1}{4}BD$，故④正确．

综上所述答案选 C．

10．在平面直角坐标系中，正方形 $A_1B_1C_1D_1$、$D_1E_1E_2B_2$、$A_2B_2C_2D_2$、$D_2E_3E_4B_3$、$A_3B_3C_3D_3\ldots$ 按如图所示的方式放置，其中点 B_1 在 y 轴上，点 C_1、E_1、E_2、C_2、E_3、E_4、$C_3\ldots$在 x 轴上，已知正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，$\angle B_1C_1O=60°$，$B_1C_1\parallel B_2C_2\parallel B_3C_3\ldots$则正方形 $A_{2015}B_{2015}C_{2015}D_{2015}$ 的边长是



A．$\left(\frac{1}{2}\right)^{2014}$　　B．$\left(\frac{1}{2}\right)^{2015}$　　C．$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2015}$　　D．$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2014}$

答案 D

解析如图所示：∵正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 1，$\angle B_1C_1O=60°$，$B_1C_1\parallel B_2C_2\parallel B_3C_3\ldots$

∴ $D_1E_1=B_2E_2$，$D_2E_3=B_3E_4$，$\angle D_1C_1E_1=\angle C_2B_2E_2=\angle C_3B_3E_4=30°$，

∴ $D_1E_1=C_1D_1\sin 30°=\frac{1}{2}$，则 $B_2C_2=\frac{B_2C_2}{\cos 30°}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^1$．

同理可得：$B_3C_3=\frac{1}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$，

故正方形 $A_nB_nC_nD_n$ 的边长是：$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$．

则正方形 $A_{2015}B_{2015}C_{2015}D_{2015}$ 的边长是：$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2014}$．

二、填空题

11．如果 $\sqrt{x-3}+\sqrt{y+2}=0$，那么 xy 的值为_______.

答案 -6

解析根据二次根式的非负性，知 $x-3=0$， $y+2=0$，

$\therefore x=3$， $y=-2$，故 $xy=-6$．

12．计算 $\sqrt{18}-2\sqrt{\frac{1}{2}}$ 等于__________.

答案 $2\sqrt{2}$

解析二次根式的加减法，

原式 $=3\sqrt{2}-\sqrt{4\times\frac{1}{2}}$

$=3\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$．

13．若一个直角三角形两边的长分别为 6 和 8，则第三边的长为_______.

答案 10 或 $2\sqrt{7}$

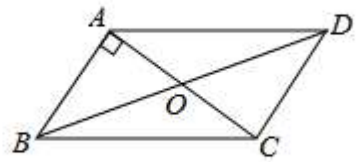
解析分情况讨论：

①当 6 和 8 为两条直角边时，由勾股定理得第三边长为: $\sqrt{6^2+8^2}=10$；

②当 8 为斜边，6 为直角边时，由勾股定理得第三边长为： $\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$；

故答案为 10 或 $2\sqrt{7}$．

14．如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O， $AB\perp AC$，若 $AB=4$， $AC=6$，则 BD 长为______.



答案 10

解析∵在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，

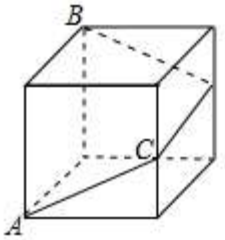
$\therefore BO=DO$， $AO=CO$，

$\because AB\perp AC$， $AB=4$， $AC=6$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABO$ 中， $BO=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

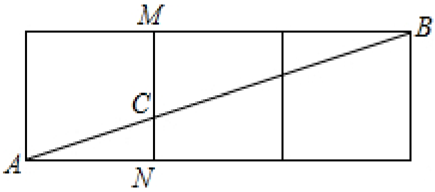
$\therefore BD=10$．

15．如图，一只蚂蚁沿着边长为 2 的正方体表面从点 A 出发，经过 3 个面爬到 B 点，如果它运动的距离是最短的，则 AC 的长为_________.



答案 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

解析将正体展开，右边与后面的正方形与前面正方形放在一个面上，展开图如图所示，此时 AB 最短，



$\because \triangle BCM \backsim \triangle ACN$，

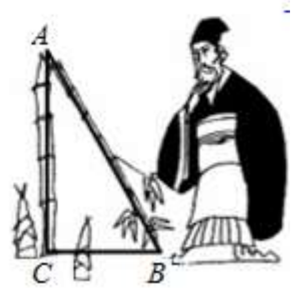
$\therefore \frac{MB}{AN}=\frac{CM}{NC}$，即 $\frac{4}{2}=\frac{MC}{NC}=2$，即 $MC=2NC$，

$\therefore CN=\frac{1}{3}MN=\frac{2}{3}$，

在 $Rt\triangle ACN$ 中，根据勾股定理得：$AC=\sqrt{AN^2+CN^2}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$，

故答案为 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$．

16．《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架，在《九章算术》中的勾股卷中有这样一道题：今有竹高一丈，末折抵底，去本三尺，问折者高几何？意思为“一根竹子，原高一丈，虫伤有病，一阵风将竹子折断，其竹稍恰好抵地，抵地处离远处竹子 3 尺远，则原处还有_______尺竹子．（请直接写出答案，注：1 丈＝10 尺）



答案 $\frac{91}{20}$

解析设竹子折断处离地面 x 尺，则斜边为 $(10-x)$ 尺，

根据勾股定理得：$x^2+3^2=(10-x)^2$，

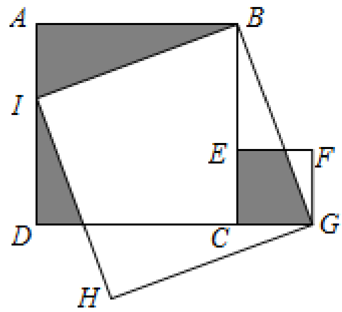
解得：$x=\frac{91}{20}$，

故答案为$\frac{91}{20}$.

17．如图，四边形$ABCD$，$BIHG$，$ECGF$都是正方形，

（1）如果$AB=12$，$BG=13$，那么图中阴影部分的面积的和为_______.

（2）如果正方形$ECGF$，$BIHG$的面积分别是64和289，那么$DI=$______.



答案 1．60

2．9

解析（1）四边形$ABCD$，$BIHG$，$ECGF$都是正方形，

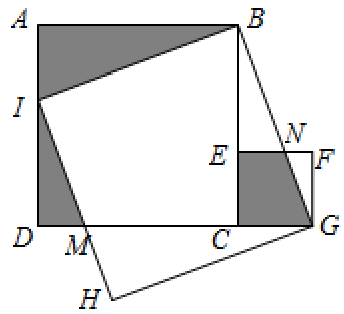
$\therefore AB=BC=12$，$BI=BG=13$，

$\therefore$在和$Rt\triangle BCG$中，根据勾股定理得$AI=CG=5$.

$\therefore ID=BE$，

在$\triangle IDM$和$\triangle BEN$中，

$$\begin{cases}\angle DIM=\angle EBN\\ ID=BE\\ \angle D=\angle BEN=90^\circ\end{cases}$$



$\therefore \triangle IDM\cong\triangle BEN$，

$\therefore$阴影部分的面积$=S_{\triangle ABI}+S_{\triangle BCG}$

$=2\times5\times12\times\frac{1}{2}$

$=60$.

（2）$\because$正方形$ECGF$，$BIHG$的面积分别是64和289，

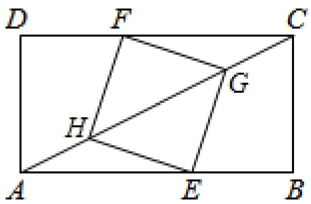
$\therefore$正方形$ECGF$的边长为8，正方形$BIHG$的边长为17，

$\therefore$在$Rt\triangle BCG$中由勾股定理得$BG=\sqrt{17^2-8^2}=15$，

$\therefore AD=15$，$AI=EC=8$，

$\therefore DI=AD-AI=15-8=7$.

18．如图，矩形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=4$，点E在边AB上，点F在边CD上，点G、H在对角线AC上，若四边形$EGFH$是菱形，则AE的长_______.



答案 5

解析连接 EF 交 AC 于点 O，

∵四边形 $EGFH$ 是菱形，

∴ $EF\perp AC$， $OE=OF$，

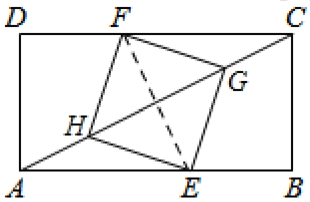
∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle B=\angle D=90^\circ$， $AB/\!/CD$，

∴ $\angle ACD=\angle CAB$，

在 $\triangle CFO$ 与 $\triangle AOE$ 中，

$$\begin{cases}\angle FCO=\angle OAB\\ \angle FOC=\angle AOE,\\ OF=OE\end{cases}$$



$\triangle CFO\cong\triangle AOE$，

∴ $AO=CO$，

∵ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{5}$，

∴ $AO=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$，

∵ $\angle CAB=\angle CAB$， $\angle AOE=\angle B=90^\circ$，

∴ $\triangle AOE\backsim\triangle ABC$，

∴ $\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，

∴ $\dfrac{2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{AE}{4\sqrt{5}}$，

∴ $AE=5$，

故答案为 5．

三、解答题

19．计算

（1） $\sqrt{20}+\sqrt{32}-\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)$．

答案 $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

解析原式 $=2\sqrt{5}+4\sqrt{2}-\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{5}$．

张明东老师17310512331

（2）$\sqrt{75}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\div\sqrt{2}$．

答案 5

解析原式$=5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=5$．

（3）$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2}-\sqrt{24}$．

答案 5

解析原式$=2+3+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}$

$=5$．

（4）$\frac{4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}$．

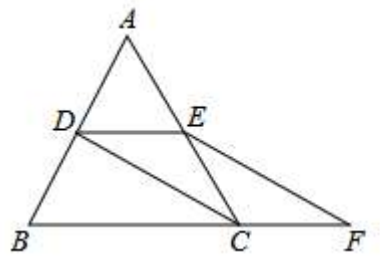
答案$2+\sqrt{2}$

解析原式$=\frac{8+4\sqrt{2}}{7-3}$

$=\frac{8+4\sqrt{2}}{4}$

$=2+\sqrt{2}$．

20．如图，等边$\triangle ABC$边长是 2，D、E分别为AE、AC的中点，延长BC到点F，使$CF=\frac{1}{2}BC$，连接CD和EF．



（1）求证：$DE=CF$．

答案证明过程见解析.

解析∵D、E分别过AE、AC的中点，

∴$DE=\frac{1}{2}BC$，$DE\parallel BC$，

∵延长BC到点F，使$CF=\frac{1}{2}BC$，

∴$DE=FC$，$DE\parallel FC$，

即 $DE=EF$，

（2）求 EF 的长.

答案 $\sqrt{3}$

解析∵ $DE=FC$， $DE\parallel FC$，

∴四边形 $DEFC$ 是平行四边形，

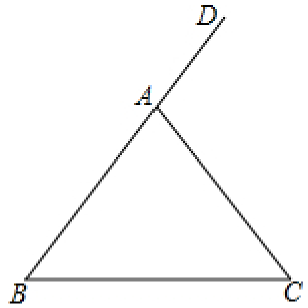
∴ $DC=EF$，

∵ D 为 AB 的中点，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2，

∴ $AD=BD=1$， $CD\perp AB$， $BC=2$，

∴ $DC=EF=\sqrt{3}$.

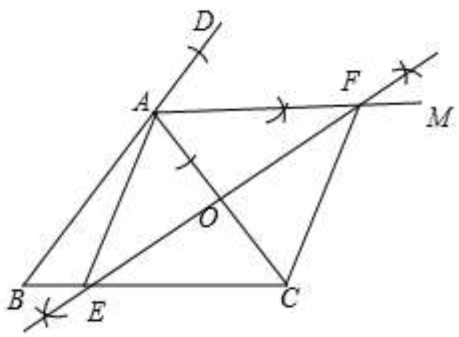
21．如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$， $\angle DAC$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角．实践与操作：根据要求尺规作图，并在图中表明相应字母（保留作图痕迹，不写作法）.



（1）作 $\angle DAC$ 的平分线 AM .

答案答案见解析.

解析



（2）作线段 AC 的垂直平分线，与 AM 交于点 F，与 BC 边交于点 E，连接 AE、CF．猜想并证明：判断四边形 $AECF$ 的形状并加以证明.

答案四边形 $AECF$ 是菱形，证明过程见解析.

解析四边形 $AECF$ 的形状为菱形．理由如下：

∵ $AB=AC$，

∴ $\angle ABC=\angle ACB$，

∵ AM 平分 $\angle DAC$，

∴$\angle DAM=\angle CAM$，

而$\angle DAC=\angle ABC+\angle ACB$，

∴$\angle CAM=\angle ACB$，

∴$AM\parallel BC$，

∵EF 垂直平分 AC，

∴$OA=OC$，$\angle AOF=\angle COE$，$AE=EC$，

在$\triangle AOF$ 和$\triangle COE$ 中，

$$\begin{cases}\angle FAO=\angle EOC\\ OA=OC\\ \angle AOF=\angle COE\end{cases},$$

$\triangle AOF\cong\triangle COE$，

∴$OF=OE$，

即 AC 与 EF 互相垂直平分，$AE=EC$，

∴四边形 $AECF$ 的形状为菱形.

22．如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 上的一点，点 E 在 AD 的延长线上，且 $PA=PE$，PE 交 CD 于点 F .

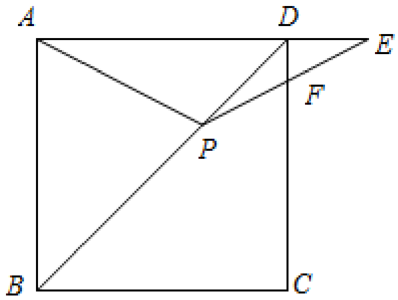


图1

（1）证明：$PC=PE$.

答案证明见解析.

解析如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABP=\angle CBP=45^\circ$，

在$\triangle ABP$ 和$\triangle CBP$ 中，

$$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABP=\angle CBP\\ PB=PB\end{cases},$$

∴$\triangle ABP\cong\triangle CBP$，

∴$PA=PC$，

∵$PA=PE$，

∴$PC=PE$.

（2）求$\angle CPE$ 得度数.

答案 $90°$

解析由（1）知 $\triangle ABP \cong \triangle CBP$，

$\therefore \angle BAP = \angle BCP$，

$\therefore \angle DAP = \angle DCP$，

$\because PA = PE$，

$\therefore \angle DAP = \angle E$，

$\therefore \angle DCP = \angle E$，

$\because \angle CFP = \angle EFD$，

$\therefore 180° - \angle PFC - \angle PCF = 180° - \angle DFE - \angle E$，

即 $\angle CPF = \angle EDF = 90°$．

（3）如图 2，把正方形 $ABCD$ 改为菱形 $ABCD$，其他条件不变，当 $\angle ABC = 120°$ 时，连接 CE，试探究线段 AP 与线段 CE 的数量关系，并说明理由．

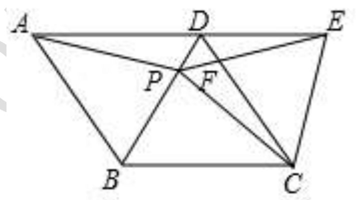


图2

答案 $AP = CE$，证明过程见解析．

解析在菱形 $ABCD$ 中，$AB = BC$，$\angle ABP = \angle CBP = 60°$，

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CBP$ 中，

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABP = \angle CBP \\ PB = PB \end{cases}，$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBP$，

$\therefore PA = PC$，$\angle BAP = \angle BCP$，

$\because PA = PE$，

$\therefore PC = PE$，

$\therefore \angle DAP = \angle DCP$，

$\because PA = PC$，

$\therefore \angle DAP = \angle AEP$

$\therefore \angle DCP = \angle AEP$，

$\because \angle CFP = \angle EFD$，

$\therefore 180° - \angle PFC - \angle PCF = 180° - \angle DFE - \angle E$，

即 $\angle CPF = \angle EDF = 180° - \angle ADC = 60°$，

$\therefore \triangle EPC$ 是等边三角形，

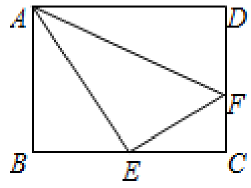
张明东老师17310512331

$\therefore PC = CE$，

$\therefore AP = CE$．

四、附加题

23．如图所示，$\triangle AEF$ 的顶点 E、F 在矩形 $ABCD$ 的 BC、CD 边上，如果矩形 $ABCD$ 的面积是 $2015\,\text{cm}^2$，$\triangle AEF$ 的面积是 $700\,\text{cm}^2$，$BE = 41\,\text{cm}$，那么 $DF =$______ cm．



答案 15

解析根据矩形和三角形的面积公式可知：

设 $AB = CD = x\,\text{cm}$，则 $AD = BC = \dfrac{2015}{x}\,\text{cm}$，$CF = y\,\text{cm}$，$DF = (x - y)\,\text{cm}$，

$\therefore S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EFG} = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle AFE}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}AB \cdot BE + \dfrac{1}{2}AD \cdot DF + \dfrac{1}{2}EC \cdot FC = 2015 - 700$，

$\therefore \dfrac{1}{2}x \times 41 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2015}{x} \times (x - y) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2015}{x} - 41\right) \times y = 1315$，

整理得：$41x + \dfrac{2015}{x} \times x - \dfrac{2015}{x} \times y + \dfrac{2015}{x} \times y - 41y = 2630$，

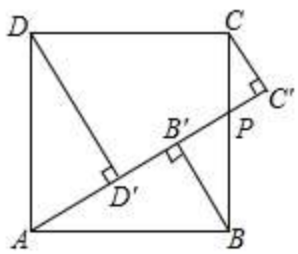
$\therefore 41x - 41y = 615$，

$41(x - y) = 615$

$x - y = 15$，

$\therefore DF = 15\,\text{cm}$．

24．正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 P 为边 BC 上任意一点（可与 B 点或 C 点重合），分别过 B、C、D 作射线 AP 的垂线，垂足分别是 B'、C'、D'，则 $BB' + DD' + CC'$ 的最大值为____，最小值为_______．

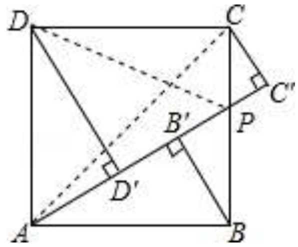


答案 1．2

2．$\sqrt{2}$

解析连接 AC 、 DP，

$S_{正方形ABCD}=1\times1=1$，



由勾股定理得： $AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\because AB=1$，

$\therefore 1\leqslant AP\leqslant\sqrt{2}$，

$\because S_{\triangle DPC}=S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{2}AP\times CC'$，

$\therefore 1=S_{正方形ABCD}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle DPC}=\dfrac{1}{2}AP\left(BB'+DD'+CC'\right)$，

$\therefore BB'+DD'+CC'=\dfrac{2}{AP}$，

$\because 1\leqslant AP\leqslant\sqrt{2}$，

$\sqrt{2}\leqslant BB'+DD'+CC'\leqslant 2$，

因此最大值为 2，最小值为 $\sqrt{2}$.

25．已知 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$，那么 $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+3x+1}}-\sqrt{\dfrac{x}{x^2+9x+1}}$ 的值等于______.

答案 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$

解析由 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$ 两边分别平方得：

$x+\dfrac{1}{x}=2$

原式 $=\sqrt{\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+3}}-\sqrt{\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+9}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

26． $\triangle CDE$ 和 $\triangle AOB$ 是两个等腰直角三角形， $\angle CDE=\angle AOB=90°$， $DC=DE=1$，$OA=OB=a\left(a>1\right)$.

张明东老师17310512331

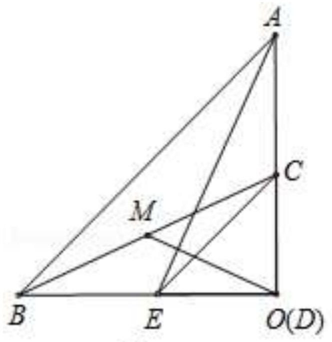


图 1

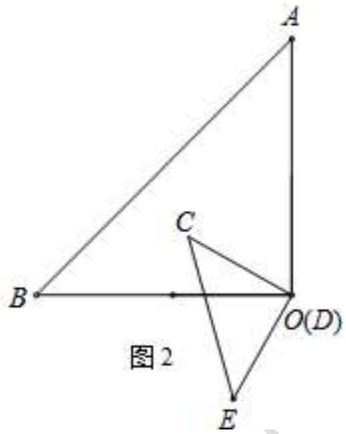


图 2

（1）将$\triangle CDE$的顶点D与点O重合，连接AE、BC，取线段BC的中点M，连接OM．如图 1，若CD、DE分别与OA、OB边重合，则线段OM与AE有怎样的数量关系？请直接写出你的结果计算．

答案$OM=\dfrac{1}{2}AE$

解析∵$\triangle CDE$和$\triangle AOB$是两个等腰直角三角形，

∴$DC=DE=1$，$AO=BO$，$\angle CDE=\angle AOB$，

在$\triangle CDE$和$\triangle AOB$中，

$$\begin{cases}CD=ED\\ \angle CDE=\angle AOB\\ AO=BO\end{cases}，$$

∴$\triangle CDE\cong\triangle AOB$，

∴$BC=AE$，

∵M为BC中点，

∴$OM=\dfrac{1}{2}BC$，

∴$OM=\dfrac{1}{2}AE$，

（2）如图 2，若CD在$\triangle AOB$内部，请你在图 2 中画出完整图形，判断OM与AE之间的数量关系是否有变化？写出你的猜想，并加以证明．

答案$OM=\dfrac{1}{2}AE$，证明过程见解析．

解析猜想：$OM=\dfrac{1}{2}AE$，

证明：如图 2，延长BO到F，使$OF=OB$，连接CF，

∵M为BC中点，

∴$OM=\dfrac{1}{2}CF$，

∵$\triangle CDE$ 和 $\triangle AOB$ 是两个等腰直角三角形，

∴$CD=ED$， $AO=BO=OF$， $\angle CDE=\angle AO$，

∵$\angle AOC+\angle COB=\angle BOE+\angle COB=90°$，

∴$\angle AOC=\angle BOE$，

$\angle FOC=\angle AOE$，

在 $\triangle COF$ 和 $\triangle EOA$ 中，

$$\begin{cases} CD=ED \\ \angle FOC=\angle AOE \\ OF=AO \end{cases}$$

∴$\triangle COF\cong\triangle EOA$，

∴$CF=AE$，

∴$OM=\frac{1}{2}AE$.

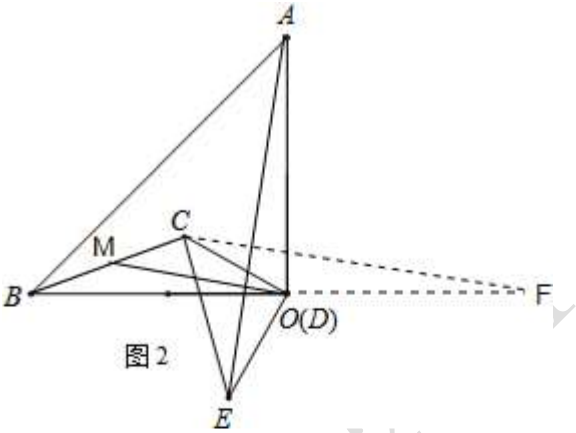


图 2

（3）将 $\triangle CDE$ 绕点 O 任意转动，写出 OM 的取值范围（用含 a 的式子表示）.

答案 $\frac{a-1}{2}\leqslant OM\leqslant\frac{a+1}{2}$.

解析 I、如图 3，当 OC 与 OB 重合时，OM 最大，

$$OM=\frac{a-1}{2}+1=\frac{a+1}{2},$$

II、如图 4，当 OC 在 BO 的延长线上时，OM 最小，

$$OM=\frac{a+1}{2}-1=\frac{a-1}{2},$$

∴$\frac{a-1}{2}\leqslant OM\leqslant\frac{a+1}{2}$.

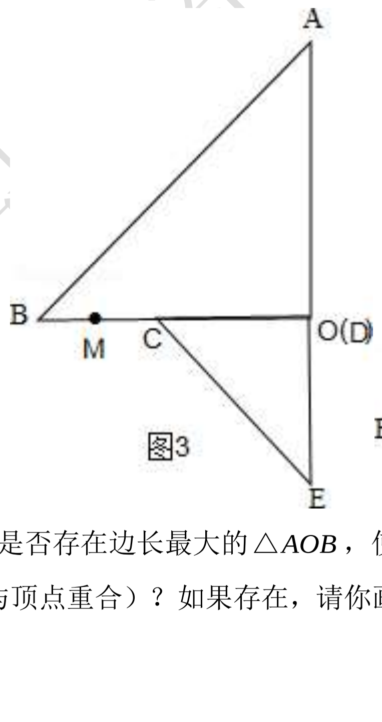


图3

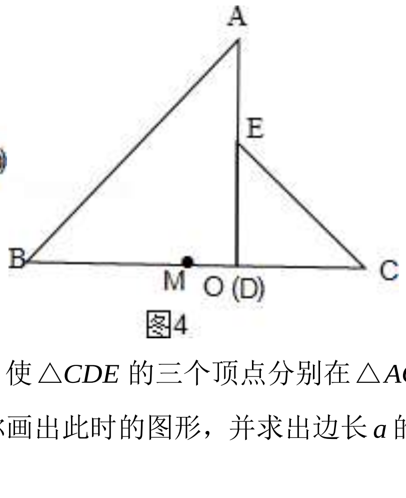


图4

（4）是否存在边长最大的 $\triangle AOB$，使 $\triangle CDE$ 的三个顶点分别在 $\triangle AOB$ 的三条边上（都不与顶点重合）？如果存在，请你画出此时的图形，并求出边长 a 的值；如果不存在，请

说明理由.

答案a的最大值为$\sqrt{5}$

解析根据$\triangle CDE$的对称性，只需分两种情况：

①如图 5，

当顶点D在斜边AB上时，设点C、点E分别在OB、OA上，

作$OF\perp AB$于点F，取CE的中点M，连接OD、MD、OM，

∵$\triangle AOB$和$\triangle CDE$是等腰直角三角形，$\angle AOB=\angle CDE=90°$，

$OA=OB=a(a>1)$ $DC=DE=1$，

∴$AB=\sqrt{2}a$，$OF=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

∴$CE=\sqrt{2}$，$DM=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

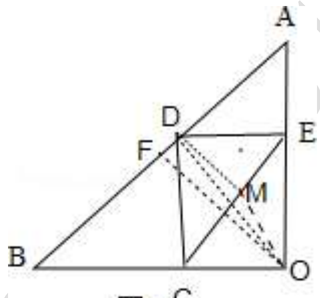


图5

在$Rt\triangle COE$中，$OM=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

在$Rt\triangle DOM$中，$DM+OM\geqslant OD$，

又∵$OD\geqslant OF$，

∵$DM+OM\geqslant OF$，即$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

∴$a\leqslant 2$，

∴直角边a的最大值为 2.

②如图 6，

当顶点D在直角边AO上时，点C、点E分别在OB、AB上，作$EH\perp AO$于点H，

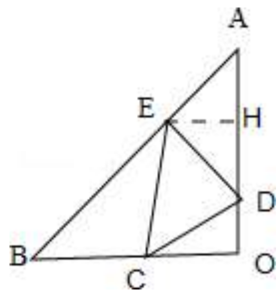
∵$\angle AOB=\angle CDE=\angle DHE=90°$，

∵$\angle HED+\angle EDH=\angle CDO+\angle EDH=90°$，

∴$\angle HED=\angle CDO$，

∵$DC=DE$，

在$\triangle EHD$和$\triangle DOC$中，



$$\begin{cases}\angle EHD=\angle COD\\ \angle HED=CDO\\ DE=DC\end{cases}$$

∴$\triangle EHD\cong\triangle DOC$，

设$OD=x$，

∴$OD=EH=AH=x$，$DH=a-2x$，

在$Rt\triangle DHE$中，$ED^2=DH^2+EH^2$，

∴$1=x^2+a-2x^2$，

整理得，$5x^2-4ax+a^2-1=0$，

∵ x 是实数，

∴ $\Delta=4a^2-4\times5\times a^2-1=20-4a^2\geqslant0$，

∴ $a^2\leqslant5$，

∴ a^2 的最大值为 5，

∴ a 的最大值为 $\sqrt{5}$，

综上所述，a 的最大值为 $\sqrt{5}$．

张明东老师17310512331