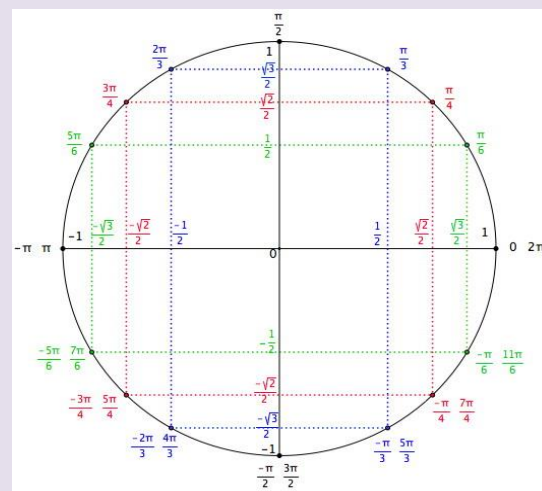


TRIGONOMETRIE

◆ *Valeurs remarquables :*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



◆ *Les élémentaires:*

$\forall x \in \mathbb{R}$	$-1 \leq \cos x \leq 1$ $-1 \leq \sin x \leq 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

◆ *Angles associés à x :*

	Tour	
	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\tan(x + 2\pi) = \tan x$	
Angle opposé	Demi-tour	Quart de tour direct
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\sin(x + \pi) = -\sin x$ $\tan(x + \pi) = -\tan x$	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$
Quart de tour indirect	Angle supplémentaire	Angle complémentaire
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan x}$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

◆ *Formules d'addition :*

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

◆ *Formules de duplication :*

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$		$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

◆ *Transformation de Produits en Sommes :*

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$	$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$	$\cos a \sin b = -\frac{1}{2} [\sin(a - b) - \sin(a + b)]$

◆ *Transformation de Sommes en Produits :*

$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$	$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$
$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$	$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p - q}{2}\right) \cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$

◆ *Equations trigonométriques :*

$\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}$	$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ u = -v + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
	$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2k\pi \\ u = \pi - v + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\forall u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

◆ *Equations particulières :*

$\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$	$\cos t = -1 \Leftrightarrow t = \pi + 2k\pi$ $\sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$\cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi$ $\sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

◆ *Factorisation de $a \cos \omega x + b \sin \omega x$:*

Mettre $\sqrt{a^2 + b^2}$ en facteur

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x \right)$$

Factorisation en cosinus

$$\text{Chercher } \alpha \in]-\pi ; \pi] / \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \omega x + \sin \alpha \sin \omega x)$$

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega x - \alpha)$$

Factorisation en sinus

$$\text{Chercher } \beta \in]-\pi ; \pi] / \begin{cases} \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\text{On a alors : } a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \beta \cos \omega x + \cos \beta \sin \omega x)$$

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega x + \beta)$$

◆ *Quelques résultats utiles :*

$\forall k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \cos(k\pi) = (-1)^k \\ \sin(k\pi) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \end{cases}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases} \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x \\ \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x \end{cases}$	$\begin{cases} \cos(k\pi - x) = (-1)^k \cos x \\ \sin(k\pi - x) = -(-1)^k \sin x \end{cases}$

NOMBRES COMPLEXES

♦ *Les différentes formes d'un nombre complexe :*

Soient $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$		
Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + ib$	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$z = re^{i\theta}$
$a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$	$r = z = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases}$	

♦ *Egalité de deux nombres complexes :*

Avec les formes algébriques $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$	Avec les formes exponentielles $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$
$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$	$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

♦ *Conjugué d'un nombre complexe :*

	Propriétés	
	Soit $z \in \mathbb{C}$	Soient Soit z et $z' \in \mathbb{C}$
<ul style="list-style-type: none"> • $z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$ • $z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ • $z - \bar{z} = 2\Im(z)$ • $z\bar{z} = z ^2$ • $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ si $z \neq 0$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n \forall n \in \mathbb{Z}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ • $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ • $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'z'}$ si $z' \neq 0$

♦ *Module d'un nombre complexe :*

Propriétés		
<ul style="list-style-type: none"> • $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $z + z' \leq z + z'$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $-z = z$ et $\bar{z} = z$ • $zz' = z z'$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$ avec $z' \neq 0$ • $z^n = z ^n \forall n \in \mathbb{Z}$

◆ *Arguments :*

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\bullet \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\bullet \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

$$\bullet \arg(z^n) = n\arg(z)$$

◆ *Formules d'Euler et Formule de Moivre :*

Formules d'Euler	$\forall \theta \in \mathbb{R} :$ $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre	$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} :$ $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{ou} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

♦ *Equation du second degré $az^2 + bz + c = 0$:*

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	
Δ est un réel	Si $\Delta \geq 0$ alors $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	Si $\Delta < 0$ alors $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Δ n'est pas un réel	<p>Pour $\delta = x + iy, \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$</p> <p>Et alors $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$</p>

◆ *Interprétation géométrique :*

Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'

- L'affixe du vecteur \overrightarrow{OM} est z ; la distance $OM = |z|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z)$
- M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow |z| = 1$
- M appartient à l'axe des réels $(O, \vec{u}) \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$
- M appartient à l'axe des imaginaires $(O, \vec{v}) \Leftrightarrow \arg(z) = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$ et la distance $MM' = |z' - z|$
- L'affixe du milieu de $[MM']$ est $\frac{z + z'}{2}$

Soient A, B, C et D des points du plan complexe

- L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- L'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $z_B - z_A$
- $|z_B - z_A| = AB$ et $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$
- $\left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB}$ et $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

◆ *Caractérisation de configurations et de figures :*

- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \text{ ou } \pi \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A
- $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow ABC$ est isocèle de sommet A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle isocèle en A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ABC$ est équilatéral

◆ *Caractérisation d'ensemble de points :*

L'ensemble des points M d'affixe z tel que

- $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r
- $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur $\vec{\omega}$ tel que $(\vec{u}, \vec{\omega}) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel est la droite (AB) privée de A
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit un réel strictement négatif est le segment $[AB]$ privée de A et B
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit un réel strictement positif est la droite (AB) privée du segment $[AB]$
- $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

◆ *Transformations du plan :*

M est le point d'affixe z et M' est le point d'affixe z'

- **Translation :** M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{\omega}$ si et seulement si $z' = z + z_{\vec{\omega}}$
- **Rotation de centre A :** M' est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$
- **Rotation de centre O :** M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ si et seulement si $z' = e^{i\theta}z$
- **Homothétie :** M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $z' - z_A = k(z - z_A)$
- **Similitude :** M' est l'image de M par la similitude de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $z' - z_A = ke^{i\theta}(z - z_A)$

CALCUL DE LIMITES ET CONTINUITE

CALCUL DE LIMITES

◆ Formes indéterminées :

$\infty - \infty$	$0 \times \infty$
$\left. \begin{array}{l} f(x) = u(x) + v(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = -\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$	$\left. \begin{array}{l} f(x) = u(x)v(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$	$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ est une FI}$

◆ *Limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle :*

- **Règle 1 :** en $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré
- **Règle 2 :** en $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

◆ *Limite de la composée de deux fonctions :*

$$\left. \begin{array}{l} \circ f(x) = v \circ u(x) \\ \circ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = b \\ \circ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

♦ *Limite des fonctions trigonométriques :*

NB : En $\pm\infty$, les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite	
$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$
$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

♦ *Théorèmes de comparaison :*

- **Théorème 1 :** au voisinage de $+\infty$

Si $f(x) \geq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$, alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Si $f(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$, alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- **Théorème 2 :** au voisinage de $+\infty$,

Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$, alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

- **Théorème 3 :** Théorème des gendarmes : au voisinage de $+\infty$,

Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \ell$, alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

◆ *Asymptotes et Branches infinies :*

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction la droite $(\Delta): y = ax$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$, alors, (\mathcal{C}_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

◆ *Les éléments de symétrie d'une fonction :*

- f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$
- $I(a, b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

CONTINUE

♦ *Etude de la continuité en un point :*

f est continue en x_0 ,

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ou si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

♦ *Théorème de continuité :*

- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0
 - Toute fonction dérivable sur I est continue sur I
- NB : La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas toujours dérivable

♦ *Exemples de fonctions continues :*

- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R}
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur \mathbb{R}
- La fonction racine carrées est continue sur $[0 ; +\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue

◆ *Bijection continue :*

- f continue sur I
 - f strictement monotone sur I
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J$$

◆ *Solution de l'équation $f(x) = k$*

- f continue sur I
 - f strictement monotone sur I
 - $k \in J = f(I)$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \circ k \in J = f(I) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution } \alpha \in I$$

◆ *Théorème des valeurs intermédiaires :*

Résolution de l'équation $f(x) = 0$:

- f est continue sur $[a, b]$
 - f strictement monotone sur $[a, b]$
 - $f(a) \times f(b) < 0$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } [a, b] \\ \circ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in]a, b[$$

DERIVATION ET NOTION DE PRIMITIVES

DERIVATION

♦ Etude de la dérivabilité en un point :

f est dérivable en un point x_0 , s'il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

ou encore $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$

$\ell = f'(x_0)$ est alors appelé nombre dérivé de f en x_0

$$\left. \begin{array}{l} \circ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1 \\ \circ \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2 \\ \circ \ell_1 \neq \ell_2 \end{array} \right\} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } x_0$$

◆ *Fonctions dérivées usuelles :*

f' désigne la fonction dérivée de f sur I		
Fonction	Dérivée	I
$f(x) = k$ (k réel)	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}

◆ *Opérations et dérivées :*

Opérations et dérivées		Dérivées successives
<ul style="list-style-type: none"> • $(u + v)' = u' + v'$ • $(ku)' = ku' (k \text{ réel})$ • $(uv)' = u'v + v'u$ • $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} (u \neq 0)$ • $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v \neq 0)$ • $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ • $(u^n)' = nu'u^{n-1} (n \geq 2)$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}} (n \geq 1)$ • $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} (u > 0)$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u} (u > 0)$ • $(\ln u)' = \frac{u'}{u} (u \neq 0)$ • $(e^u)' = u'e^u$ 	$\left\{ \begin{array}{l} \circ f^{(0)} = f \\ \circ f^{(1)} = f' \\ \circ f^{(2)} = f'' \\ \circ f^{(n)} = [f^{(n-1)}]' \forall n \geq 1 \end{array} \right.$

Dérivée d'une bijection réciproque

$$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est bijective de } I \text{ sur } J \\ \circ f \text{ est dérivable sur } I \\ \circ \forall x \in I, f'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \circ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \circ \forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{array} \right.$$

◆ *Dérivée et sens de variation :*

Soit f' la fonction dérivée de f sur I :

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, alors, f est strictement croissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$, alors, f est strictement décroissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$, alors, f est constante sur I

◆ *Dérivée et extrémum relatif :*

Si f' s'annule x_0 et change de signe alors f admet un extrémum relatif en x_0

Plus précisément

$$\left. \begin{array}{l} \circ \forall x \in]a ; x_0[, f'(x) < 0 \\ \circ \forall x \in]x_0 ; b[, f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ (minimum)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \forall x \in]a ; x_0[, f'(x) > 0 \\ \circ \forall x \in]x_0 ; b[, f'(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \text{ (maximum)}$$

PRIMITIVES

◆ Primitives des fonctions usuelles :

F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x)$		
Fonction	Primitives	I
$f(x) = 0$	$F(x) = k$ (k réel)	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \geq 2$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k$ ($n \geq 2$)	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	\mathbb{R}

Fonction	Primitives	I
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + k$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$	$]-\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	\mathbb{R}

◆ *Primitives et opérations :*

On suppose que u est une fonction dérivable sur I					
$f = u' u^n$	$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$		$f = u' \cos u$	$F = \sin u$	
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} (u \neq 0 \text{ sur } I)$		$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$	
$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} (u \neq 0 \text{ sur } I \text{ et } n \geq 2)$		$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u (u \neq 0 \text{ sur } I)$	
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} (u > 0 \text{ sur } I)$		$f = u' e^u$	$F = e^u$	

**FONCTIONS
LOGARITHME NEPERIEN ET
EXPONENTIELLE**

◆ *Définition et première propriétés :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<ul style="list-style-type: none"> • \ln est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1 • $D_{\ln} =]0 ; +\infty[$ • $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ • $\forall x \in]0 ; 1[, \ln x < 0$ et $\forall x \in]1 ; +\infty[, \ln x > 0$ • $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$ 	<ul style="list-style-type: none"> • \exp ou $x \mapsto e^x$ est la bijection réciproque de \ln • $D_{\exp} = \mathbb{R}$ • $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ • $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ • $\forall x \in]0 ; +\infty[, e^{\ln x} = x$

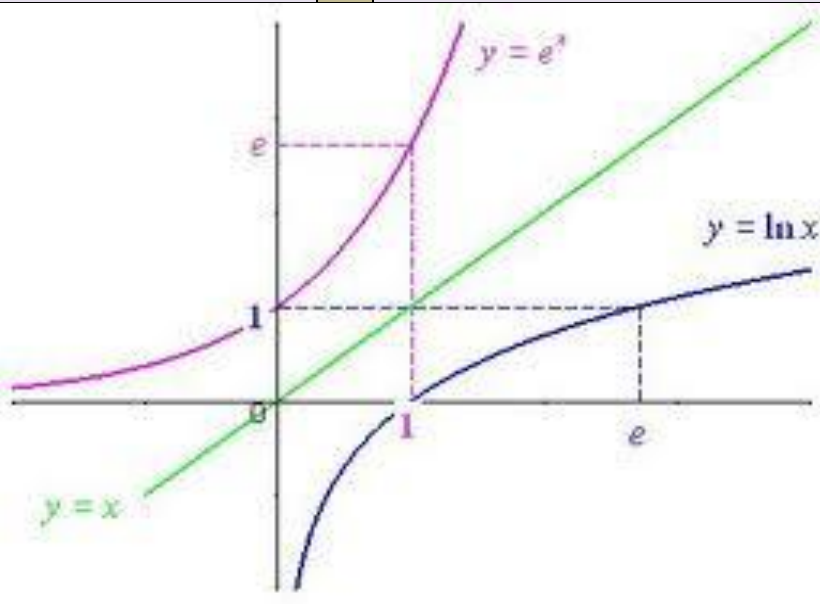
◆ *Propriétés algébriques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<p>$\forall a \in]0 ; +\infty[$ et $\forall b \in]0 ; +\infty[$ on a :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\ln ab = \ln a + \ln b$ • $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ • $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ • $\forall r \in \mathbb{R}, \ln a^r = r \ln a$ • $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ • $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ 	<p>$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a :</p> <ul style="list-style-type: none"> • $e^{a+b} = e^a e^b$ • $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ • $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ • $\forall r \in \mathbb{R}, (e^a)^r = e^{ar}$ • $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ • $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

◆ *Limites utiles :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} x ^r e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

◆ *Dérivées et représentations graphiques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
<ul style="list-style-type: none"> • $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ln' x = \frac{1}{x}$ • $[\ln u(x)]' = [\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$ • $[e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$
	

Problème de Synthèse (2h)

On considère la fonction numérique f de la variable x , définie par : $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$

On désigne (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x^2 + 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations
2. Calculer $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $g(-1)$
3. Etudier le signe de $g(x)$ pour tout x élément de \mathbb{R}^*

PARTIE B

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

En déduire une asymptote à la courbe (\mathcal{C}) de f .

2. Montrer que la droite $(\Delta): y = x$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}) de f et étudier les positions relatives de (\mathcal{C}) et (Δ)
3. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation sur D_f
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
Justifier l'encadrement $0,6 < \alpha < 0,7$.
5. Tracer (Δ) et (\mathcal{C})
6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m , du nombre de solutions sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

PARTIE C

1. On désigne par φ la restriction de f à l'intervalle $]0 ; +\infty[$
 - a. Montrer que φ définit une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur un intervalle I à préciser
 - b. Dresser le tableau de variation de la réciproque φ^{-1} de φ puis tracer sa courbe représentative (\mathcal{C}') dans le même repère que (\mathcal{C})
2. Calculer l'aire \mathcal{A} en cm^2 du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = e$.
Prouver que $\mathcal{A} = 2(1 - \alpha^4)$

On donne : $\ln(0,6) = -0,51$ et $\ln(0,7) = -0,35$

CALCUL INTEGRAL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

CALCUL INTEGRAL

◆ *Intégrale et Primitives :*

- Si F est une primitive de f sur I alors $\forall a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

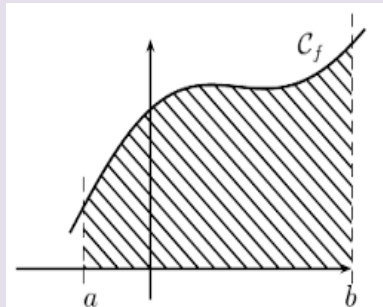
- Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors, $g'(x) = f(x)$ et donc g est la primitive de f qui s'annule en a

◆ *Propriétés de l'intégrale :*

- **Relation de Chasles :** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **Antisymétrie :** $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- **Linéarité :** $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- **Positivité :** $f \geq 0$ sur $[a ; b]$, $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Conservation de l'ordre :** $f \geq g$ sur $[a ; b]$, $a \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- **Inégalité de la moyenne :**
$$\begin{cases} m \leq f \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ |f| \leq M \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a| \end{cases}$$
- **Valeur moyenne :** la valeur moyenne de f sur $[a ; b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
- **Intégration par parties :** $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

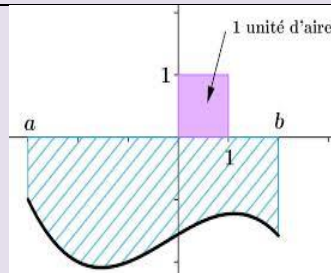
◆ *Calcul d'aires :*

***f* est positive**



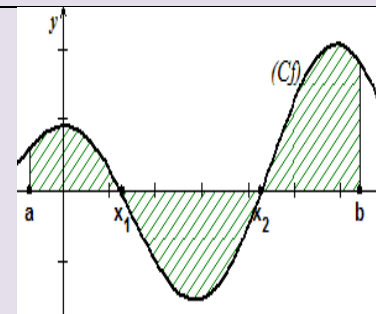
$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \times ua$$

***f* est négative**



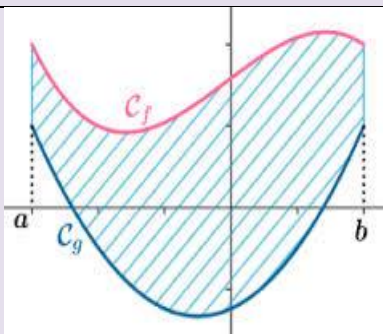
$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x)dx \times ua$$

***f* est de signe quelconque**



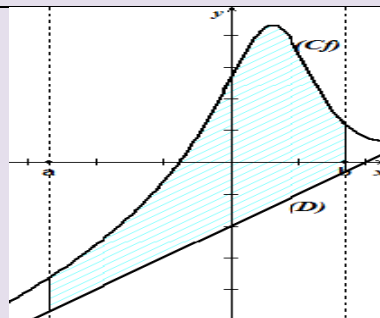
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

Aire entre deux courbes

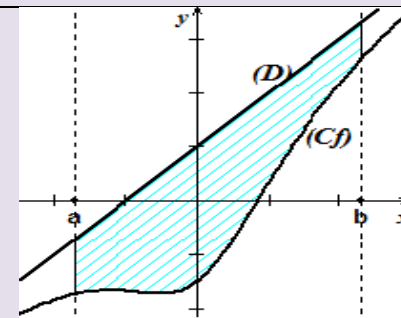


$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \times ua$$

Aires entre une courbe et une droite



$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y]dx \times ua$$

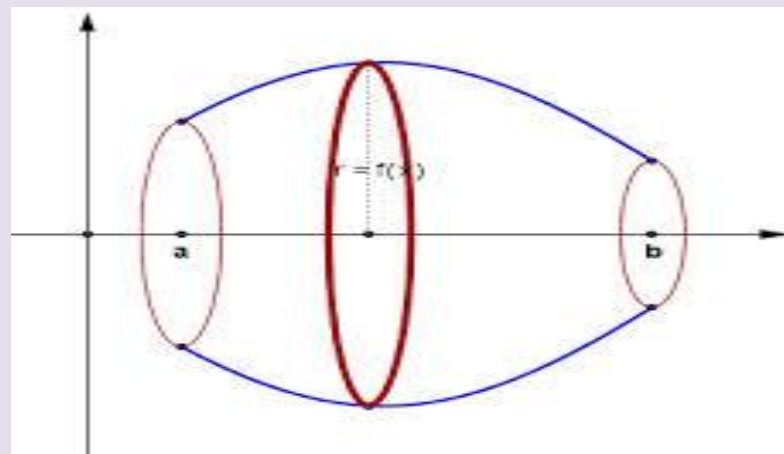


$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)]dx \times ua$$

◆ Calcul de Volumes :

Volume du solide de révolution engendré par rotation autour de l'axe des abscisses

L'espace étant rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la rotation de la partie du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution.



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \times uv$$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Au programme		
Equations différentielles	Solution générale	Solution particulière
$y' = ay$ (a réel)	$y = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$	Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$

Hors programme

Equation différentielle	Solution
$ay'' + by' + c = 0$	<p>Elle s'exprime à l'aide des racines r_1 et r_2 de son équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors r_1 et r_2 sont réels et $y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $r_1 = r_2 = r_0$ est réel et $y = (Ax + B)e^{r_0x}$ • Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont complexes conjugués et $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ <p>Dans tous les cas, Il existe une unique solution satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$</p>

SUITES NUMERIQUES

◆ *Généralités sur les suites numériques :*

- La suite (u_n) est croissante si pour tout $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite (u_n) est décroissante si pour tout $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite (u_n) est p -périodique, p entier positif, si pour tout $n, u_{n+p} = u_n$
- Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :
 - ✓ Comparaison de $u_{n+1} - u_n$ à 0

Soit (u_n) est une suite:

$$\begin{cases} \text{Si } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

- ✓ Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Soit (u_n) est une suite à termes strictement positifs:

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{Si } \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ alors } (u_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

- La suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

Suites majorées – suites minorées – suites bornées

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n , $u_n \leq M$
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n , $u_n \geq m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée
- La suite (u_n) est bornée $\left\{ \begin{array}{l} \circ \text{ Si pour tout } n, m \leq u_n \leq M \\ \circ \text{ Si pour tout } n, |u_n| \leq M \end{array} \right.$

◆ Suites arithmétiques :

La suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$

- Définition :

$$u_{n+1} = u_n + r ; r \text{ étant la raison de la suite arithmétique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 + nr \\ u_n = u_1 + (n-1)r \\ u_n = u_p + (n-p)r \end{cases} \text{ en général}$$

- Somme des termes consécutifs :

$$\begin{cases} \circ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right) \text{ en général} \\ \circ 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite arithmétique (u_n) converge si et seulement si sa raison $r = 0$

♦ Suites géométriques :

La suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout n , $u_{n+1} = qu_n$

- Définition :

$$u_{n+1} = qu_n ; q \text{ étant la raison de la suite géométrique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ en général} \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs : ($q \neq 1$)

$$\begin{cases} \circ u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ en général} \\ \circ 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite géométrique (u_n) converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$

◆ *Démonstration par récurrence :*

Pour démontrer que pour tout entier $n \geq n_0$, une propriété P_n est vraie, il faut :

- **Initialisation** : vérifier que P_{n_0} est vraie
- **Hérédité** : supposer que P_n est vraie pour un certain $n \geq n_0$ et démontrer que P_{n+1} est vraie
- **Conclusion** : pour tout $n \geq n_0$, P_n est vraie

◆ *Limite de suites : suites convergentes – suites divergentes :*

- Une suite convergente vers un réel ℓ est une suite qui admet une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
- Une suite divergente vers $\pm\infty$ est une suite qui admet une limite $\pm\infty$ quand n tend vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \pm\infty$
- Une suite divergente tout court est une suite qui n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$

◆ *Convergence des suites monotones :*

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

◆ *Théorèmes de comparaison :*

Théorème 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \circ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Théorème 1 (bis) :

$$\left. \begin{array}{l} \circ |u_n - \ell| \leq v_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Théorème 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \circ u_n \geq v_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ u_n \leq w_n \\ \circ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

COURBES PARAMETREES DU PLAN

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .
On veut étudier la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases} ; t \in I$$

◆ *Equation cartésienne :*

En posant $x = x(t)$ et $y = y(t)$; l'équation obtenue en éliminant (si possible) la variable t entre x et y est appelée équation cartésienne de la courbe (Γ)

◆ *Comparaison de $M(t)$ et $M(u(t))$:*

On note $M(t) (x(t) ; y(t))$ et donc $M(u(t)) (x(u(t)) ; y(u(t)))$

$t \mapsto u(t)$ étant une fonction de t ; comparons $M(t)$ et $M(u(t))$

Résultat	Conclusion
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t) = M(u(t))$
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère
$\begin{cases} x(u(t)) = y(t) \\ y(u(t)) = x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
$\begin{cases} x(u(t)) = -y(t) \\ y(u(t)) = -x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$

◆ Réduction de l'intervalle d'étude :

- Comparaison de $M(t)$ et $M(t + p)$:

$$\begin{cases} x(t + p) = x(t) \\ y(t + p) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t) = M(t + p) \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de période commune } p$$

Une étude sur un intervalle de longueur p permet de tracer complètement (Γ)

- Comparaison de $M(t)$ et $M(-t)$:

✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}\right]$ est de longueur p

✓ $\left[-\frac{p}{2} ; \frac{p}{2}\right] = \left[-\frac{p}{2} ; 0\right] \cup \left[0 ; \frac{p}{2}\right]$ et $\forall t \in \left[0 ; \frac{p}{2}\right], -t \in \left[-\frac{p}{2} ; 0\right]$

✓ $M(-t) = S_{(?)}(M(t))$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $M(t)$ et $M\left(\frac{p}{2} + t\right)$:**

✓ L'intervalle $[0 ; p]$ est de longueur p

✓ $[0 ; p] = \left[0 ; \frac{p}{2}\right] \cup \left[\frac{p}{2} ; p\right]$ et $\forall t \in \left[0 ; \frac{p}{2}\right], \left(\frac{p}{2} + t\right) \in \left[\frac{p}{2} ; p\right]$

✓ $M\left(\frac{p}{2} + t\right) = S_{(?)}(M(t))$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(M(t))$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0 ; \frac{p}{2}\right]$

- **Comparaison de $M(t)$ et $M\left(\frac{p}{2} - t\right)$:**

✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$ est de longueur p

✓ $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right] = \left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right] \cup \left[\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$ et $\forall t \in \left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right], \left(\frac{p}{2} - t\right) \in \left[\frac{p}{4} ; \frac{3p}{4}\right]$

✓ $M\left(\frac{p}{2} - t\right) = S_{(?)}(M(t))$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(M(t))$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[-\frac{p}{4} ; \frac{p}{4}\right]$

◆ *Tableau conjoint des variations :*

Supposons que l'intervalle d'étude réduit trouvé est $[a ; b]$

- Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$
- Etudier le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle $[a ; b]$
- Pour chaque valeur particulière t_0 de t trouvée, calculer les quatre quantités $x'(t_0)$; $y'(t_0)$; $x(t_0)$ et $y(t_0)$
- Compléter le tableau ci-dessous par les signes $x'(t)$ et $y'(t)$ ainsi que les flèches indiquant les variations de x et y

t	a	t_0	t_1	...	b
$x'(t)$	$x'(a)$	$x'(t_0)$	$x'(t_1)$		$x'(b)$
$y'(t)$	$y'(a)$	$y'(t_0)$	$y'(t_1)$		$y'(b)$
$x(t)$	$x(a)$	$x(t_0)$	$x(t_1)$		$x(b)$
$y(t)$	$y(a)$	$y(t_0)$	$y(t_1)$		$y(b)$

◆ *Notion de tangentes au point $M(t_0)$:*

- Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors $(T): x = x(t_0)$ (verticale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ alors $(T): y = y(t_0)$ (horizontale)
- Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ alors $(T): y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$ (oblique)
- Le cas $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ est hors programme



◆ *Points d'intersection avec les axes du repère :*

- Avec l'axe des abscisses : Chercher $M(t)(x(t); y(t))$ tel que $y(t) = 0$
- Avec l'axe des ordonnées : Chercher $M(t)(x(t); y(t))$ tel que $x(t) = 0$

◆ *Les étapes du tracé de la courbe (Γ) :*


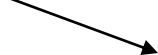
- Tracer un repère ($O ; \vec{i}, \vec{j}$) (respecter l'unité graphique si elle est donnée)
- Placer les points $M(a) ; M(t_0) ; M(t_1) ; \dots ; M(b)$ et tracer en chacun de ces points la tangente à la courbe
- Respecter l'évolution du tracer selon le tableau conjoint
De $M(a)$ vers $M(t_0)$; de $M(t_0)$ vers $M(t_1)$; de $M(t_1)$ vers \dots vers $M(b)$

1^{er} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

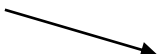
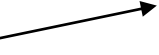
On se déplace
vers la droite
et vers le haut

2^{ème} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

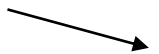
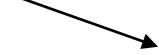
On se déplace
vers la droite
et vers le bas

3^{ème} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

On se déplace
vers la gauche
et vers le haut

4^{ème} cas

t	
$x(t)$	
$y(t)$	

On se déplace
vers la gauche
et vers le bas

PROBABILITE

◆ *Dénombrement :*

• *Ordre et répétition*

Ordre important	Répétitions possibles	Résultat possible	Nombre de résultats possibles
<i>oui</i>	<i>oui</i>	<i>p – liste</i>	n^p
<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>p – arrangement</i>	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
<i>non</i>	<i>non</i>	<i>p – combinaison</i>	$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$

- *Problèmes de tirages*

Types de tirages	ordre	Répétition	Résultat possible	Nombre de résultats possibles
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	$p - \text{liste}$	n^p
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - \text{arrangement}$	A_n^p
simultané	On ne tient pas compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$p - \text{combinaison}$	C_n^p

- *Problèmes de lancés ou de jets*

Objets lancés ou jetés	Nombre de faces	Nombre de lancés effectués	Calcul
Jeton ou pièce de monnaie	2 faces	n	2^n
Dé cubique	6 faces	n	6^n
Dé tétraédrique	4 faces	n	4^n

- *Problèmes de cartes*

Dans un jeu de cartes, les mains sont composées de p cartes pris parmi 32 cartes ou 52 cartes et donc l'outil de calcul est la combinaison C_n^p .

Voici la composition de chaque jeu :

Jeu de 32 Cartes	As	K	Q	J	10	9	8	7	Total					
Carreau	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Coeur	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Trêfle	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Pique	1	1	1	1	1	1	1	1	8					
Total	4	4	4	4	4	4	4	4	32					
Jeu de 52 Cartes	As	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2	Total
Carreau	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Coeur	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Trêfle	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Pique	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13
Total	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	52

- *Règles de calcul sur les combinaisons*

- ✓ On multiplie les combinaisons si les différentes étapes sont reliées par un « et »
- ✓ On additionne les combinaisons si les différents cas sont reliés par un « ou »

- ◆ *Calcul des probabilités :*

- *Définition*

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire

Une probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités $p_i = P(\omega_i)$ des événements élémentaires ω_i telles que :

- ✓ Pour tout $i, 0 \leq p_i \leq 1$
- ✓ $P(\Omega) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- ✓ Pour tout événement $A \subset \Omega$, $P(A) =$
somme des probabilités des événements élémentaires qui réalisent A

- *Propriétés des probabilités*

Ensembles	Vocabulaire	Propriété
Ω	Evènement certain	$P(\Omega) = 1$
\emptyset	Evènement impossible	$P(\emptyset) = 0$
$\{\omega_i\}$	Evènement élémentaire	$P(\omega_i) = p_i$
$A \subseteq \Omega$	Evènement quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
\bar{A}	Evènement contraire de A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$A \cup B$	Evènement A ou B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$A \cap B$	Evènement A et B	

- *Calcul dans le cas d'équiprobabilité*

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

◆ *Probabilité conditionnelle :*

- *La formule pour calculer la probabilité de B sachant A*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- *Indépendance*

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- *Calcul de $P(A \cap B)$*

✓ *Quand A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$*

✓ *Quand A et B ne sont pas indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$*

- *Calcul de $P(B)$ quand B est lié à un évènement A*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

◆ *Variables aléatoires :*

- *Loi de probabilité*

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

- *Espérance mathématique ; Variance et Écart – type*

$$\checkmark E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

$$\checkmark V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ avec}$$

$$E(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots + x_n^2p_n$$

$$\checkmark \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

◆ *Schéma de Bernoulli de paramètres n et p - Loi binomiale*

- *Calcul des probabilités dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p*

- ✓ Pour tout $k, 0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir exactement k succès est

$$p_k = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

- ✓ La probabilité d'obtenir uniquement que des succès est p^n

- ✓ La probabilité de n'obtenir aucun succès est $(1 - p)^n$

- ✓ La probabilité d'obtenir au moins un succès est $1 - (1 - p)^n$

- *Loi binomiale de paramètres n et p*

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p

- ✓ Pour tout $k, 0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

- ✓ $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$

- ✓ $E(X) = np$

- ✓ $V(X) = np(1 - p)$

STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

◆ *Série statistique double :*

- *Définition*

Une série statistique double $(x ; y)$ est constituée de n couples de nombres
 $(x_1 ; y_1), (x_2 ; y_2), \dots, (x_n ; y_n)$

Valeurs du caractère X	x_1	x_2	...	x_n
Valeurs du caractère Y	y_1	y_2	...	y_n

- *Exemple*

On mesure en fonction de la masse suspendue l'allongement d'un ressort
Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Masse suspendue x_i en Kg	2	2,5	4	4,5	6,5	7	8	10
Allongement y_i en cm	19	20	21	22	26	32	36	40

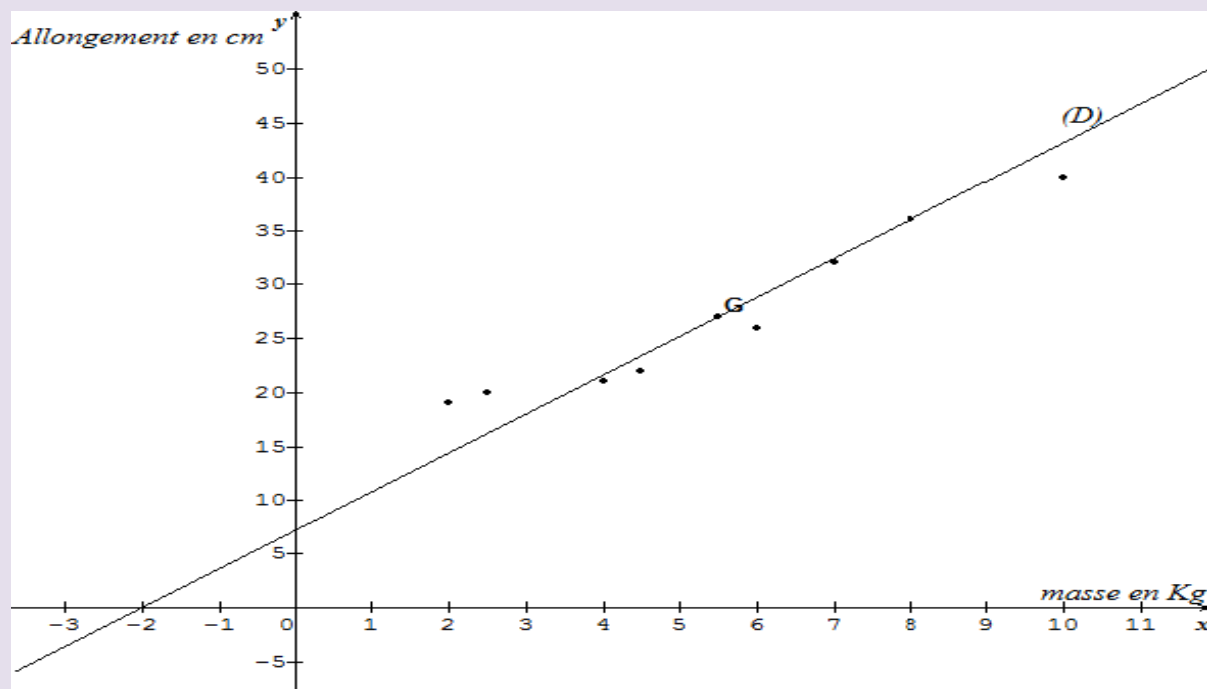
◆ Nuage de points et point moyen :

- **Définitions**

- ✓ Le nuage de points associé est l'ensemble des n points de coordonnées $(x_i ; y_i)$
- ✓ Le point moyen G associé est le point de coordonnées

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

- **Exemple**



$$x_G = \frac{44}{8} = 5,5 \quad \text{et} \quad y_G = \frac{216}{8} = 27 \Leftrightarrow G(5,5 ; 27)$$

◆ Ajustement affine par la méthode graphique :

- **Définition**

On trace une droite (D) passant par G et « assez proche des points du nuage » puis on détermine son équation sous la forme $y = mx + p$.

En effet : (D) passe par $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B) \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = mx_A + p \\ y_B = mx_B + p \end{cases}$

- **Exemple**

Masse suspendue x_i en Kg	2	2,5	4	4,5	6,5	7	8	10
Allongement y_i en cm	19	20	21	22	26	32	36	40

Déterminons l'équation de la droite (D) passant par $G(5,5 ; 27)$ et le septième point du nuage de points

$$\begin{cases} 27 = 5,5m + p \\ 36 = 8m + p \end{cases} \Leftrightarrow m = 3,6 \text{ et } p = 7,2 \Leftrightarrow (D): y = 3,6x + 7,2$$

♦ *Ajustement affine par la méthode de MAYER :*

- *Définition*

On fractionne le nuage de points en deux sous-nuages de même effectif de points moyens respectifs G_1 et G_2 (ou différent à une unité près si l'effectif est impair) alors puis on détermine l'équation de la droite $(G_1 G_2)$ appelée droite de MAYER.

- *Exemple*

Déterminons la droite de Mayer du nuage de points

✓ Soit G_1 le point moyen des quatre premiers points

$$G_1 \left(\frac{13}{4} ; \frac{82}{4} \right) \Leftrightarrow G_1(3,25 ; 20,5)$$

✓ Soit G_2 le point moyen des quatre derniers points

$$G_2 \left(\frac{31,5}{4} ; \frac{134}{4} \right) \Leftrightarrow G_2(7,875 ; 33,5)$$

✓ Equation de la droite $(G_1 G_2)$

$$(G_1 G_2): y = mx + p \Leftrightarrow \begin{cases} 20,5 = 3,25m + p \\ 33,5 = 7,875m + p \end{cases} \Leftrightarrow m = 2,8 \text{ et } p = 11,4$$

Donc $(G_1 G_2) : y = 2,8x + 11,4$

◆ *Extrapolation et interpolation :*

- **Définition**

C'est faire des prévisions ou retrouver des résultats manquants sur la série statistique double à partir de l'équation $y = mx + p$

- **Exemple**

En utilisant la droite (D): $y = 3,6x + 7,2$

✓ Déterminons l'allongement prévisible pour une masse suspendue de 18 kg

$$x = 18 \Leftrightarrow y = 3,6 \times 18 + 7,2 = 72$$

Pour une masse suspendue de 18 Kg, l'allongement à prévoir est de 72 cm

✓ Estimons la masse suspendue ayant produit un allongement du ressort de 27 cm.

$$y = 27 \Leftrightarrow 27 = 3,6x + 7,2 \Leftrightarrow x = 5,5$$

La masse de l'objet suspendu au ressort ayant produit un allongement du ressort de 27 cm est 5,5 Kg

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

◆ *Egalité de deux vecteurs et Relation de Chasles :*

- *Egalité* : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme
- *Relation de Chasles* : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

◆ *Colinéarité :*

- *Définition*

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

- *Parallélisme*

$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{CD} sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

- *Appartenance à une droite et alignement*

✓ $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AM} sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

✓ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AC} sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

◆ *Plans de l'espace et coplanarité :*

- **Définition**

Trois points non alignés A, B, C définissent un plan noté (ABC)

- **Coplanarité**

- ✓ Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ou si et seulement si, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$
- ✓ Les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ou si et seulement si, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

◆ *Produit scalaire et orthogonalité :*

- **Définition**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- **Orthogonalité**

- ✓ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- ✓ $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

- ✓ ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

◆ *Géométrie analytique :*

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- Le vecteur \overrightarrow{AB} est tel que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- Le milieu I de $[AB]$ est tel que $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et $k\vec{u}$ sont tels que $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$
- Si le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé alors :
 - ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 - ✓ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

◆ *Produit Vectoriel :*

- *Définition*

✓ \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

✓ \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

- *Propriétés*

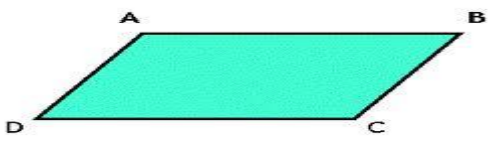
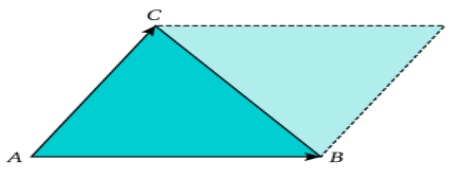
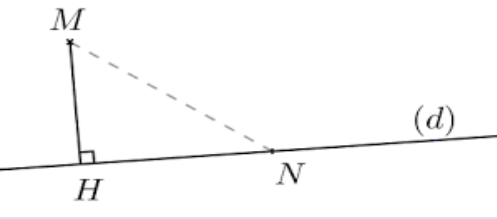
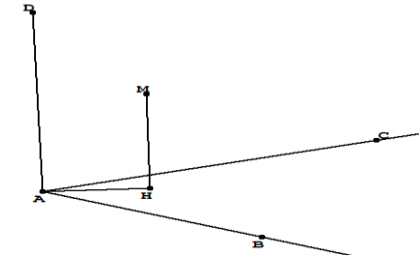
✓ $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$

✓ $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

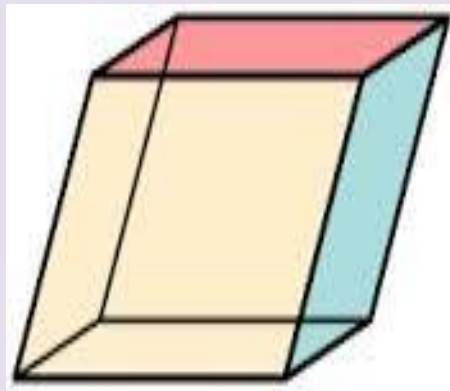
✓ $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

♦ *Applications du produit vectoriel :*

Aires – Distances - Volumes :

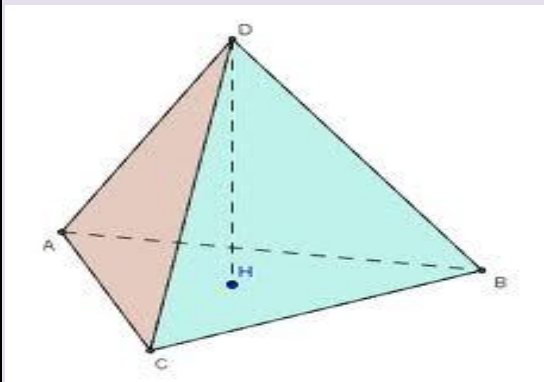
<p>Aire d'un Parallélogramme</p>		$\mathcal{A}_{ABCD} = \ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\ \times ua$
<p>Aire d'un Triangle</p>		$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ }{2} \times ua$
<p>Distance d'un point à une droite</p>		$d(M ; (AB)) = MH = \frac{\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\ }{\ \overrightarrow{AB}\ }$
<p>Distance d'un point à un plan</p>		$d(M ; (ABC)) = MH = \frac{ \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) }{\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ }$

Volume d'un parallélépipède



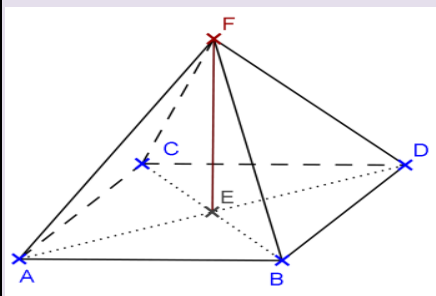
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDEFGH} &= \mathcal{A}_{ABCD} \times d(E ; (ABCD)) \times uv \\ &= \|\overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\| \times uv \end{aligned}$$

Volume d'un tétraèdre



$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCD} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d(D ; (ABC)) \times uv \\ &= \frac{1}{6} \|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\| \times uv \end{aligned}$$

Volume d'une pyramide



$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ABCDE} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times d(F ; (ABCD)) \times uv \\ &= \frac{1}{3} \|\overrightarrow{FE} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})\| \times uv \end{aligned}$$

LE RESOUTOUT

Question1 :

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

Ce qu'il faut savoir

- Ecrire les conditions d'existence de $f(x)$
- Résoudre chacune des conditions
- Conclure

Soient P et Q deux fonctions polynômes et soit u une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) = P(x) \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ n'existe que si $Q(x) \neq 0$
- $f(x) = \sqrt{P(x)}$ n'existe que si $P(x) \geq 0$
- $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ n'existe que si $P(x) \geq 0$ et $Q(x) \neq 0$
- $f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ n'existe que si $Q(x) > 0$
- $f(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ n'existe que si $Q(x) \neq 0$ et $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$
- $f(x) = \ln u(x)$ n'existe que si $x \in D_u$ et $u(x) > 0$
- $f(x) = \ln|u(x)|$ n'existe que si $x \in D_u$ et $u(x) \neq 0$
- $f(x) = e^{u(x)}$ n'existe que si $x \in D_u \Leftrightarrow D_f = D_u$

Question 2 :

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en x_0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus

Continuité de f en x_0

- Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- Calculer $f(x_0)$ si ce n'est pas donné
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ alors f est continue en x_0

Dérivabilité de f en x_0

- Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ alors f n'est pas dérivable en x_0
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0

Interprétation graphique des résultats obtenus

Ce qu'il faut savoir

→ Si f est dérivable en x_0 alors (\mathcal{C}_f) admet au point d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$ et d'équation $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

→ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$ alors (\mathcal{C}_f) admet au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ deux demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs ℓ_1 et ℓ_2 et d'équations

$$(T_1): y = \ell_1(x - x_0) + f(x_0) \text{ et } (T_2): y = \ell_2(x - x_0) + f(x_0)$$

→ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ et/ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ alors (\mathcal{C}_f) admet au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

→ Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ et/ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ alors (\mathcal{C}_f) admet au point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers bas

Question 3 :

Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les asymptotes éventuelles

- Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (si x_0 est une borne de D_f)
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (et/ou) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (si $-\infty$ et/ou $+\infty$ est une borne de D_f)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ **Asymptote verticale**

Si on a

$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à (C_f)

→ **Asymptote horizontale**

Si on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à (C_f)

Question 4 :

Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) en $\pm\infty$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f)

Question 5 :

Etudier les positions relatives de la courbe (C_f) et d'une droite (Δ) d'équation $y = ax + b$

- Etudier le signe de $f(x) - y$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $\forall x \in I, f(x) - y > 0$ alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur I

→ Si $\forall x \in I, f(x) - y < 0$ alors (C_f) est en-dessous de (Δ) sur I

Question 6 :

Montrer que deux courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) sont asymptotes en $\pm\infty$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ alors (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) sont asymptotes en $\pm\infty$

Question 7 :

Etudier les positions relatives de deux courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g)

- Etudier le signe de $f(x) - g(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $\forall x \in I, f(x) - g(x) > 0$ alors (\mathcal{C}_f) est au-dessus de (\mathcal{C}_g) sur I

→ Si $\forall x \in I, f(x) - g(x) < 0$ alors (\mathcal{C}_f) est en-dessous de (\mathcal{C}_g) sur I

Question 8 : étudier les branches infinies de f

- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et au cas où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) ;
- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$ alors (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$

→ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors (\mathcal{C}_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

Question 9 : Montrer que le point $\Omega(a ; b)$ est un centre de symétrie de (\mathcal{C}_f)

- Calculer $f(2a - x) + f(x)$ (sous réserve que $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $f(2a - x) + f(x) = 2b$ alors $\Omega(a ; b)$ est un centre de symétrie de (\mathcal{C}_f)

Question 10 : Montrer que la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}_f)

- Calculer $f(2a - x)$ (sous réserve que $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$)
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $f(2a - x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}_f)

Question 11 : Etudier le sens de variation de f

- Calculer $f'(x)$
- Etudier le signe de $f'(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

- Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I
- Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I

Question 12 : Etudier les variations de f

- Calculer $f'(x)$; étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- Dresser le tableau de variations de f

Ce qu'il faut savoir

- Il faut vérifier l'harmonie entre les différents résultats portés dans le tableau de variations

Question 13 :

Montrer que f définie une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à préciser

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissante sur I (ou strictement décroissante sur I)
- Conclure alors que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

Ce qu'il faut savoir

→ l'intervalle $J = f(I)$ doit être calculé ou doit être lu dans le tableau de variation et que J est de la même nature que I

Question 14 :

Montrer que f admet une bijection réciproque dont on donnera l'ensemble de définition

- Montrer d'abord que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Conclure alors que, f admet une bijection réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ sur I

Question 15 : Donner les variations de la réciproque f^{-1} de f

- Dire que f^{-1} a sur J le même sens de variation que f sur I
- Dresser le tableau de variation de f^{-1} à partir de celui de f

Question 16 :

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J (ou donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de J)

- Résoudre l'équation $f(x) = y$
- On trouve $x = f^{-1}(y)$
- Conclure en remplaçant le y dans $f^{-1}(y)$ par x

Exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto f(x) = 2x - 1$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} = f^{-1}(y)$$

Conclusion : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

Question 17 :

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur un intervalle I (ou Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$) et que $\alpha \in]a ; b[$

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissante sur I (ou strictement décroissante sur I)
- En déduire que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Vérifier que $0 \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Pour montrer que $\alpha \in]a ; b[$

- Calculer $f(a)$ et $f(b)$ puis $f(a) \times f(b)$
- Conclure :

Ce qu'il faut savoir

→ Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors $\alpha \in]a ; b[$

Question 18 :

Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α sur un intervalle I (ou $]a ; b[$) et que $\alpha \in]a ; b[$

(sous réserve que les variations de f sont déjà connues)

- Ecrire que f est continue sur I car elle est dérivable sur I
- Ecrire que f est strictement croissante sur I (ou strictement décroissante sur I)
- En déduire que, f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$
- Vérifier que $k \in J = f(I)$
- Conclure que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in I$

Pour montrer que $\alpha \in]a ; b[$

- Calculer $f(]a ; b[)$ (intervalle ouvert de bornes $f(a)$ et $f(b)$)
- Conclure :

Ce qu'il faut savoir

→ Si $k \in f(]a ; b[)$ alors $\alpha \in]a ; b[$

Question 19 : Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse x_0

- Ecrire l'équation sous la forme $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Calculer $f'(x_0)$ et $f(x_0)$
- Conclure

Question 20 :

Déterminer le point A d'abscisse a de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à une droite d'équation $y = mx + p$

- Résoudre $f'(a) = m$ (puisque les deux coefficients directeurs sont égaux)
- Calculer $f(a)$
- Conclure que $A(a ; f(a))$

Question 21 :

Déterminer le point A d'abscisse a de (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est perpendiculaire à une droite d'équation $y = mx + p$

- Résoudre $f'(a) = -\frac{1}{m}$ (puisque le produit des coefficients directeurs est -1)
- Calculer $f(a)$
- Conclure $A(a ; f(a))$

Question 22 :

Démontrer qu'au point d'abscisse a la tangente (T) à (C_f) et la tangente (T') à (C_g) sont perpendiculaires

- Calculer $f'(a) \times g'(a)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

Si $f'(a) \times g'(a) = -1$, alors (T) et (T') sont perpendiculaires

Question 23 :

Déterminer le ou les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Déterminer le ou les points où (C_f) et (C_g) se coupent (ou se rencontrent)

- Résoudre $f(x) = g(x)$
- Calculer $f(x_1)$; $f(x_2)$; ... (si x_1 ; x_2 ; ... sont les solutions trouvées)
- Conclure $M_1(x_1 ; f(x_1))$; $M_2(x_2 ; f(x_2))$; ...

Question 24 :

Déterminer le ou les points d'intersection de (C_f) et de la droite $(D): y = mx + p$

Déterminer le ou les points où (C_f) et (D) se coupent (ou se rencontrent)

- Résoudre $f(x) = y$
- Calculer $f(x_1)$; $f(x_2)$; ... (si x_1 ; x_2 ; ... sont les solutions trouvées)
- Conclure
 $M_1(x_1 ; f(x_1))$; $M_2(x_2 ; f(x_2))$; ...

Question 25 :

Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec les axes du repère

Avec l'axe des abscisses

- Résoudre $f(x) = 0$ (puisque l'axe des abscisses a pour équation $y = 0$)

- Conclure

$M_1(x_1 ; 0) ; M_2(x_2 ; 0) ; \dots$ (si $x_1 ; x_2 ; \dots$ sont les solutions trouvées)

Avec l'axe des ordonnées

- Calculer $f(0)$ (puisque l'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$)

- Conclure

$M_0(0 ; f(0))$

Question 26 : Tracer la courbe (C_f)

- Construire le repère en respectant l'unité graphique
- Tracer les droites particulières (asymptotes ; tangentes ; ...)
- Placer les points particuliers (extrémums relatifs ; intersection avec les axes ; ...)
- Tracer la courbe en conformité avec le tableau de variations

Question 27 : Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ à partir de la courbe (C_f)

- Ecrire que $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
- Tracer $(C_{f^{-1}})$ à partir de (C_f)

Question 28 : Soit $g(x) = -f(x)$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire : (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 29 : Soit $g(x) = |f(x)|$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire :
Si $f(x) \geq 0$ alors $(C_g) = (C_f)$
Si $f(x) \leq 0$ alors (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 30 : Soit $g(x) = f(-x)$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire : (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 31 : Soit $g(x) = f(|x|)$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire :
Si $x \geq 0$ alors $(C_g) = (C_f)$
Si $x \leq 0$ alors (C_g) et (C_f) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 32 : Soit $g(x) = f(x - a) + b$; sans étudier la fonction g , tracer (C_g) dans le même repère que (C_f)

- Ecrire : (C_g) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$
- Tracer (C_g) à partir de (C_f)

Question 33 :

Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Cas où (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses sur $[a ; b]$ (c.-à-d $f \geq 0$ sur $[a ; b]$)

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx \times ua$$

- Cas où (C_f) est en dessous de l'axe des abscisses sur $[a ; b]$ (c.-à-d $f \leq 0$ sur $[a ; b]$)

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx \times ua$$

- Pour exprimer l'aire en cm^2 , $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Question 34 :

Calculer l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite $(\Delta): y = mx + p$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Cas où (C_f) est au-dessus de (Δ) sur $[a ; b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ mx + p \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y] dx \times ua$$

- Cas où (C_f) est en-dessous de (Δ) sur $[a ; b]$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq mx + p \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)] dx \times ua$$

Question 35 :

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

- Ecrire :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \times uv$$

- Chercher $f^2(x)$ avant de passer au calcul de l'intégrale
- Pour exprimer le volume en cm^3 , $uv = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Question 36 :

Montrer que F est une primitive de f sur un intervalle I

- Calculer $F'(x)$
- Conclure

Ce qu'il faut savoir

→ Si $F'(x) = f(x)$ alors F est une primitive de f

Question 37 :

Déterminer les réels a et b (ou les réel a , b et c) pour que F soit une primitive de f sur un intervalle I

- Calculer $F'(x)$ en fonction de a et b (ou en fonction de a , b et c)
- Ecrire l'égalité $F'(x) = f(x)$ et faire une identification des coefficients

Question 38 :

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; que représente F pour f ?

Il suffit d'écrire que F est la primitive de f qui s'annule-en a

Question 39 :

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée

Il suffit d'écrire que F étant la primitive de f qui s'annule-en a , alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$

Question 40 :

Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$

(sous réserve que $a < b$ et que $\forall x \in [a ; b], f(x) \geq 0$)

Ecrire simplement que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire en unité d'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

LES PROBLEMES CLASSIQUES RESOLUS

Classique 1 :

Equation différentielle avec second membre $y' + ay = g(x)$

On considère l'équation différentielle $(E): \frac{1}{2}y' + y = e^{-2x}$

- 1) On pose $u(x) = axe^{-2x}$ où a est un réel.
- 2) Déterminer le nombre réel a pour que la fonction $u: x \mapsto u(x)$ définie sur \mathbb{R} soit solution de (E)
- 3) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : \frac{1}{2}y' + y = 0$
- 4) Démontrer qu'une fonction y définie et dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (E) si et seulement si la fonction $y - u$ est solution de (E_0) .
- 5) En déduire toutes les solutions de (E) puis la solution particulière f de (E) , dont la courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point $A(0 ; -1)$

Résolution

(1) *Déterminons le nombre* a

u est solution de (E) si $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$

$$\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x} \Rightarrow \frac{1}{2}ae^{-2x} = e^{-2x}$$

Par identification $a = 2 \Rightarrow u(x) = 2xe^{-2x}$

(2) *Résolution de (E_0)* : $\frac{1}{2}y' + y = 0$

$$\frac{1}{2}y' + y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2x}; k \in \mathbb{R}$$

(3) *Démonstration*

Supposons que y est solution de (E) et montrons que $y - u$ est solution de (E_0)

Si y est solution de (E) , alors on a $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$;

or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(y - u)'(x) + (y - u)(x) = 0$ et donc $y - u$ est solution de (E_0)

Réciproquement, supposons que $y - u$ est solution de (E_0) et montrons que y est solution de (E)

Si $y - u$ est solution de (E_0) , alors on a $\frac{1}{2}(y - u)'(x) + (y - u)(x) = 0$ d'où

$$\frac{1}{2}y'(x) - \frac{1}{2}u'(x) + y(x) - u(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$$

Or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$ et donc y est solution de (E)

En conclusion y est solution de (E) si et seulement si $y - u$ est solution de (E_0)

(4) Dédution de toutes les solutions de (E)

Soit y une solution de (E) , on a d'après (3) et (2), $y(x) - u(x) = ke^{-2x}$; d'où

$$y(x) = ke^{-2x} + u(x) \Leftrightarrow y(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x} ; k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière f de (E)

$$f(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x} \text{ et } f(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$$

Commentaires

- Ces quatre questions sont toutes liées
- Tout candidat sérieux doit être en mesure de reproduire à l'identique le raisonnement du *classique 1*
- Attention !!! La réciproque dans la **question (3)** n'est pas facultative

Classique 2 : Etude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$

- (1) Etudier les variations de la fonction f
- (2) Soit g la définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$

- (3) On pose $I = \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$

- (a) Montrer que pour tout élément x de I , $f(x) \in I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- (b) Montrer que pour tout élément x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

- (4) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \text{ et que } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (c) Montrer que la suite (u_n) converge vers α
- (d) Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On donne : $\sqrt{e} \simeq 1,65$; $e \simeq 2,72$; $\ln 2 = 0,69$ et $\ln 10 = 2,30$

Résolution

(1) Variations de f

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2} ; \forall x \in [0 ; 1], x - 1 \leq 0 \text{ et } \frac{e^x}{(e^x + x)^2} > 0 \text{ d'où } \frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2} \leq 0$$

$\forall x \in [0 ; 1], f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante

(2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

$$g'(x) = f'(x) - 1 ; \forall x \in [0 ; 1], f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

La fonction g est continue car dérivable et est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

Alors réalise une bijection de $[0 ; 1]$ sur $g([0 ; 1]) = [g(1) ; g(0)] = \left[-\frac{1}{e+1} ; 1\right]$.

Or $0 \in \left[-\frac{1}{e+1} ; 1\right]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0 ; 1]$

Montrons que $\alpha \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{e}-1}{2(\sqrt{e}+1)} \\ g(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} \end{cases} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right[$$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

(a) Montrons que pour tout élément x de I , $f(x) \in I$

$$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } f \text{ est décroissante sur } I$$

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + \frac{1}{2}} = 0,76 \text{ et } f(1) = \frac{e}{e+1} = 0,73 \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{2} \leq 0,73 \leq f(x) \leq 0,76 \leq 1 \text{ et donc } f(x) \in I$$

(b) Montrer que pour tout élément x de I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq e^x \leq e \text{ et } 0 \leq -(x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } \sqrt{e} \leq e^x \leq e \Leftrightarrow \sqrt{e} + \frac{1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (e^x + x)^2 \leq (e + 1)^2$$

$$\frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x + x)^2} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2} \text{ et } 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)e^x}{(e^x + x)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{e}{2(\sqrt{e})^2}$$

$$\text{On a alors } 0 \leq -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$\text{et donc } |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

(c) Montrer que pour tout élément x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\alpha \in I$ et $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$\left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \text{ d'où } |[f'(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \Leftrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ d'où $\forall x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

(4) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Montrons que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} \in I = \left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$

Supposons que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$

Si $u_n \in I$, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in I$ car d'après (3a) : $\forall x \in I$, $f(x) \in I$

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

(b) Démonstrations

✓ Montrons que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$; posons $x = u_n$ dans (3c) : On a

$$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|. \text{ Or } f(u_n) = u_{n+1} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Autre façon de faire

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I ; \alpha \in I$ et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a : $\left| \int_{\alpha}^{u_n} f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ d'où $\left| [f'(t)]_{\alpha}^{u_n} \right| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$. Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ et par définition

$f(u_n) = u_{n+1}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

✓ Montrons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Raisonnement par récurrence

Pour $n = 0, |u_0 - \alpha| = \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| ; \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$
 $\Rightarrow |0| \leq \left| \frac{1}{2} - \alpha \right| \leq \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

Supposons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et montrons que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$$

Si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Autre façon de faire

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$; d'où :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_1 - \alpha|$$

$$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_2 - \alpha|$$

$$\vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{On a } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \text{ et donc } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(c) Montrons que la suite (u_n) converge vers α

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{2}\right| < 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

La suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0 et donc la suite (u_n) converge vers α

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

(d) Déterminons le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$,

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc aura $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Rightarrow -(n+1) \ln 2 \leq -3 \ln 10 \Rightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2} - 1$$

$\Rightarrow n \geq 9$ et donc $n_0 = 9$.

Commentaires : Faire le même raisonnement pour les questions :

- ✓ Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel u_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près
- ✓ Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$,
 $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

Problème de Synthèse 2

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
3. a. Montrer la droite (Δ) la droite d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}) de f
b. Etudier la position relative de (\mathcal{C}) et (Δ)
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α
et justifier que $\alpha \in \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$
5. Tracer (\mathcal{C}) et (Δ)
6. Soit t un réel compris entre 0 et 1
 - a. Calculer $\mathcal{A}(t)$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe (\mathcal{C}) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = t$ et $x = \frac{e^2-1}{2}$.
(On pourra s'aider d'une intégration par parties)

b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(t)$

7. Montrer que α est solution de l'équation $(2x + 1)e^{-x} = x$

PARTIE B

On nomme g la fonction définie sur $I = \left[1 ; \frac{5}{4}\right]$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-x}$

1. Etudier les variations de g

En déduire que pour tout x élément de I , $g(x) \in I$

2. Montrer pour tout x élément de I , $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$ et que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{5}|x - \alpha|$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$

b. Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|u_n - \alpha|$

c. Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite

d. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

On donne : $\ln 2 = 0,70$; $\ln 3 = 1,09$; $\ln 5 = 1,60$; $\ln 7 = 1,94$;

$e^{-1} = 0,37$; $e^{-1,25} = 0,2$

