ガロア祭問題 5 の解答

1 問題

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ で自然数全体の集合を表す．関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が単調非増加であるとは，$n \leq m$ ならば $f(n) \geq f(m)$ が成り立つことである．いま $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$j = 1, 2, 3, ...$ を単調非増加な関数の無限列とするとき，異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$，$i \neq j$ が存在して，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_i(n) \leq f_j(n)$ が成り立つことを示せ．

2 解答

まず，記述を簡単にするために次のように定義する．

定義 1. 関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について，$v_f := \min\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする．（$\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は空でない自然数の部分集合であるから最小元をとることが可能）

定義 2. 関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について，$u_f := \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = v_f\}$ とする．（$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = v_f\}$ は空でない自然数の部分集合であるから最小元をとることが可能）

定義 3. $i \in \mathbb{N}$ と $x_i, y_i \in \mathbb{N}$ について，$m_x^{(i)} := \min\{x_1, ..., x_i\}$，$M_x^{(i)} := \max\{x_1, ..., x_i\}$，$m_y^{(i)} := \min\{y_1, ..., y_i\}$，$M_y^{(i)} := \max\{y_1, ..., y_i\}$ とする．また，$a_i := m_x^{(i)} + m_y^{(i)}$ とする．

また，次の補題を証明する．

補題 1. X を無限集合，Y を空でない有限集合とし，$f : X \to Y$ としたとき，$f^{-1}(\{b\})$ が無限集合となる $b \in Y$ が存在する．

証明 1. Y は有限集合であるから，$Y = \{b_1, ..., b_n\}$ とおける．すると $X = f^{-1}(\{b_1\}) + ... + f^{-1}(\{b_n\})$ であり，ある X の元を写像 f によって飛ばすと行き先は 1 つに定まるので右辺は非交和となる．任意の $b \in Y$ について $f^{-1}(\{b\})$ が有限集合であると仮定すると，$1 \leq i \leq n$ について $|f^{-1}(\{b_i\})|$ は有限であることと $f^{-1}(\{b_1\}) + ... + f^{-1}(\{b_n\})$ の非交和であることを利用して $|X| = |f^{-1}(\{b_1\}) + ... + f^{-1}(\{b_n\})| = |f^{-1}(\{b_1\})| + ... + |f^{-1}(\{b_n\})| \neq \infty$ となって X が無限集合であることに矛盾．ゆえに背理法から，ある $b \in Y$ が存在して $f^{-1}(\{b\})$ が無限集合となることがわかる． □

それでは本題に入る．

1) $f_i = f_j$ かつ $i \neq j$ となる $i, j \in \mathbb{N}$ が存在するとき

場合分けより $f_i = f_j$ かつ $i \neq j$ となる異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$ を取ることができて，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_i(n) \leq f_j(n)$ が成立する．

$2) f_i = f_j$ かつ $i \neq j$ となる $i, j \in \mathbb{N}$ が存在しないとき

$W = \{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ とおくと，場合分けにより W は無限集合である．以下では背理法によって示すため，

$$\text{任意の異なる番号 } i, j \in \mathbb{N} \text{ についてある } n \in \mathbb{N} \text{ が存在して } f_i(n) > f_j(n) \text{ が成立する} \tag{1}$$

と仮定する．$V_1 = \{v_f \mid f \in W\}$ とおくと，V_1 は空でない自然数の部分集合であるから最小元 $\min V_1$ が存在し，$v_{f_{p_1}} = \min V_1$ なる $p_1 \in \mathbb{N}$ がとれる．$W' = W - \{f_{p_1}\}$，$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < n_{f_{p_1}}, v_{f_{p_1}} \leq y < f_{p_1}(x)\}$ とおく．ここで，次の主張を示す．

主張 1. p_1 と異なる任意の自然数 $j \in \mathbb{N}$ について，$f_j(x) = y$ を満たす $(x, y) \in A_1$ が存在する．

証明 2. (1) より，p_1 と異なる任意の自然数 $j \in \mathbb{N}$ について $f_{p_1}(n) > f_j(n)$ となる $n \in \mathbb{N}$ を取ることが可能．ここで，$u_{f_{p_1}} \leq n$ と仮定すると，$u_{f_{p_1}}$ の定義と f_{p_1} の単調非増加性から任意の $u_{f_{p_1}}$ 以上の $l \in \mathbb{N}$ について $f_{p_1}(l) = v_{f_{p_1}}$ であり，$v_{f_{p_1}} > f_j(n)$ となってしまい $v_{f_{p_1}}$ の最小性に矛盾する．ゆえに $n < v_{f_{p_1}}$ である．また，$f_j(n) < v_{f_{p_1}}$ と仮定すると $v_{f_j} < v_{f_{p_1}}$ となり $v_{f_{p_1}}$ の V_1 における最小性に矛盾するので，$v_{f_{p_1}} \leq f_j(n)$ である．以上より，$n < u_{f_{p_1}}$ かつ $v_{f_{p_1}} \leq f_j(n) < f_{p_1}(n)$ であるから，$(x, y) = (n, f_j(n))$ とすると $f_j(x) = y$ かつ $(x, y) \in A_1$ である． □

主張 1 を用いて $f \in W'$ に対して $f(s_f) = t_f$ となる $(s_f, t_f) \in A_1$ を取る．ここで $g_1 : W' \to A_1$ を

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{g_1} & A_1 \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & (s_f, t_f) \end{array}$$

と定義する．W' は無限集合で A_1 は有限集合だから補題 1 を適用し，$g_1(f) = (x_1, y_1)$ を満たす $f \in W'$ が無限に存在するように $(x_1, y_1) \in A_1$ を固定する．g_1 の定義より，$f(x_1) = y_1$ を満たす $f \in W'$ が無限に存在するとわかる．よって，$W_1 = \{f \in W \mid f_j(x_1) = y_1\}$ とおくと W_1 は無限集合となる．任意の 2 以上の自然数 n について次の主張が成立することを証明する．

主張 2. $a_i - a_{i-1} \leq -1 \ (2 \leq i \leq n)$ を満たす $(x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ が存在して，W の無限部分集合 W_n を「任意の $f, g \in W_n$ について $f(i) = g(i) \ (i \in \mathbb{N}, m_x^{(n)} \leq i \leq M_x^{(n)})$」となるように取れる．

証明 3. 数学的帰納法により示す．

(i) $n = 2$ のとき

$V_2 = \{v_f \mid f \in W_1\}$ とおくと，V_2 は空でない自然数の部分集合であるから最小元 $\min V_2$ が存在し，$v_{f_{p_2}} = \min V_2$ かつ $f_{p_2} \in W_1$ となる $p_2 \in \mathbb{N}$ がとれる．$W_1' = W_1 - \{f_{p_2}\}$，$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < u_{f_{p_2}}, v_{f_{p_2}} \leq y < f_{p_2}(x)\}$ とおく．すると主張 1 での証明と同様にして，任意の $f \in W_1'$ について $f(x) = y$ を満たす $(x, y) \in A_2$ が存在することが分かる．$f \in W_1'$ に対して $f(s_f) = t_f$ となる $(s_f, t_f) \in A_2$ を取る．ここで $g_2 : W_1' \to A_2$ を

$$\begin{array}{ccc} W_1' & \xrightarrow{g_2} & A_2 \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & (s_f, t_f) \end{array}$$

と定義する．W_1' は無限集合で A_2 は有限集合だから補題 1 を適用することができ，$g_2(f) = (x_2, y_2)$ を満たす $f \in W_1'$ が無限に存在するように $(x_2, y_2) \in A_2$ を固定できる．g_2 の定義より，$f(x_2) = y_2$ を満たす $f \in W_1'$

が無限に存在するとわかる．よって，$W_1'' = \{f \in W_1' \mid f(x_2) = y_2\}$ とおくと W_1'' は無限集合となる．ここで $x_1 = x_2$ とすると，$f \in W_1''$ を 1 つとって $f(x_2) = y_2$ とできる一方で，$f_{p_2} \in W_1$ と A_2 の定義より $y_2 < f_{p_2}(x_2) = f_{p_2}(x_1) = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ となって矛盾する．ゆえに $x_1 \neq x_2$ である．$x_1 < x_2$ のとき，f_{p_2} の単調非増加性と $(x_2, y_2) \in A_2$ により $y_2 < f_{p_2}(x_2) \leq f_{p_2}(x_1) = y_1$ であり $y_2 < y_1$ と分かる．よって $x_2 < x_1$ または $y_2 < y_1$ が成り立つから，

$$a_2 - a_1 \leq -1 \tag{2}$$

が成立している．$X_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_x^{(2)} \leq n \leq M_x^{(2)}\}$，$Y_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_y^{(2)} \leq n \leq M_y^{(2)}\}$ とおく．$Z_1 = Y_1^{X_1}$ とおくと，X_1 と Y_1 は有限集合なので Z_1 も有限集合．$f \in W_1''$ に対して $f(i) = z(i)\ (i \in X_1)$ となる $z \in Z_1$ はただ一つ存在するため，そのような z を z_f とする．ここで，$h_1 : W_1'' \to Z_1$ を

$$\begin{array}{ccc} W_1'' & \xrightarrow{h_1} & Z_1 \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & z_f \end{array}$$

と定義する．W_1'' は無限集合で Z_1 は有限集合だから補題 1 を適用することができ，ある z_1 について，$h_1(f) = z_1$ を満たす $f \in W_1''$ が無限に存在する．したがって，h_1 の定義より，$f(n) = z_1(n)\ (n \in X_1)$ を満たす $f \in W_1''$ が無限に存在する．よって，$W_2 = \{f \in W_1'' \mid f(i) = z_1(i)\ (i \in X_1)\}$ とおくと W_2 は無限集合となる．(2)，$W_2 \subset W_1'' \subset W_1' \subset W_1 \subset W$，任意の $f \in W_2$ について $f(i) = z_1(i)\ (i \in X_1)$ であることから，$n = 2$ のとき主張 2 は成立している．

(ii) $n = k\ (2 \leq k)$ で主張 2 が成立すると仮定したとき

仮定より，$a_i - a_{i-1} \leq -1\ (i \in \mathbb{N}, 2 \leq i \leq k)$ を満たす $(x_2, y_2), ..., (x_k, y_k) \in \mathbb{N}^2$ を固定して，W の無限部分集合 W_k を「任意の $f, g \in W_k$ について $f(i) = g(i)\ (i \in \mathbb{N}, m_x^{(k)} \leq i \leq M_x^{(k)})$」となるように取る．以下では $n = 2$ のときと同様の操作をして $n = k+1$ での主張 2 の成立を示す．$V_{k+1} = \{v_f \mid f \in W_k\}$ とおくと，V_{k+1} は空でない自然数の部分集合であるから最小元 $\min V_{k+1}$ が存在し，$v_{f_{p_{k+1}}} = \min V_{k+1}$ かつ $f_{p_{k+1}} \in W_k$ となる $p_{k+1} \in \mathbb{N}$ がとれる．$W_k' = W_k - \{f_{p_{k+1}}\}$，$A_{k+1} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < u_{f_{p_{k+1}}}, v_{f_{p_{k+1}}} \leq y < f_{p_{k+1}}(x)\}$ とおく．すると主張 1 での証明と同様にして，任意の $f \in W_k'$ について $f(x) = y$ を満たす $(x, y) \in A_{k+1}$ が存在することが分かる．よって，$f \in W_k'$ に対して $f(s_f) = t_f$ となる $(s_f, t_f) \in A_{k+1}$ を取る．ここで $g_{k+1} : W_k' \to A_{k+1}$ を

$$\begin{array}{ccc} W_k' & \xrightarrow{g_{k+1}} & A_{k+1} \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & (s_f, t_f) \end{array}$$

と定義する．W_k' は無限集合で A_{k+1} は有限集合だから補題 1 を適用することができ，$g_{k+1}(f) = (x_{k+1}, y_{k+1})$ を満たす $f \in W_k'$ が無限に存在するように $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in A_{k+1}$ を固定できる．g_{k+1} の定義より，$f(x_{k+1}) = y_{k+1}$ を満たす $f \in W_k'$ が無限に存在するとわかる．よって，$W_k'' = \{f \in W_k' \mid f(x_{k+1}) = y_{k+1}\}$ とおくと W_k'' は無限集合となる．ここで $m_x^{(k)} \leq x_{k+1} \leq M_x^{(k)}$ とすると，$f \in W_k''$ を 1 つとって $f(x_{k+1}) = y_{k+1}$ とできる一方で，$f_{p_{k+1}} \in W_k$ と A_{k+1} の定義より $y_{k+1} < f_{p_{k+1}}(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) = y_{k+1}$ となって矛盾する．ゆえに $x_{k+1} < m_x^{(k)}$ または $M_x^{(k)} < x_{k+1}$ である．$M_x^{(k)} < x_{k+1}$ のとき，$f_{p_{k+1}}$ の単調非増加性と $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in A_{k+1}$ により $y_{k+1} < f_{p_{k+1}}(x_{k+1}) \leq f_{p_{k+1}}(M_x^{(k)}) = m_y^{(k)}$ であり $y_{k+1} < m_y^{(k)}$ と分かる．よって $x_{k+1} < m_x^{(k)}$ または $y_{k+1} < m_y^{(k)}$ が成り立つから，

$$a_{k+1} - a_k \leq -1 \tag{3}$$

が成立している．$X_k = \{n \in \mathbb{N} \mid m_x^{(k+1)} \le n \le M_x^{(k+1)}\}$，$Y_k = \{n \in \mathbb{N} \mid m_y^{(k+1)} \le n \le M_y^{(k+1)}\}$ とおく．$Z_k = Y_k^{X_k}$ とおくと，X_k と Y_k は有限集合なので Z_k も有限集合．$f \in W_k''$ に対して $f(i) = z(i)$ $(i \in X_k)$ となる，すなわち f の定義域を X_k へ制限したような $z \in Z_k$ はただ 1 つ存在するため，そのような z を z_f とする．ここで，$h_k : W_k'' \to Z_k$ を

$$\begin{array}{ccc} W_k'' & \xrightarrow{h_k} & Z_k \\ \cup\!\!\!\!\!\!\text{ }\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & z_f \end{array}$$

と定義する．W_k'' は無限集合で Z_k は有限集合だから補題 1 を適用することができ，ある z_k について，$h_k(f) = z_k$ を満たす $f \in W_k''$ が無限に存在する．したがって，h_k の定義より，$f(n) = z_k(n)$ $(n \in X_1)$ を満たす $f \in W_k''$ が無限に存在する．よって，$W_{k+1} = \{f \in W_k'' \mid f(i) = z_1(i)\ (i \in X_k)\}$ とおくと W_{k+1} は無限集合となる．(3)，$W_{k+1} \subset W_k'' \subset W_k' \subset W_k \subset W$，任意の $f \in W_{k+1}$ について $f(i) = z_1(i)$ $(i \in X_1)$ であることから，$n = k+1$ のとき主張 2 は成立している．

(i) と (ii) より，すべての 2 以上の自然数 n について主張 2 が成立する． □

x_1, y_1 はすでに固定してあるので，$N_0 > a_1 + 1$ を満たす 2 以上の自然数 N_0 を取る．主張 2 はすべての 2 以上の自然数 n について成立するので $n = N_0$ のときも成立し，$a_{N_0} = a_1 + \sum_{i=1}^{N_0-1}(a_{i+1} - a_i) \le a_1 - (N_0 - 1) < 0$ とできる．これは $a_{N_0} = x_{N_0} + y_{N_0} \ge 0$ に矛盾する．よって背理法より，ある異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_i(n) \le f_j(n)$ が成立する．

1) と 2) の結果より，「ある異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_i(n) \le f_j(n)$ が成立する」ことが示された． □

3　考察

今回の証明では「単調非増加な関数の無限列 $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$j = 1, 2, 3, \ldots$ に対して異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$，$i \ne j$ が存在して，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_i(n) \le f_j(n)$」($\heartsuit$) を示すために「自然数の空でない部分集合からは最小元を取れる」という，自然数の整列集合である性質を多く利用した．そのことを踏まえると，今回の問題の $\mathbb{N}$ を一般の順序集合 $(S, \le')$ に変えて「単調非増加な関数の無限列 $f_j : S \to S$，$j = 1, 2, 3, \ldots$ に対して異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$，$i \ne j$ が存在して，全ての $n \in S$ に対して $f_i(n) \le' f_j(n)$」($\heartsuit'$) とした場合に，「S が整列集合であれば ($\heartsuit'$) が成立するか」や「S が整列集合でなければ ($\heartsuit'$) が成立しないのか」という問題が生じる．ここでは後者の問題に関して，「S が整列集合でない全順序無限集合で ($\heartsuit'$) が成立する例」と「S が整列集合でない全順序無限集合で ($\heartsuit'$) が成立しない例」を挙げる．

1)S が整列集合でない全順序無限集合で ($\heartsuit'$) が成立する例

$(S, \le')$ を $\mathbb{N}$ の双対順序集合とすると S 自体が最小元を持たず，S は整列集合でない全順序無限集合と分かる．今回証明された ($\heartsuit$) の双対命題「任意の $m, n \in S$ について $m \le' n$ ならば $f(n) \le' f(m)$ が成立する関数の無限列 $f_j : S \to S$，$j = 1, 2, 3, \ldots$ に対して異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$，$i \ne j$ が存在して，全ての $n \in S$ に対して $f_j(n) \le' f_i(n)$」が双対の原理より成立する．よって i, j を入れ替えることにより ($\heartsuit'$) が成立すると分かる．

2)S が整列集合でない全順序無限集合で ($\heartsuit'$) が成立しない例

通常の大小関係で順序が入っている $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ 自体が最小元を持たず，整列集合でない全順序無限集合と

分かる．ここで，関数の無限列 $f_j : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，$j = 1, 2, 3, ...$ を $f_j(n) = \begin{cases} j\ (n < 0) \\ -j(0 \leq n) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{Z})$ によって定義する．仮に，異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$ について $f_i(n) \leq f_j(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ と仮定すると，$i < j$ のときは $f_i(1) = -i > -j = f_j(1)$ より矛盾し，$j < i$ のときは $f_i(-1) = i > j = f_j(-1)$ より矛盾．ゆえに $(\heartsuit')$ は成立しない．

以上より，整列集合でない全順序無限集合に変えたとき，今回証明したことと同様のことが成立する場合としない場合があると分かる．また，S を有限集合としたときは，S^S が有限であることから $f_i = f_j$ となる異なる番号 $i, j \in \mathbb{N}$ が存在する．「S が整列集合であれば $(\heartsuit')$ が成立するか」，「S が全順序集合でない場合はどうか」，「$f_j : S \to S'$ のように飛ばした先を異なる集合にしたらどうなるか」などの問題については，今後の課題として考えたい．