Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri $(m, n \in \mathbb{N})$ este $m \cdot n$.
Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Aranjamente de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{"numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{"} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. *Permutări de n* $(n \in \mathbb{N})$: aranjamente de n luate câte n.

$$P_n = \text{"numărul de permutări de } n \text{ obiecte"} = A_n^n = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.
Exemplu: În câte moduri se pot aşeza 4 persoane pe o bancă? R: $P_4 = 4!$.

4. *Combinări de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi neordonate din n obiecte distincte date, i.e., alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{"numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{"} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 9 persoane? R: $C_9^7 = C_9^2$.

5. *Numărul de funcţii* de la o mulţime A cu k elemente la o mulţime B cu n elemente este n^k $(k, n \in \mathbb{N}^*)$.
Observaţie: O funcţie poate fi identificată cu k alegeri de obiecte nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), dar ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că *funcţiile* sunt *aranjamente cu repetiţii.*
Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{"portocală"}, \text{"kiwi"}, \text{"banană"}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în $4^3 = 64$ moduri.

6. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care pot fi împărţite în k grupuri $(n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n)$. Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice, $\ldots$, al k-lea grup are n_k obiecte identice $(n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n)$. Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R: $\frac{7!}{3!4!} = 35$.
2) Câte anagrame ale cuvântului "MISSISSIPPI" sunt posibile? R: $\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$.

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* $(n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N})$: alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e., aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: 1) În câte moduri se pot împărţi 5 bile identice la 3 copii (C1, C2, C3)? (Un copil poate primi o bilă/mai multe bile/niciuna.) R: Exemple de distribuire a bilelor copiilor ("o" reprezintă o *bilă*):

C1	C2	C3
oo		ooo
o	o	ooo
ooo	oo	
		ooooo

Identificăm configuraţiile mai sus cu şiruri de 5 biţi, unde 0 reprezină o bilă, 1 reprezintă separatorul dintre două grupuri de bile (unele grupuri pot fi vide) pe care le au doi copii succesivi:

0011000
0101000
0001001
1100000

Astfel, reformulăm întrebarea: în câte moduri se pot distribui 5 cifre egale cu 0 şi 2 cifre egale cu 1 pe 7 poziţii? R: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

2) O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (Fiecare cornet are câte un glob de îngheţată.) R: $\frac{9!}{3!6!} = 84$.

Probleme

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$ b) $4!(5+3+1)!$ c) $5!3!(1+1+4)!$

2. 11 scaune sunt aşezate într-un rând.
(a) În câte moduri se pot aşeza 2 persoane pe aceste scaune?
(b) În câte dintre aceste moduri cele 2 persoane vor sta una lângă cealaltă?
(c) În câte dintre aceste moduri cele 2 persoane vor avea cel puțin 1 scaun între ele?
R: (a) $A_{11}^2 = 10 \cdot 11 = 110$; (b) $10 + 10 = 20$; (c) $110 - 20 = 90$.

3. În câte moduri se pot aşeza în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1? Dar în cerc?
R: Avem permutări cu repetiţii: $\frac{9!}{3!2!3!1!}$. Orice aşezare în cerc poate fi identificată cu 9 permutări circulare distincte ale unei aşezări în linie (sunt distincte pentru că 1 se află după fiecare permutare circulară pe o altă poziţie). Deci numărul aşezărilor în linie este de 9 ori mai mare decât numărul aşezărilor în cerc $\Longrightarrow$ numărul aşezărilor în cerc este $\frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{3!2!3!1!}$.

4. În câte moduri se pot aşeza 5 persoane pe 12 scaune astfel încât între ele să existe cel puţin un scaun liber?
R: 5 persoane, 7 scaune libere: _1_2_3_4_5_6_7_ scaunele au 8 spatii libere _ ;
pe acestea se pot aşeza în C_8^5 moduri cele 5 persoane; există: $5!C_8^5$ moduri de aşezare.

5. a) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?

R: C_{n-1}^{k-1}.

Considerăm un şir cu n beţe şi $n-1$ spaţii între ele: $| \; | \; | \; \cdots \; | \; |$. Dacă pe $k-1$ spaţii se pun $k-1$ simboluri + şi se şterg spaţiile libere, atunci cele n beţe vor fi împărţite în k grupuri de aceste simboluri. Fie x_i=numărul de beţe din al i-lea grup, $i = \overline{1,k}$. Cum nu există două simboluri + consecutive, avem $x_i \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1,k}$. Avem $x_1 + \ldots + x_k = n$. Există C_{n-1}^{k-1} moduri în care se pot pune $k-1$ simboluri + pe $n-1$ spaţii.
Exemplu: $n = 6, k = 3$, $| \; | \; | \; | \; | \; |$, $+ \; +$. În reprezentarea $||+|||+|$ avem 3 grupe de beţe, separate prin 2 simboluri +, deci $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$, în sistemul de numeraţie zecimal: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ sau în sistemul de numeraţie unar: $||+|||+| = 6$. Există C_5^2 soluţii $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ale ecuaţiei $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

b) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: C_{n+k-1}^{k-1}.

Fiecare soluţie $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ a ecuaţiei $x_1 + \ldots + x_k = n$ corespunde în mod unic unei soluţii $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ a ecuaţiei $y_1 + \ldots + y_k = n + k$ şi vice versa, alegând $y_i = x_i + 1$, pentru $i \in \{1, \ldots, k\}$. Cf. a), există C_{n+k-1}^{k-1} soluţii.

6. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + \ldots + C_6^5$.

Dacă în codul binar sunt k biţi egali cu 1, atunci codul are $10 - k$ biţi egali cu 0. Punem în linie biţii nuli şi spaţiile pe care putem să punem biţii egali cu 1: _0_0_..._0_. Avem $11 - k$ spaţii libere pe care vrem să punem k biţi egali cu 1, rezultă C_{11-k}^k coduri posibile. k poate să ia valorile $0, 1, \ldots, 5$, deoarece pentru $k > 5$ numărul de spaţii libere este mai mic decât numărul de biţi egali cu 1.

7. a) Câte coduri cu 5 caractere conțin exact 3 cifre și 2 majuscule se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemple: $01DD0$, $A21Z0$, $999XX$.
b) Câte coduri cu 5 caractere conțin exact 3 cifre distincte 2 câte 2 și 2 majuscule diferite se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemplu: $A21Z0$.

R: a) Alege pozițiile pentru cifre în C_5^3 moduri. Numărul de alegeri ale cifrelor pe pozițiile alese este 10^3. Numărul de alegeri ale literelor pe pozițiile rămase este 26^2. Deci, răspunsul este $C_5^2 \cdot 10^3 \cdot 26^2 = 6\,760\,000$.
b) Similar, considerând aranjamentele, obținem: $C_5^2 \cdot A_{10}^3 \cdot A_{26}^2 = 4\,680\,000$.

8. 7 căluşari, $c_1, c_2, \ldots, c_7$, se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?
R: $\frac{2!5!}{\frac{7!}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.