Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcţia de densitate $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ cxe^{-x}, & x>0.\end{cases}$

Determinaţi $c\in\mathbb{R}$ şi apoi calculaţi:

a) funcţia de repartiţie a lui X;

b) probabilitatea evenimentului $\{|X-3|>2\}$;

c) probabilitatea evenimentului $\{X<3\}$, ştiind că are loc evenimentul $\{X>1\}$.

R: $1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = c \implies c=1.$

a) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases}0, & x\le 0\\ \int_0^x te^{-t}\,dt = 1-(x+1)e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

b) $P(|X-3|>2)=P((X-3<-2)\cup(X-3>2))=P((X<1)\cup(X>5))=F(1)+(1-F(5))=$ $1-2e^{-1}+6e^{-5}\approx 0.3.$

c) $P(X<3|X>1)=\frac{P(1<X<3)}{P(X>1)}=\frac{F(3)-F(1)}{1-F(1)}=\frac{1-4e^{-3}-1+2e^{-1}}{2e^{-1}}=1-2e^{-2}\approx 0{,}73.$

Valoarea medie a unei v.a. continue X, care are funcţia de densitate f, este

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt, \text{ dacă } \int_{-\infty}^{\infty} |t|f(t)dt<\infty.$$

2. Timpul (în secunde) de descărcare completă a unui condensator este o variabilă aleatoare T care are distribuția exponențială cu parametrul $\lambda>0$: $T\sim Exp(\lambda)$. Determinați parametrul λ, știind că $E(T)=5$ (secunde), apoi calculați probabilitatea evenimentului E: “condensatorul se descarcă complet după cel puțin 4 secunde”.

R: T are funcţia de densitate

$$f_T(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}.$$

$E(T)=\int_{-\infty}^{\infty} tf_T(t)dt=\int_0^{\infty}\lambda te^{-\lambda t}dt=-te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}=5 \implies \lambda=\frac{1}{5}.$

$P(T\ge 4)=1-P(T<4)=1-\int_{-\infty}^4 f_T(t)dt=1-\int_0^4\lambda e^{-\lambda t}dt=1-(-e^{-\lambda t})\Big|_0^4=e^{-\frac{4}{5}}\approx 0{,}45.$

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcţionează independent unele de altele. Timpul de descărcare completă a fiecărui condensator are distribuţia exponenţială cu valoarea medie de 3 secunde. Ştiind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit aşa cum indică
a) figura A (în paralel),
b) figura B (în serie),
determinaţi valoarea medie a timpului de funcţionare a circuitului.

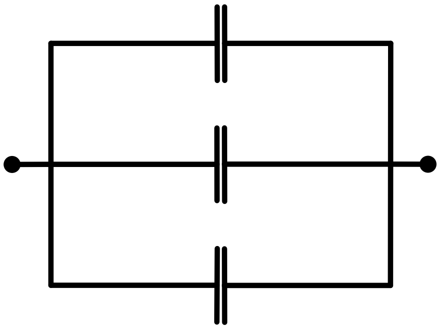

Figura A

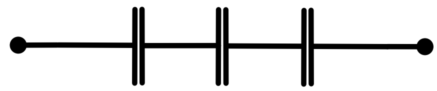

Figura B

R: O v.a. X care are **distribuţia exponenţială** cu parametrul $\lambda > 0$ are funcţia de densitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Deducem că:

i) $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$, unde F_X este funcţia de repartiţie a lui X.

ii) $P(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$.

iii) $E(X) = \displaystyle\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$ (folosind integrarea prin părţi).

Fie T timpul de funcţionare a circuitului şi fie T_i v.a. care indică timpul de funcţionare a condensatorului i, $i = 1, 2, 3$. Fiecare T_i urmează legea exponenţială cu parametrul $\frac{1}{3}$. Aceste variabile aleatoare sunt independente.

a) $F_T(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i \leq t)) = \prod_{i=1}^3 P(T_i \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^3, & t > 0 \end{cases}$ unde am folosit i). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2 e^{-\frac{t}{3}}, & t > 0 \end{cases}$ şi $E(T) = \displaystyle\int_0^\infty t e^{-\frac{1}{3}t} - 2te^{-\frac{2}{3}t} + te^{-t} dt = 9 - \frac{9}{2} + 1 =$ 5,5 secunde, unde am folosit iii).

b) $F_T(t) = P(\min\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2, T_3\} > t) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i > t)) = 1 - \prod_{i=1}^3 P(T_i > t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$, unde am folosit ii). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ deci $T \sim Exp(1)$ şi $E(T) = 1$ secundă.

4. Ce probabilitate estimează valoarea p din codul de mai jos? Calculaţi probabilitatea teoretică corespunzătoare.

[ ]:
```
from scipy.stats import randint, uniform
N=10000
u = randint.rvs(0,10,size=N)
y = uniform.rvs(loc=0,scale=3,size=N)*(u<=3)+uniform.rvs(loc=3,scale=6,size=N)*(u>3)
p = sum((y>=2)&(y<=5))/N
```

Observaţie: Toate metodele `rvs` din codul de mai sus generează valori pentru variabile aleatoare independente.

R: Programul generează valori aleatoare, prin metodele `rvs`, pentru v.a. U, X_1, X_2, apoi pentru v.a Y:
▶ Fie $Z \sim Unid(10)$, $U = Z - 1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$, $X_1 \sim Unif[0,3]$, $X_2 \sim Unif[3,9]$; v.a. U, X_1, X_2 le considerăm a fi independente.
▶ Dacă $U \leq 3$, atunci $Y = X_1$. Dacă $U > 3$, atunci $Y = X_2$. Deci, p estimeză următoarea probabilitate teoretică

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= P(2 \leq Y \leq 5 | U \leq 3)P(U \leq 3) + P(2 \leq Y \leq 5 | U > 3)P(U > 3) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5 | U \leq 3)P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5 | U > 3)P(U > 3) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5)P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5)P(U > 3) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \int_2^3 \frac{1}{3-0} dt + \frac{6}{10} \cdot \int_3^5 \frac{1}{9-3} dt = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Am folosit formula probabilităţilor totale şi independenţa v.a. U, X_1, X_2.
Se poate calcula şi astfel:

$$\begin{aligned} P(2 \leq Y \leq 5) &= P(\{2 \leq Y \leq 5\} \cap \{U \leq 3\}) + P(\{2 \leq Y \leq 5\} \cap \{U > 3\}) \\ &= P(\{2 \leq X_1 \leq 5\} \cap \{U \leq 3\}) + P(\{2 \leq X_2 \leq 5\} \cap \{U > 3\}) \\ &= P(2 \leq X_1 \leq 5)P(U \leq 3) + P(2 \leq X_2 \leq 5)P(U > 3) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \int_2^3 \frac{1}{3-0} dt + \frac{6}{10} \cdot \int_3^5 \frac{1}{9-3} dt = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

unde m folosit independenţa v.a. U, X_1, X_2.

5. Funcţia de repartiţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a unei variabile aleatoare continue X are expresia:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \leq x < 2 \\ d, & x < 0 \\ e, & x \geq 2. \end{cases}$$

Determinaţi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, dacă: i) $P(1 < X < 2) = \dfrac{1}{2}$; ii) $E(X) = 1$.

R: $0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = d$, $1 = \lim_{x\to\infty} F(x) = e$. $c = F(0) = \lim_{x\nearrow 0} F(x) = d = 0$, $1 = e = F(2) = \lim_{x\nearrow 2} F(x) = 4a + 2b + c = 4a + 2b$.
i) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e - a - b - c = 1 - a - b = \frac{1}{2}$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.
ii) Funcţia de densitate este $f(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x \in (0,2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$. Avem: $1 = E(X) = \displaystyle\int_0^2 2ax^2 + bx\, dx = \frac{16}{3}a + 2b$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.