

第一学期期中 八年级 数 学 试 卷

考生须知

1. 本试卷分为第 I 卷和第 II 卷，共 4 页。
2. 本试卷满分 100 分，考试时间 100 分钟。
3. 在试卷（包括第 I 卷和第 II 卷）密封线内准确填写学校、班级、姓名、学号。
4. 考试结束，将试卷、机读卡及答题纸一并交回监考老师。

第 I 卷

一、选择题：（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列式子从左到右变形是因式分解的是（ ）

- A. $a^2+4a-21=a(a+4)-21$ B. $a^2+4a-21=(a-3)(a+7)$
 C. $(a-3)(a+7)=a^2+4a-21$ D. $a^2+4a-21=(a+2)^2-25$

2. 下列因式分解中，正确的个数为（ ）

- ① $x^3+2xy+x=x(x^2+2y)$ ；② $x^2+4x+4=(x+2)^2$ ；③ $-x^2+y^2=(x+y)(x-y)$

- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

3. 若分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为零，则 x 的值为（ ）

- A. 0 B. 1 C. -1 D. ± 1

4. 化简 $\frac{m-1}{m} \div \frac{m-1}{m^2}$ 的结果是（ ）

- A. m B. $\frac{1}{m}$ C. $m-1$ D. $\frac{1}{m-1}$

5. 如图 1， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，若 $\angle B=80^\circ$ ， $\angle C=30^\circ$ ， $\angle DAC=35^\circ$ ，则 $\angle EAC$ 的度数为（ ）

- A. 40° B. 35° C. 30° D. 25°

6. 分式方程 $\frac{2x-5}{x-2} = \frac{3}{2-x}$ 的解是（ ）

- A. $x=-2$ B. $x=2$ C. $x=1$ D. $x=1$ 或 $x=2$

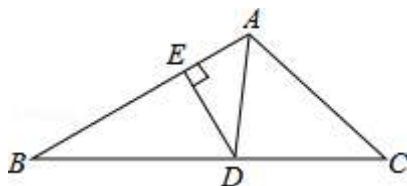
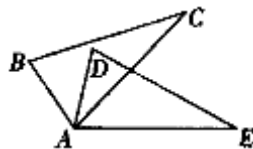
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$DE \perp AB$ 于点 E， $S_{\triangle ABC}=7$ ， $DE=2$ ， $AB=4$ ，则 AC 长是（ ）

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 5

8. 若 a 、 b 、 c 是三角形三边的长，则代数式 $a^2+b^2-c^2-2ab$ 的值（ ）.

- A. 小于零 B. 等于零 C. 大于零 D. 非正数



9. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-1} + \frac{3}{1-x} = 1$ 的解是非负数，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m > 2$ B. $m \geq 2$ C. $m \geq 2$ 且 $m \neq 3$ D. $m > 2$ 且 $m \neq 3$

10. 张华在一次数学活动中，利用“在面积一定的矩形中，正方形的周长最短”的结论，推

导出“式子 $x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 的最小值是 2”. 其推导方法如下：在面积是 1 的矩形中设

矩形的一边长为 x ，则另一边长是 $\frac{1}{x}$ ，矩形的周长是 $2(x + \frac{1}{x})$ ；当矩形成为正方形

时，就有 $x = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)，解得 $x = 1$ ，这时矩形的周长 $2(x + \frac{1}{x}) = 4$ 最小，因此 $x + \frac{1}{x}$ (x

> 0) 的最小值是 2. 模仿张华的推导，你求得式子 $\frac{x^2+9}{x}$ ($x > 0$) 的最小值是 ()

- A. 2 B. 3 C. 6 D. 10

第 II 卷

二、填空题：(每题 2 分，共 16 分)

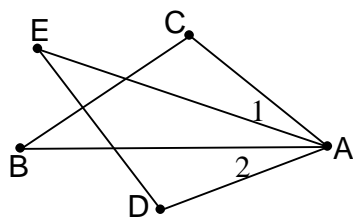
11. 分解因式： $x^2y - y =$ _____

12. 分式方程 $\frac{x}{x+2} = \frac{x-1}{x}$ 的解为 $x =$ _____.

13. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

14. 化简 $\frac{2}{a^2-1} - \frac{1}{a-1}$ 的结果是_____.

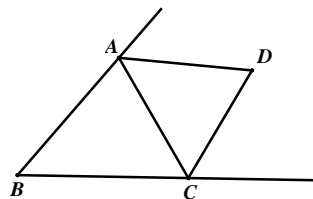
15. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$ ， $AC = AD$ ，添加一个条件
使 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ ，你添加的条件是_____
(填一种即可)，根据_____.



16. 已知如图点 D 是 $\triangle ABC$ 的两外角平分线的交点，下列说法：

- ① $AD = CD$ ② D 到 AB 、 BC 的距离相等
③ D 到 $\triangle ABC$ 的三边所在直线的距离相等
④ 点 D 在 $\angle B$ 的平分线

其中正确的说法的序号是_____.



17. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC \neq AC$, 作与 $\triangle ABC$ 只有一条公共边, 且与 $\triangle ABC$ 全等的三角形, 这样的三角形一共能作出_____个.

18. 观察下列等式:

$$\text{第一个等式: } a_1 = \frac{3}{1 \times 2 \times 2^2} = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 2^2};$$

$$\text{第二个等式: } a_2 = \frac{4}{2 \times 3 \times 2^3} = \frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3};$$

$$\text{第三个等式: } a_3 = \frac{5}{3 \times 4 \times 2^4} = \frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4};$$

$$\text{第四个等式: } a_4 = \frac{6}{4 \times 5 \times 2^5} = \frac{1}{4 \times 2^4} - \frac{1}{5 \times 2^5}.$$

则式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} =$ _____; 用含 n 的代数式表示第 n 个等式:

$$a_n = \frac{1}{n \times 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \times 2^n};$$

三、分解因式: (每题 4 分, 共 12 分)

19. $9x^2 - y^2 - 4y - 4$

20. $(x^2 + 4)^2 - 16x^2$

21. $(3x - y)^2 - (x - 3y)^2$

四、计算题: (每题 4 分, 共 20 分)

22. 化简: $\left(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x}\right) \div \frac{x-2}{x^2-x}$

23. 化简: $\frac{2x}{x+1} - \frac{2x+6}{x^2-1} \div \frac{x+3}{x^2-2x+1}$.

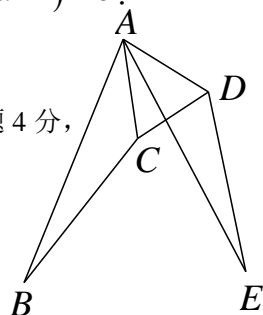
24. 解方程: $\frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$.

25. 解方程: $\frac{x^2-4x}{x^2-1} + 1 = \frac{2x}{x+1}$

26. 先化简, 再求值: $\left(\frac{2}{a-1} - \frac{1}{a}\right) \div \frac{a^2+a}{a^2-2a+1}$, 其中 $(a+2)(a-1)=0$.

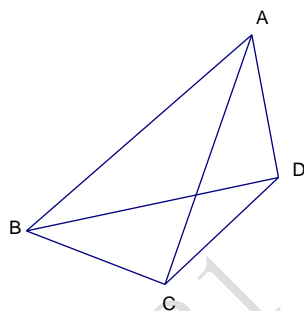
五、解答题 (27、28、每题 5 分, 29 题 4 分, 30 题 4 分, 31 每题 4 分, 共 22 分)

27. 已知: 如图, $CB=DE$, $\angle B=\angle E$, $\angle BAE=\angle CAD$.
求证: $AC=AD$.

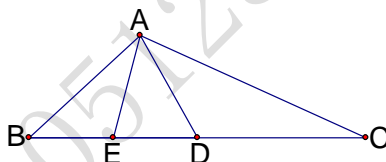


28. 端午节期间, 某食堂根据职工食用习惯, 用 700 元购进甲、乙两种粽子 260 个, 其中甲粽子比乙种粽子少用 100 元, 已知甲种粽子单价比乙种粽子单价高 20%, 乙种粽子的单价是多少元? 甲、乙两种粽子各购买了多少个?

29. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 平分 $\angle BAD$, $AB > AD$, 试判断 $AB - AD$ 与 $CD - CB$ 的大小关系, 并证明你的结论.



30. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $CD = AB$, 且 $\angle BDA = \angle BAD$,
 AE 是 $\triangle ABD$ 的中线,
 求证: $AC = 2AE$



第 30 题图

31. 对 x, y 定义一种新运算 T , 规定: $T(x, y) = \frac{ax+by}{2x+y}$ (其中 a, b 均为非零常数),

这里等式右边是通常的四则运算, 例如: $T(0, 1) = \frac{a \times 0 + b \times 1}{2 \times 0 + 1} = b$.

- (1) 已知 $T(1, -1) = -2$, $T(4, 2) = 1$.

① 求 a, b 的值;

- ② 若关于 m 的不等式组 $\begin{cases} T(2m, 5-4m) \leq 4 \\ T(m, 3-2m) > p \end{cases}$ 恰好有 3 个整数解,

求实数 p 的取值范围;

- (2) 若 $T(x, y) = T(y, x)$ 对任意实数 x, y 都成立 (这里 $T(x, y)$ 和 $T(y, x)$ 均有意义), 则 a, b 应满足怎样的关系式?

2014--2015 学年度北京市第十三中学分校

第一学期期中 八年级 数学答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	A	B	C	A	A	C	C

二、填空题

12. $\frac{y(x+1)(x-1)}{2}$

13. $\frac{2}{1+a}$

14. $x \neq 5$

15. $-\frac{1}{1+a}$

16. $\underline{AB=AE}$, SAS

17. $\underline{\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}}$

18. $\underline{5}$

19. $\frac{1}{2} - \frac{1}{21 \times 2^{21}}; \quad \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$

三、因式分解

19. $9x^2 - y^2 - 4y - 4$

$$= 9x^2 - (y+2)^2$$

$$= (3x+y+2)(3x-y-2)$$

20. $(x^2+4)^2 - 16x^2$

$$= (x^2+4+4x)(x^2+4-4x)$$

$$= (x+2)^2(x-2)^2$$

21. $(3x-y)^2 - (x-3y)^2$

$$= (3x-y+x-3y)(3x-y-x+3y)$$

$$= (4x-4y)(2x+2y) = 8(x-y)(x+y)$$

四、计算题

$$22. \left(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x} \right) \div \frac{x-2}{x^2-x}$$

$$= \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x(x-1)}{x-2}$$

$$= x-1$$

$$23. \frac{2x}{x+1} - \frac{2x+6}{x^2-1} \div \frac{x+3}{x^2-2x+1}$$

$$= \frac{2x}{x+1} - \frac{2(x+3)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+3}$$

$$= \frac{2x-2x+2}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

$$24. \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$$

解：方程两边都乘以 $(x+2)(x-2)$ ，得

$$x+2=4,$$

$$\text{解得 } x=2,$$

经检验 $x=2$ 不是分式方程的解，原分式方程无解.

$$25. \frac{x^2-4x}{x^2-1} + 1 = \frac{2x}{x+1}$$

$$x(x-4) + x^2 - 1 = 2x(x-1)$$

$$x^2 - 4x + x^2 - 1 = 2x^2 - 2x$$

$$\text{解： } -4x + 2x = 1$$

$$-2x = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

经检验 $x = -\frac{1}{2}$ 是分式方程的解，原分式方程的解为 $x = -\frac{1}{2}$ 。

$$26. \left(\frac{2}{a-1} - \frac{1}{a} \right) \div \frac{a^2+a}{a^2-2a+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2a}{a(a-1)} - \frac{a-1}{a(a-1)} \right) \cdot \frac{(a-1)^2}{a(a+1)} \\
&= \frac{a+1}{a(a-1)} \cdot \frac{(a-1)^2}{a(a+1)} \\
&= \frac{a-1}{a^2}
\end{aligned}$$

$a^2+a-2=0$ 的解为 $a=-2; a=1$

当 $a=-2$ 时, 原式 $= -\frac{3}{4}$; 当 $a=1$ 时, 原式无意义。

五、解答题

27. $\because \angle BAE = \angle CAD$

$$\therefore \angle BAE - \angle CAE = \angle CAD - \angle CAE$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAD$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AED$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ \angle BAC = \angle EAD \\ CB = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED$$

$$\therefore AC = AD$$

28. 解: 设乙种粽子的单价是 x 元, 则甲种粽子的单价为 $(1+20\%)x$ 元,

$$\text{由题意得, } \frac{300}{(1+20\%)x} + \frac{400}{x} = 260,$$

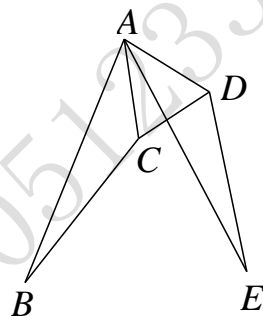
解得: $x=2.5$,

经检验: $x=2.5$ 是原分式方程的解,

$$(1+20\%)x=3,$$

则买甲粽子为: $\frac{300}{3}=100$ 个, 乙粽子为: $\frac{400}{2.5}=160$ 个.

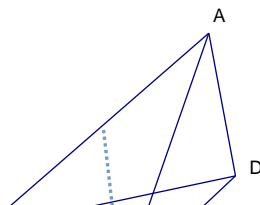
答: 乙种粽子的单价是 2.5 元, 甲、乙两种粽子各购买 100 个、160 个.



29. 证明: 在 AB 上截取 $AE=AD$, 连接 EC

$$\because \text{对角线 AC 平分 } \angle BAD$$

$$\therefore \angle EAC = \angle DAC$$



在 $\triangle EAC$ 与 $\triangle DAC$ 中

E

$$\begin{cases} AE = AD \\ \angle EAC = \angle DAC \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAC \cong \triangle DAC$$

$$\therefore CE = CD$$

在 $\triangle BEC$ 中

$$CE - BC < BE$$

$$\text{即: } CD - CB < AB - AD$$

30.证明：延长 AE 至 F，使 EF=AE。连接 FD

$$\because \angle BDA = \angle BAD$$

$$\therefore AB = BD$$

 \because AE 是 $\triangle ABD$ 的中线

$$\therefore BE = ED =$$

在 $\triangle AEB$ 与 $\triangle FED$ 中

$$\begin{cases} BE = ED \\ \angle AEB = \angle FED \\ AE = FE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle FED$$

$$\therefore AB = FD \text{ 且 } \angle B = \angle FDE$$

$$\because AB = DC$$

$$\therefore FD = CD$$

$$\because \angle ADC = \angle DAB + \angle B$$

$$\angle ADF = \angle ADB + \angle FDE$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADF$$

在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ADC$ 中

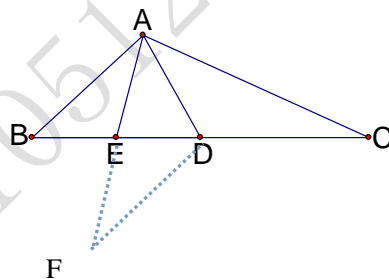
$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle ADF = \angle ADC \\ DF = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADC$$

$$\therefore AF = AC$$

$$\because AF = 2AE$$

$$\therefore AC = 2AE$$



$$31. \text{解: (1) ①根据题意得: } T(1, -1) = \frac{a-b}{2-1} = -2, \text{ 即 } a-b = -2;$$

$$T = (4, 2) = \frac{4a+2b}{8+2} = 1, \text{ 即 } 2a+b=5,$$

解得： $a=1, b=3$;

$$\textcircled{2} \text{ 根据题意得: } \begin{cases} \frac{2m+3(5-4m)}{4m+5-4m} \leq 4 \textcircled{1} \\ \frac{m+3(3-2m)}{2m+3-2m} > p \textcircled{2} \end{cases},$$

$$\text{由} \textcircled{1} \text{ 得: } m \geq -\frac{1}{2};$$

$$\text{由} \textcircled{2} \text{ 得: } m < \frac{9-3p}{5},$$

$$\therefore \text{不等式组的解集为 } -\frac{1}{2} \leq m < \frac{9-3p}{5},$$

\because 不等式组恰好有 3 个整数解, 即 $m=0, 1, 2$,

$$\therefore 2 < \frac{9-3p}{5} \leq 3,$$

$$\text{解得: } -2 \leq p < -\frac{1}{3};$$

$$(2) \text{ 由 } T(x, y) = T(y, x), \text{ 得到 } \frac{ax+by}{2x+y} = \frac{ay+bx}{2y+x},$$

$$\text{整理得: } (x^2 - y^2)(2b - a) = 0,$$

$\because T(x, y) = T(y, x)$ 对任意实数 x, y 都成立,

$$\therefore 2b - a = 0, \text{ 即 } a = 2b.$$