マトロイドと貪欲法

マトロイドという組合せ構造に着目することで貪欲法によって最適解が求まると分かる例は多く存在する．まず，以下のような最小全域木問題とそのアルゴリズムをすでに扱った．

最小全域木問題

入力：無向連結グラフ $G = (V, E)$ とコスト $c \in \mathbb{R}^E$ が与えられる．

目的：G の全域木のなかでコストが最小のものを 1 つ見つける．

最小全域木問題を解く Kruskal のアルゴリズム

$J \leftarrow \emptyset$ とする．

while $J \cup \{e\}$ が森となるような辺 $e \in E \setminus J$ が存在する **do**

　上の条件に合う辺の中で，c_e が最小の辺 e を選ぶ．

　J を $J \cup \{e\}$ に置き換える．

次で定義されるマトロイドは，このような貪欲法を利用できる，より一般化された構造である．マトロイドにはいくつか同値な定義が存在する．

定義 1.1 マトロイド（matroid）

S を有限集合とし，$\mathcal{I}$ を S のある部分集合族とする．次の条件がすべて成立するとき，組 $(S, \mathcal{I})$ をマトロイドという．(M0) と (M1) が成立するときには独立性システム（*independence system*）という．

$$\emptyset \in \mathcal{I} \tag{M0}$$

$$X \subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I} \tag{M1}$$

$$X, Y \in \mathcal{I} \text{ かつ } |X| > |Y| \Rightarrow \exists x \in X \setminus Y \ s.t.\ Y \cup \{x\} \in \mathcal{I} \tag{M2}$$

$\mathcal{I}$ の要素を独立集合（*independent set*）という．$2^S \setminus \mathcal{I}$ の要素は従属（*dependent*）である呼ばれる．

上で導入した言葉を用いると，次のような問題を考えることができる．

コスト付きマトロイドの最大重み独立集合を求める問題

入力：マトロイド $(S, \mathcal{I})$ とコスト $c \in \mathbb{R}^S$ が与えられる．

目的：独立集合の中でコストが最大のものを 1 つ見つける．

この問題が貪欲法で解けることについて説明を書く前に，マトロイド に関する用語や同値な定義，いくつかのマトロイドの例などについて書く．

定義 1.2 基（basis）とサーキット（circuit）

S を有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^S$ とし，X を S の部分集合とする．X の基の集合 $\mathcal{B}(X)$ とサーキットの集合 $\mathcal{C}(X)$ を以下で定義する．

$$\mathcal{B}(X) := \{Y \subseteq X \mid Y \in \mathcal{I} \text{ かつ } \forall x \in X \setminus Y, Y \cup \{x\} \notin \mathcal{I}\} \tag{1.1}$$

$$\mathcal{C}(X) := \{Y \subseteq X \mid Y \notin \mathcal{I} \text{ かつ } \forall y \in Y, Y \setminus \{y\} \in \mathcal{I}\} \tag{1.2}$$

$Y \in \mathcal{B}(X)$ であるとき（すなわちの Y が X の部分集合の中で極大な独立集合であるとき）Y を X の基であるという．また，単に基族といったときは $\mathcal{B}(S)$ のことを，単に基といったときは $\mathcal{B}(S)$ の要素を指す．$\mathcal{B}(S)$ を $\mathcal{B}$ と表す．

主張 1.1

$(S, \mathcal{I})$ をマトロイドとするとき，次の性質を満たす．

$$S \text{ の任意の部分集合 } X \text{ について，} X \text{ の基の大きさは全て等しい} \tag{M2'}$$

証明
背理法を用いる．B を X の基とし，X の基 B' で $|B| < |B'|$ を満たすものが存在すると仮定する．(M2) より，$\exists x \in B' \setminus B, B \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ とできる．ここで $B \cup \{x\} \subseteq X$ であり，B が X の基であることに矛盾する． □

主張 1.1 より，以下の定義は well-defined である．

定義 1.3 階数関数（rank）
$(S, \mathcal{I})$ をマトロイドとし，X を S の部分集合とする．X の基の大きさを $r(X)$ と表し X の階数関数（もしくはランク）と呼ぶ．

さらに次の主張から，マトロイドの定義における (M2) を (M2') に置き換えても同値な定義になっていることがわかる．

主張 1.2
独立性システム $(S, \mathcal{I})$ が (M2') を満たすとき，(M2) が成立する．

証明
$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ とし，$B = X \cup Y$ と定める．$|X| > |Y|$ と (M2') より，Y は B の基でない．よって，B のある部分集合 Y' が存在して $Y \subsetneq Y' \in \mathcal{I}$ とできる．$x \in Y' \setminus Y$ をとると，$Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ かつ $x \in B \setminus Y = X \setminus Y$ となり，(M2) が成立するとわかる． □

また，階数関数については次の特徴がある．

主張 1.3
$(S, \mathcal{I})$ をマトロイドとする．階数関数 $r : 2^S \leftarrow \mathbb{R}$ は S の任意の部分集合 X, Y について次の性質を満たす．(R2) の不等式は劣モジュラ不等式（*submodular inequality*）と呼ばれる．

$$0 \leq r(X) \leq |X| \tag{R0}$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y) \tag{R1}$$

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y) \tag{R2}$$

証明
(R0) は X の基は X に含まれることと階数関数を基の濃度として定義したことからわかる．また，(R1) は X, Y の基をそれぞれ B_X, B_Y としたときに，$|B_X| > |B_Y|$ と仮定すると B_Y の極大性に矛盾することからわかる．最後に (R2) を示す．まず，B を $X \cap Y$ の基とする．$X \cup Y$ の基で B を含むものをとり，B' とする．B, B' の定め方より，$r(X \cap Y) = |B|, r(X \cup Y) = |B'|, B \subseteq B' \cap X \cap Y$ であり，以下のように不等式で評価できる．

$$\begin{aligned}
r(X) + r(Y) &\geq r(B' \cap X) + r(B' \cap Y) \\
&= |B' \cap X| + |B' \cap Y| \\
&= |B' \cap (X \cap Y)| + |B' \cap (X \cup Y)| \\
&\geq |B| + |B'| \\
&= r(X \cap Y) + r(X \cup Y)
\end{aligned}$$

以上より，劣モジュラ性が確認できた． □

次に，いくつかマトロイドの例を見る．

定義 1.4 グラフ的マトロイド（graphic matroid）
$G = (V, E)$ を無向グラフとし，$S_G := E, \mathcal{I}_G = \{A \subseteq E \mid A$ は閉路を持たない $\}$ と定める．$M_G = (S_G, \mathcal{I}_G)$ をグラフ的マトロイドという．

上で定めた $M_G = (S_G, \mathcal{I})$ がマトロイドとなることから，最小全域木問題はコストを変換してマトロイドの問題として捉えて貪欲法で解けるとわかる．$M_G = (S_G, \mathcal{I})$ がマトロイドであるを示すために，以下の補題を示す．

補題 1.1
$F = (V_F, E_F)$ を森とする．F の連結成分の数は $|V_F| - |E_F|$ である．（すなわち，$|V_F| - |E_F|$ 個の木から構成されている．）

証明

連結成分の数を t とし，i 番目の連結成分には v_i 個の頂点と e_i 個の辺から構成されているとする．このとき，

$$|E_F| = \sum_{i=1}^{t} e_i = \sum_{i=1}^{t}(v_i - 1) = \sum_{i=1}^{t} v_i - t = |V_F| - t$$

とでき，$t = |V_F| - |E_F|$ が分かる． □

主張 1.4

$G = (V, E)$ が無向グラフであるとき，$M_G = (S_G, \mathcal{I}_G)$ はマトロイドである．

証明

まず，辺がないときは森であることと森の部分グラフは森であることから (M0) と (M1) は確認することができる．(M2) の成立を確認する．$G_A = (V, A)$ と $G_B = (V, B)$ は森で，$|A| < |B|$ を満たすとする．補題 *1.1* より，森 G_B の連結成分の数は森 G_A の連結成分の数より少ないことがわかる．よって，G_B のある連結成分 $T = (V', E')$ を，

$$\exists v, w \in V' \ s.t.\ v \text{ と } w \text{ は } G_A \text{で異なる連結成分に属する}$$

という条件を満たすようにとれる．T 上の w と v をつなぐ路の中に,G_A の異なる連結成分をつなぐ辺 $uv \in E' \subseteq B$ が現れるため，この辺 $uv \in B$ を G_A に加えることでより大きな森を構成できる．（辺 uv を加えたことで閉路ができるとすると，異なる連結成分であることに矛盾する） □

定義 1.5 線形マトロイド（linear matroid）

F を体とし，X を F 上の $m \times n$ 行列とする．$S = \{\boldsymbol{x} \in F^m \mid \boldsymbol{x}$ は X の列ベクトル $\}$，$\mathcal{I} := \{A \subseteq S | A$ の要素は一次独立である $\}$ とする．このようにして定まる組 $(S, \mathcal{I})$ を線形マトロイドと呼ぶ.

主張 1.5

上で定義した線形マトロイドはマトロイドである.

証明

(M0) と (M1) は一次独立の定義より成立する．また，S の任意の部分集合 A について，A の基は線形代数での基底と対応しており，基底の数は基底の選び方によらないことから (M2') が確認できる．

定義 1.6 一様マトロイド（uniform matroid）

S を有限集合とし，k を非負の整数とする．$\mathcal{I} := \{A \subseteq S \mid |A| \leq k\}$ と定める．$(S, \mathcal{I})$ を一様マトロイドという．

主張 1.6

上で定めた一様マトロイドはマトロイドとなる．

証明

(M0) と (M1) は $\mathcal{I}$ の定義からわかるので，(M2') を確認する．A を S の任意の部分集合とし B を A の基とする．$|A| \leq k$ のときは $B = A$ とでき，$|A| > k$ のときは $|B| = k$ とできる．したがって $|B| = min(|A|, k)$ であり，基の大きさが基の選び方に依存せず，(M2') がわかる．

その他の同値な定義

マトロイドにはいくつかの同値な定義が知られている．まず最初に，基族による定義を記す．ここまで，有限集合 S に対して独立集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ を定めることでマトロイドを定義してきた．逆に，マトロイド $(S, \mathcal{I})$ はその基の集合 $\mathcal{B} \subseteq 2^S$ さえ分かれば，独立集合族が $\mathcal{I} = \{J \subseteq S \mid \exists B \in \mathcal{B}\ s.t.\ J \subset B\}$ と決定される．以下の基族の満たすべき性質 (B0) と (B1) によってマトロイドの同値な定義を与えられる．

主張 1.7

S を有限集合とし，$\mathcal{B} \subseteq 2^S$ とする．$\mathcal{B}$ があるマトロイド $(S, \mathcal{I})$ の基族であるための必要十分条件は以下の (B0) と (B1) を満たすことである．

$$\mathcal{B} \neq \emptyset \tag{B0}$$

$$\begin{gathered}\text{任意の } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ と任意の } \forall x \in B_1 \setminus B_2 \text{に対して，} \\ \text{ある } y \in B_2 \setminus B_1 \text{が存在して，} (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B} \text{ となる．}\end{gathered} \tag{B1}$$

証明

「$\mathcal{B}$ がマトロイド $(S, \mathcal{I})$ の基族 $\Rightarrow$(B0) かつ (B1)」について

(B0) は $\emptyset \in \mathcal{I}$ よりわかる．任意に $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と $x \in B_1 \setminus B_2$ をとる．(M2') より $|B_1| = |B_2|$ であり，(M2) を $B_1 \setminus \{x\}$ と B_2 に適用することで $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ となる $y \in B_2 \setminus B_1$ がとれる．また，$|(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}| = |B_1|$ より，基であることがわかる．

「(B0) かつ (B1)$\Rightarrow \mathcal{B}$ はあるマトロイドの基族」について

まず，$\mathcal{B}$ はどの要素も濃度が等しいことを背理法により示す．$|B_1| > |B_2|$ を満たす $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ の中で，$|B_1 \cap B_2|$ が最大となるものをとる．$x \in B_1 \setminus B_2$ とすると，(B1) より $(B_1 \setminus \{x\}) \cup y$ となる $y \in B_2 \setminus B_1$ が存在し，$|B_1 \cup B_2|$ の最大性に矛盾する．よって背理法より，$\mathcal{B}$ はどの要素も大きさが等しいとわかる．

$\mathcal{I} = \{J \subseteq S \mid \exists B \in \mathcal{B}\ s.t.\ J \subset B\}$ とする．$(S, \mathcal{I})$ は定め方と (B0) より独立性システムであり，$\mathcal{B}$ はその基族となる．$(S, \mathcal{I})$ が (M2) を満たすことを示す．$|X| > |Y|$ を満たす $X, Y \in \mathcal{I}$ を任意にとる．$X \subseteq B_1 \in \mathcal{B}$ と $Y \subseteq B_2 \in \mathcal{B}$ となる B_1 と B_2 を $|B_1 \cap B_2|$ が最大となるように選ぶ．$B_2 \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ の場合はその要素をとって Y を大きくできる．

以下では $B_2 \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ を仮定すると矛盾することを示す．

$$\begin{aligned}|B_1 \cap B_2| + |Y \setminus B_1| + |(B_2 \setminus B_1) \setminus Y| &= |B_2| \\ &= |B_1| \\ &\geq |B_1 \cup B_2| + |X \setminus Y|\end{aligned}$$

今，$|X| > |Y|$ より $|X \setminus Y| > |Y \setminus X| \geq |Y \setminus B_1|$ であり，$|(B_2 \setminus B_1) \setminus Y| > 0$ がわかる．$y \in (B_2 \setminus B_1) \setminus Y$ とすると，(B1) よりある $x \in B_1 \setminus B_2$ をとって $B_2' := (B_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$ とでき，$|B_1 \cup B_2|$ の最大性に矛盾する． □

(B1) を次の同時交換性と呼ばれる (B1') に置き換えても，マトロイドの同値な定義となることが知られている．

$$\begin{gathered}\text{任意の } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ と任意の } \forall x \in B_1 \setminus B_2 \text{に対して，} \\ \text{ある } y \in B_2 \setminus B_1 \text{が存在して，} \\ (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B} \text{ かつ } (B_2 \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{B} \text{ となる．}\end{gathered} \tag{B1'}$$

また，基族によってマトロイドを定義できたように，サーキットの集合に条件を与えてマトロイドを定義することもできる．

主張 1.8

S を有限集合とし，$\mathcal{C} \subseteq 2^S$ とする．$\mathcal{C}$ があるマトロイド $(S, \mathcal{I})$ のサーキットの集合であることは以下の (C0) と (C1) と (C2) を満たすことと同値．

$$\emptyset \notin \mathcal{C} \tag{C0}$$

$$\text{任意の } C_1, C_2 \in \mathcal{C} \text{ に対して，} C_1 \subseteq C_2 \text{ならば } C_1 = C_2 \tag{C1}$$

$$\begin{gathered}\text{任意の } C_1, C_2 \in \mathcal{C},\ e \in C_1 \cap C_2\ f \in C_1 \setminus C_2 \text{に対して，} \\ f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \text{ を満たす } C_3 \in \mathcal{C} \text{ が存在する．}\end{gathered} \tag{C2}$$

証明

「$\mathcal{C}$ があるマトロイドのサーキットの集合 $\Rightarrow$(C0) かつ (C1) かつ (C2)」

$\mathcal{C}$ をマトロイド $(S, \mathcal{I})$ のサーキットの集合とする．(M0) より，$\emptyset \notin \mathcal{I}$ がわかる．また，$C_1 \subsetneq C_2$ となる $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ が存在したと仮定すると C_2 の極小性に矛盾することから (C1) がわかる．次に，(C2) を示す．$C_1, C_2 \in \mathcal{C}\ e \in C_1 \cap C_2,\ f \in C_1 \setminus C_2$ とする．(R2) をうまく利用するこ

とで，

$$
\begin{aligned}
&|C_1| - 1 + r((C_1 \cup C_2) \setminus \{e,f\}) + |C_2| - 1 \\
&= r(C_1) + r((C_1 \cup C_2) \setminus \{e,f\}) + r(C_2) \\
&\geq r(C_1) + r((C_1 \cup C_2) \setminus \{f\}) + r(C_2 \setminus \{e\}) \\
&\geq r(C_1 \setminus \{f\}) + r(C_1 \cup C_2) + r(C_2 \setminus \{e\}) \\
&= |C_1| - 1 + r(C_1 \cup C_2) + |C_2| - 1
\end{aligned}
$$

とできて，$r(C_1 \cup C_2 \setminus \{e,f\}) = r(C_1 \cup C_2)$ がわかる．B を $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e,f\}$ の基とすると，$B \cup \{f\} \notin \mathcal{I}$ であり，$f \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ を満たすサーキット C_3 を得られる．

「(C0) かつ (C1) かつ (C2)⇒ $\mathcal{C}$ があるマトロイドのサーキットの集合」

$\mathcal{C} \subseteq 2^S$ が (C0) と (C1) と (C2) を満たすとする．

$$\mathcal{I} := \{X \subseteq S \mid \nexists Y \in \mathcal{C}\ s.t.\ Y \subseteq X\} \tag{1.3}$$

とすると，定め方から C．$(S,\mathcal{I})$ がマトロイドとなることを示す．(C0) より (M0) が成立する．また，(M1) は (1.3) での定め方から従う．(M2') を背理法によって示すために，ある $X \subseteq S$ について X の基で大きさが異なるものが存在すると仮定する．$B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$ を $|B_1| > |B_2|$ を満たすものの中で $|B_1 \cap B_2|$ が最大となるようにとる．$x \in B_1 \setminus B_2$ をとり，$B_2 \cup \{x\}$ について考える．$B_2 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$ が B_2 の X における極大性からわかる．$\mathcal{I}$ の定義より，$C_x \in \mathcal{C}$ を $x \in C_x \subseteq B_2 \cup \{x\}$ が成り立つようにとれる．仮に $C \subseteq B_2 \cup \{x\}$ を満たすような C_x と異なる $C \in \mathcal{C}$ が存在したと仮定すると，(C2) より $(C \cup C_x) \setminus \{x\} \in \mathcal{C}$ となり，$(C \cup C_x) \setminus \{x\} \subseteq B_2$ に矛盾する．ゆえに C_x は $B_2 \setminus \{x\}$ の唯一のサーキットである．$y \in C_x \setminus B_1$ をとると，$B_2' = (B_2 \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{I}$ となる．（唯一含まれるサーキットを除去したため）$|B_2' \cup B_1| > |B_2 \cup B_1|$ より最大性と矛盾する．以上より (M2') が確認できた． □

貪欲法の正当性

コスト付きマトロイドの最大コストの独立集合を求める問題は，以下のアルゴリズムで解ける．

コスト付きマトロイドに対する貪欲法の擬似コード

```
入力として M = (S,I) とコスト c ∈ ℝ^S を受け取る．
J ← ∅ とする．
S をコスト c の降順でソートする．
for コストの大きい順で各 e ∈ S について do
    if J ∪ {e} ∈ I かつ c_e > 0 then
        J ← J ∪ {e}
J を出力する．
```

主張 1.9

$n = |S|$ とし，独立集合かどうかの判定には $O(f(n))$ 時間かかると仮定するとき，上で扱ったアルゴリズムの実行時間は $O(n \log n + nf(n))$．

証明

ソートは $O(n \log n)$ 時間で可能であることと，J に S の要素を加えていく操作についてはトータルで $O(nf(n))$ 時間かかることから，実行時間は $O(n \log n + nf(n))$ とわかる． □

主張 1.10

コスト付きマトロイドに対する貪欲法は正しく動作して，最大コストの独立集合を出力する．

証明

まず，「すべての要素のコストが正であるような独立集合」に候補を限定して

最適解を求めても，もとの問題の最適解と同じコストの解が得られる．よって，以下では「コストが正のものだけを使うという条件を課したもとでの最適解」を出力することを示す．（仮に A をもとの最適独立集合のひとつであるとすると，A からコストが 0 以下の要素を削除してできる A' も独立であり，$c(A) \leq c(A')$ と A の最適性から $c(A) = c(A')$ である．また，候補を限定して調べて得られる解を A'' とすると，コストは $c(A) = c(A') \leq c(A'')$ であり，A の最適性から $c(A) = c(A'')$）

次に，このアルゴリズムが J に要素を追加するときには，必ず $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となる $e \in S \setminus J$ の中で c_e が最大のものを追加している．なぜならば，一度 $J \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ であると判定された e は，その後のどのステップにおいても $J \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ であり，一度追加するかどうか調べた要素をもう一度見る必要はないためである．

そして，どのステップにおいても「$J \subseteq A$ を満たすようなある最適な独立集合 $A \in I$ が存在すること」（このことを以下では「最適独立集合へ拡張可能」という）を示す．最初の状態では $J = \emptyset$ であるから，最適独立集合へ拡張可能である．次に，J が最適独立集合 A へ拡張可能な状態で $x \in S$ が J に追加されたとき，$J \cup \{x\}$ も最適独立集合へ拡張可能であることを示す．$x \in A$ のときは $J \cup \{x\}$ を A へと拡張できるので，$x \notin A$ のときを考える．マトロイドの交換性より，$(A \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{B}$ となるような $y \in A \setminus (J \cup \{x\})$ をとれる．ここで，$J \cup \{y\} \subseteq A$ であるため $J \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ であり，$c_y \leq c_x$ が言える．よって，$J \cup \{x\} \subseteq (A \cup \{x\}) \setminus \{y\}$ かつ $c(A) \leq c((A \cup \{x\}) \setminus \{y\})$ なので，$J \cup \{x\}$ が最適独立集合へ拡張できることが言えた．

以上より，常に最適独立集合へ拡張可能であり，終了時にはどのようなコストが正の S の要素を加えても従属になることから，最適解を出力するとわかる． □

マトロイドであることの必要性

(M0) と (M1) が上での貪欲法を適用するために必要であるのは，J の要素を 1 つも増やせないパターンやハッセ図で考えたときに最適解への道が途切れているようなパターンを考えるとわかる．以下の主張からわかるように，すでに記した貪欲法のプログラムが正しく動くためにはマトロイドであることが必要十分である．

主張 1.11

$(S, \mathcal{I})$ を独立性システムとする．「$(S, \mathcal{I})$ が任意のコスト $c \in \mathbb{R}^S$ に対して上の貪欲法が最適独立集合を出力すること」は「$(S, \mathcal{I})$ がマトロイドであること」と同値である．

証明

$(S, \mathcal{I})$ がマトロイドであるときに最適解を出力することはすでに確認したので，逆を示す．対偶をとって，「$(S, \mathcal{I})$ がマトロイドでない $\Rightarrow$ ある $c \in \mathbb{R}^S$ に対して貪欲法によって求まる解が最適でないときがある」を示す．マトロイドでないことから，ある $A \subseteq S$ を，「A の基の大きさは等しい」という (M2') の条件に違反するようにとれる．コスト $c \in \mathbb{R}^S$ を A の特性関数として定める．すると，A の基の中で大きさが最大ではないような J' について，J' は最適解ではないのに貪欲法での解として出力される場合がある． □

参考文献

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms, Third Edition.* MIT Press and McGraw-Hill, 2009. ISBN 978-0262033848.

[2] William J. Cook, William H.Cunningham, William R.Pulleyblank, Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1997. ISBN 978-81-265-6176-6.

[3] Will Johnson. *Matroids*, `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_09/papers/Will.pdf`, (2019-11-10 参照)

[4] Leonidas S.Pitsoulis. *Topics in Matroid Theory*, Springer, 2014. ISBN 978-1-4614-8956-6.

[5] B. コルテ，J. フィーゲン著，浅野孝夫，浅野康仁，小野孝男，平田富夫訳，『組合せ最適化 第 2 版 理論とアルゴリズム』，シュプリンガー・ジャパン，2009．ISBN 978-4-431-10021-8.