Seminarul 3

1. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

R: $P($"angajatul ales lucrează la m_3"$|$"angajatul ales este bărbat"$) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

R: Fie A:"zarul ales este albastru", R:"zarul ales este roşu" şi S:"suma punctelor obţinute în urma aruncărilor este 10". Formula probabilităţii totale implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:

a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?

b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?

R: Fie D: "numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite" şi E: "numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale". În continuare, considerăm $P(D|N=1)=0$, $P(E|N=1)=1$. Formula lui Bayes implică: a) $P(N=3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum\limits_{i=1}^{6} P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum\limits_{i=2}^{6} \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}$; b) $P(N=3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum\limits_{i=1}^{6} P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{6^i}}$.

4. O urnă conține o bilă cu cifra 1, două bile cu cifra 2, trei bile cu cifra 3 și patru bile cu cifra 4. Se extrag aleator fără repunerea bilei patru bile pentru a forma un cod X cu 4 cifre. Calculați probabilitățile evenimentelor $X = 1234$ și $X = 4321$.

R: Fie $X = \overline{X_1X_2X_3X_4}$. Aplicăm formula înmulțirii probabilităților:

$$
\begin{aligned}
&P(X=1234) = P(X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=4)\\
&= P(X_1=1)P(X_2=2|X_1=1)P(X_3=3|X_1=1,X_2=2)P(X_4=4|X_1=1,X_2=2,X_3=3)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{1}{210}.\\
&P(X=4321) = P(X_1=4, X_2=3, X_3=2, X_4=1)\\
&= P(X_1=4)P(X_2=3|X_1=4)P(X_3=2|X_1=4,X_2=3)P(X_4=1|X_1=4,X_2=3,X_3=2)\\
&= \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{210}.
\end{aligned}
$$

• **Modelul binomial:** În cadrul unui experiment pot să apară evenimentele A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*). Un succes are loc cu $P(A)=p$, un insucces are loc cu $P(\bar{A}) = 1-p$. Probabilitatea de a obţine k succese în n repetări independente ale experimentului este

$$b(k;n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,\ldots,n\}.$$

▷ Acest model corespunde distribuţiei binomiale.

5. Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcţională dacă cel puţin 11 sunt operaţionale. 4 componente independente sunt instalate într-un calculator. Calculați probabilitățile evenimentelor:
A:"O componentă este funcțională."
B:"Exact două componente sunt funcționale în calculator."
C:"Cel puțin o componentă este funcțională în calculator."
R: Folosim modelul binomial: $p = P(A) = C_{12}^{11}(0.94)^{11}0.06 + (0.94)^{12}$; $P(B) = C_4^2 p^2(1-p)^2$; $P(C) = \sum_{k=1}^{4} C_4^k p^k(1-p)^{4-k} = 1-(1-p)^4$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1,\dots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ & \quad \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1!\dots k_r!}\cdot p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i=\overline{1,r}$.
$\triangleright$ Cazul $r=2$ corespunde distribuţiei binomiale.

6. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?
R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!}\frac{1}{26^{11}}$.

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \le n_1+n_2$ şi fie $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $k\le n_1$ şi $n-k\le n_2$; considerând o urnă, care are iniţial n_1 bile albe şi n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ & \quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k}\cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}. \end{aligned}$$

$\triangleright$ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

7. Dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc se extrag aleator fără returnare 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:"Nu se extrage nicio treflă."
b) B:"Se extrag 5 inimi."
c) C:"Se extrage cel mult un as."
R: $P(A) = \dfrac{C_{39}^{13}\cdot C_{13}^{0}}{C_{52}^{13}}$; $P(B) = \dfrac{C_{13}^{5}\cdot C_{39}^{8}}{C_{52}^{13}}$;
$P(C) = P(\text{"nu s-a extras niciun as"}) + P(\text{"s-a extras exact un as"}) = \dfrac{C_{48}^{13}\cdot C_4^0}{C_{52}^{13}} + \dfrac{C_{48}^{12}\cdot C_4^1}{C_{52}^{13}}$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:** fie n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i=\overline{1,r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r},\\ &\quad \text{din } n=k_1+\ldots+k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,}\\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează}\\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}. \end{aligned}$$

$\triangleright$ Cazul $r=2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

Observaţie: Extragerea fără returnare (engl. *sampling without replacement*) este folosită în **metoda validării încrucişate** (engl. *k-fold cross validation*): În cazul validării încrucişate eşantionul original de date este împărțit aleatoriu în k sub-eşantioane de dimensiuni egale. Din cele k sub-eşantioane, un singur sub-eşantion este folosit ca date de validare pentru testarea modelului, iar celelalte $k-1$ sub-eşantioane sunt utilizate ca date de antrenament. Procesul de validare încrucişată se repetă de k ori, fiecare dintre cele k sub-eşantioane fiind utilizat exact o dată ca date de validare.

8. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?
R: $\frac{C_4^2C_3^1C_5^1}{C_{12}^4}$.

9. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:"exact două numere sunt pare."
b) B:"1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori."
c) C: "exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4".
R: a) $C_5^2\frac{1}{2^5}$; b) $\frac{5!}{2!1!2!}\frac{1}{6^5}$; c) $\frac{5!}{2!1!2!}\frac{1}{2^2}\frac{1}{6}\frac{1}{6^2}$.

10. Se generează aleator un cod C alegând, cu returnare, 6 caractere din lista de caractere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, x, y, z. Calculați probabilitățile:
a) $P(C=01234z)=\frac{1}{9^6}$.
b) $P($"exact 4 caractere din C sunt cifre impare"$)$. $=C_6^4\frac{3^4}{9^4}\frac{6^2}{9^2}$.
c) $P($"C are cel mult 4 cifre"$)$. $=1-C_6^5\frac{6^5}{9^5}\frac{3}{9}-C_6^6\frac{6^6}{9^6}$.
d) $P($"C nu are litere alăturate și nu are cifre alăturate"$)$. $=2\cdot\frac{6^3}{9^3}\frac{3^3}{9^3}$ (*clclcl, lclclc*)
Exemple: $5z4x0y$, $x0y1x2$ etc.
e) $P($"C nu are litere, știind că exact 4 caractere din C sunt cifre impare"$)$. $=\frac{C_6^4\frac{3^4}{9^4}\frac{3^2}{9^2}}{C_6^4\frac{3^4}{9^4}\frac{6^2}{9^2}}$.

11. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş ($N\in\mathbb{N}$, $N\geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".
b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".
c) C: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese".
R: a) $A_4^2\cdot\frac{C_N^4C_N^1C_N^0C_N^0}{C_{4N}^5}$; b) $A_4^2\cdot\frac{C_N^3C_N^2C_N^0C_N^0}{C_{4N}^5}$; c) $\frac{A_4^3}{2}\cdot\frac{C_N^3C_N^1C_N^1C_N^0}{C_{4N}^5}$.

12. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?
R: Fie I: "persoana întârzie la serviciu într-o zi" şi S:"ziua e senină". a) Formula probabilităţii totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0{,}8 = 0{,}82$; b) Formula lui Bayes implică $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}82} = \frac{32}{41}$.