

北京市西城区 2014—2015 学年度第二学期期末试卷

# 八年级数学

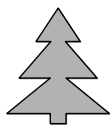
2015.7

试卷满分：100 分，考试时间：100 分钟

## 一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的。

1. 下列图案中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是（ ）。



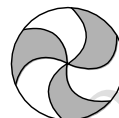
A



B



C



D

2. 下列各组数中，以它们为边长的线段不能构成直角三角形的是（ ）。

A. 2, 2, 3

B. 3, 4, 5

C. 5, 12, 13

D. 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$

3. 已知  $\square ABCD$  中， $\angle A + \angle C = 200^\circ$ ，则  $\angle B$  的度数是（ ）。

A.  $100^\circ$

B.  $160^\circ$

C.  $80^\circ$

D.  $60^\circ$

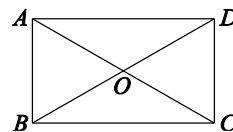
4. 如图，矩形  $ABCD$  中，对角线  $AC$ ,  $BD$  交于点  $O$ 。若  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $BD = 8$ ，则  $AB$  的长为（ ）。

A. 4

B.  $4\sqrt{3}$

C. 3

D. 5



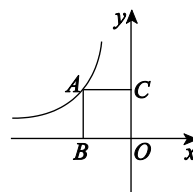
5. 如图，正方形  $ABOC$  的边长为 2，反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $x < 0$ ) 的图象经过点  $A$ ，则  $k$  的值为（ ）。

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4



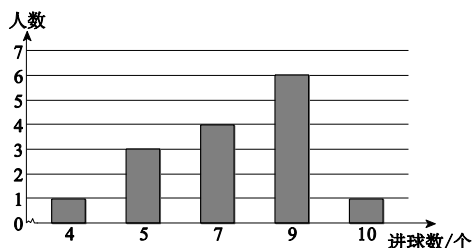
6. 某篮球兴趣小组有 15 名同学，在一次投篮比赛中，他们的成绩如右面的条形图所示。这 15 名同学进球数的众数和中位数分别是（ ）。

A. 10, 7

B. 7, 7

C. 9, 9

D. 9, 7



7. 下列命题中正确的是（ ）。

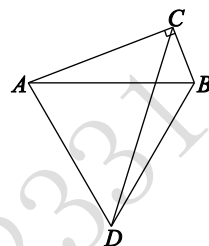
A. 对角线相等的四边形是矩形

B. 对角线互相垂直的四边形是菱形

C. 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形

D. 一组对边相等，另一组对边平行的四边形是平行四边形

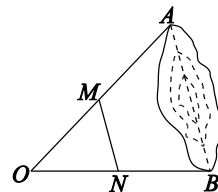
8. 某小区 2014 年屋顶绿化面积为 2000 平方米，计划 2016 年屋顶绿化面积要达到 2880 平方米. 若设屋顶绿化面积的年平均增长率为  $x$ ，则依题意所列方程正确的是 ( ).
- A.  $2000(1+x)^2 = 2880$                       B.  $2000(1-x)^2 = 2880$   
C.  $2000(1+2x) = 2880$                       D.  $2000x^2 = 2880$
9. 若一个直角三角形两边的长分别为 6 和 8，则第三边的长为 ( ).
- A. 10              B.  $2\sqrt{7}$               C. 10 或  $2\sqrt{7}$               D. 10 或  $\sqrt{7}$
10. 如图，以线段  $AB$  为边分别作直角三角形  $ABC$  和等边三角形  $ABD$ ，其中  $\angle ACB=90^\circ$ . 连接  $CD$ ，当  $CD$  的长度最大时，此时  $\angle CAB$  的大小是 ( ).
- A.  $75^\circ$                       B.  $45^\circ$   
C.  $30^\circ$                       D.  $15^\circ$



## 二、填空题（本题共 24 分，每小题 3 分）

11. 若  $x=2$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+3x+m+1=0$  的一个解，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

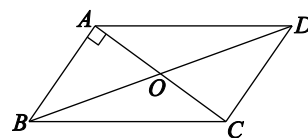
12. 如图，为估计池塘岸边  $A, B$  两点间的距离，在池塘的一侧选取点  $O$ ，分别取  $OA, OB$  的中点  $M, N$ ，测得  $MN=32\text{m}$ ，则  $A, B$  两点间的距离是\_\_\_\_\_m.



13. 2015 年 8 月 22 日，世界田径锦标赛将在北京举行，甲、乙、丙、丁四位跨栏运动员在为该运动会积极准备. 在某天“110 米跨栏”训练中，每人各跑 5 次，据统计，他们的平均成绩都是 13.6 秒，甲、乙、丙、丁的成绩的方差分别是 0.07, 0.03, 0.05, 0.02. 则当天这四位运动员中“110 米跨栏”的训练成绩最稳定运动员的是\_\_\_\_\_.

14. 双曲线  $y = \frac{2}{x}$  经过点  $A(2, y_1)$  和点  $B(3, y_2)$ ，则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$ . (填“>”、“<”或“=”)

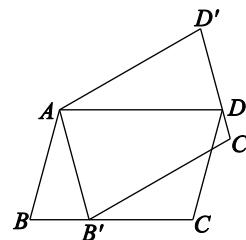
15. 如图， $\square ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  相交于点  $O$ ， $AB \perp AC$ . 若  $AB=4$ ， $AC=6$ ，则  $BD$  的长为\_\_\_\_\_.



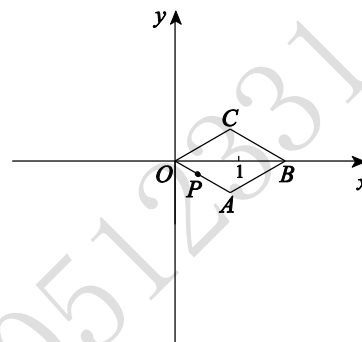
16. 将一元二次方程  $x^2+8x+3=0$  化成  $(x+a)^2=b$  的形式，

则  $a+b$  的值为\_\_\_\_\_.

17. 如图, 将  $\square ABCD$  绕点  $A$  逆时针旋转  $30^\circ$  得到  $\square AB'C'D'$ , 点  $B'$  恰好落在  $BC$  边上, 则  $\angle DAB' =$ \_\_\_\_\_.



18. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 菱形  $OABC$  的顶点  $B$  在  $x$  轴上,  $OA=1$ ,  $\angle AOC=60^\circ$ . 当菱形  $OABC$  开始以每秒转动  $60$  度的速度绕点  $O$  逆时针旋转时, 动点  $P$  同时从点  $O$  出发, 以每秒  $1$  个单位的速度沿菱形  $OABC$  的边逆时针运动. 当运动时间为  $1$  秒时, 点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_; 当运动时间为  $2015$  秒时, 点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.



### 三、解答题 (本题共 20 分, 第 19 题 10 分, 其余每小题 5 分)

19. 解方程:

(1)  $(x-5)^2 - 9 = 0$ ;

(2)  $x^2 + 2x - 6 = 0$ .

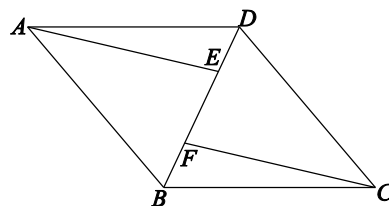
解:

解:

20. 已知: 如图, 四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $AE \parallel CF$ , 且分别交对角线  $BD$  于点  $E, F$ .

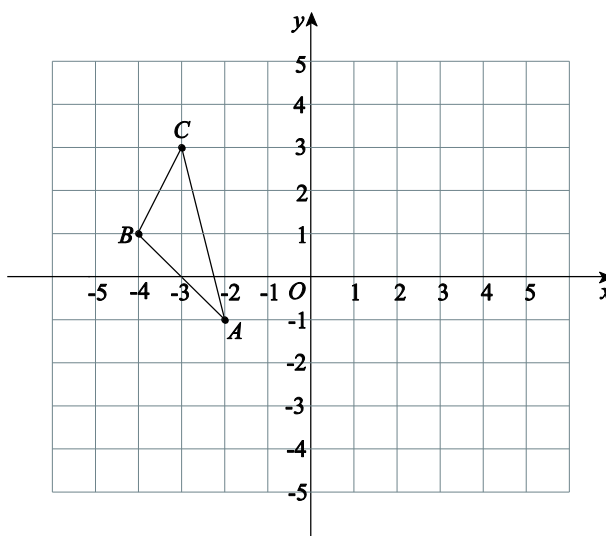
(1) 求证:  $\triangle AEB \cong \triangle CFD$ ;

- (2) 连接  $AF$ ,  $CE$ , 若  $\angle AFE = \angle CFE$ , 求证: 四边形  $AFCE$  是菱形.  
证明: (1)



(2)

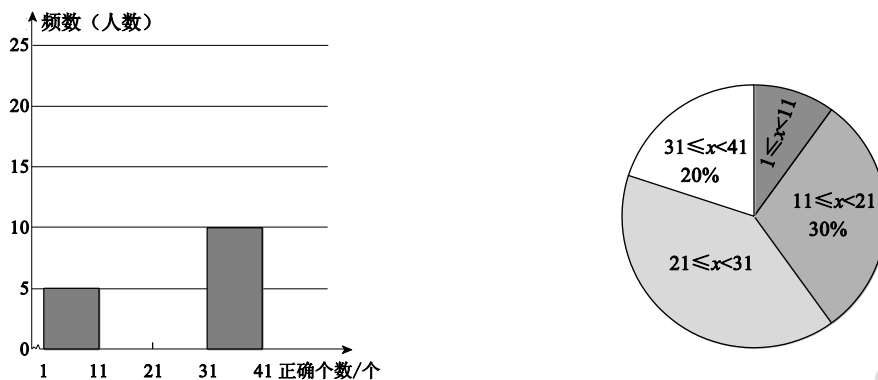
21. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $\triangle ABC$  三个顶点的坐标分别为  $A(-2, -1)$ ,  $B(-4, 1)$ ,  $C(-3, 3)$ .  $\triangle ABC$  关于原点  $O$  对称的图形是  $\triangle A_1B_1C_1$ .  
(1) 画出  $\triangle A_1B_1C_1$ ;  
(2)  $BC$  与  $B_1C_1$  的位置关系是 \_\_\_\_\_,  $AA_1$  的长为 \_\_\_\_\_;  
(3) 若点  $P(a, b)$  是  $\triangle ABC$  一边上的任意一点, 则点  $P$  经过上述变换后的对应点  $P_1$  的坐标可表示为 \_\_\_\_\_.



#### 四、解答题 (本题共 12 分, 每小题 6 分)

22. “中国汉字听写大会”是由中央电视台和国家语言文字工作委员会联合主办的节目, 希望通过节目的播出, 能吸引更多的人关注对汉字文化的学习. 某校也开展了一次“汉字听写”

比赛，每位参赛学生听写 40 个汉字．比赛结束后随机抽取部分学生的听写结果，按听写正确的汉字个数  $x$  绘制成了以下不完整的统计图．



根据以上信息回答下列问题：

- (1) 本次共随机抽取了\_\_\_\_\_名学生进行调查，听写正确的汉字个数  $x$  在\_\_\_\_\_范围的人数最多；
- (2) 补全频数分布直方图；
- (3) 各组的组中值如下表所示．若用各组的组中值代表各组每位学生听写正确的汉字个数，求被调查学生听写正确的汉字个数的平均数；

听写正确的汉字个数 $x$	组中值
$1 \leq x < 11$	6
$11 \leq x < 21$	16
$21 \leq x < 31$	26
$31 \leq x < 41$	36

- (4) 该校共有 1350 名学生，如果听写正确的汉字个数不少于 21 个定为良好，请你估计该校本次“汉字听写”比赛达到良好的学生人数．

解：(3)

(4)

23. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + (2m+2)x + m^2 - 4 = 0$  有两个不相等的实数根．

- (1) 求  $m$  的取值范围；
- (2) 若  $m$  为负整数，且该方程的两个根都是整数，求  $m$  的值．

解：(1)

(2)

五、解答题（本题共 14 分，每小题 7 分）

24. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $A(a, -\frac{7}{2})$  在直线  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$  上， $AB \parallel y$  轴，

且点  $B$  的纵坐标为 1，双曲线  $y = \frac{m}{x}$  经过点  $B$ 。

(1) 求  $a$  的值及双曲线  $y = \frac{m}{x}$  的解析式；

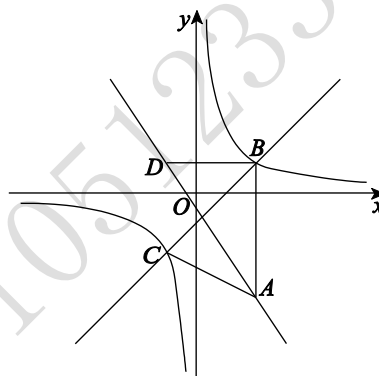
(2) 经过点  $B$  的直线与双曲线  $y = \frac{m}{x}$  的另一个交点为点  $C$ ，且  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{27}{4}$ 。

①求直线  $BC$  的解析式；

②过点  $B$  作  $BD \parallel x$  轴交直线  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$  于点  $D$ ，点  $P$  是直线  $BC$  上的一个动点。若

将  $\triangle BDP$  以它的一边为对称轴进行翻折，翻折前后的两个三角形所组成的四边形为正方形，直接写出所有满足条件的点  $P$  的坐标。

解：(1)



(2) ①

②点  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_。

25. 已知：在矩形  $ABCD$  和  $\triangle BEF$  中， $\angle DBC = \angle EBF = 30^\circ$ ， $\angle BEF = 90^\circ$ 。

(1) 如图 1，当点  $E$  在对角线  $BD$  上，点  $F$  在  $BC$  边上时，连接  $DF$ ，取  $DF$  的中点  $M$ ，连接  $ME$ ， $MC$ ，则  $ME$  与  $MC$  的数量关系是\_\_\_\_\_， $\angle EMC =$ \_\_\_\_\_°；

(2) 如图 2，将图 1 中的  $\triangle BEF$  绕点  $B$  旋转，使点  $E$  在  $CB$  的延长线上，(1) 中的其他条件不变。

- ① (1) 中  $ME$  与  $MC$  的数量关系仍然成立吗？请证明你的结论；  
 ② 求  $\angle EMC$  的度数.

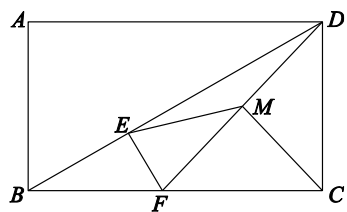


图 1

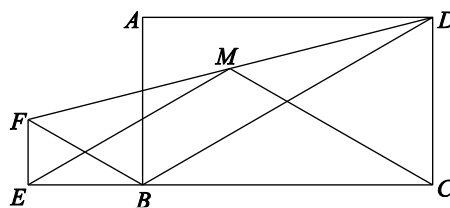


图 2

解：(2) ①

②

北京市西城区 2014—2015 学年度第二学期期末试卷

## 八年级数学附加题

2015.7

试卷满分：20 分



## 一、填空题（本题 6 分）

1. 若一个三角形的三条边满足：一边等于其他两边的平均数，我们称这个三角形为“平均数三角形”。

(1) 下列各组数分别是三角形的三条边长：

①5, 7, 5;      ②3, 3, 3;      ③6, 8, 4;      ④1,  $\sqrt{3}$ , 2.

其中能构成“平均数三角形”的是\_\_\_\_\_；（填写序号）

- (2) 已知 $\triangle ABC$ 的三条边长分别为 $a, b, c$ ，且 $a < b < c$ 。若 $\triangle ABC$ 既是“平均数三角形”，

又是直角三角形，则 $\frac{a}{b}$ 的值为\_\_\_\_\_。

## 二、解答题（本题共 14 分，每小题 7 分）

2. 阅读下列材料：

某同学遇到这样一个问题：在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知直线 $l: y = -x$ ，点 $A(1, t)$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$  ( $x > 0$ ) 的图象上，求点 $A$ 到直线 $l$ 的距离。

如图 1，他过点 $A$ 作 $AB \perp l$ 于点 $B$ ， $AD \parallel y$ 轴分别交 $x$ 轴于点 $C$ ，交直线 $l$ 于点 $D$ 。他发现 $OC = CD$ ， $\angle ADB = 45^\circ$ ，可求出 $AD$ 的长，再利用 $Rt\triangle ABD$ 求出 $AB$ 的长，即为点 $A$ 到直线 $l$ 的距离。

请回答：

图 1 中， $AD = \underline{\hspace{2cm}}$ ，点 $A$ 到直线 $l$ 的距离 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

参考该同学思考问题的方法，解决下列问题：

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知直线 $l: y = -x$ ，点 $M(a, b)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ) 的图象上的一个动点，且点 $M$ 在第一象限，设点 $M$ 到直线 $l$ 的距离为 $d$ 。

- (1) 如图 2，若 $a = 1$ ， $d = 5\sqrt{2}$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

- (2) 如图 3，当 $k = 8$ 时，

①若 $d = 3\sqrt{2}$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

②在点 $M$ 运动的过程中， $d$ 的最小值为\_\_\_\_\_。

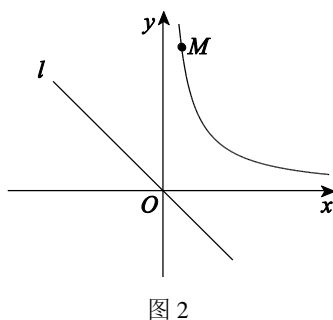
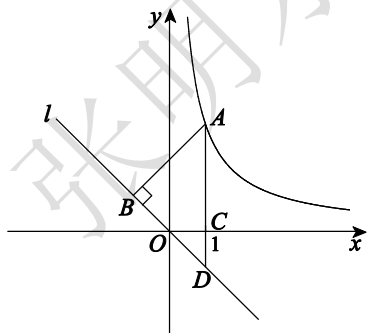
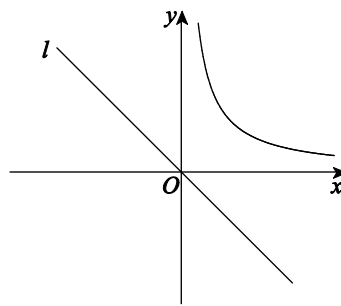


图 2



3. 已知：图 1  $CD$  是正方形， $E$  是  $AB$  边上一点，连接  $DE$ ，过点  $D$  作  $DE$  的垂线交  $BC$  的延长线于点  $F$ ，连接  $EF$ 。

- (1) 如图 1，求证： $DE = DF$ ；

- (2) 若点  $D$  关于直线  $EF$  的对称点为  $H$ ，连接  $CH$ ，过点  $H$  作  $PH \perp CH$  交直线  $AB$  于点  $P$ 。

①在图 2 中依题意补全图形；

②求证： $E$  为  $AP$  的中点；

(3) 如图 3, 连接  $AC$  交  $EF$  于点  $M$ , 求  $\frac{2AM}{AB+AE}$  的值.

(1) 证明:

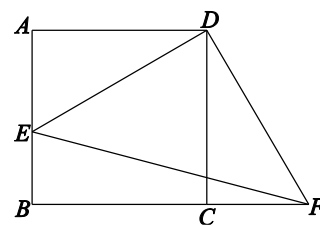


图 1

(2) ②证明:

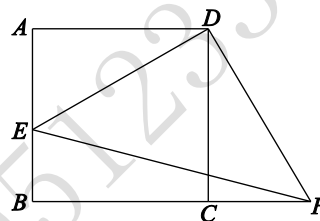


图 2

(3) 解:

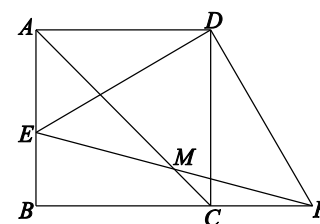


图 3

北京市西城区 2014—2015 学年度第二学期期末试卷

# 八年级数学参考答案及评分标准

2015.7

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	A	D	D	C	A	C	B

二、填空题（本题共 24 分，每小题 3 分）

11. -11. 12. 64. 13. 丁. 14. >.

15. 10. 16. 17. 17. 75.

18.  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ .

三、解答题（本题共 20 分，第 19 题 10 分，其余每小题 5 分）

19. (1) 解:  $(x-5)^2=9$ . .....1 分  
 得  $x-5=\pm 3$ . .....3 分  
 即  $x-5=3$ , 或  $x-5=-3$ .  
 解得  $x_1=8$ ,  $x_2=2$ . .....5 分

(2) 解:  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=-6$ . .....1 分

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 1\times (-6)=28$ . .....2 分

方程有两个不相等的实数根  $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  .....3 分

$$=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{2}=-1\pm\sqrt{7}.$$

即  $x_1=-1+\sqrt{7}$ ,  $x_2=-1-\sqrt{7}$ . .....5 分

20. 证明: (1) 如图 1.

$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore AB\parallel DC$ ,  $AB=DC$ . .....1 分

$\therefore \angle 1=\angle 2$ .

$\because AE\parallel CF$ ,

$\therefore \angle 3=\angle 4$ . .....2 分

在  $\triangle AEB$  和  $\triangle CFD$  中,

$$\begin{cases} \angle 3=\angle 4, \\ \angle 1=\angle 2, \\ AB=CD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle CFD$ . .....3 分

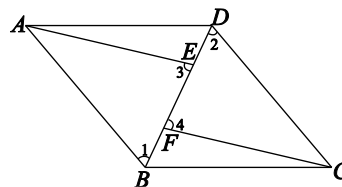


图 1

(2) 如图 2.

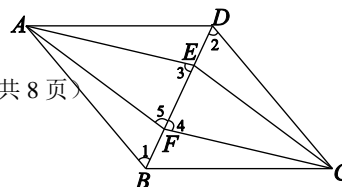


图 2

$$\because \triangle AEB \cong \triangle CFD,$$

$$\therefore AE = CF.$$

$$\because AE \parallel CF,$$

$\therefore$  四边形  $AFCE$  是平行四边形. ....4 分

$$\because \angle 5 = \angle 4, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 3.$$

$$\therefore AF = AE.$$

$\therefore$  四边形  $AFCE$  是菱形. ....5 分

21. 解: (1) 如图 3; .....2 分

(2)  $BC \parallel B_1C_1$ ,  $2\sqrt{5}$ ; .....4 分

(3)  $(-a, -b)$ . .....5 分

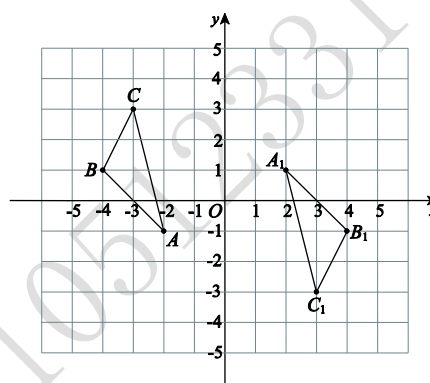


图 3

#### 四、解答题 (本题共 12 分, 每小题 6 分)

22. 解: (1) 50,  $21 \leq x < 31$ ; .....2 分

(2) 如图 4; .....4 分

$$(3) \bar{x} = \frac{6 \times 5 + 16 \times 15 + 26 \times 20 + 36 \times 10}{50} \\ = 23 \text{ (个)}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

答: 被调查学生听写正确的汉字个数的平均数是 23 个.

$$(4) \frac{20 + 10}{50} \times 1350 = 810 \text{ (人)}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

答: 估计该校本次“汉字听写”比赛达到良好的学生人数约为 810 人.

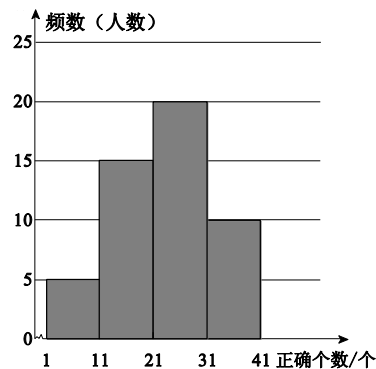


图 4

23. 解: (1)  $\because$  一元二次方程  $x^2 + (2m+2)x + m^2 - 4 = 0$  有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2m+2)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 4) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= 8m + 20 > 0 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore m > -\frac{5}{2}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2)  $\because m$  为负整数,

$$\therefore m = -1 \text{ 或 } -2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

当  $m = -1$  时，方程  $x^2 - 3 = 0$  的根为  $x_1 = \sqrt{3}$ ， $x_2 = -\sqrt{3}$  不是整数，不符合题意，舍去。 .....5 分

当  $m = -2$  时，方程  $x^2 - 2x = 0$  的根为  $x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$  都是整数，符合题意。

综上所述  $m = -2$ 。 .....6 分

24. 解：(1)  $\because$  点  $A(a, -\frac{7}{2})$  在直线  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$  上，

$$\therefore -\frac{7}{2} = -\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}.$$

$$\therefore a = 2. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$\because AB \parallel y$  轴，且点  $B$  的纵坐标为 1，

$\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(2, 1)$ 。

$\because$  双曲线  $y = \frac{m}{x}$  经过点  $B(2, 1)$ ，

$$\therefore 1 = \frac{m}{2}, \text{ 即 } m = 2.$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{2}{x}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) ①过点  $C$  作  $CE \perp AB$  于点  $E$ ，如图 5.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} \times [1 - (-\frac{7}{2})] \times CE = \frac{27}{4}.$$

$$\therefore CE = 3. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore$  点  $C$  的横坐标为  $-1$ 。

$\because$  点  $C$  在双曲线  $y = \frac{2}{x}$  上，

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (-1, -2). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + b$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} 1 = 2k + b, \\ -2 = -k + b. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} k = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = x - 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{② } (-1, -2) \text{ 或 } (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}). \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

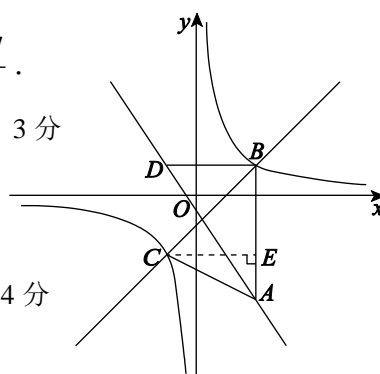


图 5

25. 解：(1)  $ME = MC$ ，120； ..... 2 分

(2) ①  $ME = MC$  仍然成立。

证明：分别延长  $EM$ ， $CD$  交于点  $G$ ，如图 6。 ..... 3 分

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,  
 $\therefore \angle DCB=90^\circ$ .  
 $\because \angle BEF=90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle FEB+\angle DCB=180^\circ$ .  
 $\because$  点  $E$  在  $CB$  的延长线上,  
 $\therefore FE \parallel DC$ .  
 $\therefore \angle 1=\angle G$ .  
 $\because M$  是  $DF$  的中点,  
 $\therefore FM=DM$ .

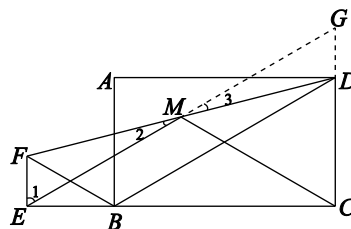


图 6

在  $\triangle FEM$  和  $\triangle DGM$  中,

$$\begin{cases} \angle 1=\angle G, \\ \angle 2=\angle 3, \\ FM=DM, \end{cases}$$

$\therefore \triangle FEM \cong \triangle DGM$ . ..... 4 分

$\therefore EM=GM$ .

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle GEC$  中,  $CM=\frac{1}{2}EG=EM$ .

即  $ME=MC$ . ..... 5 分

②分别延长  $FE$ ,  $DB$  交于点  $H$ , 如图 7.

$\because \angle 4=\angle 5$ ,  $\angle 4=\angle 6$ ,  
 $\therefore \angle 5=\angle 6$ .  
 $\because$  点  $E$  在直线  $FH$  上,  $\angle FEB=90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle HEB=\angle FEB=90^\circ$ .

在  $\triangle FEB$  和  $\triangle HEB$  中,

$$\begin{cases} \angle FEB=\angle HEB, \\ EB=EB, \\ \angle 5=\angle 6, \end{cases}$$

$\therefore \triangle FEB \cong \triangle HEB$ .

$\therefore FE=HE$ .

$\because FM=MD$ ,

$\therefore EM \parallel HD$ . ..... 6 分

$\therefore \angle 7=\angle 4=30^\circ$ .

$\because ME=MC$ ,

$\therefore \angle 7=\angle 8=30^\circ$ .

$\therefore \angle EMC=180^\circ-\angle 7-\angle 8=180^\circ-30^\circ-30^\circ=120^\circ$ . ..... 7 分

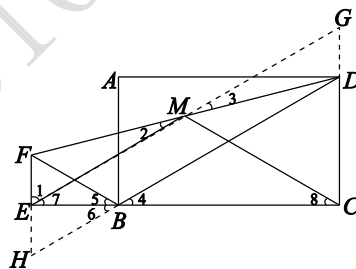


图 7

北京市西城区 2014—2015 学年度第二学期期末试卷

八年级数学附加题参考答案及评分标准

2015.7

## 一、填空题（本题 6 分）

1. (1) ②, ③; ..... 4 分  
 (2)  $\frac{3}{4}$ . ..... 6 分

## 二、解答题（本题共 14 分，每小题 7 分）

2. 解：4,  $2\sqrt{2}$ ; ..... 2 分  
 解决问题：(1) 9; ..... 4 分  
 (2) ① 2 或 4; ..... 6 分  
 ② 4. .... 7 分

3. (1) 证明：如图 1.

∵ 四边形  $ABCD$  是正方形,  
 $\therefore DA=DC$ ,  $\angle DAE=\angle ADC=\angle DCB=90^\circ$ .  
 $\therefore \angle DCF=180^\circ-90^\circ=90^\circ$ .  
 $\therefore \angle DAE=\angle DCF$ .  
 $\therefore DF \perp DE$ ,  
 $\therefore \angle EDF=90^\circ$ .  
 $\therefore \angle 1+\angle 2=90^\circ$ ,  $\angle 2+\angle 3=90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle 1=\angle 3$ . .... 1 分

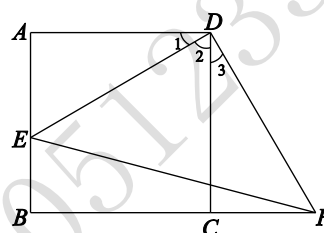


图 1

在  $\triangle DAE$  和  $\triangle DCF$  中,

$$\begin{cases} \angle DAE=\angle DCF, \\ DA=DC, \\ \angle 1=\angle 3, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCF$ .

$\therefore DE=DF$ . .... 2 分

- (2) ① 所画图形如图 2 所示. .... 3 分

- ② 证明：连接  $HE$ ,  $HF$ , 如图 3.

∵ 点  $H$  与点  $D$  关于直线  $EF$  对称,

$\therefore EH=ED$ ,  $FH=FD$ .

$\therefore DE=DF$ ,

$\therefore EH=FH=ED=FD$ .

$\therefore$  四边形  $DEHF$  是菱形.

$\therefore \angle EDF=90^\circ$ ,

$\therefore$  四边形  $DEHF$  是正方形. .... 4 分

$\therefore \angle DEH=\angle EHF=\angle HFD=90^\circ$ .

$\therefore \angle 1+\angle 2=90^\circ$ ,  $\angle 3+\angle DFC=90^\circ$ .

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCF$ ,

$\therefore \angle 1=\angle DFC$ ,  $AE=CF$ .

$\therefore \angle 2=\angle 3$ .

$\therefore PH \perp CH$ ,

$\therefore \angle PHC=90^\circ$ .

$\therefore \angle 4+\angle 5=90^\circ$ ,  $\angle 5+\angle 6=90^\circ$ ,

$\therefore \angle 4=\angle 6$ .

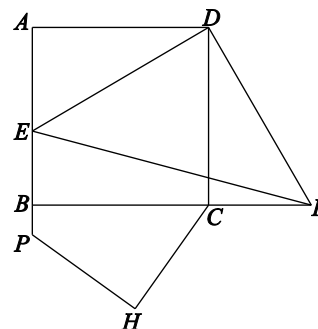


图 2

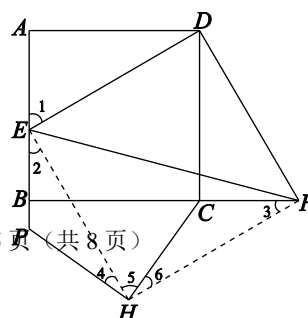


图 3

在 $\triangle HPE$ 和 $\triangle HCF$ 中，

$$\begin{cases} \angle 2 = \angle 3, \\ EH = FH, \\ \angle 4 = \angle 6, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle HPE \cong \triangle HCF.$$

$$\therefore PE = CF.$$

$$\therefore AE = PE.$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 是 } AP \text{ 的中点.} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(3) 解：过点  $F$  作  $GF \perp CF$  交  $AC$  的延长线于点  $G$ ，如图 4.

则  $\angle GFC = 90^\circ$ .

$\because$  正方形  $ABCD$  中， $\angle B = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle GFC = \angle B.$$

$$\therefore AB \parallel GF.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle G.$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 = \angle 1 = \angle G = 45^\circ.$$

$$\therefore FC = FG.$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCF,$$

$$\therefore AE = CF.$$

$$\therefore AE = FG.$$

在 $\triangle AEM$ 和 $\triangle GFM$ 中，

$$\begin{cases} \angle AME = \angle GMF, \\ \angle 1 = \angle G, \\ AE = GF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle GFM.$$

$$\therefore AM = GM.$$

$$\therefore AG = 2AM. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2AB^2} = \sqrt{2}AB.$$

$$\text{同理, 在 Rt}\triangle CFG \text{ 中, } CG = \sqrt{2}CF.$$

$$\therefore AG = AC + CG = \sqrt{2}AB + \sqrt{2}CF = \sqrt{2}(AB + CF) = \sqrt{2}(AB + AE).$$

$$\therefore 2AM = \sqrt{2}(AB + AE).$$

$$\therefore \frac{2AM}{AB + AE} = \sqrt{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

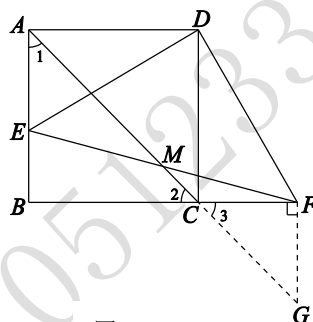


图 4