2015－2016 学年北京朝阳区陈经纶中学实验分校初二下学期期中数学试卷

一、选择题

1．如果 $\sqrt{a-1}$ 是二次根式，那么 a 应满足的条件是

A．$a \geqslant 0$　　B．$a > 0$　　C．$a \geqslant 1$　　D．$a \neq 1$

答案 C

解析二次根式有意义的条件是 $a-1 \geqslant 0$，即 $a \geqslant 1$．

2．下列二次根式中，属于最简二次根式的是

A．$\sqrt{\frac{1}{2}}$　　B．$\sqrt{0.8}$　　C．$\sqrt{4}$　　D．$\sqrt{5}$

答案 D

解析 $\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{0.8} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{20}}{5}$，$\sqrt{4} = 2$，故属于最简二次根式的是 D.

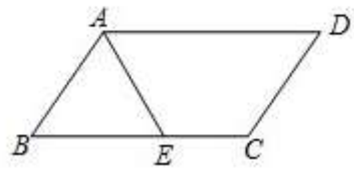
3．一元二次方程 $x^2 + px - 2 = 0$ 的一个根为 2，则 p 的值为

A．1　　B．2　　C．-2　　D．-1

答案 D

解析将 2 代入一元二次方程 $x^2 + px - 2 = 0$ 中，即 $2^2 + 2p - 2 = 0$，解得 $p = -1$．

4．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD = 5\,\text{cm}$，$AB = 3\,\text{cm}$，AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 边于点 E，则 EC 等于



A．1cm　　B．2cm　　C．3cm　　D．4cm

答案 B

解析 $\because AD \parallel BC$，

$\therefore \angle DAE = \angle BEA$，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE$，

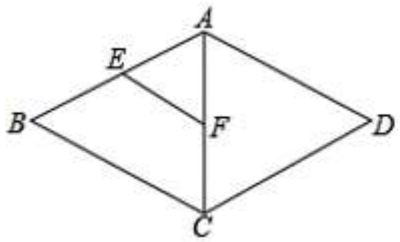
$\therefore \angle BEA = \angle BAE$，

$\therefore BE = AB = 3\text{cm}$

$\because BC = AD = 5\,\text{cm}$，

$\therefore EC = BC - BE = 5 - 3 = 2\,\text{cm}$.

5．如图，菱形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AC 的中点，若 $EF = 3$，则菱形 $ABCD$ 的周长是



A．12　　B．16　　C．20　　D．24

答案 D

解析∵ AC 是菱形 $ABCD$ 的对角线，E、F 分别是 AB、AC 的中点，

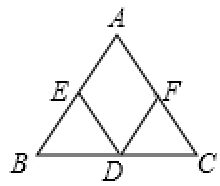
∴ EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

∴ $EF=\frac{1}{2}BC=3$，

∴ $BC=6$，

∴菱形 $ABCD$ 的周长是 $4\times6=24$．

6．如图，点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，则下列判断错误的是



A．四边形 $AEDF$ 一定是平行四边形

B．若 $\angle A=90^{\circ}$，则四边形 $AEDF$ 是矩形

C．若 AD 平分 $\angle A$，则四边形 $AEDF$ 是正方形

D．若 $AD\perp BC$，则四边形 $AEDF$ 是菱形

答案 C

解析 A、∵点 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边的中点，

∴ DE、DF 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

∴ $ED\parallel AC$，且 $ED=\frac{1}{2}AC=AF$，

同理 $DF\parallel AB$，且 $DF=\frac{1}{2}AB=AE$，

∴四边形 $AEDF$ 一定是平行四边形，正确．

B、若 $\angle A=90^{\circ}$，则四边形 $AEDF$ 是矩形，正确；

C、若 AD 平分 $\angle A$，延长 AD 到 M，使 $DM=AD$，连接 CM，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle MCD$ 中

$$\begin{cases}BD=CD\\ \angle ADB=\angle CDB\\ DM=AD\end{cases}$$

∴$\triangle ABD \cong \triangle MCD$，

∴$CM = AB$，

又∵$\angle DAB = \angle CAD$，$\angle DAB = \angle CMD$，

∴$\angle CMD = \angle CAD$，

∴$CA = CM = AB$，

因 AD 平分 $\angle A$，

∴$AD \perp BC$，

则$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，$AB = AC$，$AE = AF$，

结合四边形 $AEDF$ 是菱形，因为$\angle A$ 不一定是直角，

∴不能判定四边形 $AEDF$ 是正方形；

D、若 $AD \perp BC$，则$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，$AB = AC$，$AE = AF$，

结合四边形 $AEDF$ 是菱形，D 正确．

7．正方形面积为 36，则对角线的长为

A．6　　B．$6\sqrt{2}$　　C．9　　D．$9\sqrt{2}$

答案 B

解析正方形的边长为$\sqrt{36} = 6$，则对角线的长为$6\sqrt{2}$．

8．下列一元二次方程有两个不相等实数根的是

A．$x^2 + 1 = 0$　　B．$x^2 + 2x + 1 = 0$　　C．$x^2 - 2x + 3 = 0$　　D．$x^2 + 2x - 3 = 0$

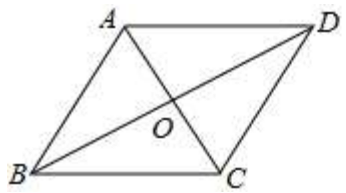
答案 D

解析一元二次方程有两个不相等实数根的条件是$\Delta > 0$，

$\Delta_1 = -4 < 0$，$\Delta_2 = 0$，$\Delta_3 = -4 < 0$，$\Delta_4 = 12 > 0$，

故答案为 D．

9．已知菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$\angle BAD = 120°$，$AC = 4$，则该菱形的面积是



A．$16\sqrt{3}$　　B．16　　C．$8\sqrt{3}$　　D．8

答案 C

解析∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC \perp BD$，$OA = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$，$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$，

∴$AC = 4$，$\angle AOB = 90°$，

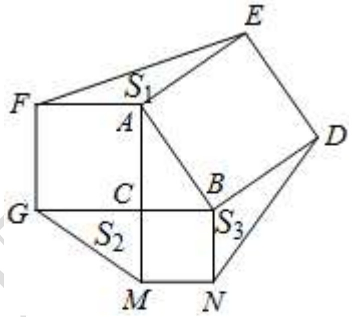
∴$\angle ABO=30^\circ$，

∴$AB=2OA=4$，$OB=2\sqrt{3}$，

∴$BD=2OB=4\sqrt{3}$，

∴该菱形的面积是：$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$．

10．如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC>BC$，分别以$\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 为一边向$\triangle ABC$ 外作正方形 $ABDE$、$BCMN$、$CAFG$，连接 EF、GM、ND，设$\triangle AEF$、$\triangle BND$、$\triangle CGM$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，则下列结论正确的是



A．$S_1=S_2=S_3$　　B．$S_1=S_2<S_3$　　C．$S_1=S_3<S_2$　　D．$S_2=S_3<S_1$

答案 A

解析设$\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c，

∵分别以$\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 为一边向$\triangle ABC$ 外作正方形 $ABDE$、$BCMN$、$CAFG$，

∴$AE=AB$，$\angle ARE=\angle ACB$，$\angle EAR=\angle CAB$，

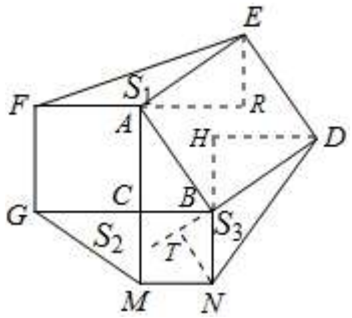
∴$\triangle AER\cong\triangle ACB$，

∴$ER=BC=a$，$FA=b$，

∴$S_1=\frac{1}{2}ab$，$S_2=\frac{1}{2}ab$，

同理可得：$HD=AR=AC$，

∴$S_1=S_2=S_3=\frac{1}{2}ab$．



二、填空题

11．计算：$\left(-4\sqrt{5}\right)^2=$____．

答案 80

解析$\left(-4\sqrt{5}\right)^2=80$．

12．一元二次方程 $x^2+1=-2(1-3x)$ 化为一般形式后，一次项系数是_____，常数项是____．

答案 1．-6

2．3

解析一元二次方程 $x^2+1=-2(1-3x)$ 化为一般形式 $x^2-6x+3=0$，故一次项系数为 -6，常数项是 3．

13．凡是可以构成一个直角三角咸菜 三条边长的三个正整数，称为勾股数．例如："3，4，5"以及"5，12，13"这样常见的数组都是勾股数，写出一组全是偶数的勾股数是______．

答案 6，8，10

解析∵"3，4，5"为勾股数，∴"6，8，10"为全是偶数的勾股数．

14．平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC、BD 相交于点 O，若 $\triangle AOB$ 的面积为 $13\,\text{cm}^2$，则平行四边形 $ABCD$ 的面积为_________ cm^2．

答案 52

解析∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore S_{ABCD}=4S_{\triangle AOB}=52\ \text{cm}^2$．

15．若关于 x 的方程 $(x-2)(x-3)-p^2=0$ 有两个整数根，试写出任意两个符合结合的 p 值是__________．

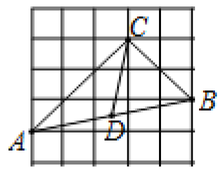
答案 $\pm\sqrt{2}$

解析方程可化为：$x^2-5x+6-p^2=0$，

$\therefore x_1+x_2=5$，$x_1\cdot x_2=6-p^2$，

$\therefore$ 当 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=4\end{cases}$ 时，$6-p^2=4$，此时 $p=\pm\sqrt{2}$．

16．如图，我们称每个小正方形的顶点为"格点"，以格点为顶点的三角形叫做"格点三角形"，每个小正方形的边长为 1．在格点 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 AB 的中点，若按角进行分类，则 $\triangle ABC$ 的形状是_______三角形，线段 CD 的长为________．



答案 1．直角

2．$\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

解析由勾股定理可知：$AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，

∵点 D 为 AB 的中点，

$\therefore CD=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

三、计算题

17．计算

（1）$\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{12}-\left(\sqrt{3}+1\right)^0$

答案 $3\sqrt{3}-1$

解析 原式 $=\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1=3\sqrt{3}-1$.

（2）$\sqrt{28}-1\div\sqrt{\dfrac{4}{7}}$

答案 $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

解析 原式 $=2\sqrt{7}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

18．按要求解下列一元二次方程：

（1）$x^2-6x+7=0$（用配方法）

答案 $x_1=7$， $x_2=-1$

解析 $x^2-6x+9=16$，

$\left(x-3\right)^2=16$，

$x-3=\pm4$，

$\therefore x_1=7$， $x_2=-1$.

（2）$\left(x-2\right)^2=4-2x$

答案 $x_1=0$， $x_2=2$

解析 $x^2-4x+4=4-2x$，

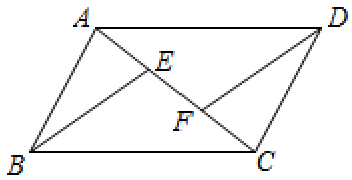
$x^2-2x=0$，

$x\left(x-2\right)=0$，

$\therefore x_1=0$， $x_2=2$.

四、解答题

19．如图，E、F 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的两点，请你添加一个条件使得结论 $BE=DF$ 成立，并根据你所添加的条件来证明结论 $BE=DF$.



答案添加的条件是 $AE=CF$，证明见解析.

解析证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$， $AB=CD$，

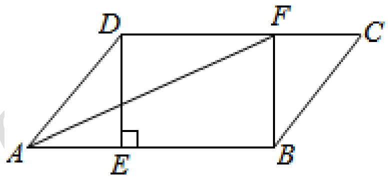
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases}AB=CD\\ \angle BAE=\angle FCD\\ AE=CF\end{cases}$$

∴ $\triangle AED\cong\triangle BCF$，

∴ $BE=DF$.

20．在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，点 F 在边 CD 上，$DF=BE$，连接 AF、BF.



（1）求证：四边形 $BFDE$ 是矩形.

答案证明见解析.

解析∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $DC\parallel AB$，即 $DF\parallel BE$，

又∵ $DF=BE$，

∴四边形 $BFDE$ 为平行四边形，

又∵ $DE\perp AB$，

∴ $\angle DEB=90^\circ$，

∴四边形 $BFDE$ 是矩形.

（2）若 $CF=3$，$BF=4$，$DF=5$，求证：AF 平分 $\angle DAB$.

答案证明见解析.

解析∵四边形 $BFDE$ 是矩形，

∴ $\angle BFC=90^\circ$，

∵ $CF=3$，$BF=4$，

∴ $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∴ $AD=BC=5$，

∴ $AD=DF=5$，

∴ $\angle DAF=\angle DFA$，

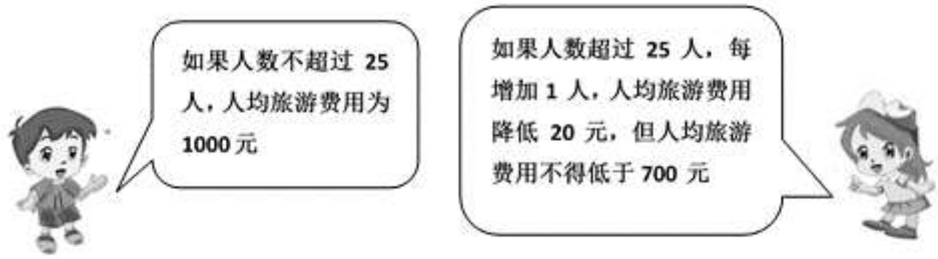
∵ $AB\parallel CD$

$\therefore \angle FAB = \angle DFA$，

$\therefore AF$ 平分 $\angle DAB$．

21．列方程组解应用题：

“人间四月芳菲尽，山寺桃花始盛开”，四月桃花又红平谷．2016 年平谷第 18 届桃花音乐节从 4 月 8 日到 5 月 12 日，在平谷桃花海地方观赏平谷桃花，穿越百里桃花长廊，徜徉花海，欣赏乡村音乐．“金海湖”旅行社专业从事平谷桃花音乐节旅游线路策划，接待平谷各组桃花音乐节旅游，该旅行社为方便市民组团去平谷某景区观赏桃花，推出了如下收费标准：



某单位组织员工去参加平谷桃花音乐节，共支付给“金海湖”旅行社旅游费用 2700 元．请问该单位这次共有多少员工参加平谷桃花音乐节？

答案该单位这次共有 30 名员工参加平谷桃花音乐节．

解析若人数不超过 25 人，则总旅游费用最多为 2500 元，故可知参加活动的员工超过 25 人．

设共有 x 名员工参加平谷桃花音乐节，

$x\left[100-2\left(x-25\right)\right]=2700$，

解得： $x_1=30$， $x_2=45$，

$\because$ 当 $x=45$ 时，人均费用：$100-2\times\left(45-25\right)=60<70$，此时人均费用必须为 70 元，故不合题意，

$\therefore x=30$，

答：该单位这次共有 30 名员工参加平谷桃花音乐节．

22．已知关于 x 的方程 $mx^2-\left(m+2\right)x+2=0\left(m\neq 0\right)$．

（1）求证：方程总有两个实数根．

答案证明见解析

解析依题可知： $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=\left(m+2\right)^2-4\times 2\times m$

$=m^2+4m+4-8m$

$=m^2-4m+4$

$=\left(m-2\right)^2\geqslant 0$．

∴方程总有两个实数根.

（2）若方程的两个实数根都是整数，求正整数 m 的值.

答案 $m=1$ 或 $m=2$

解析原方程可化为：$(mx-2)(x-1)=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{2}{m}$，

由题意可知，方程的两个实数根均为整数，

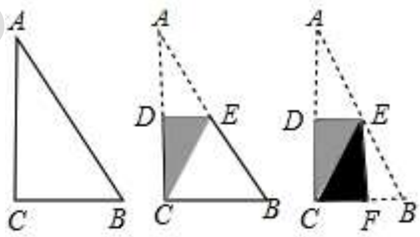
∴x_2 必为整数，

又∵m 为正整数，

∴$m=1$ 或 $m=2$.

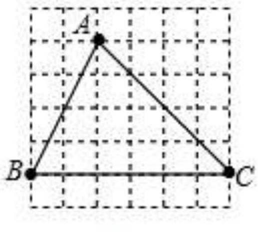
五、解答题

23．如图①，将一张直角三角形纸片△ABC 折叠，使点 A 与点 C 重合，这时 DE 为折痕，△CBE 为等腰三角形；再继续将纸片沿△CBE 的对称轴 EF 折叠，这时得到了两个完全重合的矩形（其中一个是原直角三角形的内接矩形，另一个是拼合成的无缝隙、无重叠的矩形），我们称这样两个矩形为“叠加矩形”.



图①

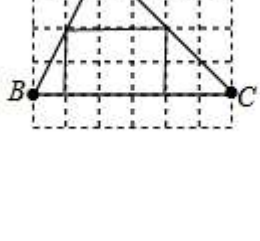
（1）如图②，在正方形网格中，能否仿照前面的方法把△ABC 折叠成“叠加矩形”，如果能，请在图②中画出折痕及叠加矩形.



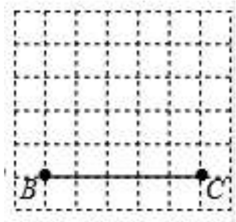
图②

答案画图见解析

解析如图所示：



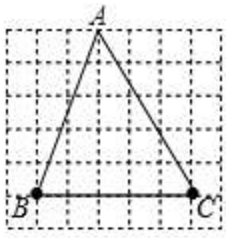
（2）如图③，在正方形网格中，以给定的 BC 为一边，画出一个斜 $\triangle ABC$，使其顶点 A 在格点上，且 $\triangle ABC$ 折成的"叠加矩形"为正方形．



图③

答案画图见解析

解析只需画出满足条件的一个三角形；答案不唯一，所画三角形的一边长与该边上的高相等即可．



24．根据所阅读的两段材料解决问题

阅读材料一：

我们知道，对于一元二次方程：$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$，当判别式 $\Delta\geqslant 0$ 时，其求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．

根据求根公式可以验证，若方程两根为 x_1，x_2，则两根的关系为：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$．

我们把上述等式称为一元二次方程根与系数的关系．

阅读材料二：

已知 $p^2-p-1=0$，$1-q-q^2=0$，且 $pq\neq 1$，求 $\dfrac{pq+1}{q}$ 的值．

解：由 $p^2-p-1=0$ 及 $1-q-q^2=0$，可知 $p\neq 0$，$q\neq 0$．

$\therefore 1-q-q^2=0$ 方程左右两边可同时除以 q^2，变形为 $\left(\dfrac{1}{q}\right)^2-\left(\dfrac{1}{q}\right)-1=0$，

对比等式 $p^2-p-1=0$ 发现两等式有相同的特征．

又 $\because pq\neq 1$，$p\neq\dfrac{1}{q}$．

根据方程根的定义，所以 p 与 $\frac{1}{q}$ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个不相等的根.

再根据根与系数的关系，则 $p+\frac{1}{q}=1$，即：$\frac{pq+1}{q}=1$.

根据阅读材料所提供的方法，对下面的问题进行解答：

已知：$2m^2-5m-1=0$，$\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n}-2=0$，且 $m\neq n$，

求：

（1）$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值.

答案 -5

解析将 $\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n}-2=0$ 方程两边同时乘以 n^2，变形为 $2n^2-5n-1=0$，

$\therefore m$ 与 n 是方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个不相等的根，

由韦达定理得：$m+n=\frac{5}{2}$，$mn=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=-5$.

（2）mn 的值.

答案 $-\frac{1}{2}$

解析由（1）知

25．在图（1）至图（2）中，点 B 是线段 AC 的中点，点 D 是线段 CE 的中点，四边形 $BCGF$ 和 $CDHN$ 都是正方形，AE 的中点是 M.

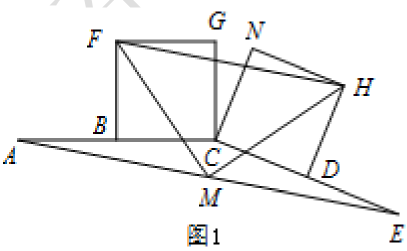


图1

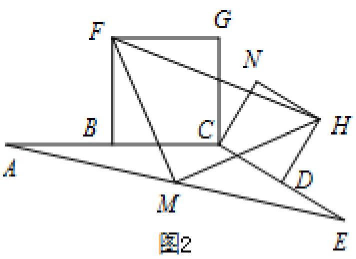


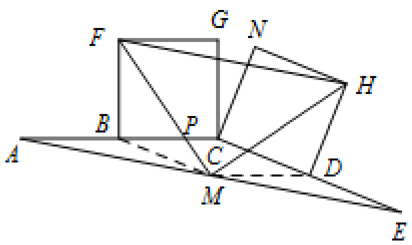
图2

（1）如图（1）当 $AC=EC$ 时，$\triangle FMH$ 是______三角形，请予以证明.

答案等腰直角

解析连接 MB、MD，如图，设 FM 与 AC 交于点 P.

$\because$ 四边形 $BCGF$ 和 $CDHN$ 都是正方形，点 B、D 分别是 AC、CE 的中点，$AC=EC$.



$\therefore FB=HD$，

$\because$ 点 B、D、M 分别是线段 AC、CE、AE 的

中点，

∴$MD \parallel BC$，且$MD = BC = BF$，$MB \parallel CD$，且$MB = CD = DH$，

∴四边形$BCDM$是平行四边形，

∴$\angle CBM = \angle CDM$，

又∵$\angle FBP = \angle HDC$，

∴$\angle FBM = \angle MDH$，

∴$\triangle FBM \cong \triangle MDH$，

∴$FM = MH$，且$\angle MFB = \angle HMD$，

∴$\angle FMH = \angle FMD - \angle HMD = \angle APM - \angle MFB = \angle FBP = 90^\circ$，

∴$\triangle FMH$是等腰直角三角形.

（2）如图（2）当$AC > EC$时，（1）中的结论还成立吗？不必说明理由，直接写出结论.

答案成立

解析连接MB、MD，如图，设FM与AC交于点P，

∵四边形$BCGF$和$CDHN$都是正方形，点B、D分别是线段AC、CE的中点，

$AC = EC$.

∴$FB = HD$，

∵点B、D、M分别是线段AC、CE、AE的中点，

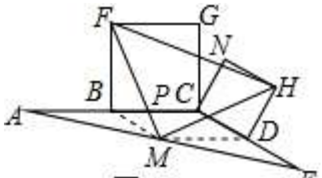


图3

∴$MD \parallel BC$，且$MD = BC = BF$，$MB \parallel CD$，且

$MB = CD = DH$，

∴四边形$BCDM$是平行四边形，

∴$\angle CBM = \angle CDM$，

又∵$\angle FBP = \angle HDC$，

∴$\angle FBM = \angle MDH$，

∴$\triangle FBM \cong \triangle MDH$.

∴$FM = MH$，且$\angle MFB = \angle HMD$，

∴$\angle FMH = \angle FMD - \angle HMD = \angle APM - \angle MFB = \angle FBP = 90^\circ$，

∴$\triangle FMH$是等腰直角三角形.