Exerciţii recapitulative

1. Fie vectorul $U = [1,2,3,1,2,4,1,2,2,4]$ şi vectorul de date aleatore alese
1) cu returnare din U: $X = [U_{i_1},...,U_{i_5}]$;
2) fără returnare din U: $Y = [U_{j_1},U_{j_2},U_{j_3}]$.
Fie Z variabila aleatoare care indică de câte ori apare 1 în vectorul X.
a) Determinaţi: $P(Z=3)$, $P(\{Z<3\}\cup\{Z>4\})$, $P(Z<3|Z\geq 1)$,
$P(Y=[1,2,3]), P(Y(2)$ este un număr par$)$.
b) Să se scrie distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare Z.

R: Probabilitatea p ca un element în vectorul X să fie egal cu 1 este de fapt probabilitatea ca o valoare aleasă aleator din vectorul U să fie egală cu 1. Are loc $p=\frac{3}{10}$.
a) $P(Z=3)=P($"1 apare exact de trei ori în vectorul X"$)=C_5^3p^3(1-p)^2=10\cdot 0.3^3\cdot 0.7^2$;
$P(\{Z<3\}\cup\{Z>4\})=P(Z<3)+P(Z>4)$ (cele două evenimente sunt disjuncte)
$\Longrightarrow P(\{Z<3\}\cup\{Z>4\})=P(Z\in\{0,1,2\})+P(Z=5)=\sum_{k\in\{0,1,2,5\}}C_5^kp^k(1-p)^{5-k}=\sum_{k\in\{0,1,2,5\}}C_5^k\cdot 0.3^k\cdot 0.7^{5-k}$

$$P(Z<3|Z\geq 1)=\frac{P(1\leq Z<3)}{P(Z\geq 1)}=\frac{P(Z=1)+P(Z=2)}{1-P(Z<1)}=\frac{C_5^1\cdot 0.3\cdot 0.7^4+C_5^2\cdot 0.3^2\cdot 0.7^3}{1-0.7^5}.$$

$P(Y=[1,2,3])=\frac{3\cdot4\cdot1}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{60}$,
$P(Y(2)$ este un număr par$)=\frac{6\cdot5}{10\cdot9}+\frac{4\cdot6}{10\cdot9}=\frac{6}{10}$.
b) Distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare Z este dată prin
$P(Z=k)=C_5^k\cdot 0.3^k\cdot 0.7^{5-k},\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}$; adică $Z\sim Bino(5,0.3)$.

2. Fie $x_1=1,x_2=0,x_3=3,x_4=2,x_5=0,x_6=1,x_7=4,x_8=5$ date statistice pentru caracteristica X, care are următoarea distribuţie:

$$P(X=k)=p(1-p)^k \text{ pentru } k\in\{0,1,2,\dots\},$$

iar $p\in(0,1)$ este parametru necunoscut. Folosind metoda verosimilităţii maxime, estimaţi valoarea parametrului necunoscut p.

R: $n=8$; $p\in(0,1)$; $L(x_1,\dots,x_n;p)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\Longrightarrow \ln L(x_1,\dots,x_n;p)=n\ln p+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i$. $\frac{\partial \ln L}{\partial p}(x_1,\dots,x_n;p)=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0\Longrightarrow\frac{1-p}{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\Longrightarrow\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i+n}=\frac{1}{1+\bar{x}_n}$;

$\frac{\partial^2\ln L}{\partial p^2}(x_1,\dots,x_n;p)=-\frac{n}{p^2}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-p)^2}<0\Longrightarrow\hat{p}$ e punct de maxim. $\hat{p}(1,0,3,2,0,1,4,5)=\frac{8}{\sum_{i=1}^{8}x_i+8}=\frac{8}{16+8}=\frac{1}{3}$.

3. Pentru ce valoare a constantei $c\in\mathbb{R}$ funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}cx & : 0\leq x\leq 3,\\ c(6-x) & : 3<x\leq 6,\\ 0 & : \text{altfel}\end{cases}$$

este funcţie de densitate a unei v.a. X?
Să se determine funcţia de repatiţie a v.a. X. Fie evenimentele $A = \{X < 3\}$ şi $B = \left\{\frac{3}{2} \le X \le \frac{9}{2}\right\}$.
Să se calculeze $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ şi $P(A \cup \bar{B})$.

R: $f \ge 0 \;\Leftrightarrow\; c \ge 0$. Are loc

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^3 cx\,dx + \int_3^6 c(6-x)\,dx = \frac{1}{2}cx^2\Big|_0^3 + c\left(6x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_3^6 \\
&= \frac{9}{2}c - 0 + c\left(36 - 18 - 18 + \frac{9}{2}\right) = 9c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Funcţia de repatiţie a v.a. X este $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, adică

$$
\begin{aligned}
x < 0 :\; F(x) &= \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0, \\
0 \le x \le 3 :\; F(x) &= \int_0^x \frac{1}{9}t\,dt = \frac{1}{9}\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x = \frac{1}{18}x^2, \\
3 < x \le 6 :\; F(x) &= \int_0^3 \frac{1}{9}t\,dt + \int_3^x \frac{1}{9}(6-t)\,dt = \frac{1}{9}\frac{1}{2}t^2\Big|_0^3 + \frac{1}{9}\left(6t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_3^x = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x - 1, \\
x > 6 :\; F(x) &= \int_0^3 \frac{1}{9}t\,dt + \int_3^6 \frac{1}{9}(6-t)\,dt + \int_6^x 0\,dt = \frac{1}{9}\frac{1}{2}t^2\Big|_0^3 + \frac{1}{9}\left(6t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_3^6 + 0 = 1.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0, \\ \frac{1}{18}x^2 & : 0 \le x \le 3, \\ -\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 & : 3 < x \le 6, \\ 1 & : x > 6. \end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow P(A \cap B) = P\left(\frac{3}{2} \le X \le 3\right) = F(3) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.
$$

$$
\Longrightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{F(3)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.
$$

$$
\Longrightarrow P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cap B) = 1 - P\left(3 \le X \le \frac{9}{2}\right) = 1 - \left(F\left(\frac{9}{2}\right) - F(3)\right) = \frac{1}{8}.
$$

4. Timpul T (în minute) de așteptare a unui autobus este o variabilă aleatoare care are funcția de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$
f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}, & t \in [a, a+\delta] \\ 0, & t \notin [a, a+\delta] \end{cases},
$$

unde $a \ge 0$ și $\delta > 0$ sunt parametri necunoscuți. Varianța lui T este $V(T) = \frac{3}{4}$.
a) Calculați în funcție de a și δ: $E(T)$, $E(T^2)$.
b) Determinați valoarea lui δ.

c) Pentru 75 de timpi independenți de așteptare ai lui T s-a obținut media de selecție 1.5 (minute). Să se determine valoarea intervalului de încredere bilateral cu nivelul de încredere 95% pentru valorea medie a lui T, folosind tabelul următor:

`norm.ppf`$(0.975, 0, 1)$	`norm.ppf`$(0.05, 0, 1)$	`t.ppf`$(0.975, 74)$	`chi2.ppf`$(0.025, 74)$	`chi2.ppf`$(0.975, 74)$
1.96	−1.65	2	52	100

a) $E(T) = \int_a^{a+\delta} \frac{t}{\delta} dt = \frac{(a+\delta)^2 - a^2}{2\delta} = a + \frac{\delta}{2}$, $E(T^2) = \int_a^{a+\delta} \frac{t^2}{\delta} dt = \frac{(a+\delta)^3 - a^3}{3\delta} = \frac{(a+\delta)^2 + a(a+\delta) + a^2}{3} = a^2 + a\delta + \frac{\delta^2}{3}$.
b) $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{\delta^2}{12} = \frac{3}{4} \implies \delta = 3$.
c) $n = 75; \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}; z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$;
$\left(\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(1.5 - \frac{1}{10} \cdot 1.96, 1.5 + \frac{1}{10} \cdot 1.96\right) = (1.304,\ 1.696)$.

5. Pentru transmisia unui mesaj se alege aleator unul din cele două canale de transmisie disponibile:

$$\text{2 canale posibile} \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \xrightarrow{p_1=0.4} \text{prin canalul 1, timpul de transmisie este } T_1 \sim Unif[1,5] \text{ (ms)}, \\ \xrightarrow{p_2=0.6} \text{prin canalul 2, timpul de transmisie este } T_2 \sim Unif[1,3] \text{ (ms)}. \end{array} \right.$$

Pentru timpul T de transmisie a mesajului să se calculeze $P(T < 2)$, $P(T = 2)$ şi $P(T > 2)$.

R:

$$P(T < 2) = P(T_1 < 2)p_1 + P(T_2 < 2)p_2 = \int_1^2 \frac{1}{5-1} dt \cdot 0.4 + \int_1^2 \frac{1}{3-1} dt \cdot 0.6 = \frac{1}{4} \cdot 0.4 + \frac{1}{2} \cdot 0.6 = 0.4;$$

$P(T = 2) = 0$ (T este v.a. continuă) şi $P(T > 2) = 1 - P(T \leq 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - 0.4 = 0.6$.

6. O tombolă are 2 bilete câştigătoare şi 8 bilete necâştigătoare. Se extrag succesiv 3 bilete (fără returnare).
a) P("nu s-a extras niciun bilet câştigător") =?;
b) Fie X v.a. care indică numărul de bilete câştigătoare extrase. Să se calculeze $E(X)$.

R: (a) P("nu s-a extras niciun bilet câştigător") $= \frac{7}{15}$
(b) $E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = \frac{7}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.