Seminarul 2

1. Un pachet cu 25 de componente electronice este livrat unui magazin. Înainte de a accepta pachetul, 6 componente alese aleator sunt testate. Dacă toate 6 îndeplinesc standardele specifice, atunci pachetul este acceptat. Altfel, pachetul este returnat. Ştiind că 4 din cele 25 de componente sunt defecte, care este probabilitatea ca pachetul să fie returnat?
R: $1 - \frac{C_{21}^6}{C_{25}^6}$.

2. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibă numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibă numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea ca cel puţin două bile alăturate să aibă aceeaşi paritate.
R: a) $\frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$. b) $\frac{A_3^2 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10}$. c) $\frac{2\cdot 4\cdot 3!}{5!} = \frac{2}{5}$. d) $1 - \frac{2!\cdot 3!}{5!} = \frac{9}{10}$.

3. Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?
R: $\frac{C_{10}^5 19^5}{20^{10}}$.

4. Fie M o submulţime cu 3 elemente alese aleator (fără returnare) ale mulţimii $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ şi fie N o submulţime cu 2 elemente alese aleator (fără returnare) ale mulţimii $\{0, 1, 7, 8\}$. Fie $U = M \cup N$. Calculaţi probabilităţile evenimentelor:
A:“U conţine doar numere impare.”
B:“U conţine doar numere consecutive.”
C:“$\{0, 4\} \subset U$.”
D:“U conţine cel puţin 2 numere pare.”
A: $P(A) = 0$; $P(B) = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$; $P(C) = \frac{C_4^2 C_3^1}{60} = \frac{3}{10}$; $P(D) = 1 - \frac{3}{60} = \frac{19}{20}$.

5. 9 persoane se îmbarcă aleatoriu într-un tren cu 3 vagoane. Calculaţi probabilitatea ca:
a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?
b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?
c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?
d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?
R: a) $\frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9}$; b) $\frac{C_9^3 \cdot C_6^3}{3^9}$; c) $\frac{3\cdot 9\cdot C_8^4}{3^9}$; d) $\frac{3^9-(3\cdot 2^9-3)}{3^9}$.

6. La o petrecere sunt 8 femei şi 8 bărbaţi. Florina şi Bogdan sunt în acest grup de prieteni. Cele 16 persoane se aşează aleator pe 16 fotolii într-un rând.
a) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături?
b) Care este probabilitatea ca doi bărbaţi şi două femei să nu stea alături şi Florina şi Bogdan să stea alături?
R: a) $f_{i_1} b_{i_1} f_{i_2} b_{i_2} f_{i_3} b_{i_3} \ldots f_{i_8} b_{i_8}$, respectiv $b_{i_1} f_{i_1} b_{i_2} f_{i_2} b_{i_3} f_{i_3} \ldots b_{i_8} f_{i_8}$; probabilitatea cerută este: $\frac{2\cdot 8!8!}{16!}$;
b)
▶ Florina stă în dreapta lui Bogdan; pe primul fotoliu din rând stă o femeie: $f_{i_1} b_{i_1} f_{i_2} b_{i_2} f_{i_3} b_{i_3} \boxed{\text{FB}} \ldots f_{i_8} b_{i_8}$
▶ Florina stă în dreapta lui Bogdan; pe primul fotoliu din rând stă un bărbat: $b_{i_1} f_{i_1} b_{i_2} f_{i_2} b_{i_3} \boxed{\text{FB}} f_{i_3} \ldots b_{i_8} f_{i_8}$
▶ Florina stă în stânga lui Bogdan; pe primul fotoliu din rând stă un bărbat: $b_{i_1} f_{i_1} b_{i_2} f_{i_2} b_{i_3} f_{i_3} \boxed{\text{BF}} \ldots b_{i_8} f_{i_8}$
▶ Florina stă în stânga lui Bogdan; pe primul fotoliu din rând stă o femeie: $f_{i_1} b_{i_1} f_{i_2} b_{i_2} f_{i_3} \boxed{\text{BF}} b_{i_3} \ldots f_{i_8} b_{i_8}$
Probabilitatea cerută este: $\frac{(8+7+8+7)\cdot 7!7!}{16!}$.

7. Patru programe antivirus sunt testate independent prin scanarea unui fişier infectat. Programele detectează virusul cu probabilităţile corespunzătoare: $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
A:“Toate programele detectează virusul.”
B:“Exact un program detectează virusul.”
C:“Exact trei programe detectează virusul.”

D:"Cel mult un program detectează virusul."
E:"Cel puțin un program detectează virusul."
A: Fie V_n:"Al n-lea program detectează virusul.", $k = \overline{1,4}$.

$$P(A) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) = P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3) \cdot P(V_4) = \frac{3}{128} \approx 0.023.$$

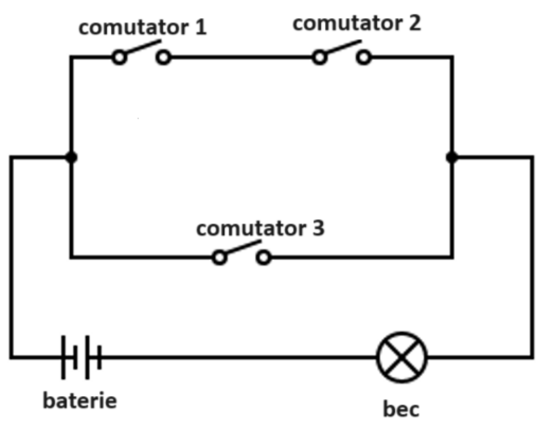
$$\begin{aligned} P(B) &= P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) + P(\overline{V_1} \cap V_2 \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) + P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap \overline{V_4}) + P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap V_4) \\ &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{256} = \frac{84}{256} = \frac{21}{64} \approx 0.328. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{V_1} \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4) + P(V_1 \cap \overline{V_2} \cap V_3 \cap V_4) + P(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V_3} \cap V_4) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \overline{V_4}) \\ &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{256} = \frac{44}{256} = \frac{11}{64} \approx 0.171. \end{aligned}$$

$$P(D) = P(B) + P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) = \frac{84}{256} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{256} = \frac{102}{256} = \frac{51}{128} \approx 0.398.$$

$$P(E) = 1 - P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap \overline{V_3} \cap \overline{V_4}) = 1 - \frac{18}{256} = \frac{238}{256} = \frac{119}{128} \approx 0.929.$$

8. În diagrama de mai jos, fiecare din cele 3 comutatoare *independente* este fie închis cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, fie deschis cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Calculați probabilitatea ca circuitul să fie închis (i.e., becul să fie aprins).



A: Fie C_i:"Comutatorul i este închis.", $i = \overline{1,3}$. Folosind independența comutatoarelor, calculăm

$$\begin{aligned} P(\text{"circuitul este închis"}) &= P((C_1 \cap C_2) \cup C_3) = P(C_1 \cap C_2) + P(C_3) - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 + 4 - 1}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$