2015－2016学年北京东城区北京五中分校初二下学期直升班期中数学试卷

一、选择题

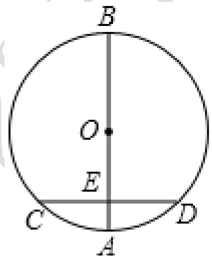
1．二次函数 $y=-2\left(x-1\right)^2+3$ 的图象的顶点坐标是

A．$\left(1,3\right)$　　B．$\left(-1,3\right)$　　C．$\left(1,-3\right)$　　D．$\left(-1,-3\right)$

答案 A

解析二次函数 $y=-2\left(x-1\right)^2+3$ 的图象的顶点坐标是 $\left(1,3\right)$．

2．如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，如果 $AB=20$，$CD=16$，那么线段 OE 的长为



A．10　　B．8　　C．6　　D．4

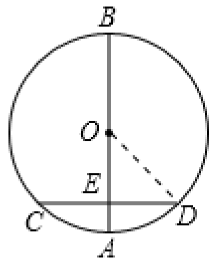
答案 C

解析如图所示，连接 OD，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，

$\therefore E$ 为 CD 的中点，

$\therefore CE=DE=\dfrac{1}{2}CD=8$，



$\because OD$ 为半径，

$\therefore OD=\dfrac{1}{2}AB=10$，

在 $Rt\triangle OED$ 中，$OE=\sqrt{OD^2-DE^2}=6$．

3．若关于 x 的一元二次方程 $\left(k-1\right)x^2+6x+3=0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围为

A．$k\leqslant 4$　　B．$k<4$

C．$k<4$ 且 $k\neq 1$　　D．$k\leqslant 4$ 且 $k\neq 1$

答案 D

解析 $\because\left(k-1\right)x^2+6x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore k-1\neq 0$，

解得 $k\neq 1$，

$\because$ 一元二次方程 $\left(k-1\right)x^2+6x+3=0$ 有实数根，

$\therefore \Delta=36-12\left(k-1\right)\geqslant 0$，

解得 $k \leqslant 4$，

综上，实数 k 取值范围为 $k \leqslant 4$ 且 $k \neq 1$．

4．已知函数 $y=2x^2$ 的图象是抛物线，现在同一坐标系中，将该抛物线先后向上、向左平移 2 个单位，那么所得到的新抛物线的解析式是

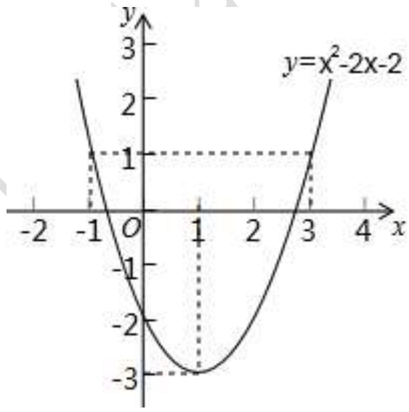
A． $y=2\left(x+2\right)^2+2$　　B． $y=2\left(x+2\right)^2-2$

C． $y=2\left(x-2\right)^2-2$　　D． $y=2\left(x-2\right)^2+2$

答案 A

解析抛物线 $y=2x^2$ 先后向上、向左平移 2 个单位，得到 $y=2\left(x+2\right)^2+2$．

5．函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象如图所示，根据其中提供的信息，可求得使 $y \geqslant 1$ 成立的 x 的取值范围是



A． $-1 \leqslant x \leqslant 3$　　B． $-1<x<3$

C． $x<-1$ 或 $x>3$　　D． $x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 3$

答案 D

解析由图象可知，抛物线上纵坐标为 1 的两点坐标为 $\left(-1,1\right)$，$\left(3,1\right)$，

观察图象可知，当 $y \geqslant 1$ 时，$x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 3$．

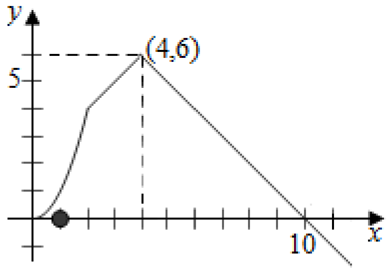
6．用 $\min\left\{a,b,c\right\}$ 表示 a、b、c 三个数中的最小值，若 $y=\min\left\{x^2,x+2,10-x\right\}$ $\left(x \geqslant 0\right)$，则 y 的最大值为

A．6　　B．8　　C．10　　D．11

答案 A

解析画出 $y_1=x^2$，$y_2=x+2$，$y_3=10-x$ $\left(x \geqslant 0\right)$ 的图象，

观察图象可知，



当$0\leqslant x\leqslant 2$时，$y=x^2$，

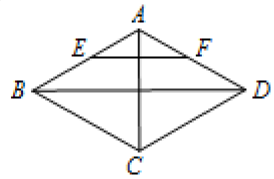
当$2\leqslant x\leqslant 4$时，$y=x+2$，

当$x>4$时，$y=10-x$，

y的最大值在$x=4$时取得，为6．

二、填空题

7．如图，菱形$ABCD$的周长是16，$\angle BCD=120^\circ$，E、F分别为AB、AD的中点，则EF的长为__________．



答案$2\sqrt{3}$

解析∵菱形$ABCD$的周长是16，

∴菱形边长为4，

∵$\angle BCD=120^\circ$，

∴$BD=4\sqrt{3}$，

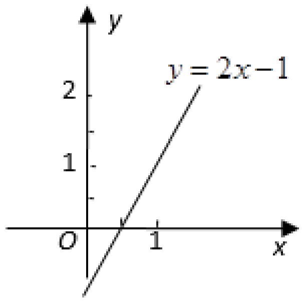
∵EF为中位线，

∴$EF=\dfrac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$．

8．小妍在数学复习总结中，发现一次函数、一元一次方程、一次不等式之间有着密切联系．例如图中一次函数$y=2x-1$、一元一次方程$2x-1=0$、一元一次不等式$2x-1>0$的联系：

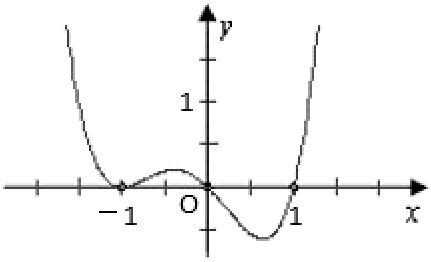
一元一次方程$2x-1=0$的根为一次函数$y=2x-1$图象与x轴交点的横坐标；满足一次不等式$2x-1>0$的解是：一次函数$y=2x-1$图象在x轴上方部分的点所对应的横坐标的取值．

老师肯定了她的发现，并告诉她：实际上，这种联系不仅在一次函数、一元一次方程、一元一次不等式之间存在，在其它的类型的函数、方程、不等式间也存在着这种联系．



请你运用小妍同学的发现，解决下面问题：

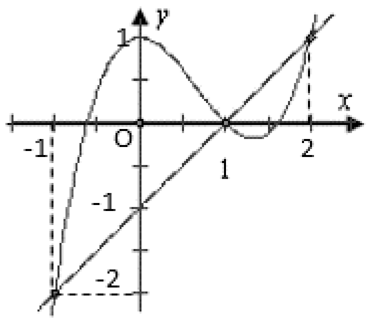
（1）图中是函数 $y=x^4+x^3-x^2-x$ 的图象，则使不等式 $x^4+x^3-x^2-x<0$ 成立的 x 的取值范围___________.



答案 $0<x<1$

解析 $x^4+x^3-x^2-x<0$ 的解即为函数 $y=x^4+x^3-x^2-x$ 在 x 轴下方部分的点所对应的横坐标的取值，观察图象可知，x 的取值范围为 $0<x<1$.

（2）图中是函数 $y=x^3-2x^2+1$ 与函数 $y=x-1$ 在同一坐标系内的图象，则方程 $x^3-2x^2-x+2=0$ 的根为________；满足不等式 $x^3-2x^2+1>x-1$ 的 x 的取值范围______.



答案 1．$x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=2$

2．$-1<x<1$ 或 $x>2$

解析 方程 $x^3-2x^2-x+2=0$ 可化为 $x^3-2x^2+1=x-1$，即求函数 $y=x^3-2x^2+1$ 与函数 $y=x-1$ 的交点横坐标，

观察图象可知，方程 $x^3-2x^2-x+2=0$ 的根为 $x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=2$，

不等式 $x^3-2x^2+1>x-1$ 的解，即为函数 $y=x^3-2x^2+1$ 在函数 $y=x-1$ 上方的点所对应的横坐标的取值，

观察图象可知，x 的取值范围为 $-1<x<1$ 或 $x>2$．

（3）已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $-3<x<1$，则 a ___ 0（填“$>$”或“$<$”）；$\frac{b}{c}=$ ______．

答案 1．$<$

2．$-\frac{2}{3}$

解析∵不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $-3<x<1$，

∴函数 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，与 x 轴交于 $(-3,0)$，$(1,0)$ 两点，

∴$a<0$，

$9a-3b+c=0$，$a+b+c=0$，

消去 a 可得，$12b+8c=0$，

∴$\frac{b}{c}=\frac{2}{3}$．

三、解答题

9．选择适当方法解方程：$x^2-4x+1=0$．

答案 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$．

解析配方得：$(x-2)^2=3$，

开方得：$x-2=\pm\sqrt{3}$，

解得 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$．

10．解方程：$x(x-3)=x+12$．

答案 $x_1=6$，$x_2=-2$

解析 $x(x-3)=x+12$

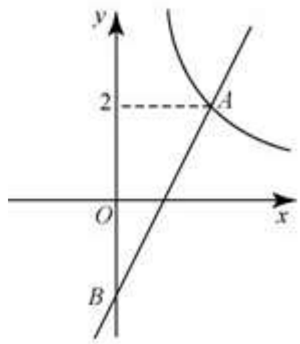
$x^2-3x=x+12$

$x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

∴$x_1=6$，$x_2=-2$．

11．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象与一次函数 $y=kx-k$ 的图象的交点为 $A(m,2)$．



（1）求一次函数的解析式.

答案一次函数的解析式为 $y=2x-2$.

解析∵点 $A(m,2)$ 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，

∴ $2m=4$，

解得 $m=2$，

∴点 A 的坐标为 $(2,2)$，

∴点 $A(2,2)$ 在一次函数 $y=kx-k$ 的图象上，

∵ $2k-k=2$，解得 $k=2$，

∴一次函数的解析式为 $y=2x-2$.

（2）设一次函数 $y=kx-k$ 的图象与 y 轴交于点 B，若 P 是 x 轴上一点，且满足 $\triangle PAB$ 的面积是 4，直接写出点 P 的坐标.

答案点 P 的坐标为 $(3,0)$ 或 $(-1,0)$.

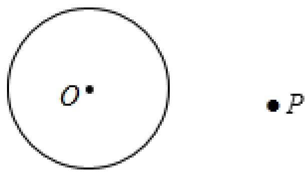
解析点 P 的坐标为 $(3,0)$ 或 $(-1,0)$.

12．尺规作图（要求保留作图痕迹）

（1）尺规作图：过圆外一点作圆的切线.

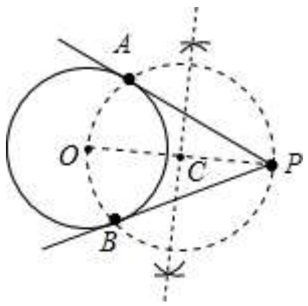
已知：P 为 $\odot O$ 外一点.

求作：经过点 P 的 $\odot O$ 的切线 PA、PB.



答案作图见解析

解析如图，点 A 和点 B 为以 OP 为直径的圆与 $\odot O$ 的交点，PA，PB 为所求.



（2）请根据作图填写两个重要依据：

①＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿；

②＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

答案 1．直径所对的圆周角是直角

2．经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线

解析依据为直径所对的圆周角是直角和经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

13．已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 a，P 是边 CD 上一个动点不与 C 、D 重合，$CP=b$，以 CP 为一边在正方形 $ABCD$ 外作正方形 $PCEF$，连接 BF 、DF ．观察计算：

（1）如图 1，当 $a=4$，$b=1$ 时，四边形 $ABFD$ 的面积为＿＿＿＿＿.

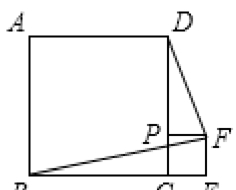


图1

答案 16

解析 $S_{四边形ABFD}=S_{梯形CDEF}+S_{正方形ABCD}-S_{\triangle BFE}$

$=4\times4+\dfrac{(1+4)\times1}{2}-\dfrac{1\times5}{2}=16$.

（2）如图 2，当 $a=4$，$b=2$ 时，四边形 $ABFD$ 的面积为＿＿＿＿＿＿.

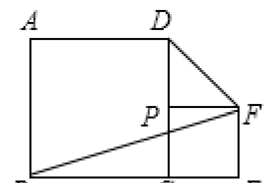


图2

答案 16

解析 $S_{四边形ABFD}=S_{梯形CDEF}+S_{正方形ABCD}-S_{\triangle BFE}$

$=4\times4+\dfrac{(2+4)\times2}{2}-\dfrac{2\times6}{2}=16$.

（3）如图 3，当 $a=m$，$b=n$ 时，四边形 $ABFD$ 的面积为__________.

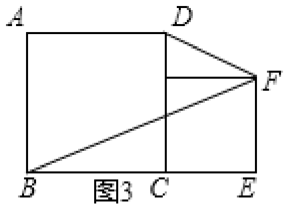


图3

解析 m^2

解析 $S_{四边形ABFD}=S_{梯形CDEF}+S_{正方形ABCD}-S_{\triangle BFE}$

$$=m^2+\frac{n(m+n)}{2}-\frac{n(m+n)}{2}=m^2.$$

14．已知：关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2+m)x+(1+m)=0$．

（1）求证：方程有两个实数根．

答案证明见解析．

解析∵ $\Delta=(2+m)^2-4(1+m)=m^2\geqslant 0$．

∴方程有两个实数根．

（2）设 $m<0$，且方程的两个实数根分别为 x_1，x_2（其中 $x_1<x_2$），若 y 是关于 m 的函数，且 $y=\frac{4x_2}{1-x_1}$，求这个函数的解析式．

答案 $y=\frac{-4}{m}\ (m<0)$

解析由（1）可知，方程有两个实数根，

∴ $x=\frac{(2+m)\pm\sqrt{m^2}}{2}(m<0)$，

∴ $x=\frac{2+m\pm m}{2}$，

∵ $x_1<x_2$，

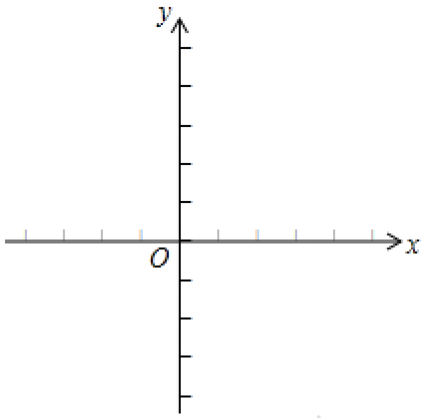
∴ $x_1=1+m$，$x_2=1$，

∴ $y=\frac{4}{1-(1+m)}$，

∴ $y=\frac{-4}{m}(m<0)$．

四、解答题

15．画出 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ 的图象，并求：



（1）顶点坐标与对称轴方程．

答案顶点坐标为$\left(1,2\right)$，对称轴为直线$x=1$

解析$y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)^2+2$，

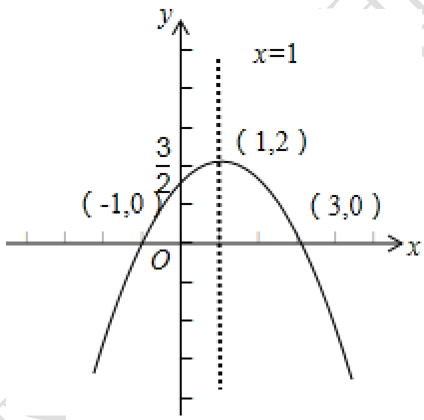
与y轴的交点坐标为$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，

与x轴交点坐标为$\left(-1,0\right)$，$\left(3,0\right)$，

对称轴为直线$x=1$，

顶点坐标为$\left(1,2\right)$，

图象如下：



（2）当x为何值时，函数有最大值或最小值，其值是多少？

答案当$x=1$时，函数有最大值 2

解析$\because y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-1\right)^2+2$，

$\therefore$当$x=1$时，函数有最大值 2，

（3）当$-2\leqslant x\leqslant 2$时，求y的取值范围．

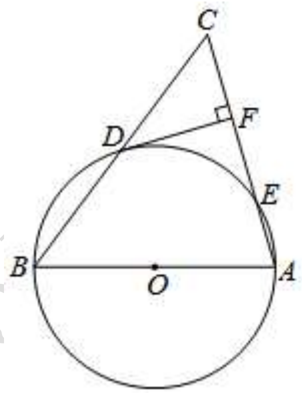
答案$-\dfrac{5}{2}\leqslant y\leqslant 2$

解析当 $x=-2$ 时，$y=-\dfrac{5}{2}$，

当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{3}{2}$，

由图象可知，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-\dfrac{5}{2}\leqslant y\leqslant 2$.

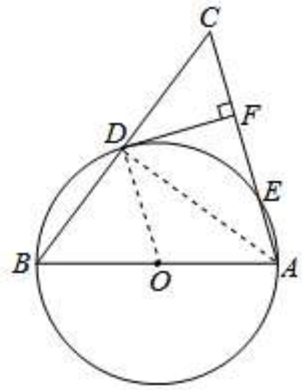
16．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的 $\odot O$ 与边 BC、AC 分别交于 D、E 两点，$DF\perp AC$ 于 F .



（1）求证：DF 为 $\odot O$ 的切线.

答案证明见解析

解析连接 OD、AD，



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

又 $\because AB=AC$，

$\therefore D$ 为 BC 的中点，

又 $\because O$ 为 AB 的中点，

$\therefore OD\parallel AC$，

$\because DF\perp AC$，

$\therefore DF\perp OD$，

又 $\because OD$ 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore DF$ 为 $\odot O$ 的切线.

（2）若 $\cos C=\dfrac{3}{5}$，$CF=9$，求 AE 的长.

答案 $AE=7$

解析 $\because DF\perp AC$，$CF=9$，

$\therefore \cos C=\dfrac{CF}{CD}$，

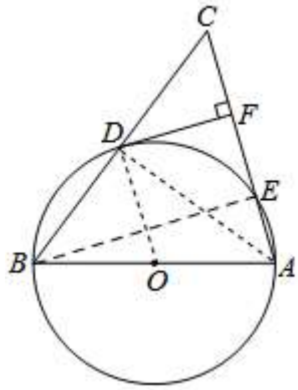
$\therefore CD=\dfrac{CF}{\cos C}=9\div\dfrac{3}{5}=15$，

$\because \angle ADB=90^\circ$，

$\therefore \angle ADC=90^\circ$，

$\therefore \cos C=\dfrac{CD}{AC}$，

$\therefore AC=\dfrac{CD}{\cos C}=15\div\dfrac{3}{5}=25$，



连接 BE，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AEB=90^\circ$，

又 $\because DF\perp AC$，

$\therefore DF\parallel BE$，

$\therefore \dfrac{CF}{EF}=\dfrac{CD}{BD}=1$，

$\therefore EF=CF=9$，

$\therefore AE=AC-EF-CF=25-9-9=7$．

17．已知二次函数 $y=(t+1)x^2+2(t+2)x+\dfrac{3}{2}$，在 $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值相等．

（1）求二次函数的解析式．

答案二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$

解析由题意得 $(t+2)\cdot 2^2+2(t+2)\cdot 2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，

解得 $(t+1)\cdot 2^2+2(t+2)\cdot 2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$，

二次函数的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$．

（2）若一次函数 $y=kx+6$ 的图象与二次函数的图象都经过点 $A(-3,m)$，求 m 和 k 的值．

答案 $m=-6$， $k=4$

解析 $\because$ 点 $A(-3,m)$ 在二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}$ 的图象上，

$\therefore m=-\dfrac{1}{2}\times(-3)^2+(-3)+\dfrac{3}{2}=-6$，

点 A 的坐标为 $(-3,-6)$，

$\because$ 点 A 在一次函数 $y=kx+6$ 的图象上，

$\therefore k=4$．

（3）设二次函数的图象与 x 轴交于点 B、C（点 B 在点 C 的左侧），将二次函数的图象在点 B、C 间的部分（含点 B 和点 C）向左平移 n（$n>0$）个单位后得到的图象记为 G，同时将（2）中得到的直线 $y=kx+6$ 向上平移 n 个单位．请结合图象回答：当平移后的直线与图象 G 有公共点时，n 的取值范围．

答案 n 的取值范围是 $\frac{2}{3}\leqslant n\leqslant 6$

解析由题意，可得点 B、C 的坐标分别为 $(-1,0)$，$(3,0)$ 平移后，点 B、C 的对应点分别为 $B'(-1-n,0)$，$C'(3-n,0)$，

将直线 $y=4x+6$ 平移后得到直线 $y=4x+6+n$，

如图 1，当直线 $y=4x+6=n$ 经过点 $B'(-1-n,0)$ 时，图象 G（点 B' 除外）

在该直线右侧，可得 $n=\frac{2}{3}$，

如图 2，当直线 $y=4x+6+n$ 经过点 $C'(3-n,0)$ 时，图象 G（点 C' 除外）

在该直线左侧，可得 $n=6$，

由图象可知，符合题意的 n 的取值范围是 $\frac{2}{3}\leqslant n\leqslant 6$．

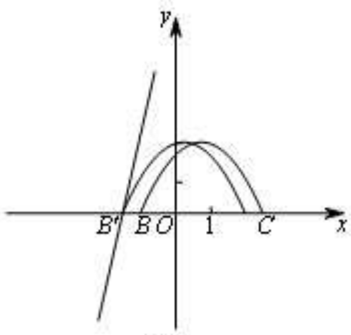


图1

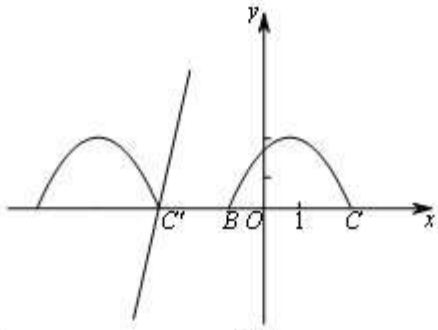


图2

五、解答题

18．在 $\triangle ACB$ 中，$AC>BC$，D 为 AB 的中点，E 为线段 AC 上的一点．

（1）如图 1，若 $AE=\frac{1}{4}AC$，$\angle C=90^\circ$，$BC=2$，$AC=4$，求 DE 的长．

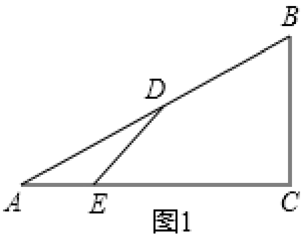


图1

答案 $DE=\sqrt{2}$

解析过点 D 作 $DG\perp AC$ 交 AC 于 G，

∵ D 为 AB 的中点，

∴ G 为 AC 的中点，

∴ DG 为△ABC 的中位线，

∴ $DG=\frac{1}{2}BC=1$，

∵ $AE=\frac{1}{4}AC$，$AC=4$，

∴ $AE=1$，

在 Rt△DGE 中，$DE=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．

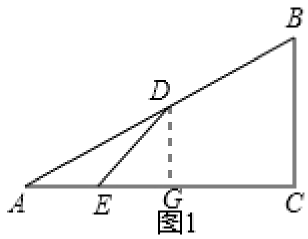


图1

（2）如图 2，若 $AE=BC$ 且 F 为 EC 中点，求证：$\angle AFD=\frac{1}{2}\angle C$．

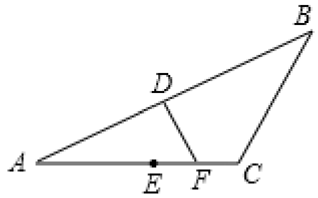


图2

答案证明见解析

解析连接 BE，取 BE 中点 M，再连接 MF、MD，

∵ F 为 EC 中点，D 为 AB 中点，

∴ $MF\parallel BC$ 且 $MF=\frac{1}{2}BC$，$MD\parallel AE$ 且 $MD=\frac{1}{2}AE$，

∵ $AE=BC$，

∴ $MF=MD$，

∴ $\angle MFD=\angle MDF$，

∵ $MD\parallel AB$，

∴ $\angle AFD=\angle MDF$，

∴ $\angle AFD=\angle MFD=\frac{1}{2}\angle AFM$，

∵ $MF\parallel AC$，

∴ $\angle AFM=\angle C$，

∴ $\angle AFD=\frac{1}{2}\angle C$．

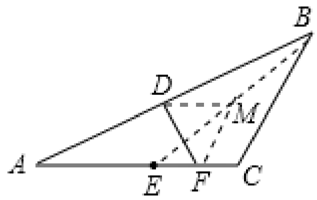


图2

（3）若 $2\angle AED-\angle C=180°$，试探究 AE、BC、AC 的数量关系，并证明．

答案 $AC=2AE+BC$

解析 $AC=2AE+BC$，

理由如下：

在 EC 上截取 $EM=AE$，连接 BM，作 $CH\perp BM$，

∵ $2\angle AED-\angle C=180^\circ$，

∴ $\angle AED=90^\circ+\angle MCH$，

∴ $\angle AED=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$，

∴ $\angle C=2\angle MCH$，

易证 $\triangle CHM\cong\triangle CHB$，

∴ $MC=BC$，

∴ $AC=2AE+BC$．

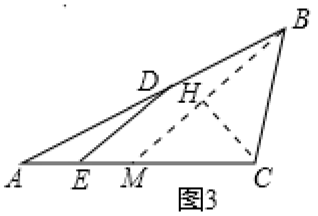
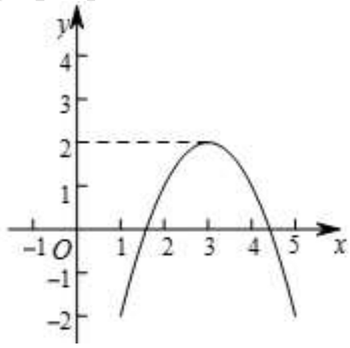


图3

19．对某一个函数给出如下定义：如果存在实数 M，对于任意的函数值 y，都满足 $y\leqslant M$，那么称这个函数是有上界函数，在所有满足条件的 M 中，其最小值称为这个函数的上确界．例如，图中的函数是有上界函数，其上确界是 2．



（1）分别判断函数 $y=-\frac{1}{x}(x<0)$ 和 $y=2x-3(x<2)$ 是不是有上界函数？如果是有上界函数，求其上确界．

答案 $y=-\frac{1}{x}(x<0)$ 不是有上界函数；

$y=2x-3(x<2)$ 是有上界函数，上确界是 1．

（2）如果函数 $y=-x+2(a\leqslant x\leqslant b,b>a)$ 的上确界是 b，且这个函数的最小值不超过 $2a+1$，求 a 的取值范围．

答案 $-1\leqslant a<1$

解析 ∵在 $y=-x+2$ 中，y 随 x 的增大而减小，

∴上确界为 $2-a$，即 $2-a=b$，

又 $b>a$，所以 $2-a>a$，解得 $a<1$，

∵函数的最小值是 $2-b$，

∴ $2-b\leqslant 2a+1$，

得 $a\leqslant 2a+1$，

解得 $a \geqslant -1$，

综上所述：$-1 \leqslant a < 1$.

（3）如果函数 $y = x^2 - 2ax + 2\left(1 \leqslant x \leqslant 5\right)$ 是以 3 为上确界的上界函数，求实数 a 的值.

答案 $a = \frac{12}{5}$

解析函数的对称轴为 $x = a$，

①当 $a \leqslant 3$ 时，函数的上确界是 $25 - 10a + 2 = 27 - 10a$，

$\therefore 27 - 10a = 3$，

解得 $a = \frac{12}{5}$，符合题意.

②当 $a > 3$ 时，函数的上确界是 $1 - 2a + 2 = 3 - 2a$，

$\therefore 3 - 2a = 3$，解得 $a = 0$，不符合题意，

综上所述：$a = \frac{12}{5}$.