

2015—2016 学年北京西城区北京师范大学附属实验中学初二下学期期中数学试卷（含附加）

一、选择题

1. 已知一个三角形的三边长度如下，则能够判断这个三角形是直角三角形的是

- A. 2, 3, 4 B. 3, 4, 6 C. 6, 8, 9 D. 1, 1, $\sqrt{2}$

答案 D

解析根据勾股定理逆定理得： $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$,

故答案选 D.

2. 一组数据 1, 2, 4, x , 6 的众数是 2, 则 x 的值是

- A. 1 B. 4 C. 2 D. 6

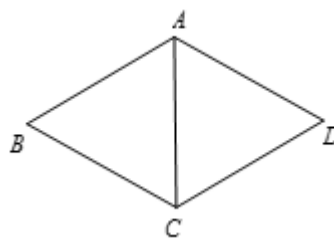
答案 C

解析根据众数的定义，众数是出现次数最多的数，

\because 众数是 2,

$\therefore x = 2$, 故答案选 C.

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 5$, $\angle BCD = 120^\circ$, 则对角线 AC 等于



- A. 20 B. 15 C. 10 D. 5

答案 D

解析 $\because \angle BCD = 120^\circ$

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$

$\therefore AC = AB = BC = 5$

4. 下列二次根式中，是最简二次根式的是

- A. $\sqrt{4x}$ B. $\sqrt{x^2 - 2}$ C. $\sqrt{3x^2}$ D. $\sqrt{\frac{x}{2}}$

答案 B

解析最简二次根式的定义，根式中不能含有能开的尽方的数或式子，被开方数不能为分式，

故答案选 B.

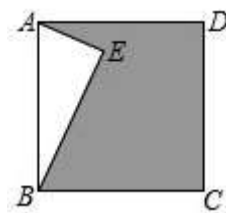
5. 已知甲、乙两组数据的平均数相等，若甲组数据的方差是 $s^2 = 0.055$, 乙组数据的方差是 $s^2 = 0.105$, 则

- A. 甲组数据比乙组数据波动大 B. 乙组数据比甲组数据波动大
C. 甲组数据比乙组数据波动一样大 D. 甲、乙两组数据的波动大小不能比较

答案 B

解析方差反应数据波动的情况，方差越大数据波动程度越大，故答案选 B.

6. 如图，正方形 $ABCD$ 中， AE 垂直于 BE ，且 $AE = 3$ ， $BE = 4$ ，则阴影部分的面积为



A. 16

B. 18

C. 19

D. 13

答案 C

解析考查勾股定理， $\because AE$ 垂直于 BE ，且 $AE = 3$ ， $BE = 4$ ，

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABE \text{ 中, } AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 5, \quad S = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle BAE} = 25 - 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 19,$$

故答案选 C.

7. 下列命题正确的是

A. 对角线相等且互相平分的四边形是菱形

B. 对角线相等且互相垂直的四边形是菱形

C. 对角线相等且互相平分的四边形是矩形

D. 对角线相等的四边形是等腰梯形

答案 C

解析 A 选项，对角线相等且互相平分的四边形是平行四边形；

B 选项，对角线互相平分且垂直的四边形是菱形；

C 选项，正确；

D 选项，对角线相等且互相平分的四边形是矩形.

故答案选 C.

8. 正方形 $ABCD$ 的边长为 8，顺次连接四边中点，所得的四边形面积是

A. 24

B. 32

C. 36

D. 40

答案 B

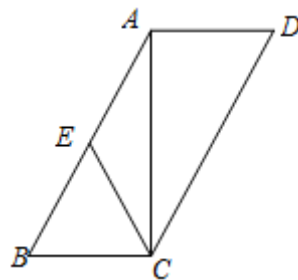
解析在正方形 $ABCD$ 中，根据勾股定理得，中点四边形的边长为： $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

又 \because 中点四边形为正方形，

$$\therefore \text{中点四边形的面积为: } 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 32,$$

故答案选 B.

9. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $AC \perp BC$ ， E 是 AB 的中点，若 $CE = 2$ ，则 $CD =$



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

答案 C

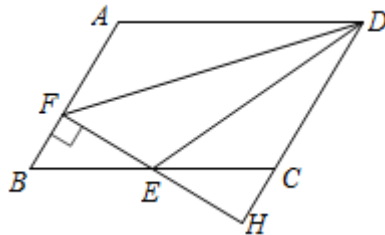
解析 $\because AC \perp BC$ ， E 是 AB 的中点， $CE = 2$ ，

$$\therefore CE = \frac{1}{2} AB,$$

$\therefore AB = 4$ ，又 \because 在 $ABCD$ 中 $AB = CD$ ，

$\therefore CD = 4$ ，故答案选 C.

10. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，过 BC 的中点 E 作 $EF \perp AB$ ，垂足为点 F ，与 DC 的延长线交于点 H ，则 $\triangle DEF$ 的面积是

A. $2\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $3 + \sqrt{3}$ D. $6 + 2\sqrt{3}$

答案 A

解析 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = DC$ ， $AB \parallel DC$ ，

$\because EF \perp AB$ ，

$\therefore \angle BFE = \angle CHE = 90^\circ$ ，

又 $\because E$ 是 BC 中点，

$\therefore BE = EC$ ，

在 $\triangle BFE$ 和 $\triangle CHE$ 中，

$$\begin{cases} BE = EC \\ \angle BEF = \angle CEH \\ \angle BFE = \angle CHE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BFE \cong \triangle CHE$ ，

$\therefore BF = CH$ ，

在 $Rt\triangle BFE$ 中，

$\angle ABC = 60^\circ$ ， $AD = 4$ ，

$$\therefore EF = BE \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad BF = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \sqrt{3} \times (3+1) \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3},$$

故答案选 A.

二、填空题

11. 使式子 $\sqrt{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

答案 $x \geq 1$

解析二次根式成立的条件, $x-1 \geq 0$, $\therefore x \geq 1$.

12. 一组数据如下: 3, 6, 2, 3, 4, 3, 6, 那么这组数据的中位数是_____.

答案 3

解析将数据从小到大排列: 2, 3, 3, 3, 4, 6, 6, 则中位数为 3.

13. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$ _____.

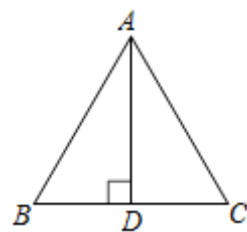
答案 $5 + 2\sqrt{6}$

解析原式: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

$$= 2 + 3 + 2\sqrt{6}$$

$$= 5 + 2\sqrt{6}$$

14. 如图, 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是底边上的高, 若 $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, 则 $AD =$ _____ cm.



答案 4

解析: 等腰 $\triangle ABC$ 中, AD 是底边上的高,

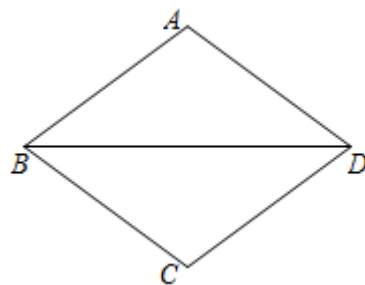
$$\therefore BD = CD = 3,$$

$$\text{又} \because AB = 5 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 4,$$

$$AD = 4 \text{ cm}.$$

15. 如下图, 菱形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle ABD = 20^\circ$, 则 $\angle C$ 的大小是_____.



答案 140°

解析菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle CBD = 20^\circ$,

又 $\because \angle C + \angle ABC = 180^\circ$,

$\therefore \angle C = 180^\circ - 2\angle ABD = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

16. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC : AC = 3 : 4$, 则 $BC =$ _____, $AC =$ _____.

答案 1. 6

2. 8

解析根据勾股定理得, $\because BC : AC = 3 : 4$,

设 $BC = 3k$, $AC = 4k$,

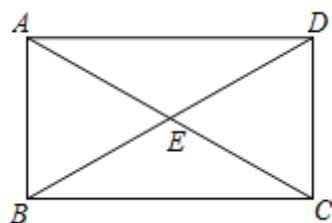
\therefore 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB^2 = BC^2 + AC^2$,

$\therefore 100 = 9k^2 + 16k^2$,

$\therefore k = 2$,

$\therefore BC = 6, AC = 8$.

17. 如下图, 矩形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 E , 若 $AB = 6$, $BC = 8$, 则 $DE =$ _____.



答案 5

解析在矩形 $ABCD$ 中, E 为 BD 中点,

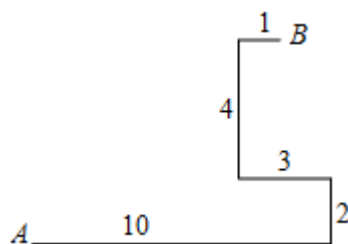
在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $BC = 8$,

$\therefore AC = 10$,

又 $\because BD = AC = 10$,

$\therefore DE = 5$.

18. 如下图, 一个机器人从 A 点出发, 拐了几个直角的弯到达 B 点位置, 根据图中的数据, 点 A 和点 B 的直线距离是_____.

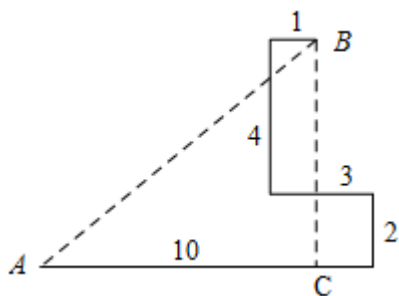


答案 10

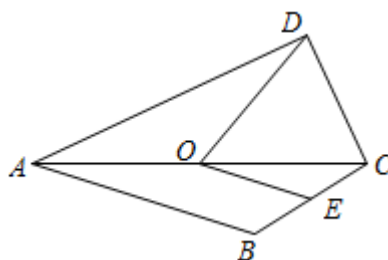
解析如图，过点 B 作 BC 垂直 AC 于点 C ，连接 AB ，

在 $Rt\triangle ACB$ 中， $AC=8$ ， $BC=6$ ，

$\therefore AB=10$ 。



19. 如下图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADC=90^\circ$ ，取 AC 的中点 O ， BC 的中点 E ，连接 OD 、 OE ， $\angle CAD=\angle CAB=20^\circ$ ，则 $\angle DOE=$ _____ $^\circ$ 。



答案 60

解析如图，在 $Rt\triangle ACD$ 中， \because 点 O 是 AC 中点，

$\therefore OD=OA$ ， $\angle DAC=\angle ADO=20^\circ$ ，

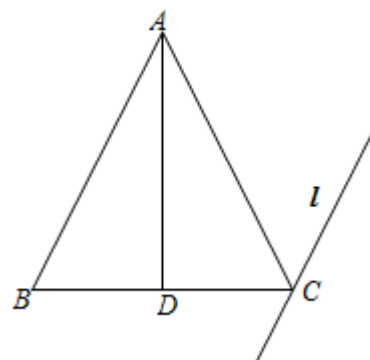
$\therefore \angle DOC=40^\circ$ ，

又 $\because E$ 为 BC 的中点，

$\therefore OE \parallel AB$ ， $\angle COE=\angle CAB=20^\circ$ ，

$\therefore \angle DOE=60^\circ$ 。

20. 如下图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=5$ ， $BC=6$ ， $AD \perp BC$ ，过 C 作 AB 的平行线 l ，并在 l 上找一点 P ，使得 $PB=2AD$ ，则线段 PC 的长度为 _____。



答案 2.8 或 10

解析过点 B 作 $BE \perp l$ 于点 E ,

$$\therefore \angle ADB = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because BD = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BP = 2AD = 8,$$

$$\because CE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ABD,$$

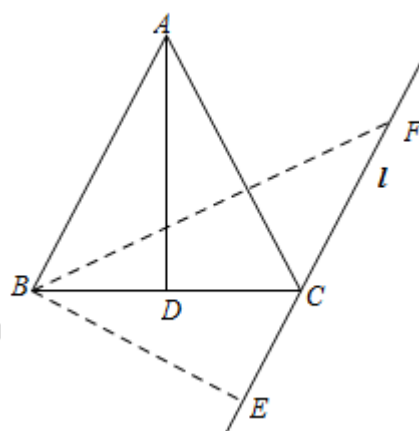
$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ABD, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{BE}{AD} = \frac{EC}{BD},$$

$$\therefore BE = 4.8, \quad EC = 3.6,$$

$$\therefore PE = \sqrt{PB^2 - BE^2} = 6.4,$$

$$\therefore PC = PE - EC = 2.8 \text{ 或 } PE + EC = 10.$$

$$\therefore PC \text{ 的长为 } 2.8 \text{ 或 } 10.$$



三、解答题

21. 计算:

$$(1) \sqrt{32} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2}.$$

答案 $6\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{解析原式} &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{5})-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}.$$

答案 $\sqrt{5}+2$

$$\text{解析原式} = \frac{2\sqrt{5}+5-1}{3-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+4}{2}$$

$$= \sqrt{5}+2.$$

22. 甲、乙两人是 NBA 联赛凯尔特人队的两位明星球员，两人在前五个赛季的罚球命中率如下表所示：

甲球员的命中率 (%)	87	86	83	85	79
乙球员的命中率 (%)	87	85	84	80	84

(1) 分别求出甲、乙两位球员在前五个赛季罚球的平均命中率.

答案 $\bar{x}_{\text{甲}} = 84\%$, $\bar{x}_{\text{乙}} = 84\%$.

解析甲球员的平均命中率为: $\bar{x}_{\text{甲}} = \frac{87+86+83+85+79}{5} \% = 84\%$,

乙球员的平均命中率为: $\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{87+85+84+80+84}{5} \% = 84\%$.

(2) 在某场比赛中, 因对方球员技术犯规需要凯尔特人队选派一名球员进行罚球, 从罚球命中率的稳定性考虑, 你认为甲、乙两位球员谁来罚球更好? (请通过计算说明理由)

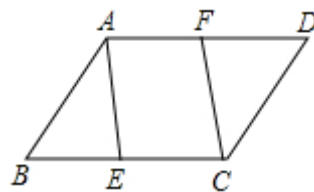
答案乙球员来罚球更好

解析甲球员的方差为: $s_{\text{甲}}^2 = \frac{(87-84)^2 + (86-84)^2 + (83-84)^2 + (85-84)^2 + (79-84)^2}{5} = 8$,

乙球员的方差为: $s_{\text{乙}}^2 = \frac{(87-84)^2 + (85-84)^2 + (84-84)^2 + (80-84)^2 + (84-84)^2}{5} = 3.25$.

\because 甲乙两球员的平均成绩相同, 则方差小的球员成绩稳定, 因此我认为应该由乙球员进行罚球更好.

23. 已知: 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 分别是边 BC 和 AD 上的点, $BE = DF$.



(1) 求证: $AE \parallel CF$.

答案证明见解析.

解析在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, $AD \parallel BC$,

$\because BE = DF$,

$\therefore AF = CE$,

\therefore 四边形 $AFCE$ 是平行四边形,

$\therefore AE \parallel CF$.

(2) 若 $\angle AEC = 2\angle FCE$ ，求 $\angle FCE$ 的度数.

答案 60°

解析由 (1) 知， $AE \parallel CF$ ，

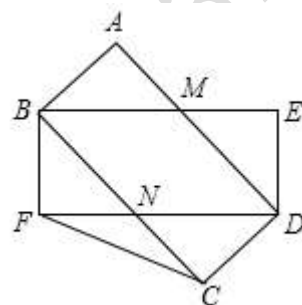
$$\therefore \angle AEC + \angle FCE = 180^\circ,$$

$$\because \angle AEC = 2\angle FCE,$$

$$\therefore 3\angle FCE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = 60^\circ.$$

24. 两个完全相同的矩形纸片 $ABCD$ 、 $BFDE$ 如图放置， $AB = BF$ ，求证：四边形 $BNDM$ 为菱形.



答案证明见解析

解析已知两个完全相同的矩形纸片 $ABCD$ 、 $BFDE$ ，

$$\therefore BC \parallel AD, BE \parallel DF,$$

\therefore 四边形 $BNDM$ 是平行四边形，

$$\because \angle ABM + \angle MBN = 90^\circ, \angle MBN + \angle FBN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle FBN,$$

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle FBN$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABM = \angle FBN \\ AB = BF \\ \angle A = \angle BFN = 90^\circ \end{cases}$$

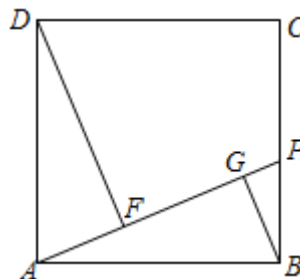
$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle FBN,$$

$$\therefore BM = BN,$$

\therefore 平行四边形 $BNDM$ 是菱形.

25. 如图：正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 P 是边 BC 上的任意一点（可与点 B 或点 C 重合），

分别过 B 、 D 作 AP 的垂线段，垂足分别为 F 、 G 。猜想： $DF^2 + BG^2$ 的值，并对你的猜想加以证明.



答案 $DF^2 + BG^2 = 1$

解析在正方形 $ABCD$ 中, $AD = AB = 1$, $\angle DAB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DAF + \angle FAB = 90^\circ,$$

$$\because DF \perp AP, \quad BG \perp AP,$$

$$\therefore \angle DFA = \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle BAG,$$

在 $\triangle DAF$ 和 $\triangle ABG$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle DFA = \angle AGB = 90^\circ \\ \angle ADF = \angle BAG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAF \cong \triangle ABG,$$

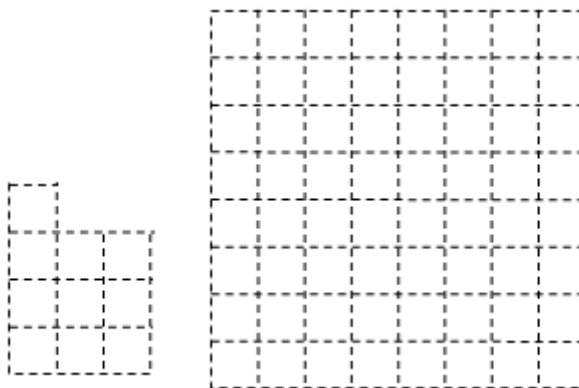
$$\therefore GB = AF,$$

在 $Rt\triangle DAF$ 中, $AD^2 = DF^2 + AF^2$,

$$\therefore DF^2 + BG^2 = AD^2 = 1.$$

四、动手做一做

26. 现有 10 个边长为 1 的正方形, 排列形式如左下图, 请把它们分割后拼接成一个新的正方形. 要求: 在左下图中用实线画出分割线, 并将分得的每部分标上序号, 然后重新在右下图的正方形网格图 (图中每个小正方形的边长为 1) 中用实线画出拼接成的新正方形 (标上相应的序号).



答案答案见解析

解析

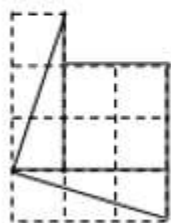


图 1

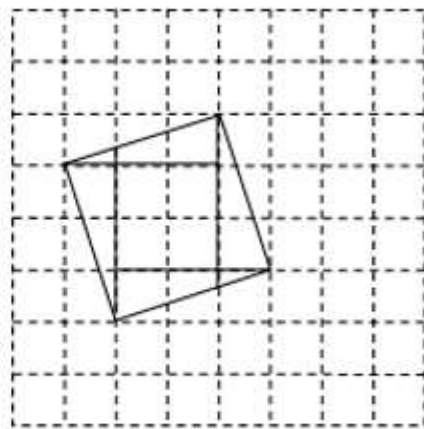
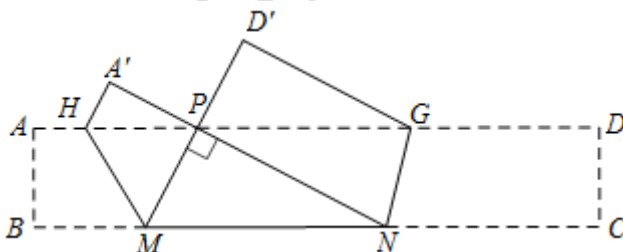


图 2

五、解答题

27. 如图, 把长方形纸片 $ABCD$ 折叠, B 、 C 两点恰好重合, 落在边 AD 上的点 P 处, MH 、 NG 为折痕, $\angle MPN = 90^\circ$.



(1) 若 $\angle MNP = \alpha$, 求 $\angle NPG$ 和 $\angle GNC$ (用含 α 的代数式表示).

答案 $\angle NPG = \alpha$, $\angle GNC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

解析在长方形纸片 $ABCD$ 中, $\therefore AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle MNP = \angle NPG = \alpha,$$

\because 把长方形纸片 $ABCD$ 折叠,

$$\therefore \angle PNG = \angle GNC,$$

$$\therefore \angle GNC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

(2) 已知 $BC = 12$, $BM = 3$, 求 MN 的长.

答案 5

解析 $\because NP = NC$, $MP = BM$, $BC = 12$, $BM = 3$,

$$\therefore MC = BC - BM = 9,$$

设 $NP = x$, 则 $MN = 9 - x$,

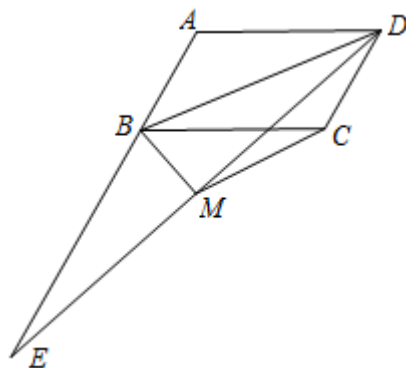
在 $Rt\triangle MNP$ 中, 存在 $MN^2 = MP^2 + NP^2$,

$$\therefore (9-x)^2 = 3^2 + x^2,$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore MN = 5.$$

28. 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle BDC$ 的角平分线 DE 交 AB 于点 E ，取 DE 的中点 M 并连接 CM 、 BM 。



- (1) 直接写出线段 BM 和 DE 的位置关系。

答案 $BM \perp DE$

解析 $BM \perp DE$ 。

- (2) 若 $BD = 2DC$ ，判断 $\triangle DCM$ 的形状，并证明你的结论。

答案 $\triangle MCD$ 是等腰三角形

解析如图，延长 DC 到 P 点，使 $CP = DC$ ，连接 PE ，

在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ，

$\therefore DE$ 平分 $\angle BDC$ ，

$\therefore \angle BDM = \angle MDC$ ，

又 $\therefore \angle MDC = \angle AEM$ ，

$\therefore \angle AEM = \angle BDM$ ， $BD = BE$ ，

$\therefore BD = 2DC$ ，

$\therefore BD = DP$ ，

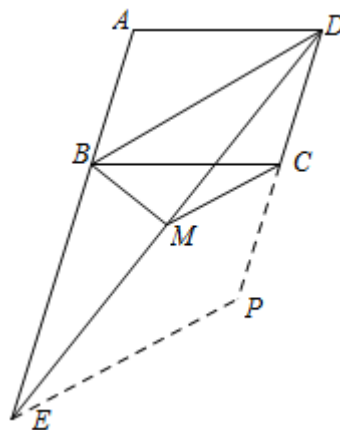
$\therefore DP = BE = BD$ ， $DP \parallel BE$ ，

\therefore 四边形 $BEPD$ 是菱形，

$\therefore C$ 是 DP 中点， $MC = \frac{1}{2}EP$ ，

$\therefore DM = DC$ ，

$\therefore \triangle MCD$ 是等腰三角形。



- (3) 若四边形 $BMCD$ 满足： $BD \parallel MC$ ， $BM = CD$ ，请直接写出平行四边形 $ABCD$ 应满足的所有条件。

答案 $BD = 2DC$ 且 $\angle ABC = 90^\circ$

解析 $BD = 2DC$ 且 $\angle ABC = 90^\circ$.

附加题

29. 观察下列式子：

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{1}}{2} \leq \sqrt{\frac{1+1}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{1+2}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \leq \sqrt{\frac{2+6}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{10} + \sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{\frac{10+3}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{15}}{2} \leq \sqrt{\frac{15+15}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} \leq \sqrt{\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{12} + \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} \leq \sqrt{\frac{12 + \frac{1}{4}}{2}},$$

.....,

(1) 请用正数 a 、 b 表示上述规律：

答案 $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}};$

解析 $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}};$

(2) 已知正数 m 、 n 满足 $2m + 3n = 8$ ，利用上述规律写出代数式 $\sqrt{2m+4} + \sqrt{3n+6}$ 的最大值为_____.

答案 6

解析根据上述规律可将代数式化为：

$$\frac{\sqrt{2m+4} + \sqrt{3n+6}}{2} \leq \sqrt{\frac{2m+4+3n+6}{2}},$$

$$\because 2m + 3n = 8,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2m+4+3n+6}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3,$$

$$\therefore \sqrt{2m+4} + \sqrt{3n+6} \leq 6,$$

$\therefore \sqrt{2m+4} + \sqrt{3n+6}$ 的最大值为 6.

30. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别为边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上的点, $HA = EB = FC = GD$, 连接 EG 和 FH , 交点为 O .

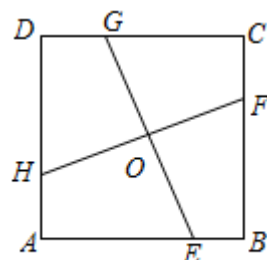


图1

- (1) 如图 2, 连接 EF 、 FG 、 GH 、 HE , 则四边形 $EFGH$ 的形状为_____.

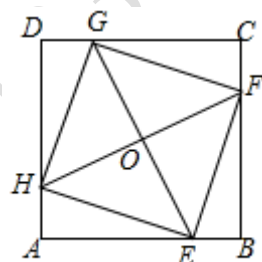


图2

答案正方形

解析 \because 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ, \quad AB = BC = CD = DA,$$

$$\therefore HA = EB = FC = GD,$$

$$\therefore AE = BF = CG = DH,$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG,$$

$$\therefore EF = FG = GH = HE,$$

\therefore 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$$\therefore \triangle DHG \cong \triangle AEH,$$

$$\therefore \angle DHG = \angle AEH,$$

$$\therefore \angle AEH + \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHG + \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GHE = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $EFGH$ 是正方形.

- (2) 将正方形 $ABCD$ 沿线段 EG 、 HF 剪开, 再把得到的四个四边形按图 3 方式拼接成一个中空 (阴影) 的四边形. 若正方形 $ABCD$ 的边长为 3cm, $HA = EB = FC = GD = 1$ cm, 则图 3 中阴影部分的面积为_____ cm^2 .

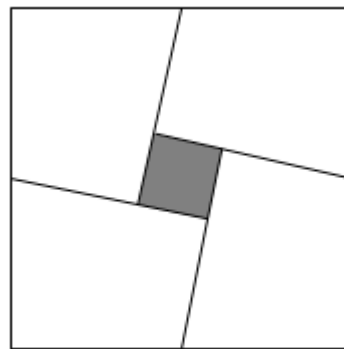


图3

答案 1

解析 $\because HA = EB = FC = GD = 1, AB = BC = CD = AD = 3,$

$$\therefore GF = EF = EH = GH = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

\therefore 由 (1) 知, 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$$\therefore GO = OF, \angle GOF = 90^\circ,$$

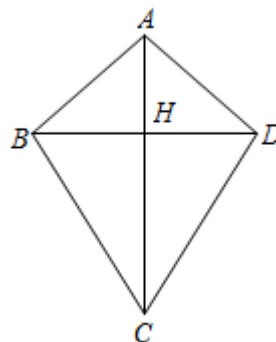
$$\text{由勾股定理得: } GO = OF = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}FCGO} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 - S_{\text{四边形}FCGO} \times 4 = 10 - 9 = 1.$$

31. 如果一个四边形 $ABCD$ 满足 $AB = AD$ 且 $BC = CD$, 则称四边形 $ABCD$ 为筝形.

(1) 如图, 连接筝形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 H , 求证: $AC \perp BD$.



答案证明过程见解析.

解析在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AC = AC \\ AB = AD \\ BC = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BD.$$

(2) 求证：筝形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

答案证明见解析

解析： $\because AC \perp BD$

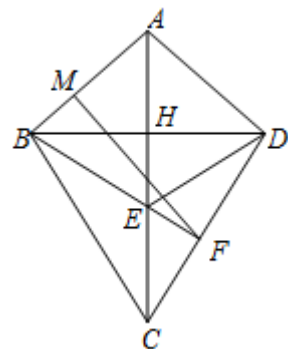
$$\therefore S_{\text{筝形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AH + \frac{1}{2} BD \cdot CH$$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AC,$$

$$\therefore \text{筝形 } ABCD \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

(3) 如图，在筝形 $ABCD$ 中， $AB = AD = 5$ ， $BC = CD$ ， $BD = 8$ ，过点 B 作 $BF \perp CD$ 于点 F ，交 AC 于点 E ，过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M ，若四边形 $ABED$ 是菱形，求 FM 的长。



答案 $\frac{768}{125}$

解析如图，连接 AF ，设 EF 为 x ，

$$\text{在 } Rt\triangle BDF \text{ 和 } Rt\triangle DEF \text{ 中， } DF^2 = BD^2 - BF^2 = DE^2 - EF^2,$$

$$\therefore 64 - (5+x)^2 = 25 - x^2, \text{ 解得 } x = \frac{7}{5},$$

$$\therefore DF = \frac{24}{5},$$

在菱形 $ABED$ 中， $AD \parallel BF$ ，

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} \times \frac{24}{5} = \frac{84}{25},$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = 12 + \frac{84}{25} = \frac{384}{25},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times FM = \frac{384}{25},$$

$$\therefore FM = \frac{768}{125}.$$

