

Seminarul 6

1. Într-un joc, se aruncă trei monede. Un jucător câștigă 1 euro pentru fiecare apariție a unui cap și pierde 8 euro în cazul apariției a trei pajuri. Calculați pentru suma de bani a jucătorului: funcția de repartiție, valoarea medie și deviația standard.

A: Fie N numărul de capete apărute în joc și X suma de bani a jucătorului. Atunci $N \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$X \sim \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$
 Funcția de repartiție $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ este dată de $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -8) \\ \frac{1}{8}, & x \in [-8, 1) \\ \frac{4}{8}, & x \in [1, 2) \\ \frac{7}{8}, & x \in [2, 3) \\ 1, & x \in [3, \infty) \end{cases}.$
 $E(X) = (-8) \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = 0.5.$ $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (-8)^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{64+3+12+9-1}{8} = \frac{86}{8} = \frac{43}{4} \Rightarrow Std(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{43}{4}} \approx 3,3.$

2. Un jucător de darts ochește discul roșu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul țintei și diametru 1 cm. La o aruncare, distanța dintre centrul țintei și punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuția uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm și deviația standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinați:

- a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roșu;
 b) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roșu din 10 aruncări.

Funcția de densitate pentru distribuția uniformă $Unif[a, b]$ este $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$

R: a) X =distanța de la săgeată la centru $\Rightarrow f_X = f$ este funcție de densitate pentru $X \Rightarrow E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, Std(X)^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{3}{4}.$ Avem: $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=0 \end{cases} \Rightarrow$

$a=0, b=3.$ p =probabilitatea de a nimeri discul roșu $\Rightarrow p = P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{6}.$

b) Z =numărul de reușite din 10 aruncări $\Rightarrow Z \sim Bino(10, p) \Rightarrow P(Z=2) = C_{10}^2 p^2 (1-p)^8 = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 29\%.$

3. Fie $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ și Ω spațiul de selecție. Fie $(X_n)_n$ un șir de variabile aleatoare independente definite pe Ω , care au aceeași distribuție ca X .

a) Fie, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n(\omega) \leq 3 \\ 0, & \text{dacă } X_n(\omega) > 3 \end{cases}, \omega \in \Omega.$

Ce distribuție are Y_n ? Spre ce valoare converge a.s. șirul $(\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n))_n$?

R.: $Y_n \sim Bernoulli(P(X \leq 3)). \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) \xrightarrow{a.s.} E(Y_1) = P(X \leq 3) = 0.6,$ folosind LTNM pentru șirul $(Y_n)_n$, care este un șir de v.a. independente.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie

$$Z_n: \Omega \rightarrow [0, 1] \quad Z_n(\omega) = \frac{\# \{i \in \{1, \dots, n\} : X_i(\omega) \leq 3\}}{n}.$$

Ce relație avem între $Y_1 + \dots + Y_n$ și Z_n ? Folosind a), determinați limita a.s. pentru $(Z_n)_n$.

R: $\frac{1}{n}(Y_1(\omega) + \dots + Y_n(\omega)) = Z_n(\omega) \forall \omega \in \Omega.$ Deci, conform a), $Z_n \xrightarrow{a.s.} 0.6.$

4. Durata (în minute) a unei plăți pentru o factură la un ghișeu într-o bancă urmează distribuția continuă $Unif[1, 3]$. Știind că duratele oricăror plăți sunt independente, demonstrați că:

i) media aritmetică a duratelor plăților a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \rightarrow \infty$.

ii) media geometrică a duratelor plăților a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \rightarrow \infty$.

iii) media armonică a duratelor plăților a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \rightarrow \infty$.

R: Fie X_n durata plății celei de a n -a facturi. $(X_n)_n$ este un șir de variabile aleatoare independente care urmează distribuția $Unif[1, 3]$.

i) LTNM implică $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \int_1^3 \frac{x}{2} dx = 2.$

ii) LTNM implică $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i} \xrightarrow{a.s.} e^{E(\ln X_1)} = e^{\int_1^3 \frac{\ln x}{2} dx} = \frac{3\sqrt{3}}{e} \approx 1,91.$

iii) LTNM implică $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{E(\frac{1}{X_1})} = \frac{1}{\int_1^3 \frac{1}{2x} dx} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1,82.$

5. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2 . Computerul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. Știind că a fost aleasă imprimanta I_1 , un poster $A2$ este printat în T_1 secunde, unde T_1 are distribuția $Exp(\frac{1}{5})$. Știind că a fost aleasă imprimanta I_2 , un poster $A2$ este printat în T_2 secunde, unde T_2 are distribuția uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster $A2$ de pe computer.

a) Calculați probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mic decât 5 secunde.

b) Calculați valoarea medie pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

R.: T =timpul de printare a posterului; F_T =funcția de repartiție a lui T ; fie evenimentele A : computerul este conectat la imprimanta I_1 ; \bar{A} : computerul este conectat la imprimanta I_2 ; fie f_{T_i} funcția de densitate pentru T_i , $i = 1, 2$.

a) Formula probabilității totale \implies

$$\begin{aligned} P(T \leq 5) &= P(A)P(T \leq 5|A) + P(\bar{A})P(T \leq 5|\bar{A}) = 0,4 \cdot P(T_1 \leq 5) + 0,6 \cdot P(T_2 \leq 5) \\ &= 0,4 \int_0^5 \frac{1}{5} e^{-\tau/5} d\tau + 0,6 \int_4^5 \frac{1}{6-4} d\tau = 0,4 \cdot (1 - e^{-1}) + 0,6 \cdot 0,5 \approx 0,55. \end{aligned}$$

b) Formula probabilității totale \implies

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(A)P(T \leq t|A) + P(\bar{A})P(T \leq t|\bar{A}) \\ &= 0,4 \cdot P(T_1 \leq t) + 0,6 \cdot P(T_2 \leq t) = 0,4 \int_{-\infty}^t f_{T_1}(\tau) d\tau + 0,6 \int_{-\infty}^t f_{T_2}(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deci, $f_T(t) = F'(t) = 0,4f_{T_1}(t) + 0,6f_{T_2}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, este funcție de densitate pentru $T \implies E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt = 0,4 \int_0^{\infty} \frac{1}{5} t e^{-\frac{t}{5}} dt + 0,6 \int_4^6 \frac{t}{2} dt = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot 5 = 5$ (secunde).

6. Fie v.a. $U \sim Unif[1, 3]$. Să se calculeze $E(U^2)$. Folosind rezultatul obținut, să se justifice de ce U^2 nu urmează distribuția $Unif[1, 9]$!

R.: Fie $Y \sim Unif[1, 9]$. Folosind calculele de la Problema 1-Seminar 6 și faptul că $U \sim Unif[1, 3]$, avem $E(U) = \frac{1+3}{2} = 2$, $E(Y) = \frac{1+9}{2} = 5$. Dar,

$$E(U^2) = \int_1^3 t^2 \frac{1}{3-1} dt = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_1^3 = \frac{13}{3} \implies E(U^2) \neq E(Y)$$

$\implies U^2$ și Y nu pot avea aceeași distribuție.

7. Fie v.a. independente $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$. Să se calculeze $V(U_1 + U_2)$. Folosind rezultatul obținut, să se justifice de ce $U_1 + U_2$ nu urmează distribuția $Unif[0, 6]$!

R.: Fie $Z \sim Unif[0, 6]$. Folosind calculele de la Problema 1-Seminar 6 și faptul că $U_1, U_2 \sim Unif[0, 3]$, avem $V(U_1) = V(U_2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, $V(Z) = \frac{36}{12} = 3$. Dar,

$$V(U_1 + U_2) = V(U_1) + V(U_2) \quad (U_1, U_2 \text{ sunt independente}) \implies V(U_1 + U_2) \neq V(Z)$$

$\implies U_1 + U_2$ și Z nu pot avea aceeași distribuție.

8. Timpii de funcționare (în ore) a două baterii sunt două variabile aleatoare independente $X \sim Unif[0, 2]$ și $Y \sim Exp(1)$. Fie $T = \min\{X, Y\}$ timpul de funcționare a bateriilor legate în serie. Calculați: $P(X < 0,5)$, $P(T > 1)$, $P(T < 1|X \geq 1)$.

$$\text{R.: } P(X < 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

$$P(T > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = \int_1^2 \frac{1}{2} dx \cdot \int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{e^{-1}}{2}.$$

$$P(T < 1|X \geq 1) = \frac{P(\{T < 1\} \cap \{X \geq 1\})}{P(X \geq 1)} = \frac{P(Y < 1)P(\{X \geq 1\})}{\frac{1}{2}} = 1 - e^{-1}.$$