

顺义区 2017 届初三第一次统一练习

数学试卷

学校名称_____ 姓名_____ 准考证号_____

考生
须知

1. 本试卷共 7 页，共三道大题，29 道小题，满分 120 分。考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

第 1-10 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 共享单车为人们带来了极大便利，有效缓解了出行“最后一公里”问题，而且经济环保。

2016 年全国共享单车用户数量达 18860 000，将 18860 000 用科学记数法表示应为

- A. 1886×10^4 B. 0.1886×10^8 C. 1.886×10^7 D. 1.886×10^6

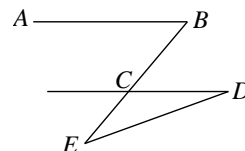
2. 9 的算术平方根是

- A. 3 B. -3 C. ± 3 D. 9

3. 如图， $AB \parallel CD$ ， E 是 BC 延长线上一点，若 $\angle B = 50^\circ$ ， $\angle D = 20^\circ$ ，则 $\angle E$ 的度数为

- A. 20° B. 30° C. 40° D. 50°

4. 我国传统文化中的“福禄寿喜”图（如图）由四个图案构成。这四个图案中既是轴对称图形，又是中心对称图形的是



A



B

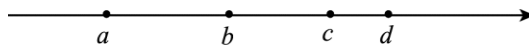


C



D

5. 实数 a ， b ， c ， d 在数轴上对应点的位置如图所示，若实数 b ， d 互为相反数，则这四个实数中，绝对值最小的是

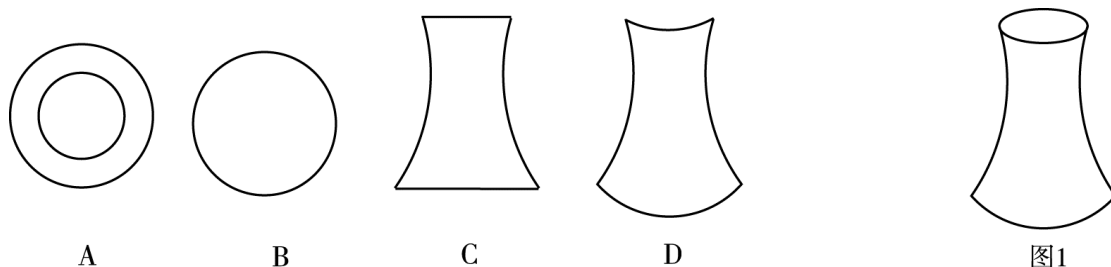


- A. a B. b C. c D. d

6. 如果 $a - b = 5$ ，那么代数式 $(\frac{a^2 + b^2}{ab} - 2) \cdot \frac{ab}{a - b}$ 的值是

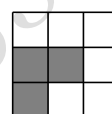
- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. -5 D. 5

7. 手鼓是鼓中的一个类别，是一种打击乐器．如图是我国某少数民族手鼓的轮廓图，其俯视图是



8. 如图，在 3×3 的正方形网格图中，有 3 个小正方形涂成了黑色，现在从白色小正方形中任意选取一个并涂成黑色，使黑色部分的图形构成一个轴对称图形的概率是

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

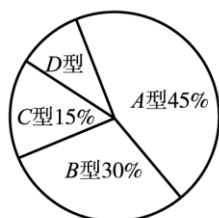


9. 在平面直角坐标系 $x'O'y'$ 中，如果抛物线 $y' = 2x'^2$ 不动，而把 x 轴、 y 轴分别向下、向左平移 2 个单位，则在新坐标系下抛物线的表达式为

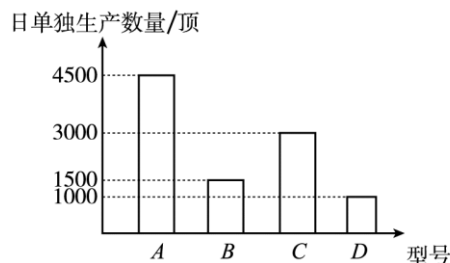
- A. $y = 2(x+2)^2 - 2$ B. $y = 2(x+2)^2 + 2$
C. $y = 2(x-2)^2 - 2$ D. $y = 2(x-2)^2 + 2$

10. 某公司在抗震救灾期间承担 40 000 顶救灾帐篷的生产任务，分为 A、B、C、D 四种型号，它们的数量百分比和每天单独生产各种型号帐篷的数量如图所示：

各种型号帐篷数量的百分比统计图



每天单独生产各种型号帐篷的数量统计图



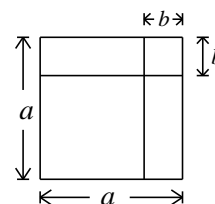
根据以上信息，下列判断错误的是

- A. 其中的 D 型帐篷占帐篷总数的 10%
B. 单独生产 B 型帐篷的天数是单独生产 C 型帐篷天数的 3 倍
C. 单独生产 A 型帐篷与单独生产 D 型帐篷的天数相等
D. 单独生产 B 型帐篷的天数是单独生产 A 型帐篷天数的 2 倍

二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

11. 如果二次根式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，那么 x 的取值范围是_____.

12. 如图的四边形均为矩形或正方形，根据图形的面积，写出一个正确的等式：_____.



13. 图1为北京城市女生从出生到15岁的平均身高统计图，图2是北京城市某女生从出生到12岁的身高统计图。

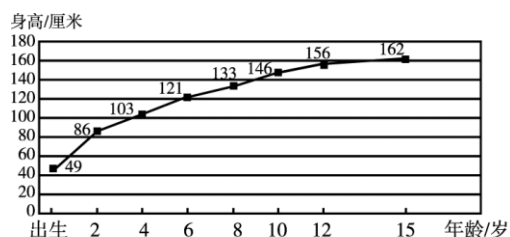


图1

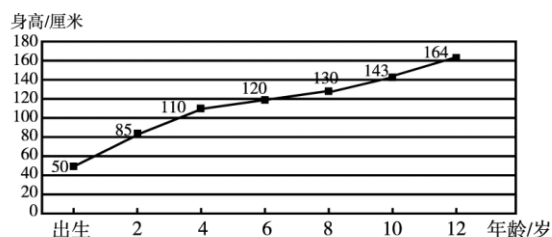
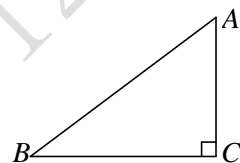


图2

请你根据以上信息预测该女生15岁时的身高约为_____，你的预测理由是_____。

14. 小刚身高180cm，他站立在阳光下的影子长为90cm，他把手臂竖直举起，此时影子长为115cm，那么小刚的手臂超出头顶_____cm。
15. 如图，一张三角形纸片 ABC ，其中 $\angle C=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ 。小静同学将纸片做两次折叠：第一次使点 A 落在 C 处，折痕记为 m ；然后将纸片展平做第二次折叠，使点 A 落在 B 处，折痕记为 n 。则 m ， n 的大小关系是_____。



16. 阅读下面材料：

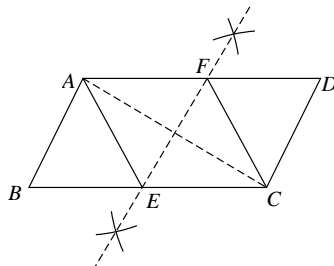
在数学课上，老师提出如下问题：

已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形。
求作：菱形 $AECF$ ，使点 E ， F 分别在 BC ， AD 上。



小凯的作法如下：

- (1) 连接 AC ；
- (2) 作 AC 的垂直平分线 EF 分别交 BC ， AD 于 E ， F ；
- (3) 连接 AE ， CF 。



所以四边形 $AECF$ 是菱形。

老师说：“小凯的作法正确。”

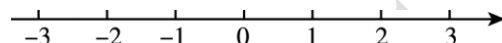
请回答：在小凯的作法中，判定四边形 $AECF$ 是菱形的依据是_____。

三、解答题（本题共 72 分，第 17-26 题，每小题 5 分，第 27、28 题每小题 7 分，第 29 题 8 分）

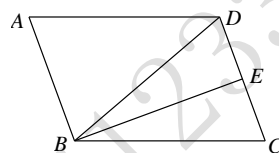
解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 计算： $(2\sqrt{2}-\pi)^0 - 4\cos 60^\circ + |\sqrt{2}-2| - \sqrt{18}$.

18. 解不等式： $\frac{15-3x}{2} \geq 7-x$ ，并把它的解集在数轴上表示出来.



19. 如图， $\square ABCD$ 中， $BE \perp CD$ 于 E ， $CE=DE$.
求证： $\angle A = \angle ABD$.



20. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2mx + m^2 + m - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根.

- (1) 求 m 的取值范围；
- (2) 当 m 为正整数时，求方程的根.

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线

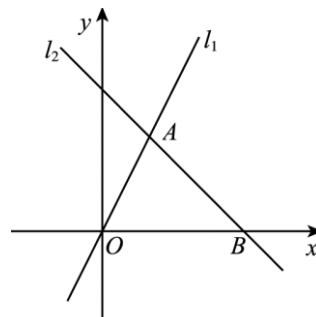
$l_1: y = mx (m \neq 0)$ 与直线 $l_2: y = ax + b (a \neq 0)$ 相交于点 A

$(1, 2)$ ，直线 l_2 与 x 轴交于点 $B(3, 0)$.

(1) 分别求直线 l_1 和 l_2 的表达式；

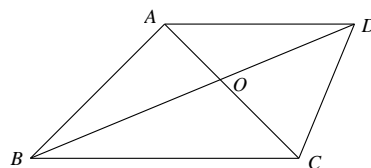
(2) 过动点 $P(0, n)$ 且平行于 x 轴的直线与 l_1 ， l_2 的交点

分别为 C ， D ，当点 C 位于点 D 左方时，写出 n 的取值范围.



22. 某电脑公司有 A、B 两种型号的电脑，其中 A 型电脑每台 6 000 元，B 型电脑每台 4 000 元. 学校计划花费 150 000 元从该公司购进这两种型号的电脑共 35 台，问购买 A 型、B 型电脑各多少台？

23. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AB=AC=AD$ ， $\angle DAC=\angle ABC$ 。



- (1) 求证： BD 平分 $\angle ABC$ ；
(2) 若 $\angle DAC=45^\circ$ ， $OA=1$ ，求 OC 的长。

24. 中国古代有二十四节气歌，“春雨惊春清谷天，夏满芒夏暑相连。秋处露秋寒霜降，冬雪雪冬小大寒。”它是为便于记忆我国古时历法中二十四节气而编成的小诗歌，流传至今。节气指二十四时节和气候，是中国古代订立的一种用来指导农事的补充历法，是中国古代劳动人民长期经验的积累和智慧的结晶。其中第一个字“春”是指立春，为春季的开始，但在气象学上的入春日是有严格定义的，即连续 5 天的日平均气温稳定超过 10°C 又低于 22°C ，才算是进入春天，其中，5 天中的第一天即为入春日。例如：2014 年 3 月 13 日至 18 日，北京的日平均气温分别为 9.3°C ， 11.7°C ， 12.7°C ， 11.7°C ， 12.7°C 和 12.3°C ，即从 3 月 14 日开始，北京日平均气温已连续 5 天稳定超过 10°C ，达到了气象学意义上的入春标准。因此可以说 2014 年 3 月 14 日为北京的入春日。

日平均温度是指一天 24 小时的平均温度。气象学上通常用一天中的 2 时、8 时、14 时、20 时 4 个时刻的气温的平均值作为这一天的日平均气温（即 4 个气温相加除以 4），结果保留一位小数。

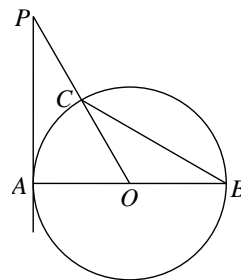
下表是北京顺义 2017 年 3 月 28 日至 4 月 3 日的气温记录及日平均气温（单位： $^\circ\text{C}$ ）

时间	2 时	8 时	14 时	20 时	平均气温
3 月 28 日	6	8	13	11	9.5
3 月 29 日	7	6	17	14	a
3 月 30 日	7	9	15	12	10.8
3 月 31 日	8	10	19	13	12.5
4 月 1 日	8	7	18	15	12
4 月 2 日	11	7	22	16	14
4 月 3 日	13	11	21	17	15.5

根据以上材料解答下列问题：

- (1) 求出 3 月 29 日的日平均气温 a ；
(2) 采用适当的统计图将这 7 天的日平均气温的变化情况表示出来；
(3) 请指出 2017 年的哪一天是北京顺义在气象学意义上的入春日。

25. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 切 $\odot O$ 于点 A , PO 交 $\odot O$ 于点 C , 连接 BC , $\angle P = \angle B$.

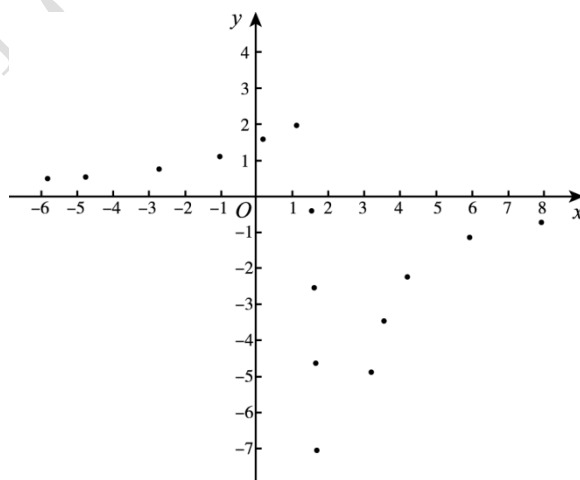


- (1) 求 $\angle P$ 的度数;
(2) 连接 PB , 若 $\odot O$ 的半径为 a , 写出求 $\triangle PBC$ 面积的思路.

26. 某“数学兴趣小组”根据学习函数的经验, 对函数 $y = \frac{-4x+6}{(x-2)^2}$ 的图象和性质进行了探究, 探究过程如下, 请补充完整:

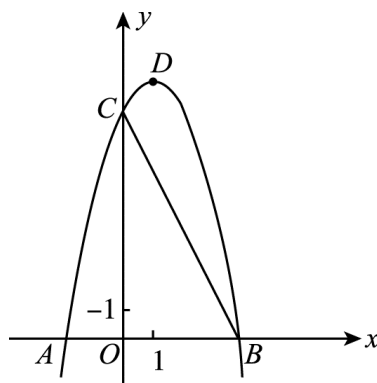
究, 探究过程如下, 请补充完整:

- (1) 该函数的自变量 x 的取值范围是_____;
- (2) 同学们先找到 y 与 x 的几组对应值, 然后在下图的平面直角坐标系 xOy 中, 描出各对对应值为坐标的点. 请你根据描出的点, 画出该函数的图象;
- (3) 结合画出的函数图象, 写出该函数的一条性质:_____.



27. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 8 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于 $A(-2, 0)$, B 两点，与 y 轴交于 C 点， $\tan \angle ABC = 2$.

- (1) 求抛物线的表达式及其顶点 D 的坐标；
- (2) 过点 A 、 B 作 x 轴的垂线，交直线 CD 于点 E 、 F ，将抛物线沿其对称轴向上平移 m 个单位，使抛物线与线段 EF (含线段端点) 只有 1 个公共点. 求 m 的取值范围.



28. 在正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 中，顶点 B 、 D 、 F 在同一直线上， H 是 BF 的中点.
- (1) 如图 1，若 $AB=1$, $DG=2$, 求 BH 的长；
 - (2) 如图 2，连接 AH , GH .

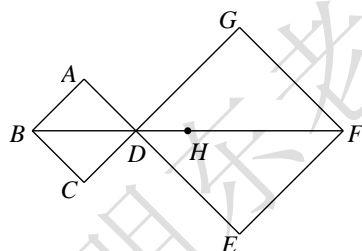


图1

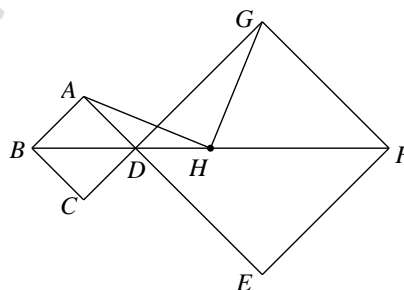


图2

小宇观察图 2，提出猜想： $AH=GH$, $AH \perp GH$. 小宇把这个猜想与同学们进行交流，通过讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

想法 1：延长 AH 交 EF 于点 M ，连接 AG , GM ，要证明结论成立只需证 $\triangle GAM$ 是等腰直角三角形；

想法 2：连接 AC , GE 分别交 BF 于点 M , N ，要证明结论成立只需证 $\triangle AMH \cong \triangle HNG$.

.....

请你参考上面的想法，帮助小宇证明 $AH=GH$, $AH \perp GH$. (一种方法即可)

29. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于双曲线 $y = \frac{m}{x} (m > 0)$ 和双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$ ，如果 $m = 2n$ ，则称双曲线 $y = \frac{m}{x} (m > 0)$ 和双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$ 为“倍半双曲线”，双曲线 $y = \frac{m}{x} (m > 0)$ 是双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$ 的“倍双曲线”，双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$ 是双曲线 $y = \frac{m}{x} (m > 0)$ 的“半双曲线”。

(1) 请你写出双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 的“倍双曲线”是_____；双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 的“半双曲线”是_____；

(2) 如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 是双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 在第一象限内任意一点，过点 A 与 y 轴平行的直线交双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的“半双曲线”于点 B ，求 $\triangle AOB$ 的面积；

(3) 如图 2，已知点 M 是双曲线 $y = \frac{2k}{x} (k > 0)$ 在第一象限内任意一点，过点 M 与 y 轴平行的直线交双曲线 $y = \frac{2k}{x}$ 的“半双曲线”于点 N ，过点 M 与 x 轴平行的直线交双曲线 $y = \frac{2k}{x}$ 的“半双曲线”于点 P ，若 $\triangle MNP$ 的面积记为 $S_{\triangle MNP}$ ，且 $1 \leq S_{\triangle MNP} \leq 2$ ，求 k 的取值范围。

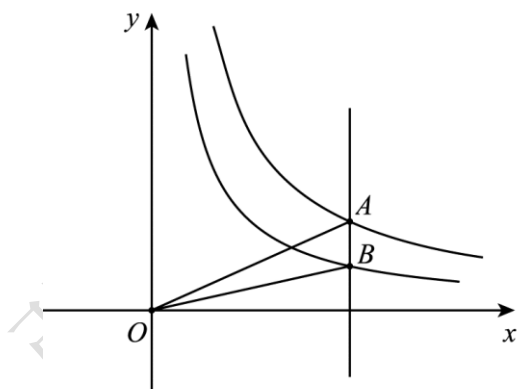


图1

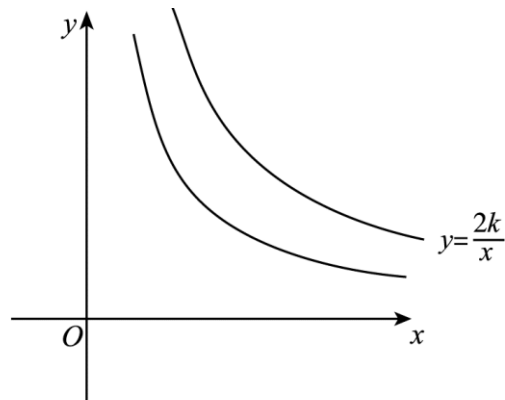


图2

顺义区 2017 届初三第一次统一练习

数学答案及评分参考

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	B	C	D	A	C	D	B

二、填空题（本题共 18 分，每小题 3 分）

11. $x \geq 3$ 12. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 或 $a^2 = (a-b)^2 + 2b(a-b) + b^2$ 或

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

13. 170 厘米，12 岁时该女生比平均身高高 8 厘米，预测她 15 岁时也比平均身高高 8 厘米；

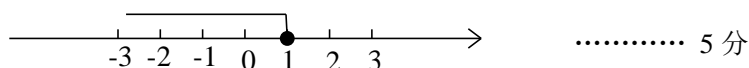
14. 50; 15. $m > n$;

16.; 对角线互相垂直的平行四边形是菱形. (或有一组邻边相等的平行四边形是菱形. 或四条边都相等的四边形是菱形.)

三、解答题（本题共 72 分，第 17-26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）

17. 解: $(2\sqrt{2} - \pi)^0 - 4\cos 60^\circ + |\sqrt{2} - 2| - \sqrt{18}$
 $= 1 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 - \sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ 4 分
 $= 1 - 4\sqrt{2}$ 5 分

18. 解: 去分母, 得 $15 - 3x \geq 2(7 - x)$, 1 分
 去括号, 得 $15 - 3x \geq 14 - 2x$, 2 分
 移项, 得 $-3x + 2x \geq 14 - 15$, 3 分
 合并同类项, 得 $-x \geq -1$,
 系数化为 1, 得 $x \leq 1$ 4 分
 把它的解集在数轴上表示为:



19. 证明: $\because BE \perp CD, CE = DE$,
 $\therefore BE$ 是线段 DC 的垂直平分线. 1 分
 $\therefore BC = BD$ 2 分
 \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AD = BC$ 3 分
 $\therefore AD = BD$ 4 分
 $\therefore \angle A = \angle ABD$ 5 分

20. 解：(1) $\Delta = 4m^2 - 4(m^2 + m - 2)$

$$= 4m^2 - 4m^2 - 4m + 8$$

$$= -4m + 8 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

\because 方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = -4m + 8 > 0. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore m < 2. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) $\because m$ 为正整数，且 $m < 2$ ，

$$\therefore m = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

原方程为 $x^2 - 2x = 0$.

$$\therefore x(x - 2) = 0 .$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 2. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

21. 解：(1) \because 点 $A(1, 2)$ 在 $l_1: y = mx$ 上，

$$\therefore m = 2 .$$

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的表达式为 } y = 2x. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

\because 点 $A(1, 2)$ 和 $B(3, 0)$ 在直线 $l_2: y = ax + b$ 上，

$$\therefore \begin{cases} a + b = 2, \\ 3a + b = 0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的表达式为 } y = -x + 3. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) n \text{ 的取值范围是 } n < 2. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

22. 解：设购买 A 型电脑 x 台，B 型电脑 y 台，
根据题意，得 $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\begin{cases} x + y = 35, \\ 6000x + 4000y = 150000. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解这个方程组，得 } \begin{cases} x = 5, \\ y = 30. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

答：购买 A 型电脑 5 台，B 型电脑 30 台。 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

23.

(1) 证明: $\because AB=AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ 1 分

$\because \angle DAC = \angle ABC$,

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$.

$\therefore AD \parallel BC$ 2 分

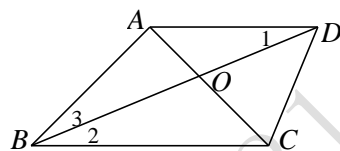
$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

又 $\because AB=AD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$ 3 分



(2) 解: $\because \angle DAC = 45^\circ$, $\angle DAC = \angle ABC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$.

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ 4 分

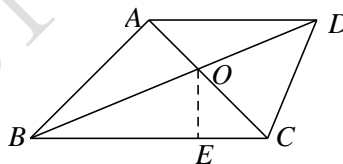
过点 O 作 $OE \perp BC$ 于 E ,

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$OE = OA = 1$.

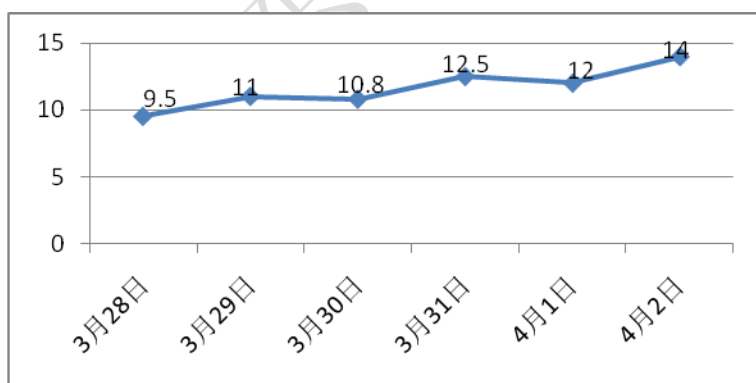
在 $Rt\triangle OEC$ 中, $\angle ACB = 45^\circ$, $OE = 1$,

$\therefore OC = \sqrt{2}$ 5 分



24. (1) $a = \frac{7+6+17+14}{4} = \frac{44}{4} = 11$ ($^\circ\text{C}$). 1 分

(2)



..... 4 分

(3) 3月29日. 5 分

25. 解：(1) $\because PA$ 切 $\odot O$ 于点 A ,

$\therefore PA \perp AB$ 1 分

$\therefore \angle P + \angle 1 = 90^\circ$.

$\because \angle 1 = \angle B + \angle 2$,

$\therefore \angle P + \angle B + \angle 2 = 90^\circ$ 2 分

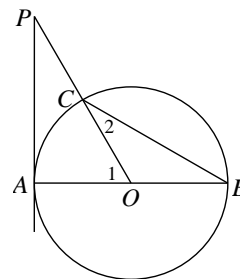
$\because OB = OC$,

$\therefore \angle B = \angle 2$.

又 $\because \angle P = \angle B$,

$\therefore \angle P = \angle B = \angle 2$.

$\therefore \angle P = 30^\circ$ 3 分



(2)

思路一：①在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中，已知 $\angle APO = 30^\circ$, $OA = a$, 可求出 PA 的长;

②在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中，已知 PA , AB 长，可求出 $\triangle PAB$ 的面积;

③可证出点 O 为 AB 中点，点 C 为 PO 中点，因此 $\triangle PBC$ 的面积是 $\triangle PAB$

面积的 $\frac{1}{4}$, 从而求出 $\triangle PBC$ 的面积. 5 分

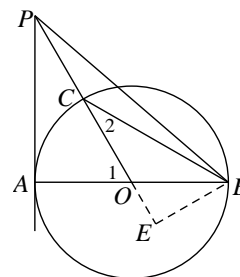
思路二：①在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中，已知 $\angle APO = 30^\circ$, $OA = a$, 可求出

$PO = 2a$, 进一步求出 $PC = PO - OC = a$;

②过 B 作 $BE \perp PO$, 交 PO 的延长线于点 E , 在

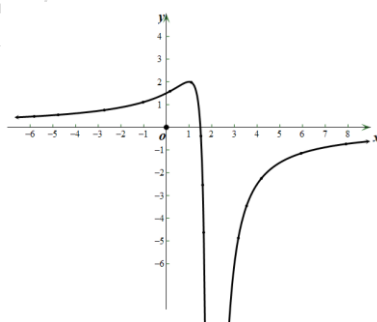
$\text{Rt}\triangle BOE$ 中已知一边 $OB = a$, 一角 $\angle BOE = 60^\circ$, 可求出 BE 的长;

③利用三角形面积公式 $\frac{1}{2} PC \times BE$ 求出 $\triangle PBC$ 的面积. 5 分



26. 解：(1) 自变量 x 的取值范围是 $x \neq 2$ 1 分

(2)



..... 3 分

(3) 该函数的一条性质是：函数有最大值(答案不唯一). 5 分

27. 解：(1) 由抛物线的表达式知，点 $C(0, 8)$ ，即 $OC=8$ ；

$$\text{Rt}\triangle OBC \text{ 中, } OB=OC \cdot \tan \angle ABC = 8 \times \frac{1}{2} = 4,$$

则点 $B(4, 0)$ 1 分

将 A 、 B 的坐标代入抛物线的表达式中，得：

$$\begin{cases} 4a - 2b + 8 = 0 \\ 16a + 4b + 8 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 8$ 3 分

$$\because y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9,$$

\therefore 抛物线的顶点坐标为 $D(1, 9)$ 4 分

(2) 设直线 CD 的表达式为 $y=kx+8$,

\because 点 $D(1, 9)$,

\therefore 直线 CD 表达式为 $y=x+8$.

\because 过点 A 、 B 作 x 轴的垂线，交直线 CD 于点 E 、 F ,

可得：点 $E(-2, 6)$ ，点 $F(4, 12)$ 6 分

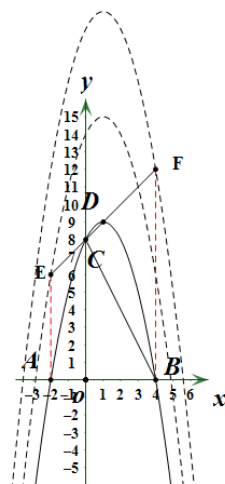
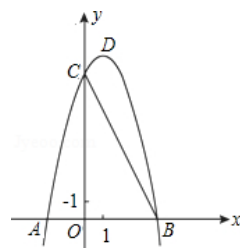
设抛物线向上平移 m 个单位长度 ($m > 0$),

则抛物线的表达式为： $y = -(x-1)^2 + 9 + m$;

当抛物线过点 $E(-2, 6)$ 时， $m=6$ ，当抛物线过点 $F(4, 12)$ 时， $m=12$,

\therefore 抛物线与线段 EF (含线段端点) 只有 1 个公共点，

$\therefore m$ 的取值范围是 $6 < m \leq 12$ 7 分



28. (1) 解： \because 正方形中 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$,

$\therefore \triangle ABD$, $\triangle GDF$ 为等腰直角三角形.

$\because AB=1$, $DG=2$,

\therefore 由勾股定理求得 $BD=\sqrt{2}$, $DF=2\sqrt{2}$ 2 分

$\because B$ 、 D 、 F 共线，

$$\therefore BF=3\sqrt{2}.$$

$\because H$ 是 BF 的中点，

$$\therefore BH = \frac{1}{2} BF = \frac{3}{2} \sqrt{2}. \text{ 3 分}$$

(2) 证法一：

延长 AH 交 EF 于点 M ，连接 AG ， GM ，

\because 正方形中 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 且 B 、 D 、 F 共线，

$\therefore AB \parallel EF$ 。

$\therefore \angle ABH = \angle MFH$ 。

又 $\because BH = FH$ ， $\angle AHB = \angle MHF$ ，

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle MFH$ 。..... 4 分

$\therefore AH = MH$ ， $AB = MF$ 。

$\because AB = AD$ ，

$\therefore AD = MF$ 。

$\because DG = FG$ ， $\angle ADG = \angle MFG = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle MFG$ 。..... 5 分

$\therefore \angle AGD = \angle MGF$ ， $AG = MG$ 。

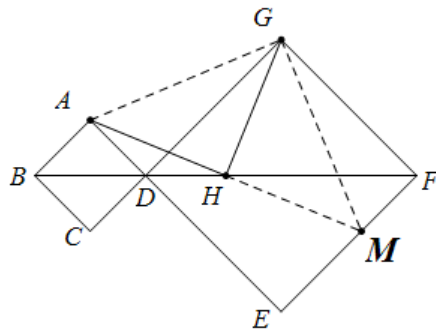
又 $\because \angle DGM + \angle MGF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AGD + \angle DGM = 90^\circ$ 。

$\therefore \triangle AGM$ 为等腰直角三角形。..... 6 分

$\therefore AH = MH$ ，

$\therefore AH = GH$ ， $AH \perp GH$ 。..... 7 分



证法二：

连接 AC ， GE 分别交 BF 于点 M ， N ，

\because 正方形中 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 且 B 、 D 、 F 共线，

$\therefore AC \perp BF$ ， $GE \perp BF$ ， $DM = \frac{1}{2}BD$ ， $DN = \frac{1}{2}DF$ 。

$\therefore \angle AMD = \angle GNH = 90^\circ$ ， $MN = \frac{1}{2}BF$ 。..... 4 分

$\because H$ 是 BF 的中点，

$\therefore BH = \frac{1}{2}BF$ 。

$\therefore BH = MN$ 。

$\therefore BH - MH = MN - MH$ 。

$\therefore BM = HN$ 。

$\because AM = BM = DM$ ，

$\therefore AM = HN = DM$ 。

$\therefore MD + DH = NH + DH$ 。

$\therefore MH = DN$ 。

$\because DN = GN$ ，

$\therefore MH = GN$ 。

$\therefore \triangle AMH \cong \triangle HNG$ 。..... 5 分

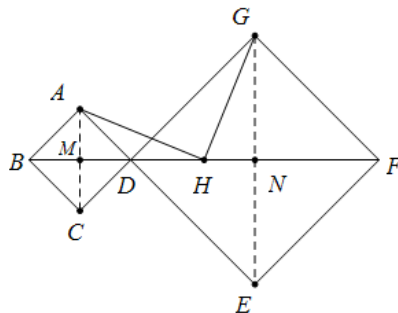
$\therefore AH = GH$ ， $\angle AHM = \angle HGN$ 。..... 6 分

$\because \angle HGN + \angle GHN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AHM + \angle GHN = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle AHG = 90^\circ$ 。

$\therefore AH \perp GH$ 。..... 7 分



29. 解：(1) 双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 的“倍双曲线”是 $y = \frac{6}{x}$ ；双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 的“半双曲线”是 $y = \frac{4}{x}$.
..... 2 分

(2) \because 双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的“半双曲线”是 $y = \frac{2}{x}$,

$\therefore \triangle AOC$ 的面积为 2, $\triangle BOC$ 的面积为 1,

$\therefore \triangle AOB$ 的面积为 1. 4 分

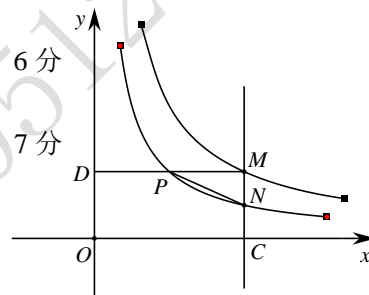
(3) 解法一：依题意可知双曲线 $y = \frac{2k}{x} (k > 0)$ 的“半双曲线”为 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$,
..... 5 分

设点 M 的横坐标为 x , 则点 M 坐标为 $\left(x, \frac{2k}{x}\right)$, 点 N 坐标为 $\left(x, \frac{k}{x}\right)$,

$\therefore CM = \frac{2k}{x}$, $CN = \frac{k}{x}$. $\therefore MN = \frac{2k}{x} - \frac{k}{x} = \frac{k}{x}$ 6 分

同理 $PM = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ 7 分

$\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} MN \cdot PM = \frac{k}{4}$.



$\therefore 1 \leq S_{\triangle PMN} \leq 2$,

$\therefore 1 \leq \frac{k}{4} \leq 2$. $\therefore 4 \leq k \leq 8$ 8 分

解法二：依题意可知双曲线 $y = \frac{2k}{x} (k > 0)$ 的“半双曲线”为 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$,
..... 5 分

设点 M 的横坐标为 x , 则点 M 坐标为 $\left(x, \frac{2k}{x}\right)$, 点 N 坐标为 $\left(x, \frac{k}{x}\right)$,

\therefore 点 N 为 MC 的中点, 同理点 P 为 MD 的中点.

连接 OM ,

$\therefore \frac{PM}{OC} = \frac{MN}{MC} = \frac{1}{2}$, $\therefore \triangle PMN \sim \triangle OCM$ 6 分

$\therefore \frac{S_{\triangle PMN}}{S_{\triangle OCM}} = \frac{1}{4}$.

$\therefore S_{\triangle OCM} = k$, $\therefore S_{\triangle PMN} = \frac{k}{4}$ 7 分

$\therefore 1 \leq S_{\triangle PMN} \leq 2$,

$\therefore 1 \leq \frac{k}{4} \leq 2$. $\therefore 4 \leq k \leq 8$ 8 分

